

П. Ф. ПАПКОВИЧ

ТРУДЫ ПО ВИБРАЦИИ КОРАБЛЯ

У 1540/23'



ГОСУДАРСТВЕННОЕ СОЮЗНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
СУДОСТРОИТЕЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

Ленинград
1960

1961

Сборник содержит работы П. Ф. Папковича из области динамических проблем кораблестроения. Часть рассмотренных статей была опубликована в различных периодических изданиях, но большинство из них печатается впервые.

Тематика статей охватывает весьма широкий диапазон вопросов, связанных с кораблестроением в смежных областях техники, начиная от общих теоретических вопросов теории колебаний и кончая специальными вопросами, связанными с динамическими расчетами корабельных конструкций. К числу общих теоретических вопросов, по которым П. Ф. Папкович дал свои решения, относятся такие, как: метод разложения корабельной характеристической определительной функции в последовательные слагаемые; метод решения дифференциальных уравнений колебательной системы, не имеющих гиростатических связей; проблема деформированных муфт; обобщение рундкий теории упругости на случай динамических задач и др.

В сборнике помещены статьи по расчету колебаний корпуса корабля и его основных конструкций, в числе этих статей, относящихся к импортным и отечественным конструкциям корпусов кораблей, его оборудованию, якорю и устьевым.

Книга может быть рекомендована научным работникам инженерно-работникам в области кораблестроения и в смежных областях техники.

РАБОТЫ П. Ф. ПАПКОВИЧА В ОБЛАСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОБЛЕМ КОРАБЛЕСТРОЕНИЯ

Предлагаемая вниманию читателей книга Петра Федоровича Папковича представляет собой сборник работ выдающегося советского кораблестроителя, посвященных исследованию колебаний различных конструкций, главным образом, тех, которые составляют корпус корабля.

Динамические проблемы в области кораблестроения интересовали П. Ф. Папковича всегда, на всем протяжении его творческого пути в строительной механике корабля.

Характерно, что еще при окончании Петербургского политехнического института в 1911 г. в качестве темы дипломной работы П. Ф. Папкович избрал вопрос о гашении вибраций в корпусе корабля. Эта интиматная начинающего ученого была поддержана А. Н. Крыловым, который был рецензентом указанной работы при ее защите.

Впоследствии П. Ф. Папкович в своих работах многократно обращался к вопросам колебаний, доказавательно чему способствовало достаточно солидный объем написанных им в этой области работ.

Без преувеличения можно сказать, что ни одна из динамических проблем, возникавших в кораблестроении, не проходила мимо внимания П. Ф. Папковича, в каждой из них он сказал свое слово и обогатил науку новыми исследованиями, а также практическими решениями.

В течение более двадцати лет он читал лекции по вибрации корабля в Военно-морской академии, в Морском инженерном училище и в Ленинградском кораблестроительном институте. Эта деятельность П. Ф. Папковича имела большое значение для выработки динамических методов и немало способствовала совершенствованию и углублению знаний инженеров флота и промышленности в этой области.

Любопытно, что если по каким-либо причинам П. Ф. Папкович вынужден был оторваться от обычной, всегда весьма напряженной деятельности, он арбагал к своеобразной форме отдыха, работая «для души» над любимыми темами. И очень часто при этом такие работы были именно из области колебаний. Примерами

Морских измерений в 1915 г. и опубликованный в «Ежегоднике Союза морских инженеров» за 1916 г. В докладе рассматривается случай действия на систему нагрузки, меняющейся во времени по линейному закону. Здесь дана решетка, позволяющая учесть влияние на величину деформации системы длительности нарастания нагрузки, длительности сохранения нагрузкой своей максимальной величины и длительности убывания нагрузки. Полученные решения для равномерного нарастания и убывания нагрузки позволяют оценить действие нагрузки и в общем случае нелинейной неравномерности, а также оценить действие динамической нагрузки как аддитивное или статическое. Здесь же рассмотрен случай действия нагрузки на систему, имеющую зазор.

Положения, изложенные в докладе, широко использовались в дальнейшем самим П. Ф. Панковичем и другими авторами.

Статья «О действиях инерционных сил на свободный вращающийся стержень» публикуется впервые. Здесь получены не только выражения для перемещений стержня в виде интегралов Бунге, но и выражение для наибольшего момента, удельное для вынуждений. Последнее выражение получено в зависимости от соотношения общей продолжительности внешней нагрузки и времени изменения ее по сравнению с периодом свободных колебаний стержня и в зависимости от гибкости стержня.

В статье «О поперечных колебаниях трубчатых балок, опубликованной в «Вестнике механики и прикладной математики» в 1931 г., изложена общая теория задачи о колебаниях балок, извлеченная от многих допущений, присутствующих в предложенном ранее методе. Так, в частности, в решении П. Ф. Панковича отсутствует допущение о независимости формы поперечных сечений конструкции, на котором было основано решение С. Бернштейна, а также допущение о независимости вертикальных и горизонтальных колебаний, свойственное решению Е. Габмана.

Большое принципиальное значение имеет статья «Один прием исследования упругих колебаний стержневых систем», опубликованная в Институтах Военно-морской академии в 1940 г. В этой работе П. Ф. Панкович творчески развивает метод исследования колебаний упругих систем, идея которого была предложена С. А. Гершгориным в 1933 г. В настоящее время этот метод известен в литературе как метод Гершгорина—Панковича. Сущность метода, названного П. Ф. Панковичем методом последовательных усложнений системы, состоит в том, что вместо заданной сложной упругой системы рассматривается сначала простая система — прототип, формы и частоты главных колебаний которой могут быть легко найдены. От системы прототипа путем последовательного введения промежуточных упругих систем можно перейти к рассмотрению заданной системы и получить ее формы колебаний и частоты с любой степенью точности.

В развитии идей С. А. Гершгорина, П. Ф. Панкович рассмотрел самый общий случай сложной системы, когда система — прототип усложняется не только за счет введения дополнительных масс и упругих опор, но и введением гасителя колебаний различного типа или другой упругой системы.

П. Ф. Панкович, оценивая значение этого метода, писал: «Применение этого метода вносит в расчеты весьма большую надежность и ставит чем-то вроде своеобразного метода для решения целого класса задач. Указанный метод применим не только к изучению поперечных колебаний, но и в более общем случае. Так, например, он с успехом может быть использован для изучения совместных крутильных колебаний гребного вала у судовой силовой установки и той части вала, на которой установлен винт, для изучения совместных колебаний корпуса и высокоскоростных винтов и т. д.

Помимо упомянутых выше работ, в первом разделе помещены статьи, показывающие большой интерес П. Ф. Панковича к динамическим проблемам в широком плане инженерных приложений.

К их числу относится, например, работа «Применение метода последовательных приближений к выхождению частот и форм крутильных колебаний колесчатых валов» (рукопись, 1938 г.). Здесь изложен метод, позволяющий находить частоты и формы главных свободных колебаний указанной системы в порядке возрастающего номера колебаний. Следует заметить, что в статье Н. С. Третьякова, на которую ссылается П. Ф. Панкович, частоты крутильных колебаний определялись в обратном порядке — от более высоких к более низким, что практически менее удобно. Метод П. Ф. Панковича доведен до составления таблиц, с помощью которых расчет может быть проведен наиболее просто.

К этой же категории статей относится и работа «О крутильных колебаниях круглого диска», написанная в 1936 г., также опубликованная в рукописи. Название ее связано с появлением в печати статьи В. И. Кадмыкова на ту же тему. П. Ф. Панкович показал, что решение, предложенное В. И. Кадмыковым, является достаточно точным лишь до тех пор, пока частота вынужденных колебаний диска мала по сравнению с наименьшей из частот его главных свободных колебаний и пока амплитуда вынужденных крутильных колебаний является линейной функцией от радиуса диска. В связи с этим П. Ф. Панкович дает свое, более общее и точное решение, полученное в бессельевых функциях.

Изложением доклада, прочитанного П. Ф. Панковичем на собрании членов ВНИИТОССа в 1934 г., является статья «Об основной проблеме динамики деформируемых муфт», опубликованная в «Трудах ВНИИТОССа» за 1935 г. Основное назначение двух типов муфт — упругой и гидравлической состоит в том, чтобы предотвратить распространение крутильных колебаний, возникающих на несвободной части гребного вала, на другие части судовой силовой установки.

Решения этой задачи, полученные П. Ф. Палковичем, позволяют принципиально осуществлять конструирование муфт на основании тех требований, которые должны быть предъявлены к частотным характеристикам упругих муфт и к устройству гидравлических муфт в зависимости от средней угловой скорости судовой машины.

Первые публикуется работа П. Ф. Палковича «О колебаниях тяжелой цепи, закрепленной в двух точках». Здесь составлены системы дифференциальных уравнений колебаний тяжелой цепи в плоскостях как самой цепи, так и перпендикулярно к ней. Из рассмотрения систем видно, что колебания в плоскости, перпендикулярной к плоскости цепи, не влияют на ее натяжение. В случае плоского движения система уравнений преобразуется к виду, данному в классическом курсе «Динамика Коши/а».

Второй раздел настоящего сборника «Некоторые вопросы вибрации корабля» включает работы П. Ф. Палковича в области специальной задачи о колебаниях корпуса корабля и составляющих его конструкций.

Раздел открывается статьей «Очерк развития и современное состояние вопроса о вибрации судна», которая была опубликована в 1933 г. в журнале «Прикладная математика и механика». Естественно, что понятие «современное состояние» следует отнести к периоду написания статьи, т. е. к 1933 г. Поскольку за прошедшие двадцать пять лет в рассматриваемой области была проделана большая работа, приведенный очерк значительно устарел. Тем не менее он сохраняет свое значение и сейчас, благодаря богатой библиографии, включающей 140 наименований статей по вибрации корабля, а также благодаря интересной и новой характеристике методов, использованных различными авторами при решении этой задачи, и отдельным работам, начиная с доклада Шлека (1884 г.), работ А. Н. Крылова, Б. Л. Сушенкова, Е. В. Красноперова и др.

В силу сказанного приведенный очерк несомненно с большим интересом и с пользой для дела прочтут все, кто сталкивается с вопросами вибрации корабля.

Центральное место во втором разделе занимает статья «Вибрация корабля», представляющая собой разработку П. Ф. Палковичем соответствующую главу Справочника по судостроению, т. III, 1954 г.

Сам автор так определяет название данной главы: «Основной задачей теории вибрации судна является определение того, каких гармоник возмущающей силы следует избегать при проектировании данного корабля и каков амплитуду может быть допущена у отдельных гармоник возмущающей силы для того, чтобы вибрация данного корабля не превысила допустимых пределов. В соответствии со всем изложенным выше эта основная задача распадается на ряд частных задач, главнейшие из которых являются: а) определение форм и периодов осей главных свобод-



их колебаний в зависимости от их типа и номера тона; б) определение величины плавучих колебаний корпуса под действием периодических сил; в) выяснение тех мероприятий, с помощью которых вибрация может быть сведена у готового или проектируемого судна в границы допустимого.

Следуя этому плану, П. Ф. Паткович дал в Саратовские детальной схему расчета свободных колебаний корпуса корабля с учетом ряда существенных факторов (влияние забортовой воды, терция приращение сечений и др.). Помимо того, здесь даны приближенные формулы для частот колебаний верного тона. Оценка шквуженных колебаний делается с использованием метода главных координат, но рассматриваются и другие методы — метод численного интегрирования дифференциальных уравнений вынужденных колебаний и метод последовательных приближений.

Кроме расчетных схем, здесь даны также рекомендации по допустимой величине вибрации, мерам устранения вибрации и рассмотрен вопрос об экспериментальном исследовании вибрации корпусов судов.

В течение большого периода, вплоть до настоящего времени, указанная глава Спринговича являлась основным пособием для корабельных инженеров, изучающих вибрацию и занимающихся расчетами в этой области.

В статье «К вопросу о периоде свободных поперечных колебаний корабля», напечатанной в 1929 г. в журнале «Кораблестроитель», автор рассматривает вопрос о влиянии сдвига на частоту колебаний корпуса корабля. В результате исследований П. Ф. Патковичем была вскрыта ошибка Коула, в решении которой учит сдвига увеличивал, а не уменьшал частоту.

Результаты решения П. Ф. Патковича в настоящее время учитываются при расчетах вибрации проектируемых кораблей. В этом же разделе помещены две статьи, посвященные вопросу об упругих колебаниях перекрытий в составе корпусов корабля.

В работе «Об упругих колебаниях некоторых судовых перекрытий» задача решается путем разложения исходной формы колебаний в двойные тригонометрические ряды.

Во второй работе «О свободных колебаниях перекрытий, состоящих из большого числа одинаковых балок главного направления в одной или нескольких перекрестных связях, задача развязки форм и частот главных свободных колебаний сложной системы в балок сводится к исследованию упругих колебаний призматической балки, лежащей на эллиптическом упругом основании постоянной жесткости. Это позволило П. Ф. Патковичу получить не только приближенное решение, как это было сделано ранее другими авторами, но и найти решение задачи в замкнутой форме. Указанный прием позволяет производить расчет колебаний перекрытий, имеющих призматические балки главного направления, а также несимметрично расположенные в поперечном направлении связи.

Третий раздел сборника включает некоторые вопросы амортизации и стабилизации.

П. Ф. Панковец выдвигает одним из инципаторов научного изучения и практической разработки проблем защиты амортизации корабельного оборудования. Его работы положили начало опытным и теоретическим исследованиям в этом направлении и немало способствовали проведению соответствующих мероприятий на кораблях флота.

С 1938 г. П. Ф. Панковец являлся председателем Межведомственной комиссии по вопросам амортизации и стабилизации корабельных приборов и оборудования. Он имел в виду также выпустить специальный курс по указанным вопросам. В качестве начала создания такого курса может рассматриваться публикуемая впервые в настоящем сборнике, упоминавшаяся уже выше, статья 1942 г. «О рациональной методике и вибрационных испытаниях корабельных приборов, установок и постов».

По мнению автора, эта работа может служить руководством для проектирования амортизационных устройств, амортизационных корабельных приборов, установок и постов от повреждений при тяжелых сотрясениях корпуса корабля, а также руководством по проведению соответствующих вибрационных испытаний.

При определении коэффициента амортизации установка, упруго скрепленная с вибрирующим корпусом, рассматриваются как системы с одной, либо с двумя степенями свободы.

Использование классического метода Лагранжа, к которому весьма часто прибегал П. Ф. Панковец при решении многих динамических задач, позволило получить удобную и простую схему построения резонансных кривых, которая, как замечает автор, легко может быть распространена на значительно более общие случаи колебания амортизированных тел, так как неиспользованный метод приведен к исследованию упругих колебаний всякой системы, устройству которых позволяет путем линейного преобразования переменных разделить переменные в уравнениях Лагранжа.

Разрабатывая рациональную методику испытаний корабельной аппаратуры на вибростойкость при мощных сотрясениях, автор подробно рассмотрел вопросы проектирования вибростендов с точки зрения обеспечения им требуемых вибрационных характеристик, а также вопросы, связанные с выбором элементов опор. В работе рассматриваются две схемы передачи удара корпуса вибростенду и рекомендации та же вид, которая позволяет наиболее просто подобрать требуемые элементы опор.

Нет сомнения, что данная работа сохранила свою актуальность и в настоящее время и поэтому ее опубликование окажет большую помощь при организации и проведении испытаний корабельных установок на вибростойкость при их мощных сотрясениях.

В статье «Основы теории вибрографа в применении к расшифровке записи свободных затухающих колебаний в общем виде освещен вопрос о зависимости между движением точки поддона прибора и движением его возбуждающей части в случае свободных затухающих колебаний, выявленных стрельбой собственной артиллерии корабля. В итоге теоретических исследований даны рекомендации, при соблюдении которых возможна расшифровка виброграмм свободных затухающих колебаний.

В сборнике помещен также доклад, прочитанный П. Ф. Панковцем в Совете морских инженеров в 1927 г. «Об одном способе улаживания амплитудной вибрации кораблей. В развитие идей в своей дипломной работе автор рассматривает здесь вопрос об уменьшении вынужденной вибрации корабля с помощью прибора, работающего по принципу эхастера Фрама.

Помимо кораблестроительных вопросов, П. Ф. Панковец также отклонился на аспекты смежных областей техники. Примером может служить статья «Теория жирокопического стабилизатора для однорельсового вагона», опубликованная в 1922 г. Эта работа содержит полную теорию жирокопического стабилизатора однорельсового вагона, которую можно считать прекрасной иллюстрацией приложения общей теории жирокопиков к конкретным техническим задачам. Последнее обстоятельство следует особо подчеркнуть, имея в виду бурное развитие различных устройств автоматического управления, которое имеет место в современной технике.

Многие положения данной работы могут быть учтены при изучении автоматического стабилизатора самолета, корабля, и ракет.

С теоретической точки зрения, указанная работа может служить пособием для более подробного изучения одного из специальных и сложных разделов механики.

В неопубликованной ранее работе «К проекту однорельсового вагона для 400 пассажиров» проведена проверка основных элементов жирокопического стабилизатора на основании расчетов, выполненных в соответствии с полученной в предыдущей работе схемой.

Вопросы, затронутые в этих статьях, и решения, полученные автором, имеющие приложение и к кораблестроительным задачам, привлекают внимание специалистов вплоть до настоящего времени.

Четвертый раздел сборника посвящен некоторым вопросам динамического расчета корабельных конструкций. Основное содержание статей, помещенных в данном разделе, связано с актуальной для своего времени проблемой подкреплений под артиллерийскими корабельными установками.

Однако многие вопросы, разработанные П. Ф. Панковцем применительно к указанной частной задаче, носят общий характер и представляют интерес и ценность для современного кораблестроения. В этом отношении особо следует отметить все вопросы,

связанные с определением коэффициентов динамичности конструкций при действии на них кратковременных нагрузок.

Так в статье «К вопросу об определении коэффициента динамичности для жестких барабано-башенных артиллерийских установок», опубликованной в «Бюллетене НТК» за 1940 г., рассмотрен вопрос о влиянии зазора при действии многомерных сил на систему с одной степенью свободы. При этом использованы решения, приведенные в докладе автора, прочитанном им в обществе «Союз морских инженеров» в 1915 г. и помещенном в данном сборнике.

Позже рекомендации автора нового метода определения коэффициентов динамичности жестких барабано-башенных артиллерийских установок, в статье дана критическая оценка методов определения коэффициентов динамичности, предложенных другими авторами.

В последующих трех работах, впервые опубликованных, рассмотрены вопросы, имеющие первостепенное значение для нормальной эксплуатации в сложных условиях весьма ответственной конструкции башенных артиллерийских установок. Так, в первой из них «О влиянии начального поджатия пружинящихся катков боевого штыря артиллерийских башен на чувствительность этих башен к колебаниям ядра в боевом штыре» указывается, что при наличии у боевого штыря начальной эллиптичности, к тому же изменяющейся под действием общего крена корабля, пренебрегать влиянием начального поджатия катков на равномерное движение ядра в боевом штыре в результате изменения температурного режима конструкции, как это раньше считалось, оказывается недопустимым.

В двух остальных работах исследован вопрос о диаграмме отпора пружинящихся катков. В первой из них «О диаграмме отпора пружинящихся катков, действующих башню при крене», вопрос решен без учета деформируемости как боевого штыря башни, что практически допустимо, так и верхнего кольца жесткого барабана, что в большинстве случаев нельзя считать оправданным. Учет влияния последнего фактора на диаграмму отпора и поставлен второй из указанных выше статей «О влиянии деформируемости верхнего кольца жесткого барабана на диаграмму отпора пружинящихся катков боевого штыря башенных установок».

Приведенный далеко не исчерпывающий обзор работ, опубликованных в данном сборнике, характеризует широкий диапазон научных интересов П. Ф. Палюкача в области динамических проблем.

Эти проблемы все шире и глубже проникают во все области современного проектирования кораблей. Из узкой задачи о вибрации корпуса динамические расчеты выросли в сложный комплекс самых разнообразных задач, над решением которых постоянно трудятся советские кораблестроители.

Есть все основания полагать, что издание сборника трудов П. Ф. Палюкача по динамическим проблемам, в которых нашли

свое отражение его выдающиеся способности ученого и инженера, окажет несомненно пользу кораблестроению.

Эта уверенность основана на том, что труды П. Ф. Палюкача по строительной механике корабля получили всеобщее признание специалистов в самых различных областях науки и техники как у нас в Союзе, так и за рубежом. Научная, инженерная и педагогическая деятельность П. Ф. Палюкача — пламенного патриота своей Родины заслужила высокую оценку Советского Правительства, наградившего его несколькими орденами СССР.

Об этом же свидетельствует и избрание его членом-корреспондентом Академии Наук СССР, присуждение ему почетного звания заслуженного деятеля науки и техники РСФСР и Сталинской премии первой степени.

Выпуск данного сборника работ П. Ф. Палюкача в значительной мере задерживает опубликование большого и ценного наследия выдающегося русского кораблестроителя.

В. В. ЕКИМОВ, Б. И. СЛЕПОВ

РАЗДЕЛ I

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ
ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ**

1. ОБ ОДНОЙ ФОРМЕ ОСНОВНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМЫ, НЕ ИМЕЮЩЕЙ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ЧЛЕНОВ*

Настоящая заметка имеет целью распространить метод главных координат на тот случай малых колебаний системы, не имеющей гироскопических членов, когда живая сила системы T , потенциальная энергия V и функция расцепки Φ никак не линейным преобразованием неизвестных не могут быть одновременно освобождены от входящих в них произведений различных переменных.

В этом случае, как известно, переменные в уравнениях Лагранжа не разделяются, а это обычно считается достаточным основанием для утверждения, что в рассматриваемой задаче нет главных координат.

Мы имеем в виду показать, что основным уравнением движения в данном случае можно придать некоторую форму, отличную от лагранжевой, в которой переменные путем надлежащего их выбора всегда можно разделить; что разделяющиеся в этих уравнениях переменные отличаются основным свойством главных координат — ортогональностью и что метода главных координат может быть вполноте, но в несколько трансформированном виде распространена на рассматриваемый случай малых колебаний системы.

1. Пусть n есть число степеней свободы некоторой системы, T — живая сила, V — потенциальная энергия, и Φ — функция расцепки, причем:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{n,n} a_{ij}^0 \dot{q}_i \dot{q}_j; \quad (1)$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{n,n} c_{ij}^0 q_i q_j; \quad (2)$$

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^{n,n} b_{ij}^0 q_i q_j. \quad (3)$$

* Впервые напечатана в известном ЛПИ, т. 32, 1929.

где коэффициенты A_{km} , B_{km} и C_{km} удовлетворяют условиям:

$$A_{km} = A_{mk};$$

$$B_{km} = B_{mk};$$

$$C_{km} = C_{mk};$$

функция же F есть функция обыкновенная, так что

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \dots & C_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ C_{ni} & C_{ni2} & C_{ni3} & \dots & C_{nin} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4)$$

Пусть никакую линейной подстановкой переменные в уравнениях Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial F}{\partial q_k} - \frac{\partial F}{\partial t} = Q_k \quad (5)$$

не разделяются.

Введем в рассмотрение величины r_k , определяемые равенствами

$$r_k = Q_k, \quad (6)$$

и обозначим буквами L и W величины:

$$L = T - F \quad (7)$$

и

$$W = \Phi + \Pi, \quad (8)$$

где Π есть некоторая функция, как от всех величин q_k , так и от всех r_k и определяется тем, что при всяком k

$$\frac{\partial L}{\partial r_k} = \frac{\partial W}{\partial q_k}. \quad (9)$$

Нетрудно видеть, что уравнения Лагранжа (5) эквивалентны уравнениям:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_k} \right) + \frac{\partial W}{\partial r_k} = Q_k; \quad (10)$$

уравнения же (6), в силу условия (9), эквивалентны уравнениям:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial W}{\partial q_k} = 0, \quad (11)$$

причем, как уравнение (10), так и уравнение (11) можно выписать по одному для всякого k от $k=1$ до $k=n$.

Введя подстановку:

$$r_k = \sum_{j=1}^{j=2m} \mu_{kj} p_j \quad (12)$$

и

$$r_k = \sum_{j=1}^{j=2m} \mu_{kj} p_j \quad (13)$$

2 m новых переменных, условимся считать коэффициенты подстановки μ_{kj} и μ_{kj} некоторыми константами, определенными значениями их индексов k и j .

Умножив каждое уравнение группы (10) на

$$\frac{\partial r_k}{\partial p_j} = \mu_{kj},$$

каждое уравнение группы (11) на

$$\frac{\partial r_k}{\partial p_j} = \nu_{kj},$$

сложим данные уравнения. Этим путем можно для всякого индекса j от $j=1$ до $j=2m$ получить по уравнениям:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{p}_j} \right) + \frac{\partial W}{\partial p_j} = P_j, \quad (14)$$

где

$$P_j = \sum_{k=1}^{k=n} \mu_{kj} Q_k. \quad (15)$$

Уравнения группы (14) имеют одинаковую структуру. Все они первого порядка; число их равно удвоенному числу свободы системы. Это и есть интересующая нас система основных уравнений задачи.

Величины L и W , входящие в уравнения (14), определяются, по сказанному выше, равенствами:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{j=1}^{j=2m} (A_{kj} r_k r_j - C_{kj} r_k r_j) \quad (16)$$

и

$$W = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=n} \sum_{j=1}^{j=2m} [B_{kj} r_k r_j + C_{kj} (r_k q_j + q_k r_j)] \quad (17)$$

и в силу подстановок (12) и (13) могут считаться однородными целыми алгебраическими полиномами второй степени от переменных p_j .

2. Подстановку (12) и (13) можно всегда подобрать так, чтобы функции L и W были освобождены от произведений различных переменных вида $p_i p_j$.

Координаты p_j , удовлетворяющие этому условию, назовем главными координатами задачи, соответствующими же каждой из n их движений системы ее главным движениям.

В главных координатах

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} M_j p_j^2 \quad (18)$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2n} N_j p_j^2 \quad (19)$$

где M_j и N_j — некоторые константы.

Поэтому в главных координатах уравнения (14) имеют вид:

$$M_j p_j^2 + N_j p_j = P_j \quad (20)$$

Каждая из 2-х главных координат может быть, таким образом, найдена из своего особого уравнения (20).

Коэффициенты этих уравнений M_j и N_j могут быть легко определены, если форма соответствующего движения известна. Действительно, подставив q_k и \dot{q}_k из выражений (12) и (13) в равенства (16) и (17) в совокупности результат подстановки с формулами (18) и (19), можно видеть, что

$$M_j = \sum_{k=1}^{n+m} \sum_{\alpha=1}^{n-m} (A_{\alpha k} \mu_{\alpha j} \mu_{\alpha j} - C_{\alpha k} \nu_{\alpha j} \nu_{\alpha j}) \quad (21)$$

и

$$N_j = \sum_{k=1}^{n+m} \sum_{\alpha=1}^{n-m} (B_{\alpha k} \mu_{\alpha j} \mu_{\alpha j} + 2C_{\alpha k} \nu_{\alpha j} \nu_{\alpha j}) \quad (22)$$

Формулы (21), (22) и (15) показывают, что если форма кинематического движения, т. е. совокупность параметров $\mu_{\alpha j}$ и $\nu_{\alpha j}$, соответствующих какому-либо определенному значению индекса j , найдена, то дифференциальные уравнения (20) составляются для каждой из главных координат независимо.

3. Для разыскания формы каждого из главных движений воспользуемся обычной методикой частных решений. Известно, что система (5) эквивалентна системе (20) при всяком задании возмущающих сил Q_k . Обе системы, следовательно, эквивалентны и в том случае, если все $Q_k = 0$, а следовательно, и все

$$P_j = 0.$$

Мы удовлетворим в данном частном случае системе (20), если допустим, что

$$p_j = e^{i t}$$

где

$$\alpha_j = \frac{M_j}{N_j} \quad (23)$$

а все

$$p_i = 0$$

при

$$i \neq j.$$

то

Это требует того, чтобы величины q_k , если их задать в форме

$$q_k = \nu_{\alpha j} e^{i t} \quad (24)$$

удовлетворяли уравнениям (5).

Для этого совокупность коэффициентов $\nu_{\alpha j}$, а равно и α_j , должна быть найдена из системы уравнений, каждое k из которых есть

$$\sum_{\alpha=1}^{n-m} (A_{\alpha k} \alpha_j^2 + B_{\alpha k} \alpha_j + C_{\alpha k}) \nu_{\alpha j} \quad (25)$$

Так как все $\nu_{\alpha j}$ не могут быть одновременно равны нулю, то α_j должно быть корнем уравнения:

$$\left[\begin{array}{l} (A_{1k} \alpha_j^2 + B_{1k} \alpha_j + C_{1k}); (A_{2k} \alpha_j^2 + B_{2k} \alpha_j + C_{2k}); \dots \\ (A_{nk} \alpha_j^2 + B_{nk} \alpha_j + C_{nk}); (A_{n+1k} \alpha_j^2 + B_{n+1k} \alpha_j + C_{n+1k}); \dots \\ \dots \\ (A_{n+m,k} \alpha_j^2 + B_{n+m,k} \alpha_j + C_{n+m,k}); (A_{n+m+1,k} \alpha_j^2 + B_{n+m+1,k} \alpha_j + C_{n+m+1,k}); \dots \end{array} \right] = 0 \quad (26)$$

Найдя все 2-х корни уравнения (26), можно затем для каждого из них найти из уравнения (25) совокупность отношений

$$\frac{\nu_{1j}}{\nu_{1j}}, \frac{\nu_{2j}}{\nu_{2j}}, \dots, \frac{\nu_{n+m,j}}{\nu_{n+m,j}}.$$

Величины $\nu_{\alpha j}$ остаются при этом неопределенными. Им можно задать, как угодно. Условно их считать

$$\nu_{\alpha j} = 1.$$

можно принять, что все α_j и $\nu_{\alpha j}$ определяются уравнениями (25) и (26). Когда они найдены, можно для нахождения коэффициентов $\mu_{\alpha j}$ воспользоваться непосредственно равенствами (6) и (13), в силу которых

$$\mu_{\alpha j} = \alpha_j \nu_{\alpha j} \quad (27)$$

4. Обратимся теперь к задаче разыскания начальных значений главных координат. Допустим, что координаты p_j , определенные подстановкой (12) и (13), — главные, и, исключив с помощью равенств (12)—(13) величины q_k и \dot{q}_k из выражений (16) и (17), сравним полученный результат с формулами (18) и (19), обратив внимание на то, с каким множителем и обе формулы для L или W входят произведение

$$p_i p_j.$$

где

$$i \neq j.$$

Нетрудно видеть, что, если p_j координаты главные, то при любых i и k , не равных друг другу, должно быть:

$$\sum_{k=1}^{n+m} \sum_{\alpha=1}^{n-m} (A_{\alpha k} \mu_{\alpha i} \mu_{\alpha k} - C_{\alpha k} \nu_{\alpha i} \nu_{\alpha k}) = 0 \quad (28)$$

$$\sum_{k=1}^{k-m} \sum_{l=1}^{k-m} [B_{kl} \mu_{kl} \mu_{lj} + C_{kl} (\mu_{kl} \nu_{lj} + \nu_{kl} \mu_{lj})] = 0. \quad (29)$$

Равенства (28) и (29) позволяют находить начальные значения всех главных координат независимо друг от друга. Так, например, для нахождения начального значения j -й главной координаты можно воспользоваться каждым из уравнений группы (13) на $A_{km} \mu_{kj}$, а также же из уравнений группы (12) на $C_{km} \nu_{kj}$, затем все их сложить. Это дает возможность для любого j получить по уравнению

$$\sum_{k=1}^{k-m} (\nu_k A_{km} \mu_{kj} - \nu_k C_{km} \nu_{kj}) = \sum_{k=1}^{k-m} \nu_k \sum_{l=1}^{k-m} (A_{lm} \mu_{lj} \mu_{kj} - C_{lm} \nu_{lj} \nu_{kj}).$$

Сложив эти уравнения, получим:

$$\sum_{j=1}^{k-m} \nu_j \sum_{k=1}^{k-m} \sum_{l=1}^{k-m} (A_{km} \mu_{kj} \mu_{lj} - C_{km} \nu_{kj} \nu_{lj}) = \\ = \sum_{k=1}^{k-m} \sum_{l=1}^{k-m} (\nu_k A_{km} \mu_{kj} - \nu_k C_{km} \nu_{kj}),$$

или, приняв во внимание равенства (28) и (27),

$$p_j = \frac{\alpha_j \sum_{k=1}^{k-m} \sum_{l=1}^{k-m} \nu_k A_{km} \nu_{kj} - \sum_{k=1}^{k-m} \sum_{l=1}^{k-m} \nu_k C_{km} \nu_{kj}}{\alpha_j^2 \sum_{k=1}^{k-m} \sum_{l=1}^{k-m} A_{km} \nu_{kj} \nu_{lj} - \sum_{k=1}^{k-m} \sum_{l=1}^{k-m} C_{km} \nu_{kj} \nu_{lj}}. \quad (30)$$

Аналогичным образом с помощью равенства (29) можно получить

$$p_j = \frac{\alpha_j \sum_{k=1}^{k-m} \sum_{l=1}^{k-m} \nu_k \nu_{kl} \nu_{kj} + 2 \sum_{k=1}^{k-m} \sum_{l=1}^{k-m} \nu_k C_{km} \nu_{kj}}{\alpha_j^2 \sum_{k=1}^{k-m} \sum_{l=1}^{k-m} A_{km} \nu_{kl} \nu_{kj} + 2\alpha_j \sum_{k=1}^{k-m} \sum_{l=1}^{k-m} C_{km} \nu_{kl} \nu_{kj}}. \quad (31)$$

С помощью одной из формул (30) или (31) можно найти начальные значения главных координат для каждого из главных движений независимо.* Составляя результат с полученным в пункте 2,

* Полученный результат не является новым. В частности, формулу (28) и вытекающую из нее формулу (30) можно найти в Динамике Вонша (см. № 353 и 364). Формулу (29) и вытекающую из нее формулу (31) не следует непосредственно с правдой у Вонша. Из формул (28), (29) и (27) можно вывести формулу:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n B_{kl} \nu_{kl} \nu_{lj} + (\alpha_j + \alpha_l) \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n A_{kl} \nu_{kl} \nu_{lj} = 0,$$

позволяющую в дополнение к формулам (30) и (31) заметить третий путь нахождения величины p_j , который у Вонша не приведен.

заключаем, что и начальное значение каждой из главных координат и дифференциальное уравнение вынужденных колебаний могут быть для каждого из главных движений системы найдены независимо. Как только форма какого-либо из главных движений (т. е. совокупность параметров ν_1 ; ν_2 ; ν_3 и др.) определена, можно последовать это движение, не рассматривая все остальные главные движения. Таким образом, в случаях, когда требуется разложение всех главных координат, можно значительно упростить исследование.

3. Переходя к рассмотрению общего характера движения системы, необходимо отметить, что коэффициенты M_j и N_j , а следовательно и величина α_j , в рассматриваемой задаче могут быть реальными только в исключительных случаях. Это следует из того, что функции L и W , как видно из равенств (17) и (16), не являются определенными, и теорема Вейтрасса, доказывающая реальность главных координат, в рассматриваемом случае неприменима.

Главные движения в рассматриваемой задаче только в исключительных случаях являются движениями реальными. Число их равно удвоенному числу степеней свободы тела.

Нетрудно показать, что, если одно из главных движений системы получается мнимым или комплексным, то существует всегда другое движение, сопряженное с ним. Оба главных сопряженных движения, складываясь, дают всем точкам системы движение реальное.

Для доказательства приведенного положения допустим, что α_j и α_{j+m} для сопряженных корней уравнения (26). Из рассмотренной системы (25) совместно с равенствами $\nu_j = 1$ нетрудно видеть, что величины

$$\nu_j \quad \text{и} \quad \nu_{j+m};$$

$$\nu_j \quad \text{и} \quad \nu_{j+m}$$

и

$$\nu_j \quad \text{и} \quad \nu_{j+m}$$

являются парно сопряженными. Это, вместе с формулами (15), (21) и (22), показывает, что величины

$$M_j \quad \text{и} \quad M_{j+m};$$

$$N_j \quad \text{и} \quad N_{j+m};$$

э, если силы Q_k реальны, то и величины

$$P_j \quad \text{и} \quad P_{j+m}$$

являются также парно сопряженными.

Так как начальные отклонения системы, а равно и ее скорости, у любой реальной системы величинами реальными, то в силу равенств (30) и (31) можно считать начальные значения величины

$$P_j \text{ и } P_{j+m}$$

парно сопряженными.

Это, вместе со сказанным выше о коэффициентах уравнения (20), позволяет заключить, что и во всем дальнейшем движении величины

$$P_j \text{ и } P_{j+m}$$

я следовательно, и

$$v_{kj} P_j \text{ и } v_{k,j+m} P_{j+m}$$

остаются парно сопряженными.

Сумма двух комплексных сопряженных величин всегда реальна. Поэтому каждые два комплексных сопряженных главных движения системы всегда складываются в одно суммарное движение, в котором движения всех точек системы реальны. Эти суммарные движения, в которые складываются оба сопряженных главных движения, можно назвать простейшими колебаниями системы.

Так как каждое из простейших колебаний системы складается из двух ее главных движений, то число простейших колебаний системы равно числу степеней свободы ее.

6. Проследим общий характер каждого из простейших колебаний системы в том частном случае, когда движение происходит по инерции и, следовательно, все P_j равны нулю. Эти колебания системы можно назвать ее простейшими свободными колебаниями.

Пусть для j -го главного движения системы:

$$a_j = -h_j + \lambda_j i, \quad (32)$$

а для сопряженного с ним

$$a_{j+m} = -h_j - \lambda_j i, \quad (32')$$

где i знак мнимости.

При $P_j = P_{j+m} = 0$ уравнения (20) дают:

$$p_j = a_j e^{-h_j + \lambda_j i t},$$

и

$$p_{j+m} = a_{j+m} e^{-h_j - \lambda_j i t},$$

где a_j и a_{j+m} — постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями движения.

Движение k -й точки системы, складывающееся из обоих рассматриваемых главных движений ее, есть

$$q_k = (a_j v_{kj} e^{h_j + \lambda_j i t} + a_{j+m} v_{k,j+m} e^{-h_j - \lambda_j i t}) e^{-h_j t}.$$

По сказанному выше, величинам a_j и a_{j+m} являются всегда парно сопряженными. Поэтому $a_j v_{kj}$ и $a_{j+m} v_{k,j+m}$ можно считать также сопряженными.

Введя обозначения:

$$2v_{kj} a_j = R_{kj} + S_{kj} i,$$

$$2v_{k,j+m} a_{j+m} = R_{kj} - S_{kj} i,$$

можно полученное выше выражение для q_k привести к виду

$$q_k = (R_{kj} \cos \lambda_j t + S_{kj} \sin \lambda_j t) e^{-h_j t}.$$

Данное равенство показывает, что в каждом из простейших свободных колебаний системы угловая скорость λ_j и коэффициент затухания колебаний h_j получаются для всех точек системы одинаковыми (независимо от номера k). Фазы же отдельных точек, зависящие от отклонения

$$R_{kj} : S_{kj}$$

получаются у всех точек системы различными и зависят не только от начальных условий движения и номера простейшего колебания, но и от номера точки системы.

7. Рассмотрим общий характер простейших колебаний системы в том частном случае, когда возмущающая сила есть простая тригонометрическая функция от времени. Займемся при этом исключительно вынужденными колебаниями системы, т. е. теми ее колебаниями, которые имеют тот же период, что и возмущающая сила.

Полагая

$$P = P_j^* \cos \lambda t,$$

где P_j^* — некоторая заданная константа, можно удовлетворить уравнениям (20), полагая

$$p = a_j \cos \lambda t + b_j \sin \lambda t,$$

где

$$a_j = \frac{N_j P_j^*}{k^2 M_j^2 + N_j^2}$$

и

$$b_j = \frac{\lambda M_j P_j^*}{k^2 M_j^2 + N_j^2}.$$

Принимая это во внимание, можно видеть, что в j -ом главном движении:

$$v_k = v_{kj} \left(\frac{N_j P_j^*}{k^2 M_j^2 + N_j^2} \cos \lambda t + \frac{\lambda M_j P_j^*}{k^2 M_j^2 + N_j^2} \sin \lambda t \right).$$

в сопряженном же с ним $(j + m)$ главном движении:

$$\dot{q}_k = v_{k,j+m} \left(\frac{N_{j+m} P_{j+m}^2}{\lambda^2 M_{j+m}^2 + N_{j+m}^2} \cos \lambda t + \frac{\lambda M_{j+m} P_{j+m}^2}{\lambda^2 M_{j+m}^2 + N_{j+m}^2} \sin \lambda t \right).$$

Так как величины

$$\frac{v_{kj} N_j P_j^2}{\lambda^2 M_j^2 + N_j^2} \quad \text{и} \quad \frac{v_{k,j+m} N_{j+m} P_{j+m}^2}{\lambda^2 M_{j+m}^2 + N_{j+m}^2},$$

а также

$$\frac{v_{kj} \lambda M_j P_j^2}{\lambda^2 M_j^2 + N_j^2} \quad \text{и} \quad \frac{v_{k,j+m} \lambda M_{j+m} P_{j+m}^2}{\lambda^2 M_{j+m}^2 + N_{j+m}^2},$$

по сказанному выше, сопряженные, то суммы их:

$$\bar{R}_{kj} = \frac{v_{kj} N_j P_j^2}{\lambda^2 M_j^2 + N_j^2} + \frac{v_{k,j+m} N_{j+m} P_{j+m}^2}{\lambda^2 M_{j+m}^2 + N_{j+m}^2}$$

и

$$\bar{S}_{kj} = \frac{v_{kj} \lambda M_j P_j^2}{\lambda^2 M_j^2 + N_j^2} + \frac{v_{k,j+m} \lambda M_{j+m} P_{j+m}^2}{\lambda^2 M_{j+m}^2 + N_{j+m}^2}$$

всегда реальны.

Обе рассмотренных главных движения складываются для k -й точки системы в одно колебание

$$q_k = \bar{R}_{kj} \cos \lambda t + \bar{S}_{kj} \sin \lambda t$$

всегда реальное.

Фаза этого колебания зависит от номера точки k . Поэтому в каждом из вышесказанных простейших движений системы отдельные точки ее движутся с некоторым сдвигом фаз друг относительно друга. Этот сдвиг фаз обращается в нуль только в том частном случае, когда главные координаты можно разделить не только в наших уравнениях (14), но и в уравнениях Лагранжа (5).

8. Остановимся впервые на вопросе о том, каким образом с помощью наших уравнений (20) может быть найдено движение системы, за которую при $t = 0$, когда она находится в состоянии покоя, значит внезапно действовать некоторая сила, не меняющая своей величины.

Равенства (15) позволяют в данном случае считать все P_j постоянными; равенства (30) и (31) показывают, что при $t = 0$ все

$$p_j = 0.$$

За интеграл для p_j , удовлетворяющей уравнению (20) и всем начальным условиям, можно в рассматриваемом случае принимать

$$p_j = \frac{P_j}{N_j} (1 - e^{-\lambda t}).$$

Движение k -й точки системы, вызванное появлением у нее ее j -го главного движения в этом случае

$$q_k = v_{kj} \frac{P_j}{N_j} (1 - e^{-\lambda t});$$

движение той же точки, но вызванное появлением $(j + m)$ главного движения системы, очевидно

$$q_k = v_{k,j+m} \frac{P_{j+m}}{N_{j+m}} (1 - e^{-\lambda t}).$$

Так как у двух сопряженных главных движений величины

$$\alpha_j \quad \text{и} \quad \alpha_{j+m}$$

а также

$$v_{kj} \frac{P_j}{N_j} \quad \text{и} \quad v_{k,j+m} \frac{P_{j+m}}{N_{j+m}}$$

попарно сопряженные, то оба движения точек k могут быть сложены в одно простейшее колебание, являющееся всегда реальным.

Действительно, полагая

$$\left. \begin{aligned} 2 v_{kj} \frac{P_j}{N_j} &= \bar{R}_{kj} + \bar{S}_{kj} t \\ 2 v_{k,j+m} \frac{P_{j+m}}{N_{j+m}} &= \bar{R}_{kj} - \bar{S}_{kj} t \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

и считая, что α_j и α_{j+m} определяются равенствами (32), можно видеть, что в j -ом простейшем колебании, вызванном внезапно приложенной нагрузкой,

$$\begin{aligned} q_k &= v_{kj} \frac{P_j}{N_j} (1 - e^{-\lambda t}) + v_{k,j+m} \frac{P_{j+m}}{N_{j+m}} (1 - e^{-\lambda t}) = \\ &= \bar{R}_{kj} (1 - e^{-\lambda t}) \cos \lambda_j t - \bar{S}_{kj} e^{-\lambda t} \sin \lambda_j t. \end{aligned} \quad (34)$$

9. Если на систему, находившуюся при $t = 0$ в состоянии покоя, внезапно в этот момент действовать некоторая сила, являющаяся любой заданной функцией от времени, то обобщенные силы $P_j = P_{j+m}$ будут также некоторыми заданными функциями от t . Величины \bar{R}_{kj} и \bar{S}_{kj} , определяемые равенствами (33), будут при этом некоторыми реальными и заданными функциями от времени t . Влияние на систему всякой силы, являющейся некоторой любой функцией от времени $P(t)$, можно всегда заменить эквивалентным ему влиянием бесконечного множества моментарных сил $\frac{d}{dt} P(t) dt$, приложенных к ней независимо в различные моменты времени и затем сокращающих свою величину несравненно. Для того чтобы найти влияющие силы, к системе,

фактически приложенной, достаточно прибавить влияние всех элементарных сил, вызываемых в предположении, что система в момент начала действия каждой такой силы находится в состоянии покоя. Влияние же каждой такой силы, вычисленное именно в этом предположении, может для движения k -й точки, вызываемого появлением в системе j -го простейшего колебания, быть учтено с помощью формулы (34), если в ней вместо величин R_{kj} и S_{kj} поставить величинами

$$R_{kj}^*(t) d_j \quad \text{и} \quad S_{kj}^*(t) d_j,$$

а время t отсчитывать от момента начала действия соответствующей элементарной силы, т. е. $t = \xi$.

Складывая влияние всех элементарных сил, можно для движения k -й точки системы, вызванного появлением j -го простейшего колебания, получить

$$q_k = \int_{t=0}^{t=\tau} [R_{kj}^*(t) (1 - e^{-\beta(t-\xi)}) \cos \lambda_j(t-\xi) - S_{kj}^*(t) e^{-\beta(t-\xi)} \sin \lambda_j(t-\xi)] d\xi. \quad (35)$$

Формула (35) позволяет найти j -е из простейших колебаний системы при любом задании возмущающей силы, если только в момент начала действия данной силы система находится в покое.

10. Подводя итог сказанному, можно полученные результаты формулировать в следующих положениях.

1) основные дифференциальные уравнения системы, имеющих n степеней свободы, могут, если у нее нет гироскопических членов, быть выписаны в виде 2 n равенств (14);

2) переменные, разделяющиеся в уравнениях (14), могут быть разделены и в начальных условиях движения, если только для начального момента его заданы все отклонения и все скорости системы;

3) определяемые этими переменными главные движения системы могут быть изучены каждая порознь, но только в исключительных случаях они являются движениями реальными, вообще же они комплексные;

4) каждые два сопряженных главных движения системы могут быть соединены в одно простейшее колебание, являющееся для всех точек системы движением реальным;

5) число простейших колебаний системы равно числу ее степеней свободы;

6) уравнения (20) вместе с начальными условиями (30) и (31) позволяют исследовать порознь каждое из главных движений системы, а путем сложения обоих сопряженных главных движений находить порознь и все простейшие колебания системы;

7) если система движется по инерции, то в каждом из ее простейших движений угловая скорость и коэффициент затуха-

ния всех точек системы одинаковы, эллипсиды же и фазы различны;

8) если система совершает вынужденные колебания под действием периодической возмущающей силы, то в каждом из ее простейших движений фазы всех точек системы различны.

Возможность с помощью уравнений (20) и начальных условий (30) и (31) проследить порознь при свободных колебаниях системы и при ее вынужденных колебаниях каждое из ее простейших колебаний может быть особенно интересно, когда большая часть простейших колебаний системы получается относительно малой, так что для полного выяснения явления достаточно учесть не все явление полностью, а только некоторые, наиболее важные из простейших движений системы.

Напомянутая методика может быть применена и к разложению главных деформаций перекрестий, имеющих несколько перекрестных связей*. Здесь она может иногда найти особое применение, так как в этой задаче, как правило, обычно встречаются именно такие случаи, когда для полного выяснения картины явления достаточно изучить только несколько основных деформаций перекрестия.

* См. работу: «Две аналогии, относящиеся к расчету перекрестных связей», Ин-д Ленинградского политехнического института, т. 31.

2. К ВОПРОСУ ОБ ОБОБЩЕНИИ ФОРМУЛ АКАДЕМИКА
Б. Г. ГАЛЕРКИНА НА СЛУЧАЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ
ТЕОРИИ УПРУГОСТИ*

А. И. Лурье [2] показал, каким образом можно обобщить решение Б. Г. Галеркина [1] на случай динамической задачи теории упругости.

Для вектора перемещения \bar{u} А. И. Лурье получил в случае отсутствия объемных сил следующее общее выражение:

$$\bar{u} = \square_1 \bar{\varphi} - \frac{1}{2(1-\sigma)} \text{grad div } \bar{\varphi}. \quad (1)$$

Здесь $\bar{\varphi}$ — вектор, удовлетворяющий уравнению

$$\square_1 \square_2 \bar{\varphi} = 0, \quad (2)$$

а \square_1 и \square_2 — дифференциальные операторы волнового типа, связанные с оператором Лапласа ∇^2 следующими

$$\square_1 = \nabla^2 - \frac{1-2\sigma}{2-2\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad (3)$$

$$\square_2 = \nabla^2 - \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (4)$$

а между собой условием

$$\square_1 = \square_2 + \frac{1}{2(1-\sigma)} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (5)$$

В написанных выражениях:

σ — пуассоновское отношение;

G — модуль сдвига;

ρ — плотность тела.

Вектор $\bar{\varphi}$, удовлетворяющий уравнению (2), можно представить как сумму двух векторов

$$\bar{\varphi} = \bar{W}_1 + \bar{W}_2, \quad (6)$$

где \bar{W}_1 — вектор, удовлетворяющий условию

$$\frac{\square_1 \bar{W}_1}{\square_2 \bar{W}_1} \neq \text{const}, \quad (7)$$

а \bar{W}_2 — вектор, удовлетворяющий условию

$$\frac{\square_1 \bar{W}_2}{\square_2 \bar{W}_2} = \text{const}. \quad (8)$$

Оба вектора должны удовлетворить уравнению (2). Поэтому должно быть:

$$\begin{cases} \square_1 \square_2 \bar{W}_1 = 0 \\ \square_1 \square_2 \bar{W}_2 = 0 \end{cases} \quad (9)$$

В силу условия (7) можно принимать, что общий интеграл уравнения (2) есть

$$\bar{W}_1 = \bar{a}_1 + \bar{a}_2, \quad (10)$$

где \bar{a}_1 — вектор, удовлетворяющий уравнению

$$\square_1 \bar{a}_1 = 0, \quad (11)$$

а \bar{a}_2 — вектор, удовлетворяющий уравнению

$$\square_2 \bar{a}_2 = 0. \quad (12)$$

Что касается вектора \bar{W}_2 , то условие (8) может иметь место либо если $\frac{\partial^2 \bar{W}_2}{\partial t^2} = 0$, либо же если $\nabla^2 \bar{W}_2 = 0$.

Можно поэтому принять

$$\bar{W}_2 = \bar{\delta} + \bar{\epsilon}, \quad (13)$$

где $\bar{\delta}$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \bar{\delta}}{\partial t} = 0, \quad (14)$$

а $\bar{\epsilon}$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \bar{\epsilon} = 0. \quad (15)$$

В силу (14) можно принимать, что $\bar{\delta}$ есть линейная функция от t , так что

$$\bar{\delta} = \bar{\delta}_0 + \bar{\delta}_1 t, \quad (16)$$

где $\bar{\delta}_0$ и $\bar{\delta}_1$ зависят только от x, y и z и удовлетворяют уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \bar{\delta}_i = 0. \quad (17)$$

* Продолжается из предыдущего номера.

Вектор $\bar{\epsilon}$ как удовлетворяющий одновременно уравнениям (9) и (15) должен удовлетворять также уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\nabla^2 - \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \bar{\epsilon} = 0, \quad (18)$$

а следовательно и уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \bar{\epsilon} = 0. \quad (19)$$

Можно поэтому принять, что

$$\bar{\epsilon} = \bar{\epsilon}_0 + \bar{\epsilon}_1 t + \bar{\epsilon}_2 t^2 + \bar{\epsilon}_3 t^3, \quad (20)$$

где $\bar{\epsilon}_i$ — векторы, зависящие лишь от x, y, z и удовлетворяющие уравнению

$$\nabla^2 \bar{\epsilon}_i = 0. \quad (21)$$

Нетрудно видеть, что векторы $\bar{\epsilon}_0$ и $\bar{\epsilon}_1 t$ могут быть включены в состав векторов \bar{b}_0 и $\bar{b}_1 t$. Поэтому можно считать, что

$$\bar{\varphi} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 + \bar{b}_0 + \bar{b}_1 t + \bar{c}_2 t^2 + \bar{c}_3 t^3, \quad (22)$$

где векторы \bar{a}_i, \bar{b}_i и \bar{c}_i удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \square_1 \bar{a}_i &= 0; \\ \square_2 \bar{a}_i &= 0; \\ \nabla^2 \nabla^2 \bar{b}_i &= 0; \\ \nabla^2 \bar{c}_i &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Исследуем решение, даваемое вспомогательным вектором \bar{a}_i . Он приближает к \bar{a} составляющую

$$\bar{a}_1 = -\frac{1}{2(1-\sigma)} \text{grad div } \bar{a}_0, \quad (24)$$

или, что то же

$$\bar{a}_1 = \text{grad } \varphi, \quad (25)$$

где

$$\varphi = -\frac{1}{2(1-\sigma)} \text{div } \bar{a}_0, \quad (26)$$

и удовлетворяет уравнению

$$\square_1 \varphi = 0, \quad (27)$$

Вектор \bar{a}_2 приближает к \bar{a} составляющую

$$\bar{a}_2 = \square_1 \bar{a}_1 - \frac{1}{2(1-\sigma)} \text{grad div } \bar{a}_0, \quad (28)$$

или, что то же,

$$\begin{aligned} \bar{a}_2 &= \square_1 \bar{a}_1 + \frac{1}{2(1-\sigma)} \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \text{grad div} \right] \bar{a}_0 = \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \text{grad div} \right] \frac{\bar{a}_0}{2(1-\sigma)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Нетрудно видеть, что

$$\text{div } \bar{a}_2 = -\text{div } \square_1 \frac{\bar{a}_0}{2(1-\sigma)} = 0. \quad (30)$$

Поэтому можно принять, что

$$\bar{a}_2 = \text{curl } \bar{\eta}_1, \quad (31)$$

где $\bar{\eta}_1$ — вектор, удовлетворяющий уравнению

$$\square_2 \bar{\eta}_1 = 0. \quad (32)$$

Векторы \bar{b}_i приближают к вектору составляющую

$$\begin{aligned} \bar{b}_0 &= \left[\nabla^2 - \frac{1}{2(1-\sigma)} \text{grad div} \right] \bar{b}_0 + \\ &+ \left[\nabla^2 - \frac{1}{2(1-\sigma)} \text{grad div} \right] \bar{b}_1 t, \end{aligned} \quad (33)$$

чему можно, как известно [3] и [4], придать вид

$$\begin{aligned} \bar{b}_0 &= \bar{\epsilon}_0 - \frac{1}{4(1-\sigma)} \text{grad} (\bar{\epsilon}_0 \bar{r} + \varphi_0) + \\ &+ t \left[\bar{\epsilon}_1 - \frac{1}{4(1-\sigma)} \text{grad} (\bar{\epsilon}_1 \bar{r} + \varphi_1) \right], \end{aligned} \quad (34)$$

где $\bar{\epsilon}_i$ — векторы, зависящие только от x, y, z и удовлетворяющие уравнению

$$\nabla^2 \bar{\epsilon}_i = 0, \quad (35)$$

\bar{r} — вектор положения точки $\bar{r} = ix + jy + kz$;

φ_i — два скаляра, зависящие только от x, y, z и удовлетворяющие уравнениям

$$\nabla^2 \varphi_i = 0. \quad (36)$$

Нанесенные векторы, зависящие от $\bar{\epsilon}_i$ и \bar{c}_i , входят в состав искомого вектора перемещения вектор

$$\begin{aligned} \bar{a}_3 &= \left(\nabla^2 - \frac{1-2\sigma}{2} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) (\bar{\epsilon}_2 t^2 + \bar{\epsilon}_3 t^3) - \\ &- \frac{1}{2(1-\sigma)} \text{grad div} (\bar{\epsilon}_2 t^2 + \bar{\epsilon}_3 t^3). \end{aligned} \quad (37)$$

или, что то же,

$$\bar{u}_4 = \frac{1}{2(1-\sigma)} \left[(1-2\sigma) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \text{grad div} \right] (\bar{c}_2 \bar{r} + \bar{c}_3 \bar{r}). \quad (38)$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \bar{u} = & \text{grad } \varphi + \text{curl } \bar{\psi}_1 + \left[\bar{c}_2 - \frac{4}{4(1-\sigma)} \text{grad} (\bar{c}_1 \bar{r} + \varphi_1) \right] + \\ & + \left[\bar{c}_3 - \frac{1}{4(1-\sigma)} \text{grad} (\bar{c}_1 \bar{r} + \varphi_1) \right] t + \\ & + \frac{1}{2(1-\sigma)} \left[(1-2\sigma) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \text{grad div} \right] (\bar{c}_2 \bar{r} + \bar{c}_3 \bar{r}). \quad (39) \end{aligned}$$

где векторы $\bar{\psi}_1$ и \bar{c}_i , а также скаляры φ_1 удовлетворяют уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \square_1 \varphi &= 0; \\ \square_1 \bar{\psi}_1 &= 0; \\ \nabla^2 \bar{c}_1 &= 0; \\ \nabla^2 \varphi_1 &= 0; \\ \nabla^2 \bar{\psi}_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Членами, зависящими от \bar{c}_i и φ_1 , дается решение статической задачи теории упругости, членами, зависящими от $\bar{\psi}_1$ и $\bar{\psi}_2$ — решение, являющееся линейной функцией от t , второе решение имеет ту же векторную структуру, что и решение статической задачи.

Только через члены $\text{grad } \varphi$ и $\text{curl } \bar{\psi}$ могут войти в состав вектора \bar{u} векторы, являющиеся периодическими функциями от t . Поэтому выражение для вектора установившихся вынужденных колебаний любого упругого тела под действием периодических сил, а равно и выражение для вектора свободных колебаний всякого тела конечных размеров может быть найдено в форме

$$\bar{u} = \text{grad } \varphi + \text{curl } \bar{\psi}_2, \quad (41)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \square_2 \varphi &= 0; \\ \square_2 \bar{\psi}_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Все, что прибавляет к решению (39) функции φ_1 и $\bar{\psi}_1$, может быть включено в состав решения, даваемого функцией φ . Поэтому без вреда для общности решения (39) можно функции φ_1 и $\bar{\psi}_1$ положить в нем равными нулю.

Все, что прибавляет к решению (39) градиент произвольного гармонического скаляра, вводимого в состав векторов \bar{c}_i , может быть также выражено через φ . Поэтому из состава векторов \bar{c}_i можно исключить все то, что прибавляет к ним градиенты произ-

вольных гармонических скаляров. Поэтому в самом общем случае можно вместо равенства (39) пользоваться равенством

$$\begin{aligned} \bar{u} = & \text{grad } \varphi + \text{curl } \bar{\psi}_1 + \bar{c}_2 - \frac{1}{4(1-\sigma)} \text{grad} (\bar{c}_1 \bar{r} + \\ & + [\bar{c}_3 - \frac{1}{4(1-\sigma)} \text{grad} (\bar{c}_1 \bar{r} + \varphi_1)] t + \\ & + \frac{1}{2(1-\sigma)} \left[(1-2\sigma) \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \text{grad div} \right] (\bar{c}_2 \bar{r} + \bar{c}_3 \bar{r}), \end{aligned}$$

где векторы \bar{c}_i достаточно размыкать с точностью до градиентов произвольных гармонических скаляров как слагаемых.

Решения (41), (42) не ново. Его можно найти, например, у Лейбнера [5] в известном томе *Handbuch der Physik*.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Галеркин Б. Г., К вопросу об исследовании напряжений в деформируемом и упругом изотропном теле, Доклады АН, 1930.
2. Лурье А. И., Обобщение формул академика Б. Г. Галеркина на случай динамической задачи теории упругости, Доклады АН, 1937.
3. Лавровский П. Ф., Выявление общего вектора уравнений теории упругости через гармонические функции, ИЖЕН, 1939, № 10.
4. Папкоцкий П. Ф., Основы теории упругости, теория упругости, Прокладная математика и механика, Новая серия, т. 1, вып. 1. © P. P. P. P., *Handbuch der Physik*, т. 6, стр. 311.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Общий интеграл уравнений упругих колебаний

$$\square_1 \bar{u} + \frac{1}{1-2\sigma} \text{grad div } \bar{u} = 0 \quad (1)$$

имеется

$$\bar{u} = \text{grad } \varphi + \text{curl } \bar{\psi}, \quad (2)$$

где φ — общий интеграл уравнения

$$\square_1 \varphi = 0, \quad (3)$$

а $\bar{\psi}$ — общий интеграл уравнения

$$\square_1 \bar{\psi} = 0. \quad (4)$$

Операторы же \square_1 и \square_2 имеют следующую смысл:

$$\square_1 = \nabla^2 - \frac{c}{G} \frac{1-2\sigma}{2-2\sigma} \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad (5)$$

$$\square_2 = \nabla^2 - \frac{c}{G} \frac{\partial^2}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Вектор \bar{u} как и всякий вектор можно представить в форме

$$\bar{u} = \text{grad } \varphi_0 + \text{curl } \bar{\psi}_0. \quad (7)$$

чтобы (7) удовлетворяло уравнению (1), необходимо положить $\varphi_0 = \bar{\varphi}_0$ условно:

$$\frac{2-2\sigma}{1-2\sigma} \operatorname{grad} \square_1 \varphi_0 = -\operatorname{rot} \square_2 \bar{\varphi}_0 \quad (8)$$

в силу которого

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \square_1 \bar{\varphi}_0 = \nabla^2 \square_1 \bar{\varphi}_0 = 0 \quad (9)$$

и

$$\frac{2-2\sigma}{1-2\sigma} \square_1 \bar{\varphi}_0 = \chi,$$

где χ — общий интеграл уравнения

$$\nabla^2 \chi = 0, \quad (10)$$

Изотермич (8), можно

$$\varphi_0 = \bar{\varphi} - \frac{\sigma}{\sigma-1} \iint \chi d\Omega, \quad (11)$$

где $\bar{\varphi}$ — общий интеграл уравнения (3).

Для каждой из степеней $\bar{\varphi}_0$ выше уравнение

$$-\square_2 \operatorname{rot} \bar{\varphi}_0 = \operatorname{grad} \chi,$$

общий интеграл которого вычисляется так:

$$\operatorname{rot} \bar{\varphi}_0 = \operatorname{rot} \bar{\varphi} + \frac{\sigma}{\sigma-1} \iint \operatorname{grad} \chi d\Omega, \quad (12)$$

где $\bar{\varphi}$ — общий интеграл уравнения (4).

Подставляя (11) в (12) и (7), видно, что члены с χ сокращаются и подстановка приводит к равенству

$$\bar{\mu} = \operatorname{grad} \bar{\varphi} + \operatorname{rot} \bar{\varphi}, \quad (13)$$

доказанно совместно с уравнением

$$\square_1 \bar{\varphi} = 0 \quad (14)$$

и

$$\square_2 \bar{\varphi} = 0 \quad (15)$$

общий интеграл уравнения (1). Нужно лишь под $\bar{\varphi}$ и $\bar{\varphi}$ подразумевать общие интегралы уравнений (3) и (4), причем $\bar{\varphi}$ должно быть таковым с точностью до градиента произвольного скаляра как частного.

3. ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАЗЫСКАНИЯ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЯ *

За последнее время в нашей технической литературе оживился интерес к вопросу о методах разыскания корней характеристического определителя. Начало этому положено было акад. А. Н. Крыловым, изложившим в своей известной работе, наряду с классическими методами Лезере и Якоби, свою методику разыскания характеристического определителя. Разбору и дальнейшему обоснованию этой методики был посвящен ряд работ акад. Лизюна. Совсем недавно в трудах Сейсмологического института АН СССР появились заметки инж. Новоторица о решении той же задачи с помощью метода последовательных приближений. В целом последнее сообщение Ленинградскому механическому обществу была сделана попытка сопоставить упомянутые выше классические методы с методами, которыми техника пользуется в настоящее время наиболее часто, а именно с методом последовательных приближений, методом Рунге—Рунда и их модифицированными. В результате этой работы мы пришли к заключению, что одним из наиболее практичных вычислительных методов, могущим быть использованным для указанной цели следующей. Целью его является обойти те затруднения, которые в классических методах разыскания характеристического определителя сопряжены с необходимостью вычисления малых разностей близких величин. Отдельные корни характеристического определителя и соответствующие им собственные решения системы линейных уравнений вида

$$\sum_{j=1}^n (A_{ij} + C_{ij} \lambda) v_j = 0 \quad \text{при } i = 1, 2, 3, \dots, m \quad (1)$$

разыскиваются последовательно в порядке убывания величин характеристических чисел, соответствующих им.

* Краткое содержание доклада, читанного в Ленинградском механическом обществе 20 марта 1933 г.

Первые замечания к журн. «Прикладная математика и механика», 1933, т. 1, № 2.

Вычисление начинается с того, что решением системы (1) относительно соответствующих переменных или же выведением и рассмотрением подлежащих подобранных новых переменных система (1) приводится к виду

$$x_i v_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{(i)} v_j \quad \text{при } i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2)$$

причем так, чтобы наибольший практический интерес представлял наибольшее норма определителя системы (2), а равно и соответствующее им решения. После этого вычисление начале ведется, как в методе Лейбнера, т. е. из системы (2) строится новая система вида

$$x^2 v_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{(2)} v_j \quad \text{при } i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (3)$$

коэффициенты которой получаются из соответствующих коэффициентов исходной системы (2) по правилу правянку всеведения в квадрат числовых матриц, т. е. по правилу

$$a_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^k a_{ik}^{(1)} a_{kj}^{(1)}. \quad (4)$$

После этого, в отличие от метода Лейбнера, составляются по тому же правилу сразу системы вида

$$\left. \begin{aligned} x^4 v_i &= \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{(4)} v_j \\ x^8 v_i &= \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{(8)} v_j \\ x^{16} v_i &= \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{(16)} v_j \end{aligned} \right\} \text{при } i = 1, 2, 3, \dots, n, \quad (5)$$

что всегда может быть выполнено с помощью зависимостей

$$\left. \begin{aligned} a_{ij}^{(4)} &= \sum_{k=1}^k a_{ik}^{(2)} a_{kj}^{(2)} \\ a_{ij}^{(8)} &= \sum_{k=1}^k a_{ik}^{(4)} a_{kj}^{(4)} \\ a_{ij}^{(16)} &= \sum_{k=1}^k a_{ik}^{(8)} a_{kj}^{(8)} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

и т. д. Суммы главных коэффициентов систем (2), (3) и (5) позволяют вычислять суммы различных степеней определителя основной системы, так как известно:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = a_{11}^{(1)} + a_{22}^{(1)} + a_{33}^{(1)} + \dots + a_{nn}^{(1)} = A_1;$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2 = a_{11}^{(2)} + a_{22}^{(2)} + a_{33}^{(2)} + \dots + a_{nn}^{(2)} = A_2;$$

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \dots + x_n^3 &= a_{11}^{(3)} + a_{22}^{(3)} + a_{33}^{(3)} + \dots + a_{nn}^{(3)} = A_3 \\ x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + \dots + x_n^4 &= a_{11}^{(4)} + a_{22}^{(4)} + a_{33}^{(4)} + \dots + a_{nn}^{(4)} = A_4 \\ x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 + \dots + x_n^5 &= a_{11}^{(5)} + a_{22}^{(5)} + a_{33}^{(5)} + \dots + a_{nn}^{(5)} = A_5 \\ &\dots \\ &\dots \end{aligned}$$

Соотношения эти позволяют установить для наибольшего характеристического числа x_1 пределы

$$\left. \begin{aligned} x_1 &< A_1 \\ A_2 : A_1 &< x_1 < \sqrt{A_2} \\ \sqrt{A_2} : A_1 &< x_1 < \sqrt[4]{A_2} \\ \sqrt[4]{A_2} : A_1 &< x_1 < \sqrt[8]{A_2} \\ \sqrt[8]{A_2} : A_1 &< x_1 < \sqrt[16]{A_2} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

по мере вычисления все более и более сближающиеся и позволяющие не только вычислять x_1 с желаемой степенью точности, но и знать, какая степень точности на данном этапе вычисления достигнута.

Вычисляя с помощью процесса, изложенного выше, наибольшее характеристическое число с желаемой степенью точности, можно определить соответствующее ему собственное решение системы, т. е. совокупность величин v_i , удовлетворяющих системе

$$x_1 v_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{(1)} v_j \quad \text{при } i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (2')$$

Это можно сделать различными способами; наиболее удобный здесь метод последовательных приближений, особенно если вычисление ведется не с помощью исходной системы (2), а с помощью той из систем типа (5), до которой вычисление доведено при определении величин x_1 .

Пусть эта система есть

$$x_1^k v_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}^{(k)} v_j \quad \text{при } i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (5')$$

За первое приближение для совокупности величин v_i можно принять совокупность чисел $a_{ij}^{(k)}$, составляющая любой столбец матрицы $a_{ij}^{(k)}$. Дальнейшие приближения получают подстановкой этих значений вместо v_j в правую часть равенств (5'). К определению из левой части равенств более точного соотношения между величинами v_i . Если вычисление коэффициентов $a_{ij}^{(k)}$ доведено предварительно достаточно далеко, то второе прибли-

жесть для v_n , полученное таким образом, дает для v_n значения практически совершенно точно. Для проверки следует это вычисление проделать до тех пор, пока результаты двух последовательных приближений не будут тождественны.

Для разыскания второго характеристического числа и соответствующего ему собственного решения системы предлагается следующий метод.

Сопоставим величинам v_n , составляющим это решение, разлагается в форме

$$v_n = \tau_n v_{1n} + \zeta_n \quad \text{при } i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (8)$$

где величина τ_n должна быть определена из условия взаимной ортогональности решений v_n и v_{n-1} , а ζ_n есть некоторая неизвестная совокупность величин, из которых одна любая, например первая,* может быть полагается равной нулю, остальные же подлежат определению из системы

$$\kappa \zeta_n = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij}^0 \zeta_{nj} \quad \text{при } i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (9)$$

получаемой из системы (2) подстановкой в нее равенств (8) и последующего за этим исключения величина τ_n из результата подстановки. Проведая соответствующие простые выкладки, нетрудно видеть, что между β_{ij}^0 и α_{ij}^0 существуют зависимости

$$\beta_{ij}^0 = \alpha_{ij}^0 - \alpha_{ij}^0 \frac{\tau_{n-1}}{\tau_n}. \quad (10)$$

Составив систему (9) указанным способом, рекомендуется дальнейшее вычисление второго корня характеристического определителя и соответствующий ему совокупности величин ζ_n производить повторяя над этой системой все те операции, с помощью которых разысканы были ранее из системы (2) первое по характеристическим числам κ и соответствующее ему решение v_n . Когда такая совокупность величин ζ_n найдена (пусть это есть $\zeta_{n1}, \zeta_{n2}, \zeta_{n3}, \dots, \zeta_{nm}$), она подставляется в (8), после чего τ_n подбирается так, чтобы решения v_n и v_{n-1} были взаимно ортогональны.

Для получения третьего собственного решения можно принять

$$\zeta_n = \tau_n \zeta_{n3} + \sigma_n \quad \text{при } i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (11)$$

или, что то же,

$$v_n = \tau_n v_{1n} + \tau_n v_{2n} + \sigma_n \quad \text{при } i = 1, 2, 3, \dots, m, \quad (12)$$

где величинам τ_n и τ_n должны быть подобраны так, чтобы v_n, v_{n-1}

* Предлагается, что $\tau_{n-1} \neq 0$. Если $\tau_{n-1} = 0$, то из величин ζ_n одна из равной нулю следует любая, кроме ζ_{n1} . Иначе решение (8) не будет отличным от решения v_{n-1} .

и v_n были взаимно ортогональны, $\sigma_{n3} = \sigma_n = 0$, а остальные σ_{n3} подлежат определению из системы

$$\kappa \sigma_n = \sum_{j=1}^{i-2} \gamma_{ij}^0 \sigma_{nj} \quad \text{при } i = 3, 4, \dots, m, \quad (13)$$

получаемой из системы (9) подстановкой в нее ζ_n из уравнения (11) и последующего исключения из результата этой подстановки свободной τ_n . Между коэффициентами β_{ij}^0 и γ_{ij}^0 существует, очевидно, зависимость

$$\gamma_{ij}^0 = \beta_{ij}^0 - \beta_{ij}^0 \frac{\zeta_{n-1}}{\zeta_n}. \quad (14)$$

Определив κ и соответствующее ему σ_n из системы (13) способом, во всем тождественным с тем, с помощью которого ранее находились κ , α_n и соответствующее им v_{1n} и ζ_{n1} , остается для определения искомого третьего решения системы подобрать величинам τ_n и τ_n в равенствах (12) так, чтобы решение v_n было взаимно ортогонально как с решением v_{n-1} , так и с решением v_{n-2} .

Для разыскания четвертого собственного решения следует принять

$$\sigma_n = \tau_n \sigma_{n3} + \tau_{n4},$$

где

$$\tau_{n4} = \tau_{n4} = \tau_{n4} = 0,$$

а остальные τ_{n4} подлежат определению из системы

$$\kappa \tau_{n4} = \sum_{j=1}^{i-3} \delta_{ij}^0 \tau_{nj} \quad \text{при } i = 4, 5, \dots, m, \quad (15)$$

где δ_{ij}^0 получается из γ_{ij}^0 по правилу

$$\delta_{ij}^0 = \gamma_{ij}^0 - \gamma_{ij}^0 \frac{\sigma_{n-1}}{\sigma_n}. \quad (16)$$

Определив из уравнений (15) κ и соответствующую ему совокупность величин τ_{n4} , следует для нахождения искомого четвертого собственного решения системы положить

$$v_n = \tau_n v_{1n} + \tau_n v_{2n} + \tau_n v_{3n} + \tau_{n4},$$

подобрав величинам τ_n, τ_n и τ_n так, чтобы решения v_n, v_{n-1}, v_{n-2} и v_n были взаимно ортогональны. Нетрудно видеть, что величина τ_n придется определять каждую из своего особого алгебраического линейного уравнения, так что выхождение их никакого труда не может составить.

С помощью описанного процесса можно исследовательно вычислять все представляющие практический интерес корни характеристического определителя, а равно и соответствующие им собственные решения системы, причем вычисление можно всегда остановить, как только все нужные собственные решения системы найдены.

Если в исходной системе все $\alpha_{ij}^{(0)}$ — величины одного знака, то для нахождения λ_0 и соответствующего ему собственного решения системы не придется делать, как легко видеть, ни одного вычитания, потому что потери точности вычисления, связанной с вычитанием малых разностей близких величин при нахождении величины λ_0 , и соответствующего ей собственного решения в этом случае можно избежать. Для того чтобы остальные собственные решения и соответствующие им характеристические числа могли быть вычислены с необходимой степенью точности, необходимо точно вычислять совокупность величин λ_{1j} ; λ_{2j} ; σ_{1j} ; σ_{2j} и т. д.

Численные примеры показывают, что обычно все вычисления удается провести с помощью логарифмической линейки. При этом первое характеристическое число λ_0 и соответствующее ему решение будут найдены всего точнее; λ_{1j} и несколько меньшей относительной точностью и т. д. Но обычно знать последние бывает достаточно и с меньшей точностью.

Изложенный прием уяснения следствия процесса последовательных приближений при определении совокупностей величин λ_{ij} ; σ_{ij} ; σ_{2j} и т. д. не нов: он заимствован из статьи *Mitsch's* и *Polleszel-Greifinger*, помещенной в *Zeitschr. f. Ang. Math. und Mech.* Bd 9, s. 152. Возможность использования неравенств (7) для суждения о том, с какой степенью точности вычислен разыскиваемый корень характеристического определителя, в практических вычислениях до сих пор применяли по Удальцову, хотя этот прием также не нов (его можно найти, в частности, в статье *Fan den Dierden's* в том же журнале *X. A. M. M.*, 8, 1928, 225).

Совершенно, по-видимому, не использован был до сих пор предлагаемый способ размакширирования собственных решений, отличных от основного, т. е. соответствующего максимальной характеристическому числу. Несмотря на то, что этот метод, который для этой цели был предложен упомянутыми выше авторами, видно хотя бы из того, что все вычисления предлагаемым методом может быть выполнено с помощью логарифмической линейки, и то время как при нахождении первого собственного решения по способу *Mitsch's* и *Polleszel-Greifinger* для получения результата с точностью до 5 знаков требуется выписать ряд промежуточных вычислений на 20 десятичных знаков, из которых первые 15 в конце концов при вычитании пропадают.

Излагаемая методика разработана пока применительно к тому лишь случаю, когда все характеристические числа реальны. Она может быть, по-видимому, обобщена и на случай, когда последние являются комплексными. Это предполагается сделать в следующей статье. Выполненные для нескольких частных примеров сравнительные вычисления показывают, что решение изложенной методикой получается быстрее и проще, чем с помощью методов Рунге-Рунда и ее видоизменений.

4. О НАХОЖДЕНИИ НАЧАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ГЛАВНЫХ КООРДИНАТ*

Исследование малых колебаний системы значительно упрощается выделением главных координат, т. е. координат, разделяющих переменные в дифференциальных уравнениях движения. Во многих случаях нахождение периодов главных колебаний системы не представляет затруднений, и затруднения возникают лишь при определении начальных их значений, а равно и их производных по времени.

Пусть α_j — некоторые координаты, начальные значения которых известны, а β_k — главные координаты, вводимые линейной подстановкой:

$$\alpha_j = \sum_k \lambda_{jk} \beta_k \quad (1)$$

* Пусть коэффициенты λ_{jk} этой подстановки известны.

Рассматривая зависимость (1) как уравнения относительно β_k , всегда можно главные координаты β_k выразить через α_j , но при больших числе степеней свободы непосредственное решение уравнений (1) часто бывает чрезвычайно громоздким. Задача значительно упрощается, если принять за условие ортогональность главных координат, позволяющую решение уравнений (1) заменить вычислением некоторых сумм. Рассмотрение этих упрощений, составляющее главный предмет данной статьи, полезно начать с простейшего случая, когда на систему, кроме сил консервативных, никакие другие силы не действуют.

§ 1. Случай, когда на систему действуют лишь консервативные силы

Пусть в координатах α_j полная сила системы T выражается равенством

$$T = \frac{1}{2} \sum \alpha_j \alpha_j^2 \quad (2)$$

* Продолжение статьи.

потенциальная же энергия системы

$$V = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \alpha_{ij} x_i x_j, \quad (3)$$

где α_{ij} и α_{ji} — некоторые заданные постоянные.

Начальные значения координат x_i , а также их производных по времени \dot{x}_i предполагаются известными. Координаты x_i предполагаются выбранными так, что в выражение живой силы входят лишь их производные по времени или, иными словами, что в дифференциальных уравнениях Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial x_i} = 0 \quad (4)$$

члены $\frac{\partial V}{\partial x_i}$ могут быть опускаемы, как тождественно равные нулю.

Если $\alpha_{ij} \neq 0$ при всяком $i \neq j$, то в уравнениях (4) левые члены x_i не разделяются. Если условимся вводить обобщенные координаты R_k исключительно линейной подстановкой (1), где λ_{ik} — некоторые постоянные, то в координатах R_k дифференциальные уравнения Лагранжа также не будут заключать членов $\frac{\partial V}{\partial R_k}$ и будут иметь вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{R}_k} \right) + \frac{\partial V}{\partial R_k} = 0, \quad (5)$$

причем функции T и V будут однородными полимами алгебраическими функциями 2-й степени соответственно от величин \dot{R}_k и R_k .

Пусть координаты R_k — главные координаты; из самого определения понятия главных координат следует, что в них функции T и V должны иметь квадратичный вид. По теореме Вейерштрасса такие координаты всегда существуют. Если это координаты R_k , то произведения их вида $R_k^2 \dot{R}_l$ и $\dot{R}_k R_l$ не входят в выражения для T и V , так что, в частности, в координатах R_k

$$T = \frac{1}{2} \sum_k M_k \dot{R}_k^2. \quad (6)$$

Непосредственная подстановка выражений (1) в выражение (2) дает, однако, в координатах R_k для живой силы выражение

$$T = \frac{1}{2} \sum_k \dot{R}_k^2 \left(\sum_i \alpha_{ij} \lambda_{ik}^2 \right) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \alpha_{ij} \dot{R}_i \dot{R}_j \left(\sum_k \alpha_{ij} \lambda_{ik} \lambda_{jk} \right),$$

которое может быть эквивалентно выражению (6) тогда и только тогда, когда

$$M_k = \sum_i \alpha_{ij} \lambda_{ik}^2, \quad (7)$$

а суммы вида $\sum_i \alpha_{ij} \lambda_{ik} \lambda_{jk}$ равны нулю при всяком k и l , друг

другу неравных. Поэтому для главных координат всегда имеет место

$$\sum_i \alpha_{ij} \lambda_{ik} \lambda_{jk} = 0 \quad \text{при } i \neq k, \quad (8)$$

Выражения (8) выражают аналитически то свойство главных координат, которое принято называть их ортогональностью и которое позволяет решение уравнений (1) относительно координат R_k свести к простому вычислению некоторых групп.

Действительно, умножив все уравнения группы (1) на соответствующие множители и сложив их все почленно, нетрудно видеть, что в силу условий (7) и (8)

$$R_k = \frac{\sum_i \alpha_{ij} \lambda_{ik} x_j}{M_k}, \quad (9)$$

так что вычисление начальных значений главных координат R_k по заданным начальным значениям координат x_j требует лишь вычисления сумм

$$M_k \text{ и } \sum_i \alpha_{ij} \lambda_{ik} x_j.$$

Дифференцируя выражения (9) по времени, можно получить

$$\dot{R}_k = \frac{\sum_i \alpha_{ij} \lambda_{ik} \dot{x}_j}{M_k}, \quad (9')$$

так что выхождение начальных значений производных главных координат по времени требует лишь дополнительного вычисления сумм

$$\sum_i \alpha_{ij} \lambda_{ik} \dot{x}_j.$$

§ 2. Случай, когда, кроме сил консервативных, действуют силы сопротивления, являющиеся функциями рассеяния

Пусть живая сила системы T и потенциальная энергия V в координатах x_i имеют выражения (2) и (3), живая же рассеянная есть

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \beta_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad (10)$$

Уравнения движения в обобщенных координатах R_k , вводимых равенствами (1), могут быть составлены по схеме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{R}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial R_k} + \frac{\partial V}{\partial R_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{R}_k} = 0, \quad (11)$$

причем, как и в уравнениях (4), член $\frac{\partial V}{\partial R_k}$ может быть опускаем,

так как мы предполагаем ограничиться рассмотрением случаев, когда от R_k живая сила явно не зависит.

В уравнениях (11) можно разделить переменные R_k тогда и только тогда, когда одной и той же линейной подстановкой (1) можно привести к квадратическому виду одновременно T , V и Φ . Это, однако, возможно сделать не всегда, так как подстановка (1), приводящая T и V к квадратическому виду, может не привести к нему функции Φ , подстановка же, приводящая к квадратическому виду T и V , вообще может быть только одна.

Пусть подстановкой (1) функции V и T приводятся к квадратическому виду

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2} \sum_k M_k R_k^2 \\ V = \frac{1}{2} \sum_k N_k R_k^2 \end{cases} \quad (12)$$

Если в выражении функции рассеяния

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_k \sum_l R_k R_l R_{kl} \quad (13)$$

будут

$$R_{kl} = 0 \quad (14)$$

при всяких k и l , не равных друг другу, то переменные R_k в уравнениях Лагранжа (11) разделятся и будут главными координатами. Нахождение их начальных значений можно будет производить с помощью выражений (9) и (9'), как было показано выше.

Если же равенство (14) не будет иметь места при всяком значении k и l , друг другу не равных, то координаты R_k в уравнениях (11) не разделятся и нельзя будет найти такую подстановку (1), которая бы разделила переменные в уравнениях Лагранжа (11).

Обычно главными координатами называют координаты, разделяющие переменные в уравнениях (11). По-этому невозможность разделить переменные в этих уравнениях прямо отождествлять с отсутствием главных координат.

Нет никакой необходимости требовать, чтобы главные координаты разделяли обязательно переменные в уравнениях (11), составленных по схеме Лагранжа. Если же под главными координатами подразумевать любые такие, которые разделяют переменные в уравнениях движения, составленных по той же бы то ни было схеме (не обязательно по схеме Лагранжа), то легко видеть, что главные координаты существуют всегда.

Действительно, каковы бы ни были коэффициенты M_k , N_k и R_{kl} в выражениях (12) и (13), уравнения (11) всегда являются уравнениями движения и допускают $2n$ частных решений вида

$$R_k = r_{km} e^{i\omega t}$$

где n — число степеней свободы системы, r_{km} — некоторые коэффициенты, а ω_m — корни Лагранжова дискриминанта системы (11). Общие интегралы для R_k можно получить, умножив каждое из найденных выше их частных решений на постоянные C_m и сложив их все.

Если ввести обозначение

$$q_m = C_m e^{i\omega t}$$

то общий интеграл для R_k можно переписать так:

$$R_k = \sum_m \frac{r_{km}}{n} r_{km} q_m \quad (15)$$

$$R_{k+l+m} = \sum_n r_{k+l+m} q_n$$

где для простоты положим

$$r_{k+l+m} = r_{km} r_{lm}$$

Принимая параметры q_m за координаты движения системы, легко видеть, что они являются главными координатами в том смысле, что удовлетворяют $2n$ уравнениям первого порядка

$$\dot{q}_m - \omega_m q_m = 0.$$

будучи в этих уравнениях разделены. В рассматриваемом случае число главных координат равно таким образом не числу степеней свободы системы, а удвоенному числу их, и они разделяют переменные не в n уравнениях Лагранжа (11), а в $2n$ уравнениях первого порядка.

Результат этот естественен, ибо малые движения системы с n степенями свободы определяются вполне не в n , а в $2n$ начальных условиях: координатами всех точек в начальный момент и теми же числом их производных по времени. Если за координаты движения принять все те параметры, которые необходимо и достаточно задать в начальный момент для определения дальнейшего движения системы, то координатами движения скорости будут в такой же мере и геометрические координаты отдельных точек системы. В канонических уравнениях Гамильтона скорости и координаты геометрические играют совершенно аналогичную роль.

Если, однако, число координат движения $2n$, то и число главных координат также должно быть равно $2n$, и лишь в некоторых исключительных случаях их может быть не $2n$, а в два раза меньше, и они могут разделяться в уравнениях движения (11).

Можно составить очень простую схему составления тех $2n$ уравнений 1-го порядка, в которых главные координаты q_m

являются разделенными. Действительно, если V , T и Φ определяются равенствами (12) и (13), то уравнения (11) суть:

$$M_k \dot{r}_k' + \sum_{i=1}^n B_{ki} \dot{r}_i' + N_k r_k = 0. \quad (16)$$

Вводя новые в переменных r_k равенствами

$$r_k = r_k', \quad (17)$$

можно уравнения (16) привести к виду

$$M_k \dot{r}_k + \sum_{i=1}^n B_{ki} \dot{r}_i + N_k r_k = 0. \quad (16')$$

Нетрудно видеть, что, если

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n M_k \dot{r}_k^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n N_k r_k^2 \\ W &= \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n B_{ki} r_k \dot{r}_i + \sum_{k=1}^n N_k r_k r_k \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

то уравнения (16') эквивалентны уравнению

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_k} \right) + \frac{\partial W}{\partial r_k} = 0, \quad (19)$$

а уравнения (17) упрощаются

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_k} \right) + \frac{\partial W}{\partial r_k} = 0, \quad (20)$$

в координат r_k связаны с n координатами r_k исключительно уравнениями (19) и (20). Так как начальные значения их всех могут быть заданы как угодно, то все эти координаты можно считать параметрами в алгебраическом смысле независимыми. Вместо $2n$ параметров r_k и \dot{r}_k можно ввести $2n$ других независимых же переменных q_m . Пусть эти последние введены подстановкой

$$\left. \begin{aligned} r_k &= \sum_{m=1}^{2n} v_{km} q_m \\ \dot{r}_k &= \sum_{m=1}^{2n} v_{k+1,m} \dot{q}_m \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Умножив k -е из уравнений (19) на $\frac{\partial r_k}{\partial q_m} = v_{km}$, а k -е из уравнений (20) на $\frac{\partial r_k}{\partial \dot{q}_m} = v_{k+1,m}$ и сложив их все, нетрудно получить $2n$ уравнений вида

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_m} \right) + \frac{\partial W}{\partial q_m} = 0, \quad (22)$$

очевидно эквивалентных системе (20) и (21).

Подобрав подстановку (21) так, чтобы в переменных q_m функции L и W были приведены к квадратическому виду

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2n} P_m \dot{q}_m^2 \\ W &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2n} S_m q_m^2 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

можно разделить переменные в уравнениях (22), приходящих при этом к виду

$$P_m \dot{q}_m' + S_m q_m = 0. \quad (22')$$

Подберемные таким образом координаты q_m будут, очевидно, главными координатами системы, в том смысле этого понятия, который был ему придан выше. Для разыскания начальных значений их можно воспользоваться их ортогональностью, вытекающей непосредственно из того, что функции L имеет в этих координатах квадратический вид.

В самом деле, подставив (21) в общее выражение для L , нетрудно получить

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2n} \dot{q}_m^2 \left(\sum_{k=1}^n M_k v_{k+1,m}^2 - \sum_{k=1}^n N_k v_{k,m}^2 \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2n} \sum_{i=1}^{2n} q_m \dot{q}_i \left(\sum_{k=1}^n M_k v_{k+1,m} v_{k+1,i} - \sum_{k=1}^n N_k v_{k,m} v_{k,i} \right) \end{aligned}$$

что может быть эквивалентно выражению (23) тогда и только тогда, когда

$$P_m = \sum_{k=1}^n M_k v_{k+1,m}^2 - \sum_{k=1}^n N_k v_{k,m}^2 \quad (24)$$

и при всяких i и m , друг другу не равных,

$$\sum_{k=1}^n M_k v_{k+1,m} v_{k+1,i} - \sum_{k=1}^n N_k v_{k,m} v_{k,i} = 0. \quad (25)$$

Выражения (25) формулируют аналитически то свойство главных координат, которое можно назвать их ортогональностью. С помощью него можно без труда выразить начальные значения координат q_m через начальные значения координат r_k и \dot{r}_k :

$$q_m = \frac{\sum_{k=1}^n P_k v_{k+1,m} r_k + \sum_{k=1}^n P_k v_{k,m} \dot{r}_k}{P_m}. \quad (26)$$

Это сводит задачу об их разыскании к простому вычислению некоторых сумм.

Начальные значения величины r_k и \dot{r}_k могут быть всегда найдены аналогичным путем, как показано в предыдущем параграфе. Хотя найденный прием нахождения начальных значений главных координат при наличии функции рассеяния и требует предварительного нахождения начальных значений главных координат

системы, движущейся без сопротивления, тем не менее во многих случаях она оказывается значительно более простым, чем непосредственное решение уравнений, связывающих координаты g_m с переменными β_j и α_j .

§ 3. Численный пример

Пусть дана система, для которой

$$T = p_1^2 + 2 p_2^2;$$

$$V = 2 p_1^2 + p_2^2;$$

$$\Phi = \sqrt{2} p_1^2 p_2^2.$$

Составляя дифференциальные уравнения движения по схеме Лагранжа, имеем

$$p_1^2 + 2 p_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} p_2^2 = 0;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} p_1^2 + 2 p_2^2 + p_2 = 0.$$

Для разыскания их общего интеграла применим метод частных решений.

Пусть

$$p_1 = v_1 e^{\alpha};$$

$$p_2 = v_2 e^{\alpha}.$$

есть такое частное решение. Ожидая, должны быть удовлетворены уравнения

$$\left. \begin{aligned} v_1 (\alpha^2 + 2) + \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha v_2 = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \alpha v_1 + (2\alpha^2 + 1) v_2 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (\alpha)$$

откуда следует

$$2\alpha^4 + 4\alpha^2 + \alpha^2 + 2 = 0,5\alpha^2 = 0,$$

или, что то же,

$$\alpha^2 = -1,125 \pm \sqrt{(1,125)^2 - 1} = -1,125 \pm 0,5153.$$

Принимем

$$\alpha_1 = i \sqrt{0,6097} = i 0,7809;$$

$$\alpha_2 = -i \sqrt{0,6097} = -i 0,7809;$$

$$\alpha_3 = i \sqrt{1,6403} = i 1,280;$$

$$\alpha_4 = -i \sqrt{1,6403} = -i 1,280.$$

Из уравнений (а) следует

$$v_{1,1} = -0,397 i v_{2,1};$$

$$v_{1,2} = +0,397 i v_{2,2};$$

$$v_{1,3} = -2,518 i v_{2,3};$$

$$v_{1,4} = +2,518 i v_{2,4}.$$

Принимая за главные координаты

$$g_1 = C_1 e^{\alpha}; \quad g_2 = C_2 e^{\alpha}; \quad (6)$$

$$g_3 = C_3 e^{\alpha}; \quad g_4 = C_4 e^{\alpha},$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 — постоянные интегрирования, и полагая

$$v_{2,1} = v_{2,2} = v_{2,3} = v_{2,4} = 1,$$

можно видеть, что

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= -0,397 i g_1 + 0,397 i g_2 - 2,518 i g_3 + 2,518 i g_4; \\ p_2 &= g_1 + g_2 + g_3 + g_4 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Выражения для p_1^2 и p_2^2 получаются простым дифференцированием только что полученных выражений, что дает

$$\left. \begin{aligned} p_1^2 &= 0,310 g_1 + 0,310 g_2 + 3,224 g_3 + 3,224 g_4; \\ p_2^2 &= 0,781 i g_1 - 0,781 i g_2 + 1,280 i g_3 - 1,280 i g_4 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Таким образом, в рассматриваемом частном случае

$$v_{1,1} = -0,397 i; \quad v_{1,2} = +0,397 i; \quad v_{1,3} = -2,518 i; \quad v_{1,4} = +2,518 i;$$

$$v_{2,1} = +1; \quad v_{2,2} = +1; \quad v_{2,3} = +1; \quad v_{2,4} = +1;$$

$$v_{3,1} = +0,310; \quad v_{3,2} = +0,310; \quad v_{3,3} = +3,224; \quad v_{3,4} = +3,224;$$

$$v_{4,1} = +0,781 i; \quad v_{4,2} = -0,781 i; \quad v_{4,3} = +1,280 i; \quad v_{4,4} = -1,280 i.$$

Принимая во внимание, что в рассматриваемом случае

$$N_1 = 2;$$

$$N_2 = 1;$$

$$M_1 = 1;$$

$$M_2 = 2,$$

нетрудно видеть, что условия ортогональности (25) в полученном решении выполнены.

Действительно, приняв в выражении (25)

$$m = 1; \quad s = 2,$$

получим

$$-2 (0,397)^2 - 1 + 0,310^2 + 2 (0,781)^2 = -1,316 + 1,316 = 0.$$

При $m = 1, s = 3$ выражение (25) дает

$$+2 \cdot 0,397 \cdot 2,518 - 1 + 0,310 \cdot 3,224 - 2 \cdot 0,781 \cdot 1,280 = -2,00 + 2,00 = 0.$$

При $m = 1, s = 4$

$$-2 \cdot 0,397 \cdot 2,518 - 1 + 0,310 \cdot 3,224 + 2 \cdot 0,781 \cdot 1,280 = -2,00 + 2,00 = 0.$$

При $m = 2, s = 3$

$$-2 \cdot 0,397 \cdot 2,518 - 1 + 0,310 \cdot 3,224 - 2 \cdot 0,781 \cdot 1,280 = -2,00 + 2,00 = 0.$$

При $m = 2, s = 4$

$$+2 \cdot 0,397 \cdot 2,518 - 1 + 0,310 \cdot 3,224 - 2 \cdot 0,781 \cdot 1,280 = -2,00 + 2,00 = 0.$$

и при

$$m = 3, s = 4$$

$$-2(2,518)^2 - 1 + (3,224)^2 + 2(1,280)^2 = -13,7 + 13,7 = 0.$$

Таким образом, равенство (25) имеет место при всех m и s , друг другу не равных, и, следовательно, нахождение начальных значений главных координат возможно с помощью равенств (26). Пусть, например, в начальный момент

$$p_1 = 1; p_2 = p_3' = p_4' = 0$$

и требуется найти начальные значения главных координат q . Выяснив суммы P_i , входящие в знаменатель выражений (26),

$$P_1 = P_2 = 2(0,397)^2 - 1 + (0,310)^2 - (0,781)^2 = -1,807,$$

$$P_3 = P_4 = 2(2,518)^2 - 1 + (3,224)^2 - 2(1,280)^2 = 18,80$$

и подставив их в выражение (26), легко получить для начальных значений главных координат:

$$q_1 = \frac{2 \cdot 0,397 i}{-1,807} = -i 0,439 = C_1;$$

$$q_2 = \frac{-2 \cdot 0,397 i}{-1,807} = +i 0,439 = C_2;$$

$$q_3 = \frac{2 \cdot 2,518 i}{18,80} = +i 0,267 = C_3;$$

$$q_4 = \frac{-2 \cdot 2,518 i}{18,80} = -i 0,267 = C_4.$$

После чего выражения (6), (а) и (г) дадут

$$p_1 = -0,348 \cos 0,781 t + 1,344 \cos 1,280 t;$$

$$p_2 = -0,878 \sin 0,781 t + 0,534 \sin 1,280 t,$$

что, как легко видеть, действительно удовлетворяет начальным условиям, принятым выше.

В то время что рассмотренном примере число степеней свободы было $n = 2$. Ортогональность главных координат должна иметь место при всяком числе их, и прием для нахождения начальных значений, изложенный выше, может быть применен с тем большей пользой, чем больше число степеней свободы системы.

Ограничиваясь случаем, когда в выражении какой силы так или иначе жирооперических членов нет, мы предполагаем вернуться к более общему случаю в другой статье, так как ортогональность главных координат системы должна иметь место и в этом случае.

Назвая буквой X деформацию конструкции в месте приложения нагрузки и буквой λ коэффициент, характеризующий ее упругость, выберем последний из выражений

$$X = \lambda P,$$

где X — деформация системы, вызываемая упругие противодействием конструкции, равно P .

Будем далее считать массу всей конструкции приведенной к точке приложения нагрузки и равной M .

В таком случае дифференциальное уравнение движения точки приложения нагрузки под влиянием силы, заданной произвольной функцией от времени $F(t)$, запишется так:

$$M'' X + \frac{X}{\lambda} = F(t) = M f(t). \quad (1)$$

Решая это уравнение, соответствующие начальным условиям

$$X = 0 \quad \text{и} \quad X' = 0,$$

как известно, есть

$$X = \frac{1}{K} \int_0^t f(\xi) \sin K(t - \xi) d\xi. \quad (2)$$

причем входящие сюда K определяется равенствами

$$K = \sqrt{\frac{1}{M\lambda}} = \frac{2\pi}{T}.$$

В курсе дифференциальных уравнений математической физики А. Н. Крылова (см. § 8) указано, что физический смысл выражения (2) более явитен, если его преобразовать интегрированием по частям, что дает

$$X = \lambda F(t) \left[1 - \frac{\int_0^t F(\xi) \sin K(t - \xi) d\xi}{F(t)} \right]. \quad (3)$$

Множителем, помещенным в скобках, учитывается динамическая сторона вопроса, а, вычленив интеграл, входящий в него, можно, очевидно, учесть влияние скорости изменения нагрузки на деформацию конструкции.

§ 2. Условие статичности нагрузки

Из рассмотренного интеграла (3) А. Н. Крылова установил критерий статичности нарастающей нагрузки. В явном виде его можно формулировать так:

5. К ВОПРОСУ О ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЗКЕ*

Настоящая статья представляет собой развитие некоторых задач, первоначально возникших в связи с расчетом подкреплений в тельне малого промежутка времени, причем время нарастания и убывания ее предполагалось малым по сравнению с собственной продолжительностью нагрузки.

Для простоты выкладки общий характер усилки характеризовала диаграммой, изображенной на рис. 1 ломаная линия (пуантиром показан действительный характер давления в компрессорах), и первая часть работы была посвящена получению выражений, дающих величину максимальной деформации под действием силы, заданной ломаной линией.

Выражения эти составлены в зависимости от величины:

- T_1 — продолжительности нарастания нагрузки;
- T_2 — продолжительности убывания нагрузки;
- $T - T_1$ — длительности сохранения нагрузки максимальной величины;
- P — значение максимального значения нагрузок;
- τ — периода свободных колебаний нагружаемой балки, стойки или иной упругой конструкции.

Целью при этом было выяснить, насколько близко нагрузка принятого типа подходит по своему характеру к нагрузке, именно примененной, и не столько исходя условия, при какой нагрузке можно считать статически нарастающей, сколько желая выяснить, в какой мере и при каких условиях рассматриваемую силу следует считать именно примененной.

* Доклад, читаный 20 декабря 1915 г. Впервые опубликован в «Бюллетене Союза русских инженеров, 1916 г.

Нагрузку можно считать действующей статически, если может быть пренебрежена наибольшая величина, на которую нагрузка успевает возрасти за промежуток времени, равный полупериоду свободных колебаний системы. Погрешность, допущенная при этом, не превосходит указанного изменения усилия.

Вывести это положение можно так:

Начертим кривую $ABCD$, изображающую в функции от времени скорость нарастания нагрузки $F(\xi)$ (см. рис. 2). Нанесем на том же чертеже косинусоиду $\cos K(t - \xi)$. Это легко сделать, так как при $\xi = t$, $\cos K(t - \xi) = 1$.

Построим затем кривую, дающую произведение ординат кривой $ABCD$ и косинусоиды $\cos K(t - \xi)$, и заштрихуем площади, отсекаемые кривой и осью абсцисс. Очевидно сумма заштрихованных площадей есть искомый интеграл

$$\int_0^t F(\xi) \cos K(t - \xi) d\xi.$$

Если функция $F(\xi)$ имеет всего один максимум, то на основании свойства экзокорреляции сумма заштрихованных

площадок меньше наибольшей из этих площадок.

Отсюда

$$\int_0^t F(\xi) \cos K(t - \xi) d\xi < \int_0^{\Delta t} [F(\xi)]_{\max} \cos K(t - \xi) d\xi = \frac{\pi}{2} [F(t)]_{\max}$$

чем и доказывается высказанное выше положение об условиях статичности нагрузки.

Если функция $F(t)$ имеет больше, чем один максимум, то

$$\int_0^t F(\xi) \cos K(t - \xi) d\xi < \frac{\pi}{2} [F(t)]_{\max}$$

где суммирование распространено на все максимальные величины скорости нарастания нагрузки.

Выражение

$$X_{\max} < \lambda F(t) \left\{ 1 + \frac{\pi}{2} \frac{\sum [F(t)]_{\max}}{F(t)} \right\} = \lambda F(t) \left\{ 1 + \frac{\pi}{2T_1} \frac{\sum [F(t)]_{\max}}{[F(t)]_{\max}} \right\} \quad (4)$$

может быть дополнено точным предельным максимальным значением деформации лишь при условии, что $\frac{\pi}{2T_1}$ мало по сравнению с единицей, так как при выводе мы косвенно это предполагали.

Если π велико по сравнению с T_1 , то данное выражение (4) становится чрезвычайно грубым. Динамический множитель нужно вычислять точнее, принимая во внимание вид функции $F(t)$.

§ 3. Выбор выражения для $F(t)$

Желая вывести условия, при которых динамический множитель может достигать наибольшей величины, мы ограничились простейшим видом нагрузки, заданным на рис. 1 ломаной линией.

Компрессоры обычно проектируют так, чтобы давление их при откате было возможно равномернее. Поэтому практически нагрузка от выстрела в главную своей части будет близко подходить к принятой при расчете. Равномерный закон нарастания и убывания нагрузки был принят нами в расчет как простейший, но безвреднейших сведений об их истинном характере.

Нужно помнить, что результаты, полученные для выбранного простейшего типа нагрузки, могут служить, если не совсем точно, то весьма близкой к действительности характеристикой и для других более сложных заданных нагрузок.

Относительно замены нагрузки, заданной одним законом, нагрузкой, заданной другим, несколько отличающимся от нее законом, необходимо заметить, что, благодаря такой замене, может войти в рассмотрение влияние силы, изображаемой разницей законов обеих нагрузок, и потому амплитуда этой силы мала. Но нельзя забывать того, что эта сила может обладать известной степенью периодичностью, и если период ее окажется близким к периоду свободных колебаний нагружаемой конструкции, влияние этой силы несмотря на малую величину может оказаться значительным.

Мы предполагаем, что таких периодических сил, указанных выше, при замене нагрузки от действия компрессоров ее приближенной величиной не вводится. Если бы были основания предполагать возможность появления подобных периодических сил, то всегда трудно влияние их учесть, подсчитав производяще

ны вынужденные колебания. На этом подсчете мы останавливаться не будем.

В соответствии с выбранным законом изменения нагрузки с течением времени мы должны бы были считать функцию $F(t)$ постоянной при t от 0 до T_1 и равной нулю при t от T_1 до T . Точно так же и за время убывания нагрузки величину $F(t)$ следовало бы считать постоянной на участке от $t = T$ до $t = T + T_2$.

Для простоты предположим сначала, что нагрузка исчезает мгновенно, т. е. что T_2 бесконечно мало, и затем влияние скорости исчезновения нагрузки учитывали особо, приближенным путем.

§ 4. Действие нагрузки, равномерно возрастающей до своей наибольшей величины

В случае, если $F(t)$ задано так:

$$F(t) = \frac{P}{T_1} \quad \text{при} \quad 0 < t < T_1$$

и

$$F(t) = 0 \quad \text{при} \quad T_1 < t < T,$$

то из общего выражения (3) для X легко найти следующее его значение:

$$X = \lambda \left\{ P - \frac{P\alpha}{\pi T_1} \sin \frac{\pi T_1}{T} \cos \frac{\pi}{T} (2T - T_1) \right\}, \quad (6)$$

относясь к значениям t в пределах

$$T_1 < t < T.$$

Выражения для X , относящиеся к пределам $0 < t < T_1$, мы не приводим, так как дифференцированием этого выражения убедились, что X не может иметь максимумов при t , меньшем T_1 .

Если $\frac{\pi}{T} (2T - T_1)$ может обратиться хоть раз в $\pi (2n + 1)$, пока нагрузка не прекратится, то максимальное значение X определяется величиной

$$X = \lambda P (1 + \alpha) = X_{\text{ст}} (1 + \alpha); \quad (7)$$

$$\alpha = \frac{1}{\pi T_1} \sin \frac{\pi T_1}{T}. \quad (7)$$

Следовательно X_{max} определяется выражением (6) всегда, когда

$$\frac{\pi}{T} (2T - T_1) > \pi (2n + 1),$$

чему равносильно

$$T - T_1 > \frac{(2n + 1)T - T_1}{2}; \quad (8)$$

причем n — наименьшее целое число, при котором

$$(2n + 1)T - T_1 > 0.$$

Условие (8) можно считать условием полноты динамического эффекта, причем тогда оно выполнено, динамический эффект получается полным, т. е. деформация определяется величиной (6).

Если условие (8) не соблюдено, то нагрузка полного динамического эффекта не производит. Очевидно в этом случае формула (6) применима лишь до момента прекращения нагрузки, но не для $t > T$. В момент прекращения действия нагрузки деформация конструкции есть очевидно

$$X = \lambda P \left\{ 1 - \alpha \cos \frac{\pi}{T} (2T - T_1) \right\}. \quad (9)$$

Скорость, приобретенная системой к моменту прекращения нагрузки, определяется выражением

$$\dot{X} = \lambda P \left\{ \alpha \frac{2\pi}{T} \sin \frac{\pi}{T} (2T - T_1) \right\}.$$

Полный запас энергии, которым располагает система к моменту прекращения нагрузки,

$$\frac{X^2}{2k} + \frac{X \dot{X}}{g} M = \frac{\lambda^2 P^2}{2k} [1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \frac{\pi}{T} (2T - T_1)].$$

Отсюда максимальная деформация в случае, когда нагрузка не производит полного эффекта, равна

$$X_{\text{max}} = X_{\text{ст}} \sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \frac{\pi}{T} (2T - T_1)}. \quad (9)$$

Обратимся к разбору полученных результатов (6) и (9). Прежде всего обратим внимание на то, что входящие в величину α выражение $\sin \frac{\pi T_1}{T}$ очень трудно вычислить, если только T_1 велико по сравнению с T . Например, пусть $T_1 \approx 10 T$. В этом случае ошибка в определении α или T_1 в 10% изменяет величину $\frac{\pi T_1}{T}$

на величину π , т. е. меняет знак у $\sin \frac{\pi T_1}{T}$. Точно вычислить величину T_1 практически представляется невозможным, поскольку при T_1 большом по сравнению с T , следует считать $\sin \frac{\pi T_1}{T}$ равным максимальной возможной его величине, т. е. $+1$. Имея в виду применять формулы (6) и (9) также и в случаях, когда закон равномерного нарастания нагрузки выполнен лишь приблизительно, мы считали полезным величину $\sin \frac{\pi T_1}{T}$ считать равной $+1$, начиная с того момента, когда он впервые достигнет своей максимальной величины, т. е. при всяком T_1 , большем чем $0,5 T$.

Значения величины α , вычисленные в этом предположении, собраны в табл. 1. Величины X , определяемые выражениями (5) и (9), показаны на рис. 3 в виде кривых, где толстыми линиями

Таблица 1
Величины функции α

T_1	α	T_1	α
0,05 *	1,00	0,8 *	0,40
0,1 *	0,98	1,0 *	0,39
0,2 *	0,93	2,0 *	0,16
0,3 *	0,85	3,0 *	0,10
0,4 *	0,76	5,0 *	0,06
0,5 *	0,64	10,0 *	0,03
0,6 *	0,53	∞	0,00

Таблица 2

Продолжительность действия усилка, дающего равный динамический эффект

T_1 *	Минимальная продолжительность, необходимая для производства полного эффекта	
	продолжительность сохранения максимальной величины $T - T_1$	полное время действия T
0,1	0,45 *	0,55 *
0,2	0,40 *	0,60 *
0,3	0,35 *	0,65 *
0,4	0,30 *	0,70 *
0,5	0,25 *	0,75 *
0,6	0,20 *	0,80 *
0,7	0,15 *	0,85 *
0,8	0,10 *	0,90 *
0,9	0,05 *	0,95 *
1,0	0,00 *	1,00 *
2,0	0,00 *	2,00 *
3,0	0,00 *	3,00 *

или обозначены максимальные величины деформаций, а тонкими — величинами, соответствующими моменту прекращения нагрузки. По оси абсцисс отложено отношение T *.

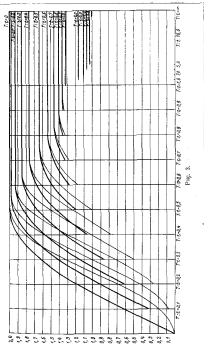


Рис. 3

На рассмотрении величин α следует, что при $T_1 < 0,3\tau$ π нагрузка можно практически считать нарастающей мгновенно. Для того же, чтобы с той же степенью точности (15%) нагрузку можно было считать нарастающей статически, достаточно, чтобы продолжительность нарастания нагрузки T_1 была не менее двух периодов свободных колебаний системы.

Что касается условия (8) — полноты динамического действия, — то, подобно сделанному допущению, что $\sin \frac{\pi T_1}{\tau} = 1$ при всяком $T_1 > \tau$, можно и здесь сделать упрощение: именно считать $T - T_1 = 0$, начиная с того значения T_1 , при котором эта разность обратится в нуль, т. е. начиная с $T_1 = \tau$.

Таблица 2 дает наглядное представление о величинах минимальной продолжительности усилий, вызывающих полный эффект.

Из таблицы видно, что при всяком T_1 нагрузка, сохраняющая свою величину постоянной более, чем в течение полуцикла свободных колебаний, вызывает полный динамический эффект, т. е. эффект, определяемый выражением (6).

§ 5. Влияние продолжительности убывания нагрузки

Обращаясь к исследованию влияния скорости убывания нагрузки, ограничимся простейшим случаем, когда закон уменьшения нагрузки задан прямойлинейной зависимостью:

$$P(t) = P - \frac{P}{T_2} t, \quad (10)$$

где T_2 — продолжительность убывания нагрузки, а время t исчисляется с момента начала этого убывания.

В соответствии с целью нашего исследования будем предполагать, что нагруженная конструкция отклонена от своего положения равновесия в момент начала действия силы, задаваемой выражением (10) в положительную сторону [коэффициент $1 - \alpha \cos \frac{\pi}{\tau} (2t - T_1)$ всегда положительна]. Скорость, которой обладает система в этот момент, будем считать направленной в сторону увеличения деформации (нет смысла последовать кинематической скорости исчезновения нагрузки в том случае, когда система во времени начала убывания нагрузки успела достигнуть максимального своего отклонения).

Таким образом, в момент начала убывания нагрузки, задаваемой выражением (10), система обладает потенциальной V и кинетической T энергией.

Сила, задаваемая уравнением (10), во время своего действия совершает работу

$$R_1 = \int_0^{T_2} \left(P - \frac{P}{T_2} t \right) \left(\frac{dX}{dt} \right) dt,$$

так что полный запас энергии у системы после ее действия выражается величиной

$$V + T + E_1.$$

Сила постоянная P , сохраняющая свою величину в течение времени от $t = 0$ до $t = 0,5 T_2$, совершила бы работу:

$$R_2 = \int_0^{0,5 T_2} P \left(\frac{dX}{dt} \right) dt,$$

и полная энергия после ее действия вылодет:

$$V + T + E_2.$$

Разность величин

$$E_2 - E_1 = \int_0^{0,5 T_2} \left(\frac{dX}{dt} \right) dt - \int_0^{T_2} \left(P - \frac{P t}{T_2} \right) \left(\frac{dX}{dt} \right) dt.$$

Оба интеграла отличаются друг от друга лишь значениями входящих в них величин $\left(\frac{dX}{dt} \right)$.

Если к моменту начала убывания нагрузки система достигла статического отклонения, то движение в интересующий нас период времени замедленное и, очевидно,

$$R_2 - R_1 > 0.$$

Если в рассматриваемый период времени движение системы ускоренное, то

$$R_2 - R_1 < 0,$$

но в этом случае очень легко найти величину максимального значения разности

$$R_2 - R_1.$$

Действительно, если в начальный момент система находится в положении, составляющем φ часть статического отклонения, то ускорение ее равно к начальный момент

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{1}{M} (P - \varphi P).$$

По мере уменьшения нагрузки ускорение убывает. Поэтому $\frac{d^2 X}{dt^2} = \left(\frac{d^2 X}{dt^2} \right)_{t=0}$ растет медленно, чем

$$\int \frac{1}{M} (P - \varphi P) dt = \frac{(1 - \varphi) P}{M} t.$$

Следовательно, $\frac{dX}{dt}$ растет медленно, чем

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)_{t=0} + \frac{1-\nu}{\tau} X_{ст} t (2\pi)^2,$$

где $X_{ст}$ — величина статической деформации и

$$R_2 < R_1 + \frac{F X_{ст}}{2k} (1-\nu) \left(\frac{2\pi T_0}{\tau}\right)^2$$

Отношение $\frac{F + T + R_1}{F + T + R_2}$ есть отношение квадратов максимальных деформаций системы.

Называя буквой X_1 максимальную деформацию системы под влиянием нагрузки, убывающей равномерно в течение времени T_0 , а буквой X_2 — максимальную деформацию под влиянием силы, исчезающей мгновенно в момент $t = 0,5 T_0$, получим

$$X_1 < X_2 \sqrt{1 + \frac{(X_{ст})^2 (1-\nu) \left(\frac{2\pi T_0}{\tau}\right)^2}{(X_2)^2}} \quad (11)$$

если $\nu < 1$, и

$$X_1 < X_2 \quad (12)$$

если $\nu > 1$.

Формулы (11) и (12) дают возможность учитывать скорость убывания нагрузки простым увеличением длительности сохранения нагрузки своей полной величиной.

§ 6. Нагрузка импульсом

При малом T , а следовательно, и T_0 , когда α приближается к единице, X в момент прекращения нагрузки есть, как видно из выражения (5), величина малая 2-го порядка. Потенциальная энергия деформации, пропорциональная величине $[1 - \alpha \cos \frac{\pi}{\tau} \times (2T - T_0)]^2$, есть малая 4-го порядка.

Запас же кинетической энергии, накопленной системой к моменту прекращения нагрузки, пропорционален величине $[\alpha \sin \frac{\pi}{\tau} \times (2T - T_0)]^2$ и есть малая 2-го порядка.

Оскада видно, что при очень малых T и T_0 по сравнению с τ можно не интересоваться накопленной за время действия силы потенциальной энергией и считать движение до и после действия нагрузки как бы мгновенным действием восстанавливающей силы. Влияние нагрузки скажется как бы лишь в сообщении

конструкции начальной скорости, количество которой равно импульсу нагрузки и не зависит ни от максимальной величины усилия, ни от закона нарастания или убывания нагрузки.

Результат этот был получен А. Н. Крыловым непосредственно из рассмотренного интеграла

$$X = \int_0^T F(t) \sin K(t-t) dt.$$

Действительно, из этого интеграла видно, что если T мало по сравнению с τ , то

$$X = \frac{\sin Kt}{K} \int_0^T F(t) dt$$

и

$$X_{max} = \frac{I}{K}, \text{ где } I = \int_0^T F(t) dt \text{ есть импульс нагрузки.}$$

Если T не пренебрежимо мало по сравнению с τ , то

$$X_{max} = \frac{I}{K} \kappa,$$

где κ — некоторый отвлеченный множитель, благодаря действию восстанавливающей силы, всегда меньший единицы.

Легко видеть, что в частном случае, когда сила $F(t)$ сохраняет свою величину постоянной во все время своего действия,

$$\kappa = \frac{\tau}{\pi T} \sin \frac{\pi T}{\tau} = \alpha,$$

причем формула

$$X_{max} = \alpha \frac{I}{K} \quad (13)$$

справедлива при всяком T и τ , лишь бы было $F(t) = const$ при $t < T$. Формулу эту можно считать приближительно верной и тогда, когда сила большую часть действия сохраняет свою величину постоянной.

Рассмотренные вышеприведенные значения функции α , можно констатировать, что при общей продолжительности импульса до 30% от периода свободных колебаний величина α на 15%, меньше единицы и, следовательно, с точностью до 15% такие импульсы можно считать бесконечно краткими.

Наоборот большие импульсы, длящегося больше двух периодов свободных колебаний, составляет лишь 15% от влияния импульса той же величины, но бесконечно краткого.

Вообще же, так как мы условились считать при $T > 0,5\tau$ величину α , равной $\frac{\pi}{2\tau}$, т. е. обратно пропорциональной длительности импульса, то при длительности импульса, большей полупериода свободных колебаний, отклонение зависит уже, очевидно, от величины нагрузки, а не от только величины ее импульса.

Кончан на этом разбор задачи о динамической нагрузке системы, не являющейся слабной в своих сочленениях, обратимся к более сложной задаче, когда такая слабная в отдельных местах системы имеется.

§ 7. Влияние зазора. Постановка задачи

Будем по-прежнему считать, что усилие, действующее на конструкцию, задано в функции от времени ломаной линией (рис. 1). Допустим, что та часть конструкции, на которую действует нагрузка, не находится в непосредственной упругой связи со всей конструкцией. Именно пусть в некотором месте обе части конструкции сопряжены друг с другом с некоторым зазором, подобием, например, зазору в болтовом штыре базируемых оружейных устройств.

Пока этот зазор не выбран в движении участвуют не все части конструкции, а лишь та часть, к которой и приложена нагрузка. Вся производимая последней работа затрачивается на сообщение живой силы этой свободно движущейся части системы. Перемещение точки приложения нагрузки во время этой первоначальной стадии движения будем обозначать буквой X_1 и условимся величину зазора измерять наибольшей величиной (g_0) допускаемого им свободного перемещения точки приложения усилия.

Условимся далее относиться к массе всех движущихся частей к точке приложения нагрузки. Пусть эта масса равна M_1 . Тогда во время первой стадии движения, пока длится в тот момент, когда X_1 становится равным g_0 , имеет место уравнение

$$X_1'' = \frac{F(t)}{M_1}, \quad (14)$$

откуда

$$X_1' = \int_0^t \frac{F(t)}{M_1} dt$$

и

$$X_1 = \int_0^t \int_0^t \frac{F(t)}{M_1} dt dt.$$

Длительность первой стадии движения определяется, очевидно, условием

$$g_0 = \int_0^t \int_0^t \frac{F(t)}{M_1} dt dt.$$

Определив отсюда t_0 , можем из выражения

$$X_0' = \int_0^{t_0} \frac{F(t)}{M_1} dt$$

найти скорость, накопленную свободно движущейся частью системы к моменту исчезновения зазора.

Величина накопленной за это время живой силы

$$T = \frac{M_1}{2} (X_0')^2.$$

Начиная с момента, когда зазор стал равен нулю, вся система начинает участвовать в движении. Характер движения видоизменяется. Все перемещения обуславливаются деформациями системы. Приведенная масса системы M_2 во время второй стадии движения может не равняться той величине, которую масса имела ранее. Наконец, в момент видоизменения движения, благодаря приращению к участию в движении новых масс, может происходить обмен количествами движения между отдельными массами, входящими в состав конструкции.

Поэтому накопленная во время первой стадии движения скорость распределяется в момент соударения частей конструкции между всеми массами, входящими в состав конструкции, как и то свободно сложным путем. Для простоты не будем останавливаться на этом вопросе подробно, а сделаем допущение, что большая часть всей массы конструкции принимает участие как в первой, так и во второй части движения; массы, не принимавшие участия в движении во время первой стадии, — относительно ничтожны и, следовательно, приведенные массы M_2 и M_1 друг другу равны, а величина живой силы, которой располагает система в момент начала второй стадии движения, измеряется величиной

$$T = \frac{M_2}{2} (X_0')^2.$$

Дифференциальное уравнение для второй стадии движения напишется так:

$$Y'' M_2 + \frac{Y}{X} = F(t). \quad (15)$$

Примечание: T здесь названо энергией во время второй стадии движения точки приложения нагрузки.

Начальными условиями для интегрирования этого уравнения являются

$$(Y)_{t=0} = 0 \text{ и } (Y')_{t=0} = Y'_0 = X_0 \quad (15')$$

Назовем буквой y решение уравнения (15) при начальных условиях $(y)_{t=0} = 0$ и $(y')_{t=0} = 0$, а буквой Y решение уравнения (15) при начальных условиях (15').

Очевидно,

$$Y = y + \frac{X_0}{K} \sin Kt \quad (16)$$

В частном случае, когда во время второй стадии движения ускорение сохраняет свою величину постоянной, можно получить весьма простое выражение для максимального значения Y .

Действительно, в этом частном случае работа, совершаемая нагрузкой во время второй стадии движения, от скорости деформации не зависит, а определяется произведением пройденного пути на величину нагрузки.

Поэтому, если бы мы стали сравнивать решения уравнения (15), названные выше буквами Y и y , то можно было бы пользоваться тем, что во всех своих положениях система в первом случае будет обладать полным запасом энергии на T кем большим, чем во втором случае.

В частности в положении, соответствующем двойной статической деформации, система обладает во втором случае только потенциальной энергией:

$$P = \frac{2Y_{cr}^2}{2k}$$

В первом же случае она обладает и кинетической энергией

$$T = \frac{M_1}{2} (X_0')^2$$

Наибольшая деформация в первом случае поэтому может быть получена из уравнения

$$\frac{(Y_{max})^2}{2k} = \frac{(2y_{cr})^2}{2k} + \frac{(X_0')^2 M_1}{2} + \frac{(Y_{max} - 2y_{cr})^2}{k} y_{cr} \quad (17)$$

В этом уравнении последний член первой части изображает работу, производимую нагрузкой во время полета кинетической энергии T .

Из уравнение (17) имеем

$$Y_{max} = y_{cr} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{\lambda M_1 \sin^2 \theta}{(y_{cr})^2}} \right\} \quad (18)$$

Если нагрузка не сохраняет свою величину постоянной во время всей второй стадии движения, найти максимальную дефор-

мацию из уравнения (18) нельзя. В этом случае необходимо пользоваться равенством (16) и искать площадь в него y , пользуясь интегралом (3).

$$y = \lambda F(t) \left[1 - \frac{\int_0^t F(\xi) \cos K(t-\xi) d\xi}{F(t)} \right] \quad (20)$$

§ 8. Влияние зазора. Частные случаи

Рассмотрим простейшие частные случаи.

Случай 1-й. Нагрузка нарастает мгновенно [$F(t) = P$ при t больше нуля].

$$t_0 = \sqrt{\frac{2MY_{cr}}{P}}$$

$$X_0'^2 = \frac{2P y_{cr}}{M_1} = (g_0')^2$$

$$y_{cr} = \lambda P$$

$$Y_{max} = y_{cr} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{2y_{cr}}{k\lambda}} \right\} \quad (19)$$

Случай 2-й. Давление нарастает равномерно в течение времени T_1 , причем T_1 меньше времени t_0 , потребного на исчезновение зазора.

В этом случае

$$y_0 = \int_0^{T_1} \int_0^t \frac{P}{M_1} \frac{t}{T_1} dt dt + \int_0^{t_0} \int_0^t \frac{P}{M_1} dt dt = \frac{P}{2M_1} T_1 \left[1 - \frac{2}{3} \left(\frac{T_1}{t_0} \right)^3 \right] \quad (20)$$

$$k_0 = \frac{P y_0}{M_1} \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{T_1}{t_0} \right)^3 \right]$$

$$(g_0')^2 = \frac{2P y_0}{M_1} f \left(\frac{T_1}{t_0} \right)$$

где

$$f \left(\frac{T_1}{t_0} \right) = \frac{\left(1 - \frac{0,5 T_1^3}{t_0^3} \right)^2}{1 - \frac{2}{3} \left(\frac{T_1}{t_0} \right)^3} \dots \quad (21)$$

Наконец,

$$Y_{max} = y_{cr} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{2y_{cr}}{k\lambda} f \left(\frac{T_1}{t_0} \right)} \right\} \quad (22)$$

Из выражения (20) нетрудно вывести, что

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{t_0}{T_1}\right)^2 &= \frac{\beta^2 + 2}{3}, \\ \frac{t_0}{T_1} &= \frac{2}{3} \left(\frac{\pi T_1}{\pi}\right)^2 \beta^2, \\ f\left(\frac{T_1}{t_0}\right) &= \left[\frac{\beta^2 + 2 - \sqrt{0.75\beta^2}}{\beta}\right]^2 \end{aligned} \right\} (23)$$

так что

Здесь β^2 — коэффициент, определяемый отношением $\frac{t_0}{T_1}$, и в силу сделанного предположения, что $t_0 > T_1$, β всегда больше единицы.

Случай 3-й. Сила парастает равномерно. Время ее нарастания T_1 больше времени t_0 исчезновения зазора.

В этом случае надо пользоваться выражением (16), причем входящие в него u надо вычислять из выражения (5).

Силу нужно считать при этом:

- 1) внезапно возрастающей до величины $\frac{P t_0}{T_1}$;
- 2) равномерно (в течение времени $T_1 - t_0$) возрастающей от величины $\frac{P t_0}{T_1}$ до P ;
- 3) сохраняющей неопределенно долго свою величину P .

Из выражения (16) находим

$$Y = \lambda \left[F(t) - \int_0^t F(\xi) \cos K(t - \xi) d\xi \right] + \frac{P t_0}{K} \sin K t.$$

Для значений t , больших чем T_1 , это выражение дает

$$Y = P t_0 \left\{ 1 - \frac{t_0}{T_1} \cos K t - \frac{t}{\pi T_1} \sin \frac{\pi}{2} (T_1 - t_0) \cos K \left(t - \frac{T_1 - t_0}{2} \right) + \left(\frac{t_0}{K T_1} \right) \sin K t \right\}. \quad (24)$$

Отсюда

$$\frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{P t_0} = \sqrt{\left(\frac{t_0}{T_1}\right)^2 + \frac{t}{\pi T_1} \frac{t_0}{T_1} \sin \frac{2\pi}{2} (T_1 - t_0) + \left(\frac{t}{\pi T_1}\right)^2 + \frac{2}{2} \frac{t}{\pi T_1} \left(\frac{t_0}{K T_1}\right) \sin^2 \frac{\pi}{2} (T_1 - t_0) + \left(\frac{t_0}{K T_1}\right)^2} \quad (25)$$

Нетрудно доказать, что в рассматриваемом случае

$$\left(\frac{t_0}{K T_1}\right)^2 = 1.5 \frac{t_0}{P t_0}. \quad (26)$$

Вводя параметр β^2 посредством зависимости $\frac{t_0}{T_1} = \frac{2}{3} \left(\frac{\pi T_1}{\pi}\right)^2 \beta^2$, легко видеть, что

$$\left(\frac{t_0}{T_1}\right)^2 = \beta^2$$

и

$$\beta < 1;$$

так что выражение для Y_{\max} можно переписать так:

$$\frac{Y_{\max} - Y_{\min}}{P t_0} = \sqrt{\beta^2 + \frac{t}{\pi T_1} \beta \sin \frac{\pi T_1}{2} (1 - \beta) + \left(\frac{t}{\pi T_1}\right)^2 - 2 \frac{t}{\pi T_1} \left[1.5 \frac{t_0}{P t_0}\right] \sin^2 \frac{\pi T_1}{2} (1 - \beta) + 1.5 \frac{t_0}{P t_0}} \quad (27)$$

Примечание. Формулы (24) применимы вплоть до начала убывания нагрузки. Если же необходимо использовать для определения величины деформации под действием нагрузки, начинающей убывать раньше, чем u достигает значения, данного выражением (27), следует поступать совершенно так же, как поступали в § 4 по отношению к формуле (16).

Случай 4-й. Нагрузка парастает статически $\left(\frac{t}{T_1}\right)$, следовательно, пренебрежимо мало, причем отношение $\frac{t_0}{P t_0}$ не слишком велико, так что β можно принимать равным нулю.

В этом случае из формулы (27) получается

$$Y_{\max} = P t_0 \left[1 + \sqrt{1.5 \frac{t_0}{P t_0}} \right].$$

Чтобы численно охарактеризовать влияние зазора, вычислим величину коэффициента

$$N = \frac{Y_{\max}}{P t_0} \frac{1}{(1 + \alpha)}$$

для двух предельных случаев нарастания нагрузки (статического и мгновенного).

Результаты собраны в табл. 3, из которой видно, что при статическом нарастании нагрузки влияние зазора особенно заметно. Зазор, равный трем четвертям статической деформации, увеличивает деформацию вдвое, т. е. как и бесполезность нарастания нагрузки.

Принимать в расчет величину зазора поэтому имеет особый смысл тогда, когда конструкция не будь зазора, рассчитывалась бы статически.

Статически же рассчитываются обычно жесткие конструкции, перед собственными колебаниями косяк, а значит и статическая деформация — мала.

В таких конструкциях отношение $\frac{E_2}{E_1}$ может достигать большой величины и тем большей, чем жестче рассчитываемая конструкция. Поэтому принимать во внимание влияние зазора казалось бы имеет тем больше смысла, чем жестче рассчитываемая конструкция.

Примеры, с которыми нам приходится сталкиваться в расчетах, позволяют думать, что в подкрепленных под оруди и вообще

Таблица 3

Величина коэффициента N

β_2/β_1	Значение коэффициента N	
	в случае гладкого нарастания нагрузки	в случае мгновенного нарастания нагрузки
	$(\alpha = 0)$	$(\alpha = 1)$
0,25	1,61	1,11
0,50	1,81	1,22
0,75	2,06	1,29
1,00	2,23	1,36
1,50	2,50	1,50
2,00	2,75	1,61
3,00	3,12	1,62
5,00	3,74	2,16
10,00	4,87	2,79

в балках, в коих допускаются весьма большие напряжения, динамическая сторона вопроса сводится к влиянию деформации сравнительно мало влияет на величину зазора в боевом штыре сравнительно мало влияет на напряжение в жестких барабанах, поддерживающих башню. Влияние зазора может иметь особенно большое значение в частях механизма, подверженных нагрузке переменного знака. В таких механизмах, помимо того, величина зазора в передачах может служить даже критерием при выборе допустимых напряжений в материале.

6. О ДЕЙСТВИИ МГНОВЕННЫХ СИЛ НА СВОБОДНЫЙ НЕПРИЗМАТИЧЕСКИЙ СТЕРЖЕНЬ*

1. Упругие колебания свободного непризматического стержня определяются уравнением

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} [EJ(z) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}] = q(z, t) - m(z) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где $EJ(z)$ — жесткость стержня по отношению к изгибу;
 $m(z)$ — масса единицы его длины;
 $q(z, t)$ — интенсивность возмущающих сил;
 v — поперечное перемещение рассматриваемого сечения стержня;
 z — ордината, измеренная вдоль его оси;
 t — время;

и граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} M = EJ(z) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = l, \\ N = \frac{\partial}{\partial z} [EJ(z) \frac{\partial v}{\partial z}] = 0 \quad \text{при } z = 0 \text{ и } z = l, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Если стержень к моменту начала действия нагрузки $q(z, t)$ находился в состоянии покоя, то перемещения v должны удовлетворять в дополнение к уравнениям (1) и (2), которые должны иметь место при всяком t , еще начальным условиям движения

$$v = \frac{\partial v}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0, \quad (3)$$

Т. е. в момент начала действия нагрузки $q(z, t)$.
 Решение уравнения (1) при дополнительных условиях (2) и (3) может быть найдено в форме ряда

$$v = \sum_k v_k(z) p_k(t), \quad (4)$$

* Работа выполнена в Самарканде, 1944 г. Печатается впервые.

где функции $v_k(z)$ определяются дифференциальными уравнениями

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[EJ(z) \frac{d^2 v_k(z)}{dz^2} \right] - \omega(z) \lambda_k^2 v_k(z) \quad (5)$$

и граничными условиями

$$\left. \begin{aligned} EJ(z) \left[\frac{d^2 v_k(z)}{dz^2} \right] &= 0, \\ \frac{d}{dz} \left[EJ(z) \frac{d^2 v_k(z)}{dz^2} \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } z=0 \text{ и } z=l \quad (6)$$

и определяют собой формы главных свободных колебаний рассматриваемого стержня, а $P_k(t)$ — соответствующие каждой из этих форм главные координаты рассматриваемой упругой системы и определяются уравнениями:

$$M_k \ddot{P}_k(t) + N_k \dot{P}_k(t) = P_k(t), \quad (7)$$

где

$$M_k = \int_0^l m(z) v_k^2(z) dz; \quad (8)$$

$$N_k = \int_0^l EJ(z) [\omega_k^2(z)]^2 dz; \quad (9)$$

$$P_k(t) = \int_0^l q(z, t) v_k(z) dz \quad (10)$$

Формулами (8) определяются так называемые обобщенные массы; формулами (9) — обобщенные жесткости, формулами (10) — обобщенные силы, соответствующие каждой из главных координат рассматриваемого стержня.

Как известно из общей теории малых изгибных колебаний, функции $v_k(z)$ всегда могут быть подобраны так, чтобы при всевозможных k и n было

$$\int_0^l \omega(z) v_k(z) v_n(z) dz = 0, \text{ если } k \neq n. \quad (11)$$

Свойство форм главных свободных колебаний, выражаемое равенством (11), позволяет разложить любую функцию, заданную в пределах от 0 до l в ряд по формам главных свободных колебаний рассматриваемого стержня с помощью приема Фурье.

В частности, можно и непосредственно возмущающих сил $q(z, t)$ представить в форме ряда:

$$q(z, t) = \omega(z) \sum_k g_k(t) v_k(z), \quad (12)$$

где $g_k(t)$ — определенные функции от времени.

Для разложения ω -й из этих функций достаточно умножить обе части равенства (12) на $v_n(z) dz$ и проинтегрировать полученный результат от $z=0$ до $z=l$.

Это даст

$$\int_0^l q(z, t) v_n(z) dz = \sum_k g_k(t) \int_0^l \omega(z) v_n(z) v_k(z) dz = g_n(t) M_n, \quad (13)$$

откуда следует

$$g_n(t) = \frac{1}{M_n} \int_0^l q(z, t) v_n(z) dz = \frac{P_n(t)}{M_n}. \quad (14)$$

2. В число форм главных свободных колебаний совершенно свободного стержня входит две линейные функции от z , соответствующие перемещению рассматриваемого стержня, собственным ему как телом изгиб.

Действительно, положим в равенствах (5) и (6)

$$\lambda_k^2 = 0. \quad (15)$$

будем иметь для определения соответствующих $v_k(z)$ уравнение

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[EJ(z) \frac{d^2 v_k(z)}{dz^2} \right] = 0 \quad (16)$$

и граничные условия (6).

Интегрируя уравнение (16), получим

$$EJ(z) \frac{d^2 v_k(z)}{dz^2} = A_k z + B_k, \quad (17)$$

что может быть подчинено граничным условиям при $z=0$, даваемым равенствами (6), только в том случае, если

$$A_k = B_k = 0. \quad (18)$$

Положив в равенстве (17)

$$A_k = B_k = 0,$$

получим для определения соответствующих $v_k(z)$

$$EJ(z) \frac{d^2 v_k(z)}{dz^2} = 0 \quad (19)$$

или, так как $EJ(x) \neq 0$,

$$\frac{d^2 \varphi_k(x)}{dx^2} = 0, \quad (20)$$

что после интегрирования по x дает

$$\varphi_k(x) = C_k x + D_k, \quad (21)$$

где C_k и D_k — две постоянные интегрирования (произвольные).

Варируя соотношение между C_k и D_k , можно сделать $\varphi_k(x)$, определяемое формулой (21), соответствующим любым двум перемещениям рассматриваемого стержня, свойственным ему как твердому телу.

Наиболее естественными из этих перемещений являются поступательное перемещение, определяемое формулой (21), при $C_k = 0$, и вращательное перемещение вокруг центра тяжести.

Чтобы формула (21) дала первое из этих перемещений, достаточно положить в равенстве (21)

$$C_k = 0, \quad D_k = 1.$$

Этой форме перемещений рассматриваемого стержня присвоим номер $k = 0$.

Тогда

$$\varphi_0(x) = 1. \quad (22)$$

Чтобы $\varphi_k(x)$, определяемое равенством (21), соответствовало вращению рассматриваемого стержня вокруг его центра тяжести, достаточно подобрать в формуле (21) C_k и D_k так, чтобы было

$$\int_0^l m(x) (C_k x + D_k) dx = 0,$$

т. е. сделать

$$D_k = -C_k \frac{\int_0^l m(x) x dx}{\int_0^l m(x) dx}. \quad (23)$$

или, что то же,

$$D_k = -C_k a, \quad (24)$$

где

$$a = \frac{\int_0^l m(x) x dx}{\int_0^l m(x) dx}. \quad (25)$$

Положим

$$\left. \begin{aligned} C_k &= \frac{1}{l} \\ D_k &= -\frac{a}{l} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

и

$$\varphi_k(x) = \frac{x-a}{l}. \quad (27)$$

будем иметь

Этому возможному перемещению рассматриваемого стержня присвоим номер $k = -1$.

Тогда

$$\varphi_{-1}(x) = \frac{x-a}{l}. \quad (28)$$

где a определяется равенством (25).

Перемещения, определяемые функциями

$$\varphi_k = 1$$

и

$$\varphi_{-1} = \frac{x-a}{l},$$

условием уравновешенности соответствующих им сил стержни не удовлетворяют. Что касается всех остальных форм главных свободных колебаний, то, интегрируя уравнение (5) по x дважды и применяя во внимание граничные условия (6), можно видеть, что при всех k , больших чем нуль,

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k^2 \int_0^l m(x) \varphi_k(x) dx &= 0; \\ \lambda_k^2 \int_0^l m(x) \varphi_k(x) dx^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Отсюда видно, что все формы главных свободных колебаний рассматриваемого стержня, соответствующие различным его колебаниям, удовлетворяют в силу (5) и (6) условию уравновешенности сил стержня как в смысле главного вектора этих сил, так и в смысле их главного момента. Для всех этих колебаний $\lambda_k \neq 0$.

Присвоив этим колебаниям нумерацию $k = 1, 2, 3, \dots, \infty$, условимся нумеровать главные свободные упругие колебания стержня в порядке возрастания соответствующих им чисел λ_k . Тогда можно будет принять

$$p = p_0(t) + \frac{x-a}{l} p_{-1}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) p_k(t). \quad (30)$$

где функции $v_k(z)$ определяются дифференциальными уравнениями (5), граничными условиями (6) и дополнительными условиями

$$0 < \lambda_1^2 < \lambda_2^2 < \lambda_3^2 < \lambda_4^2 \dots < \lambda_k^2 < \dots < \lambda_\infty^2 \quad (31)$$

3. Допустим, что $q(x, t)$ задано как произвольная функция от x и t . Тогда $P_k(t)$, определяемые равенствами (10), будут некоторыми заданными произвольного вида функциями от t и интеграл уравнений (7), удовлетворяющий граничным условиям

$$P_k(0) = 0 \quad P_k'(0) = 0, \quad (32)$$

можно будет выписать в форме равенств

$$P_k(t) = \int_0^{t-1} \frac{P_k(\xi)}{\lambda_k M_k} \sin \lambda_k (t - \xi) d\xi \quad \text{при } k = 1, 2, 3, \dots, \infty \quad (33)$$

и

$$P_k(t) = \int_0^t \frac{P_k(\xi)}{M_k} d\xi \quad \text{при } k = 0, -1. \quad (34)$$

4. Обратимся к разложению криволинейных моментов в рассматриваемом стержне. Их можно определить как с помощью зависимости

$$M = EJ(z) \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = EJ(z) \sum_{k=-1}^{\infty} v_k(z) P_k(t), \quad (35)$$

так и путем интегрирования уравнения

$$\frac{\partial^2 M}{\partial z^2} = q = q(x, t) - w(z) \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}, \quad (36)$$

при граничных условиях

$$M = \frac{\partial M}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = 0. \quad (37)$$

Покажем, что оба приема приводят к одному и тому же выражению для M .

Подставим в равенство (35), т. е. в равенство

$$M = \sum_{k=-1}^{\infty} EJ(z) \frac{\partial^2 v_k(z)}{\partial z^2} P_k(t),$$

величины $EJ(z) \frac{\partial^2 v_k(z)}{\partial z^2}$, найденные интегрированием уравнений (5) при граничных условиях (6), т. е. величины

$$EJ(z) \frac{\partial^2 v_k(z)}{\partial z^2} = \lambda_k^2 \int_0^z \int_0^z w(x) v_k(x) dx^2, \quad (38)$$

видны, что выражение (35) равносильно равенству

$$M = \sum_{k=-1}^{\infty} \int_0^z \int_0^z w(x) v_k(x) \lambda_k^2 P_k(t) dx^2, \quad (39)$$

или, приняв во внимание равенства (33),

$$M = \sum_{k=-1}^{\infty} \int_0^z \int_0^z \frac{w(x) v_k(x)}{M_k} dx^2 \lambda_k \int_0^{t-1} P_k(\xi) \sin \lambda_k (t - \xi) d\xi. \quad (40)$$

Полученному выражению можно также придать вид

$$M = \sum_{k=-1}^{\infty} \int_0^z \int_0^z \frac{w(x) v_k(x)}{M_k} R_k(t) dx^2, \quad (41)$$

где через $R_k(t)$ обозначены функции:

$$R_k(t) = \lambda_k \int_0^{t-1} P_k(\xi) \sin \lambda_k (t - \xi) d\xi. \quad (42)$$

Все члены для (41) тождественно равны соответствующим членам ряда (35). Поэтому оба ряда должны сходиться одинаково быстро.

Подставим теперь t из (4) в равенство (36). Проинтегрировав полученное выражение дважды по z , будем иметь, принимая во внимание, что при $z = 0$ должно быть $M = \frac{\partial M}{\partial z} = 0$,

$$M = \int_0^z \int_0^z \left[q(x, t) - w(x) \sum_{k=-1}^{\infty} v_k(x) P_k'(t) \right] dx^2, \quad (43)$$

где через ()' обозначены производные по t .

Примем во внимание равенства (33) и (34), легко видеть, что

$$P_k'(t) = -\frac{1}{M_k} P_k(t) \quad \text{при } k = 0 \text{ и } k = -1 \quad (44)$$

и

$$P_k'(t) = \lambda_k \frac{d}{dt} \int_0^{t-1} \frac{P_k(\xi)}{\lambda_k M_k} \cos \lambda_k (t - \xi) d\xi =$$

$$= \left[\frac{P_k(t)}{M_k} - \int_0^{t-1} \frac{P_k(\xi) \lambda_k}{M_k} \sin \lambda_k (t - \xi) d\xi \right] = \frac{P_k(t)}{M_k} - \lambda_k^2 P_k(t) \quad (45)$$

при $k = 1, 2, 3, \dots, \infty$.

что по подстановке в равенство (43) дает

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[q(z, \theta) - w(z) \sum_{k=1}^{\infty} v_k(z) \frac{P_k(\theta)}{M_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 w(z) v_k(z) P_k(\theta) \right] dz^2, \quad (46)$$

По согласию (12) и (14)

$$w(z) \sum_{k=1}^{\infty} v_k(z) \frac{P_k(\theta)}{M_k} = q(z, \theta) \quad (47)$$

и, следовательно,

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} w(z) v_k(z) \lambda_k^2 P_k(\theta) dz^2, \quad (48)$$

что совпадает с равенством (39) и, следовательно, равносильно равенствам (41) и (42).

Таким образом, оба рассмотренных пути приводят к одному и тому же выражению для искомого момента M . Однако ряд для M , получаемый из уравнения (36) при граничных условиях (37), обращается в ряд (47), а следовательно, и в (41), (42), только после сокращения в равенстве (46) первых двух членов. Если мы в равенстве (46) сокращения первых двух членов не производим, а переносим равенство (46) так:

$$M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[q(z, \theta) - w(z) \left[v_k(z) \frac{P_k(\theta)}{M_k} + v_{k+1}(z) \frac{P_{k+1}(\theta)}{M_{k+1}} \right] \right] dz^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} w(z) \lambda_k^2 v_k(z) \left[P_k(\theta) - \frac{P_k(\theta)}{\lambda_k M_k} \right] dz^2, \quad (49)$$

то полученный ряд для M будет сходиться несколько иначе, чем ряд (39), тождественный с рядом (35).

5. Выясним, какое из двух полученных выражений для M удобнее для практического использования: выражение (39) или же выражение (49)? Для этого рассмотрим сходимость рядов, входящих в данные выражения. Начнем с выражения (39). Введем обозначение

$$M_k(z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} w(z) v_k(z) dz^2, \quad (50)$$

можно придать выражению (39) вид

$$M = \sum_{k=1}^{\infty} M_k(z) \lambda_k^2 P_k(\theta). \quad (51)$$

Входящие в выражение (50) функции $v_k(z)$ определяются их дифференциальными уравнениями и граничными условиями лишь с точностью до произвольных постоянных множителей, распорядившись которыми можно каждую из функций увеличивать или уменьшать во всех точках стержня и одно и то же число раз. Условием подбирать эти множители (как принято говорить в математике нормализовать функции $v_k(z)$) так, чтобы максимальное значение абсолютной величины каждой из функций $v_k(z)$ было равно единице.

Тогда все собственные массы M_k , определяемые равенствами (8), будут величинами одного порядка и тем смысле, что будут составлять примерно одну и ту же долю от фактической массы всей колеблющейся системы.

Подынтегральные выражения в равенствах (50) будут при этом величинами одного и того же порядка малости. Чем больше, однако, число k , тем короче те участки данных балки, на протяжении каждого из которых величина $v_k(z)$ сократит свой шаг.

Так как длина каждого из этих участков убывает при достаточно больших значениях k приблизительно как $\frac{1}{k}$, то первые интегральные кривые от $w(z) v_k(z)$ пропорциональным приближению $\frac{1}{k}$, вторые же интегральные кривые, т. е. функции $M_k(z)$, убывают с увеличением k приблизительно как $\frac{1}{k^2}$.

Что касается величин $\lambda_k^2 P_k(\theta)$, то, как можно видеть из равенств (7) и (33), величины $P_k(\theta)$ убывают с увеличением k приблизительно как $\frac{P_k(\theta)}{\lambda_k^2 M_k}$, величины же $\lambda_k^2 P_k(\theta)$ — приблизительно как $\frac{P_k(\theta)}{M_k}$.

Принимая во внимание, что M_k с увеличением k резко не убывают, можно принять, что величины $\lambda_k^2 P_k(\theta)$ убывают с увеличением k только в той мере, в которой убывают функции $P_k(\theta)$.

Эти последние функции, как видно из (10), убывают при большом k , если нагрузка распределена вдоль того или иного участка стержня примерно как $\frac{1}{k}$, если же она сосредоточена в определенной точке стержня, — являются все величинами одного порядка. Поэтому отдельные члены ряда (51) убывают при больших значениях k по крайней мере, как $\frac{1}{k^2}$. Весь ряд является, таким образом, сходящимся довольно хорошо.

Что касается выражения (49), то согласно ему

$$M = M^*(z, t) + \Delta M(z, t), \quad (52)$$

где

$$M^*(z, t) = \int_0^z \int_0^t \left\{ q(x, t) - \omega(z) \left[\sigma_1(z) \frac{P_1(t)}{M_1} + \sigma_{-1}(z) \frac{P_{-1}(t)}{M_{-1}} \right] \right\} dx dt, \quad (53)$$

$$\Delta M(z, t) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k(z) \lambda_k^2 \left[P_k(t) - P_k(t)_{cr} \right], \quad (54)$$

и через $M_k(z)$ обозначены те же функции, что и в равенстве (50), через $P_k(t)_{cr}$ обозначены величины

$$P_k(t)_{cr} = \frac{P_k(t)}{\lambda_k^2 M_k} = \frac{1}{\lambda_k^2} P_k(t), \quad (55)$$

т. е. вычисленные статически значения всех определяющих изгиб рассматриваемого стержня его координат, соответствующим мгновенному значению обобщенных сил $P_k(t)$ в рассматриваемый момент времени.

Если длительность изменения нагрузки $q(z, t)$ хоть сколько-нибудь велика во времени, полная же длительность ее действия превышает период основного главного свободного упругого колебания стержня, то в отклике тех упругих колебаний у которых k велико, а период собственных свободных колебаний достаточно мал, силы $P_k(t)$, соответствующие нагрузке $q(z, t)$, должны считаться действительными примеро статически. Разность между истинными значениями величин $P_k(t)$, вычисленными, исходя из уравнений (7) динамически, и их статической величины $P_k(t)_{cr}$, определяемой равенствами (55), составляет в этом случае лишь малую долю от $P_k(t)$, притом тем меньшую, чем больше $P_k(t)$. Поэтому если нагрузка $q(z, t)$ возникает во времени достаточно плавно, то ряд (54) составляет малую поправку к основной величине изгибающего момента, определяемой равенством (53), и сходится значительно лучше, чем ряд (51).

Если длительность действия нагрузки $q(z, t)$ мала по сравнению с периодом основного главного свободного колебания стержня, и тем более, если она очень мала по сравнению с периодами нескольких его низших обертонов, то величины $P_k(t)$, соответствующие наименьшим целым значениям k , могут оказаться значительно меньшими, чем $P_k(t)_{cr}$, соответствующие тем же значениям k . В этих случаях динамическая поправка $\Delta M(z, t)$, определяемая равенством (54), может оказаться значительно большей, чем величины момента, вычисленного с помощью формулы (53), и ряд (54) может при малых значениях k оказаться сходящимся хуже, чем ряд (51).

Пользуясь формулами (52) + (54), или, что то же, формулой (49), можно в тех случаях, когда длительность действия нагрузки

$q(z, t)$ либо превышает период основного на главных свободных упругих колебаний рассматриваемого стержня, либо же является величиной одного порядка с этим периодом.

Если длительность действия нагрузки $q(z, t)$ мала по сравнению с периодом основного или (тем более) по сравнению с периодами нескольких его низших обертонов на главных свободных упругих колебаний исследуемого стержня, то замена равенства (51) равенствами (52) + (54), т. е. замена равенства (39) равенством (49), не приносит в вычислительном отношении пользы.

В равенстве (52) членом $M^*(z, t)$ определяется величина того изгибающего момента, который соответствует совместному действию на рассматриваемый стержень мгновенного значения внешней нагрузки $q(z, t)$ и уравновешивающих главный вектор и главный момент этой нагрузки сил инерции его масс от перемещений, свойственных ему как твердому телу. Членом же $\Delta M(z, t)$, определяемым равенством (54), дается поправка на деформируемость рассматриваемого стержня.

Чем жестче исследуемый стержень и тем больше растянуто по времени действие нагрузки $q(z, t)$, тем лучше изображается действие этой нагрузки на рассматриваемый стержень первым членом равенства (52), тем меньше получается поправка на деформируемость стержня, определяемая рядом (54), и тем лучше сходится этот последний ряд по сравнению с рядом (51).

Чем гибче рассматриваемый стержень, чем стремительнее изменчивость нагрузки $q(z, t)$ во времени и чем больше может отличаться ее действие от действия той же нагрузки на стержень бесконечно жесткий и тем хуже сходится ряд (54) для поправки на деформируемость рассматриваемого стержня по сравнению с рядом (51), которым определяется величина вычисляемого изгибающего момента.

Нет поэтому ничего удивительного в том, что в одних случаях более удобным в вычислительном отношении оказывается выражение (51), в других же выражения (52) + (54).

Во всяком частном случае полезно помнить, чем переходить к практическому использованию той или иной из данных этих равенств при расчетах с тем, прикинуть хотя бы грубо, от какой из двух схем можно ожидать лучшего результата и такой из них, следовательно, и воспользоваться.

7. О ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТРУБЧАТЫХ МОСТОВ*

1. При экспериментальном изучении упругих колебаний мостов зарегистрированы случаи такого соотношения частот различных главных свободных колебаний их, которое не может быть объяснено с точки зрения обычной теории, рассматривающей только плоско-параллельные колебания мостов в каждой из двух главных плоскостей изгиба их. Для объяснения этого явления предложены две теории. Одна из них предполагает, что при горизонтальном колебании моста его обе горизонтальные фермы совершают колебания различные, так что верхняя часть колеблется над нижней подобно балдахину. Вторая часть, что боковые колебания моста всегда осложняются наличием в них таких движений, в которых поперечные сечения моста, сохраняя свою форму, вращаются воле некоторых, быть может иногда перемещающихся центров.**

Если первая из этих теорий предполагает, что вертикальные и горизонтальные колебания моста происходят всегда друг от друга независимо, то вторая содержит в себе столь же произвольное допущение о неизменяемости формы поперечного сечения моста.

Цель настоящей статьи — изложить общую теорию колебания мостов, свободную от обоих допущений.

Наше рассуждение для простоты выкладок будет предполагать, что рассматриваемый мост состоит из двух пар плоско-параллельных ферм, причем опять-таки для простоты будем считать раскосые конструкции всех ферм заменяемыми эквивалентными им стенками. Благодаря этому допущению рассматриваемый мост можно будет считать рядом пустотелой прямоугольной трубы. Толщину металлических стенок ее обозначим знаками δ , t_1 и t_2 , высоту — буквой h , ширину — буквой a . Будем предполагать, что в углах этой трубы к ней присоединены пойки, площадь сечения которых обозначим знаком F_1 и F_2 (рис. 1).

* Вторая записка к журналу «Известия механики и прикладной математики», т. II, 1931.

** См. статью канд. С. Березиной «Исследование свободных поперечных колебаний пролетных строений». Труды НТК — НКПС, вып. 88, стр. 121 и Труды НТК — НКПС, вып. 89, стр. 85.

Известно, что если высота и ширина балки невелики по сравнению с ее длиной, то в ее плоско-параллельных колебаниях (в низших тонах этих колебаний) силы инерции от продольных перемещений балки, сопутствующих ее поперечному изгибу, играют пренебрежимо малую роль. Будем считать, что поперечные размеры моста малы по сравнению с его длиной, и, полагая, что к его торсовым сечениям соевых усилителей не приложено, примем, что продольная составляющая главного вектора ускорения, действующая в поперечных сечениях моста, равна нулю.

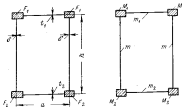


Рис. 1.

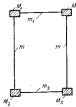


Рис. 2.

Противоположные фермы моста предполагаем соединенными между собой жесткими поперечными рамками, сопротивляющимися перемещению поперечных сечений моста. Жесткость этих рам будем считать известной и конечной; условия, действующие в рамках, пропорциональными углам перегиба поперечного сечения моста воле длины рамы, такие же рамы поставленным настолько мосто, что их жесткость с достаточной точностью можно считать распределенной вдоль всего моста.

Массы, входящие в состав моста, будем характеризовать их величинами, приходящейся в данной точке моста на единицу его длины, и при этом им обозначения (рис. 2):

- M_1 — масса единицы длины каждого из верхних поскок;
- M_2 — масса единицы длины каждого из нижних поскок;
- m — масса единицы длины каждой стенки вертикальных ферм;
- m_1 — масса единицы длины стенки верхней горизонтальной фермы;
- m_2 — масса единицы длины стенки нижней горизонтальной фермы.

Массы мы примем равномерно распределенными вдоль вертикали, массы m_1 и m_2 — вдоль ширины моста. Что же касается

закон распределения масс моста вдоль него, то величина M_x , M_y , m , v_x и v_y будем считать некоторыми функциями от координаты z , измеренной вдоль моста. В частном случае, когда массы моста распределены вдоль него равномерно, величины эти будут постоянными.

Будем рассматривать исключительно свободные поперечные колебания моста, пользуясь для этого методом обобщенных координат и записывая движения в форме Лагранжа.

От целого ряда сделанных выше для упрощения допущений можно и отказаться. Мы не делаем этого, однако, так как имеем в виду на простейшем примере выяснить общий характер явления.

2. Полную величину потенциальной энергии моста можно в силу сделанных выше допущений считать суммой потенциальной энергии деформации продольных ферм моста V_1 и потенциальной энергии деформации поперечных его рам V_2 :

$$V = V_1 + V_2 \quad (1)$$

Если мост достаточно длинный, а стенки всех его ферм достаточно жестки, то при вычислении потенциальной энергии деформаций его продольных ферм можно потенциальной энергией сдвига в его стенках пренебречь, исходя при вычислении величины V_1 исключительно из величин продольных растягивающих и сжимающих напряжений в нем. Это допущение сначала и применяем; общий случай, когда деформации сдвига в стенках всех ферм не являются пренебрежимо малыми, будет рассмотрен ниже.

Переходя к определению потенциальной энергии растяжения и сжатия продольных ферм моста, следует отметить, что вопрос в рассматриваемом случае осложняется тем, что поскольку F_1 и F_2 входят одновременно в состав вертикальных и горизонтальных балок так, что нельзя указать, какая их часть должна быть отнесена к одной из них и какая к другой. Нельзя также воспользоваться при решении поставленной задачи и гипотезой плоских сечений, так как цель нашего исследования — рассмотреть всевозможные общие колебания моста, включая и те, в которых его противоположные фермы перекашиваются в различные стороны.

Вспользуемся некоторым обобщением гипотезы плоских сечений и будем считать, что нормальные напряжения p , действующие в поперечных сечениях моста, изменяются на протяжении каждой из стенок рассматриваемой трубчатой балки по некоторому линейному закону. В остальном не будем связывать закон распределения нормальных напряжений p никакими произвольными допущениями и будем попросту, и в частности, считать возможным и распределение напряжений, изображенное на рис. 3. Однако истинность или изменчивость напряжений на протяжении каждой из четырех стенок рассматриваемой трубы будем считать пропорциональной модулю Юнга материала и кривизне рассматри-

ваемой стенки в плоскости ее наибольшей жесткости. Располагаем координатные оси в центре перекашивания:

- v_1 — горизонтальное нижней горизонтальной фермы;
- v_2 — горизонтальное верхней горизонтальной фермы;
- v_3 — вертикальное левой фермы;
- v_4 — вертикальное правой фермы.

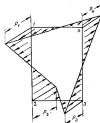


Рис. 3.

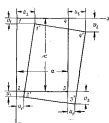


Рис. 4.

как показано на рис. 4, будем считать, что напряжения в левой стенке моста могут быть изображены равенством

$$p = p_1 - E\sigma \frac{\partial v_1}{\partial z} \quad (2)$$

в нижней горизонтальной стенке:

$$p = p_2 - E\sigma \frac{\partial v_2}{\partial z} \quad (3)$$

в правой вертикальной стенке:

$$p = p_3 - E(\delta - y) \frac{\partial v_3}{\partial z} \quad (4)$$

в верхней горизонтальной:

$$p = p_4 - E(a - x) \frac{\partial v_4}{\partial z} \quad (5)$$

В этих формулах знаменатели P_1, P_2, P_3 и P_4 обозначены напряжения в узловых точках 1, 2, 3 и 4, связанными между собой зависимостями

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= P_1 - E \delta \frac{\partial v_1}{\partial x^2} ; \\ P_2 &= P_2 - E \alpha \frac{\partial v_2}{\partial x^2} ; \\ P_3 &= P_3 + E \delta \frac{\partial v_3}{\partial x^2} ; \\ P_4 &= P_4 + E \alpha \frac{\partial v_4}{\partial x^2} . \end{aligned} \right\} (6)$$

в силу которых перемещения v_1, v_2, v_3 и v_4 должны быть связаны между собой уравнением

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_2 - v_1) + \frac{1}{\delta} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (v_4 - v_3) = 0. \quad (7)$$

Двойное интегрирование этого уравнения показывает, что между величинами v_1, v_2, v_3 и v_4 должна существовать квазилинейная зависимость

$$\frac{v_2 - v_1}{\alpha} + \frac{v_4 - v_3}{\delta} = \alpha + \beta \frac{x}{l}, \quad (8)$$

где α и β две величины, не зависящие от координаты x , и l — длина моста.

Зависимость (8) не подтверждает предположения о неэквивалентности формы поперечного сечения моста. Действительно, например, в частном случае, когда все стенки моста своими концами опираются на жесткие опоры, так что при $x=0$ и $x=l$

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0$$

величины α и β равны нулю, и уравнение (8) принимает вид

$$\frac{v_2 - v_1}{\alpha} = \frac{v_4 - v_3}{\delta}. \quad (9)$$

Равенство показывает, что в этом случае (см. рис. 4), при повороте прямой 2—3 на какой-либо угол по часовой стрелке, прямая 2—1 поворачивается на тот же угол, но в противоположном направлении. Первоначально прямоугольное поперечное сечение моста превращается в изогнутой четырехугольник, биссектрисы всех углов которого не покидают своего положения в пространстве.

В общем случае, когда величины α и β не равны нулю, при повороте прямой 1—2, как показывает равенство (8), первоначально прямоугольные поперечные сечения моста превращаются в изогнутые четырехугольники, у которых поворот биссектрис всех углов есть линейная функция от координаты x .

3. Продолжим наши рассуждения относительно распределения нормальных напряжений в поперечных сечениях рассматриваемой трубчатой балки.

Для того чтобы суммарное осевое усилие, действующее по всем поперечным сечениям, было равно нулю, необходимо равенство интеграла от напряжения p , распространенного на всю площадь поперечного сечения продольных связей, также нулю:

$$\iint p \, dx \, dy = 0. \quad (10)$$

С помощью выражений (2), (3), (4), (5) и (6) напряжения в любой точке поперечного сечения могут быть выражены через одну из величин p_i , например через p_1 и через производные $\frac{\partial v_1}{\partial x^2}$;

$\frac{\partial v_2}{\partial x^2}$; $\frac{\partial v_3}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial v_4}{\partial x^2}$. Подставив их в выражение (10), можно из этого последнего выразить p_1 через производные $\frac{\partial v_1}{\partial x^2}$; $\frac{\partial v_2}{\partial x^2}$; $\frac{\partial v_3}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial v_4}{\partial x^2}$ и подстановкой найденного p_1 в равенства (2), (3), (4), (5) и (6) выразить p только через $\frac{\partial v_1}{\partial x^2}$; $\frac{\partial v_2}{\partial x^2}$; $\frac{\partial v_3}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial v_4}{\partial x^2}$. После этого с помощью равенства (7) можно из данных выражений исключить производную $\frac{\partial v_4}{\partial x^2}$, после чего нормальное напряжение p окажется во всех точках поперечного сечения выраженным уже только через три неизвестные производные: $\frac{\partial v_1}{\partial x^2}$; $\frac{\partial v_2}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial v_3}{\partial x^2}$.

Подставив найденные общие выражения для p в формулу

$$V_1 = \frac{1}{2} \iiint \frac{p^2}{E} \, dx \, dy \, dz,$$

где интегрирование распространяется на весь объем металлического продольного сечения моста, можно выразить потенциальную энергию деформации их через три производные:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial v_3}{\partial x^2}.$$

Нетрудно видеть, что получаемое выражение будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ A_{11} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x^2} \right)^2 + 2A_{12} \frac{\partial v_1}{\partial x^2} \frac{\partial v_2}{\partial x^2} + \right. \\ &+ 2A_{13} \frac{\partial v_1}{\partial x^2} \frac{\partial v_3}{\partial x^2} + A_{22} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x^2} \right)^2 + \\ &+ 2A_{23} \frac{\partial v_2}{\partial x^2} \frac{\partial v_3}{\partial x^2} + A_{33} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x^2} \right)^2 \left. \right\} dx, \end{aligned} \right\} (11)$$

где величины $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{33}$ выражены через $P_1, P_2, \alpha, \delta, \delta$.

l_1, l_2 и есть некоторые функции от z . Только в том частном случае, если все величины $F_1, F_2, \alpha, k, \delta, t_0, l_1$ от z не зависят, величины $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{nn}$ обращаются в величины постоянные.

4. Потенциальную энергию поперечных рам условимся считать определяемой углом поворота их, т. е. величиной

$$\frac{v_1 - v_2}{a} - \frac{w_1 - w_2}{b}.$$

Обозначив знаком C_i коэффициент жесткости i -ой рамы, можно считать ее потенциальную энергию равной

$$\frac{1}{2} C_i \left\{ \frac{(v_1 - v_2)}{a} - \frac{(w_1 - w_2)}{b} \right\}^2,$$

и за потенциальную энергию их всех вместе принимать

$$V_2 = \frac{1}{2} \sum C_i \left\{ \frac{(v_1 - v_2)}{a} - \frac{(w_1 - w_2)}{b} \right\}^2.$$

Если рамы стоят настолько близко, что их жесткость можно считать как бы распределенной по некоторому непрерывному закону вдоль оси моста, то полученное только что выражение для V_2 обратится в интеграл:

$$V_2 = \frac{1}{2} \int C \left\{ \frac{(v_1 - v_2)}{a} - \frac{(w_1 - w_2)}{b} \right\}^2 dz,$$

или после исключения w_2 с помощью равенства (7):

$$V_2 = \frac{1}{2} \int C \left\{ 2 \frac{v_1 - v_2}{a} - a - \beta \frac{z}{l} \right\}^2 dz. \quad (12)$$

Равенства (1), (11) и (12) дают общее выражение для потенциальной энергии рассматриваемой системы.

5. Обратимся к уравнению живой силы системы. Исходя из распределения масс, указанного на рис. 2, и их перемещений, изображенных на рис. 4, можно для кинетической энергии системы получить выражение

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ (2M_1 + m_0) \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} \right)^2 + (2M_2 + m_0) \left(\frac{\partial v_2}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ & + 2 \int_0^k \frac{m}{k} \left(\frac{k-y}{k} \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{y}{k} \frac{\partial v_2}{\partial t} \right)^2 dy + \int_0^a \frac{m_3 + m_4}{a} \left(\frac{\partial v_3}{\partial t} + \frac{a-x}{a} \frac{\partial v_4}{\partial t} \right)^2 dx + \\ & \left. + (M_3 + M_4 + m) \left[\left(\frac{\partial v_3}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_3}{\partial t} \right)^2 \right] dz. \right\} \end{aligned}$$

С помощью равенства (8) можно из этого выражения исключить величину w_4 . Живая сила системы T будет тогда выражена через производные по t , взятые от трех неизвестных функций v_1, v_2 и v_3 , являющихся функциями от z и t , и от параметров α и β , являющихся, если они не равны нулю, функциями только от t .

6. Обратимся к разбору того частного случая, когда оба конца всех четырех ферм моста свободно открыты на жестком основании, так что при $z=0$ и $z=l$:

$$v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 0 \quad (13)$$

и

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v_3}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v_4}{\partial z^2} = 0. \quad (14)$$

Как было отмечено выше, в этом случае

$$\alpha = \beta = 0$$

и из условия (8) следует

$$v_4 = v_3 - \frac{k}{a} (v_2 - v_1). \quad (9)$$

Мы не нарушим кинематических условий (13) и квазикинематического условия (9), если положим

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \sum q_n \sin \frac{k n z}{l}; \\ v_2 &= \sum r_n \sin \frac{k n z}{l}; \\ v_3 &= \sum A_n \sin \frac{k n z}{l}; \\ v_4 &= \sum \left[A_n - \frac{k}{a} (r_n - q_n) \right] \sin \frac{k n z}{l}, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где суммирование распространяется на все целые положительные значения параметра k , а величинам q_n, r_n и A_n надлежит функциями только от времени t . Так как в ряде (15) можно выразить всякие перемещения моста, удовлетворяющие условиям (13) и (9), то можно неизвестные величины q_n, r_n и A_n принять за совокупность обобщенных координатных параметров рассматриваемой системы, воспользовавшись для разыскания их уравнениями Лагранжа.

Подставив ряды (15) в найденные выше общие выражения для V и T и выполнив после этого интегрирование по z , можно выразить V через эти координатные параметры, а T — через их производные по времени. Нетрудно видеть, что в V и T будут однородными членами polynomialными второй степени от переменных q_n, r_n и A_n и соответственно их производных.

Тя как в выражении для T переменные q_k, r_k и s_k входят и будут, то уравнение Лагранжа можно будет написать в форме системы равности:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_k} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}_k} \right) + \frac{\partial T}{\partial r_k} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_k} \right) + \frac{\partial T}{\partial s_k} &= 0, \end{aligned} \right\} (16)$$

принем по три уравнения вида (16) можно выписать для каждого k . Для разыскания из уравнений (16) периодов и форм главных свободных колебаний системы может быть применена методика частных решений.

7. В общем случае, когда закон распределения масс и жесткостей никаким ограничительным условием не ограничен, все параметры q_k, r_k, s_k входят во все уравнения (16). Решение данной системы возможно в этом случае только приближенное, путем удержания в рядах (15) лишь нескольких их первых членов. По аналогии с колебаниями свободно опертого невращающегося бруса следует ожидать, что, удержав в рядах (15) всего лишь по одному первому члену для каждого ряда, получим довольно хорошее приближение для периодов трех основных членов свободных колебаний рассматриваемой системы.

Если мост имеет поперечную плоскость симметрии, в уравнениях (16) переменные с четными и нечетными значениями индексов k разделяются, и система (16) распадается на две независимые системы уравнений, из которых в одну входят все q_k, r_k и s_k с нечетными значениями k , а в другую только все q_k, r_k и s_k с четными k .

Если массы и жесткость распределены вдоль моста равномерно, получается дальнейшее упрощение системы (16). В этом случае переменные с различными индексами k в системе (16) разделяются, и система распадается на ряд независимых групп, заключающих в себе каждая только три уравнения с тремя неизвестными в каждой.

8. Надлежит у моста продольных плоскостей симметрии, в свою очередь, некоторые упрощения в решении задачи.

Так, если мост имеет и горизонтальную и вертикальную плоскости симметрии, то в числе его главных свободных колебаний могут быть только колебания либо симметричные относительно обеих плоскостей, либо антисимметричные относительно их. Колебания, симметричные относительно продольной вертикальной его плоскости симметрии, должны отличаться тем, что в них все

$$q_k = 0,$$

а все r_k и s_k связаны между собой зависимостями

$$r_k = s_k.$$

Колебания, симметричные относительно горизонтальной плоскости симметрии, характеризуются тем, что в них все

$$r_k = s_k = 0,$$

и только все

$$q_k \neq 0.$$

В колебаниях, антисимметричных относительно обеих плоскостей, при всяком k должно быть

$$r_k = -s_k,$$

и, следовательно,

$$q_k = \frac{k}{a} (s_k - r_k) = -q_k.$$

т. е.

$$q_k = \frac{k}{a} s_k.$$

Равенства эти позволяют у мостов, имеющих две продольные плоскости симметрии, разбить систему (16) на три независимые системы, из которых одна относится к вертикальным колебаниям, вторая — к горизонтальным и третья — к колебаниям, которые могут быть названы колебаниями переоса. В последних ось симметрии моста остается неизменной, и колебания моста состоят в периодических искажениях его поперечных сечений, симметричных представленных на рис. 5.

Если к тому же сечение моста постоянно по его длине, и величинами $F_1, F_2, \delta, I_1, I_2, M_1, M_2, \dots, m_k$ не зависят от координаты z , то в каждой из этих трех систем переменные, отличающиеся одинаковыми индексами k , разделяются в свою очередь, и каждая из всех главных колебаний моста может быть разыскано из своего отдельного дифференциального уравнения.

9. Если мост имеет, как обычно, только вертикальную плоскость симметрии, горизонтальной же плоскости симметрии у него нет, одна группа его собственных свободных колебаний должна отличаться симметрией относительно диаметральной плоскости моста; остальные же его свободные колебания должны быть антисимметричны относительно этой плоскости, во всяком случае в том, что касается перемещений s_k и r_k . Так как к тому же, благодаря отсутствию в мосте горизонтальной плоскости симметрии,

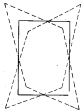


Рис. 5.

вторая группа колебаний не должна отличаться относительно горизонтальной плоскости, проведенной через ось моста, ни симметрией ни антисимметрией, то в движениях второй группы колебания горизонтальные и колебания переюса должны быть найдены в составе каждого из главных движений.

В том частном случае, когда, кроме того, элементы поперечного сечения моста не зависят от координаты z , и система (16) распадается на отдельные группы уравнений, заключающие в себе каждый только переменные с одним и тем же индексом k , для каждого из главных колебаний, симметричных относительно диаметральной плоскости моста, может быть из уравнения (16) путем принятия в него

$$r_k = s_k \quad \text{и} \quad q_k = 0$$

получено свое отдельное уравнение. Что же касается колебаний, антисимметричных в смысле вертикальных перемещений относительно этой плоскости, т. е. отличающихся тем, что

$$r_k = -s_k,$$

то для каждого частного значения k таких колебаний будет у мостов постоянного сечения два, отличающихся друг от друга различным соотношением между величинами q_k и s_k . В этом случае, если переменные с различными k в системе (16) разделяются, оба эти главных свободные колебания могут быть рассмотрены совместно из двух дифференциальных уравнений, получающихся из уравнений (16) путем подстановки в них

$$r_k = -s_k.$$

10. Остановимся вкратце на общем случае, когда α и β нулю не равны. Это может иметь место, например, тогда, когда на концах моста перемещения $u_1 = v_1 = w_1 = 0$, перемещения же u_2 не устранимы. В таком случае надо обратить особое внимание на жесткость тех опорных рам моста, которые совпадают с его опорами. Если они по жесткости не отличаются от всех прочих, то выражение для V_x может быть сохранено в форме интеграла (12); если же они жестче прочих, то выражение (12) должно быть дополнено соответствующими двумя членами, пропорциональными одной величине α , а второй величине $\alpha + \beta$. В обоих случаях в системе основных дифференциальных уравнений (16) следует прибавить еще два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial V}{\partial w} \right) + \frac{\partial V}{\partial w} = 0 \\ \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial V}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial V}{\partial \beta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Что касается упрощений, данных симметрией, то они могут быть замечены и в данном случае, хотя и не имеют здесь столь существенного характера.

Так, наличие поперечной плоскости симметрии позволяет разделить всю систему основных дифференциальных уравнений задачи на две независимые группы, из которых в одну войдут $\alpha + 0,5\beta$ и все q_k , r_k и $s_k \in k$ нечетными, а во вторую β и все q_k , r_k и $s_k \in k$ четными.

Наличие вертикальной продольной плоскости симметрии позволяет отдельно рассматривать движения, в которых все r_k , s_k , q_k как и α и β , равны нулю, и отдельно движения, в которых

$$r_k = -s_k, \quad q_k \neq 0, \quad \alpha \neq 0 \quad \text{и} \quad \beta \neq 0.$$

Что касается горизонтальной плоскости симметрии, то, благодаря независимости перемещений опорных сечений верхней и нижней ферм моста, этой симметрии в рассматриваемом случае вообще быть не может.

Равномерность распределения вдоль моста жесткости и масс моста вносит существенные упрощения только в выборе формы и периодов колебаний, симметричных относительно диаметральной плоскости моста. При определении прочих колебаний переменные q_k , r_k и s_k в уравнениях (16) разделяются, по величине α и β , как правило, войдут во все эти уравнения, как и все величины q_k , r_k и s_k , как правило, войдут в два уравнения (17). Получение точного решения задачи этим обстоятельством сильно затрудняется даже в рассматриваемом простейшем случае. По аналогии, однако, со свободными колебаниями корабля можно ожидать, что полученный достаточно точного решения для периодов свободных колебаний нижних тонов, если в рядах (15) удержать только лишь их первые члены, а получаемое таким образом выражение для u_2 дополнить членом α .

11. Наложение выше соображения могут быть использованы не только в задаче об определении периодов и форм главных свободных колебаний моста.

Если скоро формы главных свободных колебаний системы найдены, то можно написать уравнение движения системы в соответствующих им главных координатах и, дополнив их членами, зависящими от внешней нагрузки сооружения, найти как колебания вынужденные, если эти силы меняются с изменением времени, так и отклонения статические, если нагрузка системы от времени не зависит.

Далее те же приближительно выкладки могут быть использованы и в задаче об определении критической сжимающей нагрузки для свободно открытых колонн прямоугольного трубчатого профиля, изображенного на рис. 1.

Если считать, что сжимающее усилие, действующее в такой колонне, не зависит от координаты z , а по площади сечения распро-

должно равномерно, то за силовую функцию внешней нагрузки можно для такой колонны принимать

$$U = \frac{P_0}{2} \int_0^l \left[(2F_1 + t_1 a) \left(\frac{dy_1}{dz} \right)^2 + (2F_2 + t_2 a) \left(\frac{dy_2}{dz} \right)^2 + 2\beta \int_0^h \left[y \frac{dy_3}{dz} + (h - y) \frac{dy_4}{dz} \right]^2 dy + (t_1 + t_2) \int_0^h x \frac{dy_5}{dz} + (x - z) \frac{dy_6}{dz} \right]^2 dx + (F_1 + F_2 + \delta b) \left[\left(\frac{dy_1}{dz} \right)^2 + \left(\frac{dy_2}{dz} \right)^2 \right] dz. \quad (18)$$

Потенциальную энергию можно вычислить с помощью равенств (1), (11) и (12), заменив в них частные производные функций v_1, v_2, u_1 и u_2 по изменению x их полными производными по той же переменной.

Ограничиваясь рассмотрением того лишь частного случая, когда концы всех балок открыты свободно на жестких опорах, можно считать величинами α и β равными нулю и искать функции u_1, u_2, v_1 и v_2 в форме рядов (15), определяя все неизвестные коэффициенты в этих рядах из условия, чтобы при всяком малом отклонении системы от положения равновесия величина $U - V$ приращений не получала, т. е. из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u_1} (U - V) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial v_1} (U - V) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial u_2} (U - V) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (19)$$

Нетрудно видеть, что система уравнений (19) в частном случае, когда α и $\beta = 0$, аналогична системе (16), относящейся к рассмотренной выше задаче об упругих колебаниях соответствующей трубчатой балки. Переменные, являющиеся главными координатами по отношению к системе (16), разделяются и в системе (19) и позволяют найти критическое значение сжимающей силы рассматриваемой колонны. Какой из трех форм главных свободных колебаний ее соответствует наименьшее значение продольной сжимающей силы, зависит от того, которое из них отличается максимальным периодом.

Если сечение рассматриваемой колонны отличается двоякого рода симметрией, то рассмотрению подлежит, помимо обеих главных изгибов колонны, еще и колебания переполюса. Если сравнению из последних соответствует колебание, наиболее медленное из всех главных свободных колебаний рассматриваемой колонны, то для увеличения кратчайшей нагрузки может быть

возможно увеличение длиной колонны, соответствующей этим колебаниям. Это последнее может быть осуществлено заменой жестких на поперечных рамах колонны жесткими диафрагмами. Необходимое количество диафрагм и степень их полезности могут быть высказаны нижеоказанным ниже способом.

До сих пор предполагалась настолько длинная балка, что перемещения ее, происходящие вследствие сдвигов в стенках, можно пренебречь по сравнению с перемещениями от изгиба, т. е. от неравномерности распределения нормальных напряжений по площади поперечного сечения балки.

Допущение может оказаться несправедливым, если стенка балки слаба по сравнению с ее тонкими, сосредоточенными в точках 1, 2, 3 и 4 (см. рис. 1). В тех случаях, когда перемещения от сдвигов не являются пренебрежимо малыми по сравнению с перемещениями от изгиба, их нужно также учесть при составлении дифференциальных уравнений динамики системы.

Обозначая перемещения от изгиба по-прежнему знаками u_1, v_1, u_2 и v_2 и условившись соответствующие перемещения от сдвига обозначать знаками $\bar{u}_1, \bar{v}_1, \bar{u}_2$ и \bar{v}_2 , можно суммировать перемещения отдельных ферм моста в плоскости их наибольшей жесткости считать суммой соответствующих перемещений от изгиба и от сдвига. Условимся суммарные перемещения обозначать соответственно знаками u_1, u_2, u_3 и u_4 .

По аналогичному выводу можно считать

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u_1 + \bar{u}_1; & u_2 &= u_2 + \bar{u}_2; \\ u_3 &= u_3 + \bar{u}_3; & u_4 &= u_4 + \bar{u}_4. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

В выраженных для кинетической энергии T и потенциальной энергии порезов рамы V_2 , высказанных выше, необходимо в этом случае величины u_1, v_1, u_2 и v_2 заменить соответствующими полными перемещениями u_1, v_1, u_2 и v_2 . Между величинами u_1, v_1, u_2 и v_2 будет по-прежнему существовать зависимость (8) или соответственно (9). Выражение для потенциальной энергии раската V_1 остается без изменения. В V_2 по-прежнему будут входить только перемещения u_1, v_1, u_2 и v_2 . Полная потенциальная энергия системы V будет, однако, не равна сумме величин V_1 и V_2 . Для получения V к сумме $V_1 + V_2$ придется прибавить еще потенциальную энергию сдвигов V_3 :

$$V = V_1 + V_2 + V_3.$$

Для того чтобы знать точно величину V_3 , следовало бы знать точно закон распределения сжимающих напряжений в стенках балки. Найти этот закон точно, когда перерезываемые условия являются функциями от x , крайне затруднительно. К тому же, если только стенки балки не пересур слаба, влияние перемещений от сдвигов должно бы быть не очень велико. Не стремимся поэтому к точному учету закона распределения настоящих напряжений по площади поперечного сечения балки, можно

приближенно оценить взаимные перемещений от сдвигов в стенках балки, исходя из допущения, что скалярное напряжение по высоте каждой из вертикальных стенок балки и по ширине каждой из ее горизонтальных стенок распределяется (благодаря предпологаемому достаточному толщине каждой из стенок) равномерно.

Допущение это, обычно делаемое при приближенном определении влияния деформаций сдвига, дает возможность принимать

$$V_x = \frac{Q}{s} \int_0^s \left[\alpha_1 \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \alpha_2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \lambda \phi \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \lambda \phi \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx, \quad (21)$$

где G — модуль сдвига, а остальные величины по формулам выведены. Величины $\bar{w}_0, \bar{v}_0, \bar{u}_0$ и \bar{u}_s , входящие в выражение (21), являются кинематическими условиями вращающихся стенок (8) и подниманы в самом общем виде их можно искать в форме рядов:

$$\left. \begin{aligned} \bar{w}_0 &= \sum_k \bar{w}_k \sin \frac{k\pi x}{l}; \\ \bar{v}_0 &= \sum_k \bar{v}_k \sin \frac{k\pi x}{l}; \\ \bar{u}_0 &= \sum_k \bar{u}_k \sin \frac{k\pi x}{l}; \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\bar{u}_s = \bar{a} + \bar{\beta} \frac{x}{l} + \sum_k \left[\bar{t}_k + \bar{q}_k + \frac{\bar{a}}{s} (\bar{r}_k - \bar{r}_k) \right] \sin \frac{k\pi x}{l},$$

где $\bar{w}_k, \bar{v}_k, \bar{u}_k, \bar{a}, \bar{\beta}$ — новые координатные параметры, являющиеся при упругих колебаниях системы некоторыми подлежащими определению функциями от времени t . Их следует искать совместно с введенными в рассмотрение ранее параметрами $\alpha, \beta, \lambda, \phi, \bar{r}_k$ и \bar{r}_k из общей системы дифференциальных уравнений (16) и (17) и аналогичных им уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial V}{\partial \alpha} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \beta} \right) + \frac{\partial V}{\partial \beta} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{r}_k} \right) + \frac{\partial V}{\partial \bar{r}_k} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{r}_k} \right) + \frac{\partial V}{\partial \bar{r}_k} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{r}_k} \right) + \frac{\partial V}{\partial \bar{r}_k} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{r}_k} \right) + \frac{\partial V}{\partial \bar{r}_k} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (24)$$

В общем случае, когда в этой системе нельзя сделать никаких упрощений, решение ее довольно сложно, но даже ограничившись первым приближением, в котором в каждом ряду сохраняется лишь один его первый член, приходим к системе 11 уравнений с 11 неизвестными: $\alpha, \beta, \bar{r}_k, \bar{r}_k, \bar{a}, \bar{\beta}, \bar{w}_k, \bar{v}_k, \bar{u}_k$ и \bar{t}_k . В ней, однако, возможны некоторые существенные упрощения.

Действительно, так как в общем выражении для кинетической энергии системы величины $\bar{w}_k, \bar{v}_k, \bar{u}_k, \bar{r}_k, \bar{r}_k, \bar{a}, \bar{\beta}$ входят в виде суммы $(\bar{w}_k + \bar{w}_k), (\bar{v}_k + \bar{v}_k), (\bar{u}_k + \bar{u}_k)$ и $(\bar{r}_k + \bar{r}_k)$, то

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha} \right);$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \beta} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \beta} \right);$$

а между величинами

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{r}_k} \right); \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{r}_k} \right); \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{r}_k} \right); \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{r}_k} \right);$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{r}_k} \right); \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{r}_k} \right); \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \bar{r}_k} \right)$$

существуют также некоторые соотношения, позволяющие путем исключения всех уравнений из системы уравнений (16), (17), (23) и (24) выразить все $\bar{w}_k, \bar{v}_k, \bar{u}_k, \bar{a}, \bar{\beta}$ через $\bar{r}_k, \bar{r}_k, \bar{t}_k, \bar{q}_k, \bar{a}$ и $\bar{\beta}$ алгебраически и затем путем исключения их из уравнений (23) и (24) получить систему дифференциальных уравнений, в которые будут входить только лишь неизвестные

$$\bar{w}_k, \bar{v}_k, \bar{u}_k, \bar{t}_k, \bar{q}_k, \bar{a} \text{ и } \bar{\beta}.$$

Обстоятельство это в отношении поперечных колебаний сплошных балок, подробно рассмотренное в статье «К вопросу о периоде свободных поперечных колебаний корабля», весьма важно и объясняется тем, что путем введения в рассмотрение новых координатных параметров, определяющих собой перемещения от сдвига, мы не увеличиваем числа степеней свободы ядра. Если бы перемещения от сдвига были подниманы тому же кинематическому условию (8), которому поднимены и перемещения от изгиба, то путем введения во внимание перемещений от сдвига число степеней свободы балки не изменилось.

Так как перемещения $\bar{w}_k, \bar{v}_k, \bar{u}_k$ и \bar{r}_k, \bar{r}_k условию (8), исключают возможность вращений поперечных сечений балки, не поднимены, то принятие их во внимание вводит в рассмотрение новый ряд возможных перемещений системы (колебания крутящиеся) и увеличивает число степеней свободы тела. Аналитически это выражается тем, что коэффициенты \bar{t}_k становятся благодаря

* См. настоящий сборник.

иведены в рассмотрение перемещений, не подчиняющихся условию (8), а кинематическом смысле независимых от величин \bar{q}_k, \bar{r}_k и \bar{s}_k . Таким образом, допуская, что перемещения от единиц не являются пренебрежимо малыми, прибавляет системе по одной степени свободы для каждого k .

У рассматриваемых балок все четыре рода их возможных колебаний (колебания вертикальные, в которых движение симметрично относительно диаметральной плоскости моста; горизонтальные, в которых перемещения обеих горизонтальных ферм всегда одинаковы; перекося, в которых сечения не поворачиваются, а только искривляются; крутильные, в которых они вращаются не искривляясь) не являются независимыми и в той или иной мере всегда связаны между собой. Исключением обычно являются только колебания вертикальные, отличающиеся симметрией относительно диаметральной плоскости моста: обычно мост, как предполагалось и выше, бывает симметричен относительно этой плоскости, и колебания вертикальные протекают у него в силу симметрии независимо от всех прочих колебаний. Наличие у моста дальнейших плоскостей симметрии позволяет значительно упростить решение задачи, разбивая систему ее основных дифференциальных уравнений на ряд отдельных независимых систем.

Особенно просто решается задача в тех случаях, когда концы ферм моста опираются на жесткие опоры и когда, кроме того, все элементы поперечного сечения моста от координаты x не зависят. В этом случае величины $\alpha, \beta, \bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ все равны нулю и соответствующие им уравнения (17) и (23) можно отбросить, уравнения же (16) и (24) распадутся на отдельные группы, в каждую из которых входит только величина $\bar{q}_k, \bar{r}_k, \dots, \bar{s}_k$, отличающаяся одним и тем же значением индекса k . Структура этих уравнений, как отмечено выше, позволяет путем исключения из них всех ускорений выразить величины \bar{q}_k, \bar{r}_k и \bar{s}_k алгебраически через $\bar{q}_k, \bar{r}_k, \bar{s}_k$ и \bar{t}_k и затем исключить их из системы (24).

Выполнив это, приходим, очевидно, в рассматриваемом частном случае к системе бесконечного множества групп уравнений, в каждую из которых входит по четыре уравнения с четырьмя неизвестными, отличающимися одинаковым значением индекса k . Колебания, амплитуда которых по длине моста меняется по закону $\sin \frac{k\pi x}{l}$, будут независимы от всех прочих колебаний, но колебания, отличающиеся одинаковым числом узловых точек, будут между собой связаны, и только условия симметрии могут вызвать то, что рассматриваемые группы уравнений разобьются в свою очередь на отдельные независимые подгруппы, в каждую из которых войдут свои неизвестные.

Колебаний, отличающихся одинаковым числом узловых точек у прокатического моста, получается по четыре, а не по три,

как то предполагают гипотезы «балдахины» и «качки», упомянутые выше, и только в исключительных случаях это может быть меньше четырех. Так, если предположить, что мост достаточно длинный, а его стенки достаточно жесткими, чтобы с его перемещениями от единиц считались не приходящими, то число возможных его перемещений, отличающихся одинаковым индексом k , уменьшится до трех. То же можно сказать и о том частном случае, когда поперечные рамы сделаны настолько жесткими, что ими совершенно устраняется возможность перекося поперечных сечений моста: бесконечно большая жесткость их также уменьшает число возможных перемещений моста, отличающихся одинаковым числом узлов, на единицу. В таком частном случае, если и перемещения от единиц и деформации рам совершенно устранены, число возможных отклонений моста, отличающихся одинаковым индексом k , уменьшится до двух для всякого частного значения k .

Мост может совершать только колебания вертикальные, или горизонтальные, причем колебания каждого из этих двух родов совершаются независимо, как то и предполагается обычной теорией поперечных колебаний сплошных стержней.

8. ОДИН ПРИЕМ ИССЛЕДОВАНИЯ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ*

1. За последнее время в различных технических вопросах все чаще приходится встречаться с необходимостью исследования упругих колебаний не только отдельных простейших стержней, но и стержней сложного устройства, а также и различных стержневых систем. В связи с этим полезно обратить внимание на один расчетный прием, который, не являясь принципиально новым, заслуживает значительно более последовательного использования, чем это делалось до сих пор.

Прием этот может внести в расчеты большую наглядность и стать чем-то вроде своеобразного метода для решения целого класса задач. Мы назовем его методом последовательного упрощения исследуемой системы, так как сущность его состоит в последовательном переходе от простейшей системы, являющейся прототипом системы, нас интересующей, к постепенной путем последовательного рассмотрения влияния таких отдельных отличий своих этих систем, как дополнительные опоры, дополнительные массы и др.

В двух статьях, напечатанных в первом выпуске первого тома сборника «Прикладная математика и механика за 1933 г.», С. А. Гершгорин показал, что приемы, основанные на применении выделенной идеи, могут быть использованы для получения решений, точных в той самой мере, в которой точны все основные предположения наших расчетов.

Сущность приема, использованного С. А. Гершгоринем, можно охарактеризовать следующим образом.

Допустим, что частоты и формы главных свободных колебаний некоторой упругой системы найдены, требуется определить, как изменятся все факторы от присоединения к системе дополнительных масс или упругих элементов опор.

Принимая за основные координатные параметры заданной системы главные координаты системы-прототипа и в

дополнение к ним перемещения дополнительных масс, в этой системе присоединяемых, можно написать уравнения движения выделенной системы в обобщенных координатах и затем с помощью известного метода частных решений разыскать частоты и формы главных свободных колебаний выделенной системы.

В статьях С. А. Гершгориня, упомянутых выше, только что описанный расчетный прием был развит применительно как к одному случаю, когда к основной системе присоединяется сразу несколько дополнительных масс или несколько дополнительных опор, так и применительно к тому частному случаю, когда к системе присоединяется лишь одна дополнительная масса или одна дополнительная опора.

Если к основной системе присоединяется сразу несколько дополнительных масс или несколько дополнительных опор, то разыскание форм и частот главных свободных колебаний выделенной системы требует разыскания корней некоторого уравнения довольно сложного вида. Если же к основной системе присоединяется лишь одна дополнительная масса или одна дополнительная опора, то решение может быть получено весьма просто.

Настоящая статья имеет целью показать, что описанный прием применим к исследованию и в ряде других, значительно более сложных случаев, а именно в случае, когда к той или иной точке системы присоединяется динамический расчетный колебаний резонансного типа или когда одна упругая система присоединяется к другой.

Иногда бывает весьма удобно перейти от системы прототипа к интересующей нас сложной системе через последовательное введение и рассмотрение нескольких промежуточных систем, отличающихся друг от друга отдельными факторами, чем сразу искать формы и частоты главных свободных колебаний той относительно сложной системы, которая одна лишь и подлежит, назовем бы, изучению.

Каким образом это делается, покажем на нескольких частных примерах. Пример п. 2 принципиально не отличается от одной из задач, рассмотренных С. А. Гершгоринем. Пример п. 3 является обобщением соответствующей задачи Гершгориня и переходит в задачу, рассмотренную последним, если дополнительная масса прикрепена к рассматриваемой системе жестко.

Дальнейшие примеры показывают, каким образом можно распространить рассмотренный расчетный прием на более сложные задачи, чем рассмотренные Гершгоринем.

2. Допустим, что требуется разыскать частоты и формы главных свободных колебаний трехпролетной балки переменного сечения (рис. 1). Решить эту задачу можно путем предварительного рассуждения о колебаниях двухпролетной балки (рис. 2), исследование колебаний которой является задачей значительно более простой.

* Доклад прочитан на Всесоюзном собрании судостроителей 12. XI. 1936, в опубликован в Известиях Восточно-сибирской академии ВМФ им. К. Е. Ворошилова, вып. 6, 1940.

Допустим, что путем предварительного изучения балки изображенной на рис. 2, для нас найдено достаточное число форм главных свободных колебаний, т. е. функций $v_k(z)$, входящих в выражение

$$v = \sum_k v_k(z) P_k(t), \quad (1)$$

описывающее прогиб балки с ее главными координатами $P_k(t)$. Пусть попутно найдем угловые частоты λ_k , а равно и обозначим массы M_k , отвечающие соответствующим главным координатам балки.

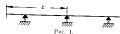


Рис. 1.



Рис. 2.

Тогда можно для балки-прототипа (рис. 2) выражения для живой силы системы T и потенциальной энергии V написать так:

$$T = \frac{1}{2} \sum_k M_k \dot{P}_k^2,$$

$$V = \frac{1}{2} \sum_k N_k P_k^2. \quad (2)$$

Здесь M_k — величины известные, а N_k определяются равенствами

$$N_k = \lambda_k^2 M_k. \quad (3)$$

Чтобы перейти от балки-прототипа к балке, изображенной на рис. 1, возьмем уравнение движения последней в координатах P_k являющихся главными по отношению к балке-прототипу. Обозначив жесткость дополнительной опоры балки через N_1 , можем принять, что балка-прототип превращается в балку рис. 1, если к ней приложить в точке $z = c$ в направлении перемещения v усилие

$$R = -N_1 v(c), \quad (4)$$

или

$$v(c) = \sum_k v_k(c) P_k. \quad (5)$$

Уравнения движения балки-прототипа, находящейся под действием силы R , будучи составлены по схеме Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{P}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial P_k} + \frac{\partial V}{\partial P_k} = F_k$$

примяют вид

$$M_k \ddot{P}_k + N_k P_k = R v_k(c). \quad (7)$$

* Точкой сверху в настоящей статье обозначения производных по времени.

В уравнениях (7), (4) и (5) координаты P_k не разделены. Поэтому координаты $P_k(t)$ нельзя принимать за главные координаты одномерной системы. Различем, следовательно, существующую между главными координатами \bar{P}_k одномерной системы и координатами P_k . Примем за основные неизвестные координаты P_k и величину перемещения балки в точке $z = c$, т. е. величину $v(c)$. В явном в рассмотрении главные координаты \bar{P}_k одномерной системы подставимой

$$\left. \begin{aligned} P_k &= \sum_n v_{kn} \bar{P}_n \\ v(c) &= \sum_n v_n \bar{P}_n \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Для раскрытия коэффициентов v_{kn} и v_n воспользуемся методом частных решений. Известно, что, если одномерная система движется по инерции, то, положив все \bar{P}_n , кроме одного, равными нулю, а оставшуюся из них величину \bar{P}_n равной

$$\bar{P}_n = A_n \cos(\bar{\lambda}_n t + \epsilon_n), \quad (9)$$

где A_n , $\bar{\lambda}_n$ и ϵ_n — некоторые постоянные, можно удовлетворить всем уравнениям движения, если положить

$$M_k (-\bar{\lambda}_k^2 + \lambda_k^2) v_{kn} A_n \cos(\bar{\lambda}_n t + \epsilon_n) = -N_1 v(c) v_k A_n \cos(\bar{\lambda}_n t + \epsilon_n) \quad (10)$$

$$v_k A_n \cos(\bar{\lambda}_n t + \epsilon_n) = \left[\sum_n v_k(c) v_{kn} \right] A_n \cos(\bar{\lambda}_n t + \epsilon_n),$$

что по сокращении мы

$$A_n \cos(\bar{\lambda}_n t + \epsilon_n)$$

имеем

$$M_k (\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2) v_{kn} = -N_1 v_k(c) v_{kn} \quad (10)$$

и

$$v_n = \sum_k v_k(c) v_{kn} \quad (11)$$

Исключив из системы (10) все v_{kn} , получим для $\bar{\lambda}_k$ уравнение

$$\sum_k \frac{N_k v_k(c)}{M_k (\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2)} = -1. \quad (12)$$

Таким образом частоты $\bar{\lambda}_k$ всех главных свободных колебаний одномерной системы могут быть определены в рассматриваемом случае как корни уравнения

$$F(\lambda) = -1, \quad (13)$$

где

$$F(\lambda) = \sum_k \frac{N_k v_k(c)}{M_k (\lambda_k^2 - \lambda^2)} \quad (14)$$

Вычертив график, дающий величину $F(\lambda)$ как функцию от λ , получим кривую такого вида, как показано на рис. 3.

Задав эту кривую горизонтальной прямой AB , проведенной на расстоянии -1 от оси абсцисс, можно приближенные значения всех корней уравнения (13) снять непосредственно с чертежа. Когда это сделано, можно методом последовательных приближений уточнить величины λ_0^2 столько угодно и затем раскрыть соотношения между всеми величинами v_{0n} и v_n для каждого n и непосредственно на уравнении (10), дающих в случае, если $N \neq \infty$,

$$v_{0n} = -v_n \frac{N v_0(\epsilon)}{M_k (\lambda_0^2 - \lambda_0^2)} \quad (15)$$

Когда все числа v_{0n} для любого-либо n найдены, формы свободных колебаний видоизмененной системы найдутся с помощью зависимостей (5) и (1), из которых следует

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \sum_k v_k(x) \bar{p}_{0k} \\ v(\epsilon) &= \sum_k \bar{p}_{0k} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где для простоты принято

$$v_k(x) = \sum_n v_n(x) (v_{0n} : v_{0k}) \quad (17)$$

через \bar{p}_k обозначены главные координаты видоизмененной системы.

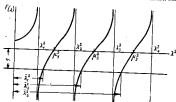


Рис. 3.

Из рис. 3 легко видеть, что при уменьшении жесткости дополнительной опоры, т. е. числа N , все λ_0^2 стремятся к λ_1^2 . При бесконечном же возрастании величины N частоты главных свободных колебаний стремятся к корням уравнения

$$\sum_k \frac{v_k^2(\epsilon)}{M_k (\lambda_0^2 - \lambda_k^2)} = 0, \quad (18)$$

обозначаемых на рис. 3 через $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ и т. д.

Таким образом, рассматриваемый расчетный прием позволяет не только подсчитать для всякой жесткости дополнительной опоры частоты всех главных свободных колебаний системы, но и проследить в общем виде влияние жесткости опоры на все эти частоты.

3. В качестве второго примера проследим, какое влияние оказывает на форму и периоды всех главных свободных колебаний какой-либо балки установка на ней динамического гасителя колебаний, сопротивляющегося в котором не вязко.



Рис. 4.

Допустим (см. рис. 4), что

$v_k(x)$ — формы;	} характеризующие главные свободные колебания стержня, не снабженного динамическим гасителем.
M_k — обобщенные массы;	
λ_k — угловые частоты;	} упругого гасителя.
p_k — главные координаты;	
m — масса;	}
N — жесткость подвеса;	
$\epsilon = \sqrt{N/m}$ — угловая частота колебаний	

→ Найдем основной системой балку, не снабженную гасителем; системой же видоизмененной — ту же балку, но с подвешенной к ней массой m .

Выпишем уравнения движения видоизмененной системы, приняв за ее обобщенные координаты главные координаты основной системы p_k и абсолютные перемещения v дополнительной массы m .

Условно мы вертикальные смещения основной стержня, как и перемещение v и массы m , считать положительными при перемещении вниз.

Система уравнений движения видоизмененной системы состоит в данном случае из совокупности уравнений движения основной системы и уравнения движения дополнительной массы m .

Обозначив через R величину натяжения пружины, на которой подвешена масса m , можно для основной системы написать

$$M_k (\ddot{p}_k + \lambda_k^2 p_k) = R_k v_0(\epsilon), \quad (19)$$

для движения же массы m

$$m \ddot{v} = -R, \quad (20)$$

где

$$R = N [v - \sum_k v_k(\epsilon) p_k]. \quad (21)$$

Введя в рассмотрение главные координаты вынужденной системы с помощью подстановки

$$\left. \begin{aligned} p_k &= \sum_{\alpha} v_{k\alpha} \bar{p}_{\alpha} \\ u &= \sum_{\alpha} v_{\alpha} \bar{p}_{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и обозначив через $\bar{\lambda}_{\alpha}$ угловые частоты главных колебаний вынужденной системы, можно после предварительного преобразования уравнений (19), (20) и (21) к виду

$$M_k(\ddot{p}_k + \bar{\lambda}_k^2 p_k) = -m \delta v_k(t)$$

и

$$-m\ddot{u} = N \left(u - \sum_{\alpha} v_{\alpha}(t) p_{\alpha} \right)$$

получить методом частных решений для определения величин v_k и u следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} M_k (\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2) v_k &= m \bar{\lambda}_k^2 v_{\alpha}(t) v_{\alpha} \\ (\lambda^2 - \bar{\lambda}^2) u &= m \sum_{\alpha} v_{\alpha}(t) v_{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Исключив из этих уравнений все v_{α} , можно видеть, что они дают для v_k решение, отличное от нуля лишь в том случае, если $\bar{\lambda}_k$ удовлетворяет уравнению

$$\lambda^2 - \bar{\lambda}_k^2 = \sum_{\alpha} \frac{v_{\alpha}^2 v_{\alpha}^2 \bar{\lambda}_k^2}{M_k (\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2)} m,$$

или, что то же, уравнению

$$1 - \left(\frac{\bar{\lambda}_k}{\lambda} \right)^2 = \frac{m}{M} \sum_{\alpha} \frac{M_{\alpha} \bar{\lambda}_k^2}{M_k (\lambda_k^2 - \bar{\lambda}_k^2)} v_{\alpha}^2(t). \quad (24)$$

Здесь через M обозначена фактическая масса основной системы. Обозначив относительную массу усложнителя через η , мы будем иметь

$$\eta = \frac{m}{M}; \quad (25)$$

так что, обозначив через $F(\lambda)$ функцию

$$F(\lambda) = \sum_{\alpha} \frac{M_{\alpha} \lambda^2}{M_k (\lambda_k^2 - \lambda^2)}, \quad (26)$$

можно переписать уравнение (24) в форме равенства

$$1 - \frac{\eta}{\lambda^2} = \eta F(\lambda). \quad (27)$$

Чтобы найти корни уравнения (27) и тем самым определить частоты главных свободных колебаний вынужденной системы,

достаточно построить график для функции $F(\lambda)$ и затем искать его прямой $\left(1 - \frac{\eta}{\lambda^2}\right) \frac{1}{\eta}$.

Сделаю это построение, получим рис. 5, на котором прямая $\frac{1}{\eta} \left(1 - \frac{\eta}{\lambda^2}\right)$ проходит тем выше, чем меньше относительная масса гасителя η .

Прямая $\frac{1}{\eta} \left(1 - \frac{\eta}{\lambda^2}\right)$ проходит при заданном η через определенную точку A (рис. 5) и пересекает ось абсцисс в точке $\lambda^2 = r^2$.

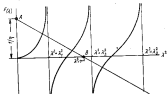


Рис. 5.

Изменяя величину r^2 , можно проследить, как ее величина зависит от числа $\bar{\lambda}_k^2$ изменение жесткости пружинного подвеса массы m . Новая масштаб вертикальных ординат прямой $\frac{1}{\eta} \left(1 - \frac{\eta}{\lambda^2}\right)$, можно проследить влияние относительной массы гасителя η на те же величины.

С помощью рис. 5 можно, в частности, определить, как изменятся все частоты главных свободных колебаний системы, если гаситель настроен в резонанс с каким-либо определенным тоном главных свободных колебаний системы.

Допустим, что гаситель настроен в резонанс со вторым из главных свободных колебаний основной системы. Тогда прямая $\frac{1}{\eta} \left(1 - \frac{\eta}{\lambda^2}\right)$ должна будет пройти через точки A и B (рис. 5); из рисунка видно, что частота того колебания системы, в резонанс с которым настроен гаситель, как бы раздвигается. Частоты всех более медленных колебаний при этом уменьшаются, частоты же всех более быстрых колебаний при наличии гасителя увеличиваются. Видно также, что гаситель влияет на частоты всех главных свободных колебаний системы тем меньше, чем меньше его относительная масса η .

Разделив с помощью рис. 5 корни уравнения (27), можно каждый из них разложить с помощью метода последовательных приближений со столь угодно большой точностью и определить для всех найденных λ^2 соотношения величины v_{10} и v_{20} для всякого n . После этого простая подстановка найденных величин во равенства (22) в результате

$$\left. \begin{aligned} v &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(z) P_n \\ w &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(z) P_n \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

позволяет найти в форме всех главных свободных колебаний видоизмененной системы.

4. Обратимся к рассмотрению влияния дополнительной массы жестко закрепленной к основной системе. Данный случай можно рассмотреть, основываясь на зависимости предыдущего пункта. Для этого достаточно принять в равенствах п. 3 величину N , а следовательно и величину r^2 равной бесконечности.

При этих условиях уравнение (27) превращается в уравнение

$$F(\lambda) = \frac{1}{\eta} - \frac{M}{m}. \quad (29)$$

Построив график для функции $F(\lambda)$, можно разложить приближенные значения всех корней уравнения (29). Легко видеть, что все корни этого уравнения всегда являются корнями уравнения

$$F(\lambda) = \infty, \quad (30)$$

т. е. соответствующих корней основной системы и всегда больше ближайших величин к ним корней уравнения

$$F(\lambda) = 0, \quad (31)$$

приближаясь к своим верхним пределам, когда η убывает, и наоборот, когда относительно величина дополнительной массы возрастает.

Рассматриваемый расчетный прием интересен, однако, не только, что он позволяет установить пределы возможных значений всех частот видоизмененной системы, а потому, что он позволяет вычислять эти частоты, а равно и формы всех свободных колебаний видоизмененной системы с любой степенью точности, если только основная система предварительно с нужной степенью точности изучена.

3. Зависимости п. 3 могут быть использованы в судостроении для определения того влияния, которое имеет на период и форму главных свободных колебаний корабля масса установленной на нем машины и жесткость ее фундамента, если только машину кораблю можно уподобить материальной точке, а фундамент ее — невесомой пружиной.

6. Расчетные формулы п. 3 позволяют легко разобраться в вопросе о том, какое влияние может иметь установка на колеблющемся стержне нескольких гасителей колебаний, каждый из которых настроен в резонанс с какой-либо одной из частот главных свободных колебаний основной системы.

Очевидно, что каждый из таких гасителей «раздвигает» частоту того из главных свободных колебаний системы, в резонанс с которым он настроен, во все же остальные главные ее свободные колебания он влияет тем меньше, чем меньше его масса.

Если период собственных колебаний какого-либо гасителя не совпадает с периодом одного из главных свободных колебаний системы (высоко же гасителя идеален), то такой гаситель лишь немного понижает все частоты трех главных свободных колебаний системы, частота которых ниже его собственной частоты, немного увеличивает частоты всех более быстрых колебаний системы, и добавляет к числу свободных колебаний системы еще одно колебание, имеющее примерно ту же частоту, что собственная частота гасителя. Настраивая таким образом гаситель, очевидно, не оказывает заметного влияния на свободные колебания видоизмененной системы, если же считать прибавления к числу их некоторого нового колебания, в котором участвует главным образом лишь сам гаситель.

Аналитические влияния должны оказывать на колеблющийся стержень дополнительные массы, подвешенные к стержню утробу, причем каждая независимо от других.

7. Несколько иным образом представляется влияние друг на друга нескольких деформируемых систем, каждая из которых обладает несколькими степенями свободы. Движение составной системы, получающей соединением нескольких систем, имеющих каждая несколько степеней свободы, может оказаться столь сложным, что разобранье в его характере и определении собственных частот составной системы иногда может оказаться невозможным, если предварительно не изучить собственные колебания каждой из соединяемых систем порознь.

Для проверки рассмотрим колебания двух стержней, один из которых лежит на каких-то опорах, другой же (см. рис. 6) подвешен к стержню на двух одинаковых упругих подвесах, расположенных в сечении $z = \pm c$. Коэффициент жесткости каждой из этих пружин обозначим через N .

Назовем стержень $A-B$, соединенный с внешней средой, основной системой I , свободный же стержень $C-D$, который намереваем подвесить к первому, основной системой 2 .

Обозначим главные координаты первой основной системы через ρ_1^0 , соответствующие им формы колебаний ее — через $\sigma_1^0(z)$, обозначим массы — через M_1^0 и, наконец, частоты — через λ_1^0 .

Аналитические величины второй системы обозначим через ρ_1^1 , $\sigma_1^1(z)$, M_1^1 и λ_1^1 .

Сравним рассмотренный простейший случай, когда обе основные системы, равно как и связь их друг с другом, симметричны относительно плоскости $z = 0$.

Все главные колебания обеих основных систем, а следовательно, и системы видоизмененной, можно будет тогда считать либо симметричными, либо антисимметричными относительно плоскости $z = 0$. При этом реакции N соединительных подвесов будут при симметричных колебаниях системы симметричны относительно плоскости $z = 0$, а колебания же антисимметричных — антисимметричны, и уравнения движения первой основной системы можно будет написать в форме равенств



Рис. 6.

$$M_1 [\ddot{x}_1 + (\lambda_1^2)^2 x_1] = 2R \sigma_1^*(t), \quad (32)$$

второй же — в форме равенств

$$M_2^* [\ddot{y}_j^* + (\lambda_j^*)^2 y_j^*] = -2R \sigma_j^*(t). \quad (33)$$

Здесь по условиям задачи

$$R = N \left[\sum_j \sigma_j^*(t) y_j^* - \sum_k \sigma_k^*(t) y_k^* \right] \quad (34)$$

и есть натяжения каждой из пружин, соединяющих оба колеблющихся стержня.

Чтобы развязать обобщенные координаты вкосоугольной системы \bar{y}_k и соответствующие им частоты $\bar{\lambda}_k$, положим

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_k &= \sum_n \sigma_{kn}^* \bar{y}_n, \\ \bar{y}_j^* &= \sum_n \sigma_{jn}^* \bar{y}_n \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_j^*(t) &= \sum_n \sigma_{jn}^*(t) \bar{y}_n = \sum_n \sigma_{jn}^* \bar{y}_n, \\ \sigma_k^*(t) &= \sum_n \sigma_{kn}^*(t) \bar{y}_n = \sum_n \sigma_{kn}^* \bar{y}_n \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

где σ_{kn}^* , σ_{jn}^* , σ_k^* и σ_j^* — некоторые неизвестные константы. Для определения последних положим, пользуясь методом частных решений, все неизвестные \bar{y}_n равными нулю, кроме одной, индекс которой есть некоторо определенное число.

Приним, что единственно отличная от нуля главная координата \bar{y}_n меняется во времени по закону

$$\bar{y}_n = A_n \cos(\bar{\lambda}_n t + \epsilon_n). \quad (37)$$

где A_n , $\bar{\lambda}_n$ и ϵ_n — константы, легко видеть, что выражения (35),

(36) и (37) будут удовлетворять уравнениям (32), (33) и (34), если величинам λ_n будут определены из уравнений

$$\left. \begin{aligned} M_1^* [(\lambda_n^*)^2 - \bar{\lambda}_n^2] \sigma_{1n}^* &= 2N (\sigma_k^* - \sigma_j^*) \sigma_{kn}^*, \\ M_2^* [(\lambda_n^*)^2 - \bar{\lambda}_n^2] \sigma_{2n}^* &= -2N (\sigma_k^* - \sigma_j^*) \sigma_{jn}^* \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

совместно с равенствами

$$\left. \begin{aligned} \sigma_k^* &= \sum_n \sigma_{kn}^*(t) \bar{y}_n, \\ \sigma_j^* &= \sum_n \sigma_{jn}^*(t) \bar{y}_n \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Из равенств (38) следует

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1n}^* &= \frac{2N (\sigma_k^* - \sigma_j^*) \sigma_{kn}^*}{M_1^* [(\lambda_n^*)^2 - \bar{\lambda}_n^2]}, \\ \sigma_{2n}^* &= \frac{2N (\sigma_k^* - \sigma_j^*) \sigma_{jn}^*}{M_2^* [(\lambda_n^*)^2 - \bar{\lambda}_n^2]} \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

что совместно с равенствами (36) позволяет написать для $\sigma_k^* - \sigma_j^*$

$$\sigma_k^* - \sigma_j^* = 2N \left\{ \sum_n \frac{\sigma_{kn}^* - \sigma_{jn}^* \sigma_{kn}^* \sigma_{jn}^*}{M_1^* [(\lambda_n^*)^2 - \bar{\lambda}_n^2]} + \sum_n \frac{(\sigma_k^* - \sigma_j^*) \sigma_{jn}^* \sigma_{kn}^*}{M_2^* [(\lambda_n^*)^2 - \bar{\lambda}_n^2]} \right\},$$

и для $\sigma_k^* - \sigma_j^*$ и следовательно, для всех σ_{kn}^* и σ_{jn}^* решение, отличное от нуля, лишь в том случае, если

$$2N \left\{ \sum_n \frac{\sigma_{kn}^* \sigma_{jn}^*}{M_1^* [(\lambda_n^*)^2 - \bar{\lambda}_n^2]} + \sum_n \frac{(\sigma_k^* - \sigma_j^*) \sigma_{jn}^* \sigma_{kn}^*}{M_2^* [(\lambda_n^*)^2 - \bar{\lambda}_n^2]} \right\} = -1. \quad (41)$$

При решении уравнения (41) необходимо иметь в виду, что поскольку вторая основная система и внешнее пространство не прикреплены, одна из частот ее главных свободных колебаний должна быть равна нулю. Присвоим соответствующему периодическому этой системы номер $j = 0$, можем выделить соответствующий ему член из суммы, взятой по j в левой части уравнения (41). Сделав это, получим вместо уравнения (41) следующее:

$$2N \left\{ \sum_n^* \frac{(\sigma_{kn}^*)^2}{M_1^* [(\lambda_n^*)^2 - \bar{\lambda}_n^2]} + \sum_n^* \frac{(\sigma_{jn}^*)^2}{M_2^* [(\lambda_n^*)^2 - \bar{\lambda}_n^2]} \right\} = -1 + \frac{(\sigma_k^* - \sigma_j^*)^2}{M_1^* \bar{\lambda}_n^2} 2N.$$

Введем теперь обозначение

$$\mu^2 = \frac{2N (\sigma_k^* - \sigma_j^*)^2}{M_1^* \bar{\lambda}_n^2}. \quad (42)$$

Тогда написанное только что уравнение можно будет переписать так:

$$1 - \frac{\bar{\lambda}_n^2}{\mu^2} = \frac{M_1^*}{(\sigma_k^*)^2} \left\{ \sum_n^* \frac{\bar{\lambda}_n^2 (\sigma_{kn}^*)^2}{M_1^* [(\lambda_n^*)^2 - \bar{\lambda}_n^2]} + \sum_n^* \frac{\bar{\lambda}_n^2 (\sigma_{jn}^*)^2}{M_2^* [(\lambda_n^*)^2 - \bar{\lambda}_n^2]} \right\}. \quad (43)$$

Уравнение (43) и определяется в рассматриваемом случае частоты видоизмененной системы. Она до некоторой степени

сходно с уравнением (27) п. 3. Чтобы выявить отличие обоих этих уравнений, обозначим через M_1 фактическую массу первой основной системы и через

$$\eta = \frac{M_2^*}{M_1 \omega_0^2 l^2} \quad (44)$$

относительную массу второй системы. Тогда корни уравнения (43) совпадут с корнями уравнения

$$1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2} = \eta F_1(\lambda) + F_2(\lambda), \quad (45)$$

а в котором через $F_1(\lambda)$ и $F_2(\lambda)$ обозначены функции

$$F_1(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{M_1 \lambda^2 |c_{1\alpha}^*|^2 l^2}{M_1^* (\lambda_0^2 - \lambda^2)^2 + \eta l^2}, \quad (46)$$

и

$$F_2(\lambda) = \frac{l^2}{\sum_{\beta=1}^m M_2^* \lambda^2 |c_{2\beta}^*|^2 l^2} \quad (47)$$

В уравнении (45) функция $F_1(\lambda)$ зависит исключительно от устройства первой, а функция $F_2(\lambda)$ — от устройства второй основной системы.

Если вторая из систем является бесконечно жестким твердым телом, то и все частоты его главных свободных колебаний, кроме

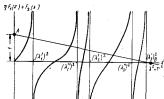


Рис. 7.

одной, равной нулю, выделенной ламе из суммы (47), должны быть равны бесконечности, и функция $F_2(\lambda)$ обращается при всяком λ в нуль. В этом частном случае уравнение (43) обращается в уравнение (27) п. 3, что и следовало ожидать.

Если частоты главных свободных упругих колебаний второй основной системы соизмеримы с частотами собственных упругих

колебаний первой системы, то функция $F_2(\lambda)$ получает разрывы непрерывности в области собственных частот первой основной системы и не может быть игнорирована. Таким образом функцией $F_2(\lambda)$ учитывается в уравнении (43) влияние деформируемости второй основной системы, подвешенной к первой системе.

Функция $\eta F_1(\lambda) + F_2(\lambda)$ получает разрывы непрерывности во всех тех точках, где λ становится равным одной из частот главных свободных колебаний одной из обеих основных систем.

Поэтому если частоты λ_0^2 и λ_1^2 будут сходиться между собой в таких соотношениях, как показано на оси абсцисс рис. 7, то кривая, изображающая функцию $\eta F_1(\lambda) + F_2(\lambda)$, будет иметь такой характер, как показано на рисунке. Заменяя эту кривую прямой $1 - \frac{\lambda^2}{\mu^2}$, получим значение всех частот подвешенной системы. После этого соотношения между всеми ν_{0n}^* и ν_{1n}^* определяются с помощью равенства (40).

Определив указанным образом достаточное число ν_{0n}^* и ν_{1n}^* , можно формы всех главных колебаний подвешенной системы найти с помощью зависимостей (35) и равенств:

$$\left. \begin{aligned} \sigma^* &= \sum_{\alpha} p_{\alpha}^* \psi_{\alpha}(z) \\ \sigma^{**} &= \sum_{\beta} p_{\beta}^* \psi_{\beta}(z), \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

получив по подстановке λ_0^* и λ_1^*

$$\left. \begin{aligned} \sigma^* &= \sum_{\alpha} \bar{p}_{\alpha} \varphi_{\alpha}(z) \\ \sigma^{**} &= \sum_{\beta} \bar{p}_{\beta} \varphi_{\beta}(z), \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

и, где

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\alpha}(z) &= \sum_{\alpha} c_{\alpha}^*(z) \nu_{0n}^* \\ \varphi_{\beta}(z) &= \sum_{\beta} c_{\beta}^*(z) \nu_{1n}^* \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Разыскив указанным образом функции $\varphi_{\alpha}(z)$ и $\varphi_{\beta}(z)$, легко разыскать и обобщенные массы, соответствующие всем главным колебаниям подвешенной системы.

Представляется, что такой путь разыскания главных свободных колебаний двухстержневой системы (см. рис. 6) значительно проще непосредственного изучения колебаний этой двухстержневой системы.

8. Рассмотрим указанным выше путем некоторые частные случаи, относящиеся к исследованию системы, рассмотренной в п. 7.

Если вторая основная система бесконечно жестка по сравнению с первой основной системой, то, как было уже отмечено выше, функция $F_2(\lambda)$ обращается в уравнении (43) в нуль, и все

соответственные частоты виброизмененной системы определяются точками пересечения прямой $1 - \frac{\lambda^2}{\tau^2}$ с графиком, изображающим функцию $\gamma F_2(\lambda)$.

Если, наоборот, либо жесткость первой основной системы, либо масса первой основной системы бесконечно велики по сравнению с соответствующими элементами второй основной системы, то в уравнении (43) исчезает не функция $F_2(\lambda)$, а $F_1(\lambda)$, и уравнение (43) обращается в уравнение

$$1 - \frac{\lambda^2}{\tau^2} = F_2(\lambda). \quad (51)$$

которое и может, очевидно, служить для разыскания собственных частот симметричного относительно сечения $z=0$ стержня, симметрично подвешенного к неподвижному пространству.

При этом, как уже отмечалось в п. 7, колебания стержня, симметричные относительно его середины, можно будет исследовать отдельно от колебаний, антисимметричных относительно этой точки; причем для исследования колебаний обоих этих типов можно составить уравнение типа (51).

Если бесконечно велика не только жесткость первой основной системы, но и жесткость крепления второй основной системы к первой, то в левой части уравнения (43) исчезает, помимо функции $\gamma F_2(\lambda)$, еще и член $-\frac{\lambda^2}{\tau^2}$. Уравнение (43) обращается в этом случае в уравнение

$$1 = F_2(\lambda). \quad (52)$$

повышающее от частот главных свободных колебаний стержня, совершенно свободный, перейти к частотам колебаний стержня, концы которого жестко закреплены, т. е. обращается в уравнение типа, сходного с рассмотренным выше в п. 2. Этого, конечно, и следовало ожидать.

Представим теперь случай, когда частоты обеих основных систем совпадают друг с другом. Допустим, что варьируя одну из систем, мы сблизим частоту какого-либо главного свободного колебания одной из них с частотой некоторого колебания другой основной системы. Пусть, например, $(\lambda_2^0)^2$ остается меньше, чем $(\lambda_1^0)^2$, стремиться к этой последней величине. Тогда независимо от того, чему равно в данном частотном случае τ , один из корней уравнения (43) будет лежать между $(\lambda_2^0)^2$ и $(\lambda_1^0)^2$, стремясь к совпадению с одним из этих величин, когда они сами друг с другом совпадают. Следует признать, что если обе рассматриваемые основные системы устроены так, как было только что предположено, то при совпадении частоты одной из систем с частотой свободных колебаний другой системы никакого резонанса не получится. Период того колебания, которое имеет одинаковую частоту у обеих систем, не изменится. Обе системы совершают

все те свои колебания, частоты которых у обеих систем одинаковы, как бы без взаимодействия друг с другом.

Это является вполне естественным, так как если обе рассматриваемые системы могут, колеблясь взаимно друг от друга, совершать колебания одинаковой частоты, то ничто не мешает им двигаться при колебании внешне с этой частотой так, чтобы существующие между системами связи не напрягались.

Рассмотрим, наконец, какое влияние имеет на частоты всех главных свободных колебаний виброизмененной системы жесткость связи, устанавливаемой между обеими основными системами, характеризуемая частотой τ .

Из рис. 7 видно, что все частоты главных свободных колебаний виброизмененной системы располагаются между собственными частотами обеих основных систем и частотой подвеса τ . При этом все частоты основных систем, меньшие чем τ , всегда увеличатся с увеличением частоты τ ; все же частоты, большие чем τ , от наличия между обеими системами связи возрастают.

Если, однако, частота τ совпадает с частотой одного из главных свободных колебаний той или другой из основных систем, то эта частота как бы раздвигается, как мы видели в случае подвеса к основной системе жесткого динамического гасителя колебаний. При этом одна из частот виброизмененной системы всегда меньше наибольшего из чисел λ_1^0 и λ_2^0 , другая же всегда больше наибольшего из них.

Если частота τ совпадает с одним из корней уравнения

$$\gamma F_1(\lambda) + F_2(\lambda) = 0,$$

то, как видно из рис. 7, частота τ оказывается присущей и виброизмененной системе.

В предыдущих двух пунктах предполагалось, что на обеих основных системах к внешнему пространству прикреплена только одна точка. Вторую основную систему предполагали связанной с внешним пространством только лишь через посредство ее связи с первой системой.

Если предположить, что обе основные системы к внешнему пространству прикреплены непосредственно, например так, как показано на рис. 8, то в уравнении (41) ни одна из частот λ_1^0 и λ_2^0 не была бы равна нулю и ни на одной сумме, входящей в левую часть равенства (41), нельзя было бы выделить члена вида

$$\frac{\cos \lambda t}{\lambda^2}.$$

Уравнение (41) нельзя было бы в этом случае привести к виду (43). Все корни виброизмененной системы определялись бы уравнением

$$\sum_1 \frac{b_1^2 \omega_1^2 \tau^2}{A_1^2 (\lambda_1^0)^2 - \lambda^2} + \sum_2 \frac{b_2^2 \omega_2^2 \tau^2}{A_2^2 (\lambda_2^0)^2 - \lambda^2} = -\frac{1}{2N} \quad (53)$$

и лежал бы между смежными частотами обеих сопряженных систем, будучи, следовательно, все несколько большим соответствующим частот основным систем. Последнее вполне естественно, так как введение дополнительных связей может лишь помешать частоте свободных колебаний системы.

10. Все сказанное в предыдущих трех пунктах относится к случаю, когда обе основные системы в связи их между собой симметричны относительно плоскости $\alpha = 0$. Симметрия устройства системы дает возможность, рассматривая колебания, симметричные и антисимметричные относительно этой плоскости, отдельно друг от друга, вести все рассуждения как будто бы между двумя основными системами, установленными была всего лишь одна связь двойной жесткости, а не две отдельные связи.

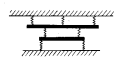


Рис. 8.

Если бы рассматриваемые системы такой симметрией устройства не обладали, то вместо того, чтобы рассматривать сразу совместное движение обеих связей, установленных между двумя основными системами, следовало бы сначала рассмотреть (рис. 9) систему, состоящую из обеих основных систем и одной связи между ними, и лишь после того, как должно число главных колебаний взаимодействующей такти образом системы будет рассмотрено, наложить затем на них вторую связь при другом значении α . Последнее можно сделать опытным путем с помощью рассуждений, аналогичных изложенным выше в п. 2.

Необходимо иметь в виду, что одно из главных колебаний системы, изображенной на рис. 9, должно иметь частоту, равную нулю, ибо равномерно второй основной системы вокруг ее точки подвеса точно не препятствует.

Таким образом и в случае отсутствия у системы симметрии разделение главных колебаний интересующей нас основной системы, изображенной на рис. 6, следует разбить на три отдельных этапа:

1) разделение частот и форм главных свободных колебаний обеих основных систем;

2) разделение частот и форм главных свободных колебаний системы, взаимодействующей наличием одной связи между ними (см. рис. 9);

3) разделение частот и форм главных свободных колебаний системы, взаимодействующей установкой второй связи.



Рис. 9.

При этом в вычислениях, относящихся к этапу 2, должно быть учтено, что если вторая основная система имеет два различных возможных перемещения, ничем не связанных, то у системы, изображенной на рис. 9, таких перемещений имеется всего одно, и у системы, изображенной на рис. 6, — их одно.

Надо также на систему дальнейших связей, если это требуется, может проводиться в точности так, как делалось выше в п. 2.

Если обе основные системы не могут иметь перемещений, свойственных недеформируемому твердому телу, то наложение на систему каждой отдельной связи требует каждый раз лишь таких вычислений, какие описаны в п. 2.

11. Вычислительная схема, рассмотренная в предыдущих пунктах, применима не только к изучению поперечных колебаний стержней, но и к случаям иных их колебаний. В частности, ее можно использовать и для изучения крутильных колебаний гребных валов судовых судовых установок.

Инженер В. П. Жуков представил в журнал «Судостроение» статью, в которой отметил необходимость включения в число основных характеристик судовых поршневых машин приведенного момента инерции всех их масс, движущихся вместе с колеблющим валом машины.

Зная эту величину, длину вала, а также момент инерции гребного вала, можно частоту одноуровневых крутильных колебаний гребного вала подсчитать по элементарной формуле, относящейся к частоте крутильных колебаний вала, к обьему отношению которого приравлено по маховому.

Этот способ расчета не может, однако, дать никакого представления о частотах двух- и трехуровневых колебаний. Кроме того, применительно к многоступенчатым двигателям, длина коленчатого вала которых относительно велика, игнорирование деформации коленчатого вала может оказаться недопустимым даже при определении частоты основного из главных свободных колебаний его.

Поэтому рассматриваемое предложение В. П. Жукова не может решать вопрос полностью. Основным шагом в этом направлении, однако, верна: безусловно желательна в число основных характеристик всякой поршневой машины включать все те сведения, которые позволили бы судостроительному заводу произвести простейшим путем определение частот и форм главных свободных крутильных колебаний проектируемой установки.

Сказанное в предыдущих пунктах позволяет полностью решить эту задачу. Действительно, и состав длины вала входит, во-первых, мал самого двигателя и, во-вторых, гребной вал и шп. Двигатель, изготовляемый обычно несудостроительными заводами, устанавливается на самых разнообразных верблах и соединяется с различными гребными валами. Гребные валы и шпеты проектируются и изготовляются судостроительными организациями,

которые во все детали устройства самого двигателя не всегда имеют возможность входить.

При этих условиях произвести расчет крутильных колебаний для всей установки в целом бывает затруднительно: для судостроительного завода потому, что он плохо знает устройство двигателя, для двенадцатиразового же завода потому, что он не может предвидеть всех тех случаев, когда двигатель определенной марки будет использован. Помимо того, производить весь расчет крутильных колебаний для каждой отдельной установки каждый раз заново нежелательно и с точки зрения экономия труда.

Так как всякий завод обязан знать характеристики своей продукции, то при указанных условиях естественно поставить вопрос так: та часть линии вала, которая входит в состав самого двигателя, принимается за одну основную систему. Завод, изготовляющий эту основную систему, занимается для нее частоты и формы главных свободных колебаний, а также приведенные массы применительно к тому состоянию конструкции, в каком виде она выпускается заводом на рынок. Все та часть линии вала, которая изготавливается судостроительными заводами, принимается за вторую основную систему. Ее характеристики изучаются и определяются судостроительскими организациями, которые затем и соединят обе системы вместе, определив ожидаемые частоты, формы и обобщенные массы для всех главных крутильных колебаний всей установки в целом.

Эта последняя часть задачи может с помощью расчетных приемов, рассмотренных выше, быть решена применительно к каждому типу корабля особо.

12. В той же области изучения крутильных колебаний гребных валов можно встретить и другие вопросы,

разрешение которых может потребовать применения рассмотренного метода. К их числу относятся, например, вопросы, касающиеся изучения крутильных колебаний так называемых разветвленных систем, вроде гребной установки типа «Бауэр—Баха»

В этого рода установках с основной гребной валу, через редуктор и соответствующую упругую муфту, присоединяется паровая турбина. Исследования крутильных колебаний такой установки можно вести в несколько этапов. Сначала изучаются крутильные колебания основного вала, т. е. всех тех масс, которые показаны на рис. 10 ниже линии *AB*, являясь их за первую основную систему. Затем к этой системе присоединяются массы, лежащие между линиями *A—B* и упругой муфтой *C—D*. Отдельно

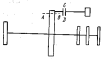


Рис. 10

изучаются крутильные колебания той части установки, которая лежит за другую сторону муфты *C—D*. Наконец, обе части системы, соединенные муфтой *C—D*, соединяются в одну составную систему.

13. Другую область применения изложенного выше расчетного метода представляют, например, такие системы, как дальномер.

В состав каждого дальномера входит несколько труб, установленных друг в друга. Все эти трубы могут вибрировать, образуя в целом сложную стержневую систему. Изучить упругие колебания сразу всей этой системы в целом может оказаться затруднительным. Ничто не препятствует, однако, изучить торсионные колебания всех отдельных труб дальномера, чтобы затем с помощью приемов, изложенных выше, перейти к рассмотрению колебаний всей системы в целом. Такой способ изучения рассматриваемого сложного явления имеет и то преимущество, что позволяет лучше ориентироваться во влиянии различных факторов, имеющих каждый свое влияние на поведение всей системы в целом.

14. В области судостроения тот же метод может быть применен к изучению совместных колебаний корпуса и тяжелых вышних мачт, установленных на нем.

В области авиации метод последовательного усложнения системы может найти себе применение, например, в деле изучения совместных колебаний крыльев и фюзеляжа самолета (наложение упругих колебаний крыла при неподвижном фюзеляже и наложение упругих колебаний фюзеляжа самого по себе являются задачами довольно сложными). Начинать рассмотрение совместных колебаний обеих систем с рассмотрением упругих колебаний той основной системы в целом потому не всегда может быть удобным. Гораздо проще изучить колебания крыльев самолета и фюзеляжа отдельно, чтобы затем перейти к оставшей системе путем наложения на обе основные системы соответствующих связей, как это сделано выше.

15. В зависимости от того, в каких условиях изучаются колебания обеих основных систем, соединяемых муфтой, следует различать следующие два основных случая.

Случай 1-й. При предварительном отдельном изучении колебаний обеих основных систем ни одно из перемещений, присущих этим системам как частям неподвижной системы, из рассмотрения не устранено.

Случай 2-й. При изучении одной основной системы принято, что она может совершать все те перемещения, которые присущи ей как части неподвижной системы, колеблется же другой системы изучены в предположении, что точки ее крепления к первой системе неподвижны.

В первом из двух случаев для соединения обеих систем совместно достаточно просто наложить на обе основные системы соответствующие связи, как было сделано, например, в п. 7. Во втором случае надо раньше чем связывать основные системы совместно,

добавить к числу обобщенных координат второй системы некоторые такие координаты, вариации величин которых позволяют точкам крепления второй системы к первой следовать за движением первой системы. Это отражается в на общем характере тех диаграмм, с помощью которых могут быть найдены частоты видоизмененной системы.

Рассмотрим этот вопрос на примере той системы, к которой относится рассуждения п. 7.

Если на первую основную систему принять стержень $A-B$ неподвижный в неподвижном пространстве, как на рис. 6, за вторую же основную систему — стержень $C-D$, рассматриваемый как стержень, ничем к внешней среде не прикрепленный, и обозначить через M_0^* обобщенную массу; λ_0^* — собственные частоты, $\psi_0^*(t)$ — формы свободных колебаний первой системы, через M_j^* , λ_j^* и $\psi_j^*(t)$ — соответствующие величины для второй системы и через ν — частоту, характеризующую жесткость подвеса второй системы к первой, то можно разложить частоты λ_0 видоизмененной системы, как было показано в п. 7, из уравнения (43)

$$\frac{M_0^*}{|\lambda_0^*|^2} \left[\sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{\lambda_0^* \lambda_{\alpha}^* \rho_{\alpha}^*}{M_0^* (\lambda_0^* - \lambda_{\alpha}^*)} + \sum_{\beta=1}^{\infty} \frac{\lambda_0^* \lambda_{\beta}^* \rho_{\beta}^*}{M_j^* (\lambda_0^* - \lambda_{\beta}^*)} \right] = 1 - \frac{\lambda_0^*}{\nu} \quad (54)$$

Если же обобщенные массы, частоты и формы главных свободных колебаний второй системы вычислить в предположении, что точки подвеса стержня C и D неподвижны и, следовательно, все волнаны

$$\psi_j^*(t) = 0, \quad (55)$$

то раньше, чем соединять обе системы воедино, нужно предоставить упомянутым двум точкам второй системы возможность перемещаться, чтобы они могли следовать за движением первой системы.

Для достижения только что упомянутой цели достаточно при исследовании колебаний, симметричных относительно плоскости $x=0$, прибавить к перемещениям стержня $C-D$, данным равенством

$$v'' = \sum_{\beta=1}^{\infty} \psi_{\beta}^*(t) \rho_{\beta}^*(t),$$

перемещения w и

$$v'' = \rho_{\beta}^*(t),$$

т. е. прибавить к числу обобщенных координат второй основной системы перемещения, соответствующие поступательным перемещениям ее как твердого целого. При таком видоизменении второй основной системы координаты ρ_0^* , ρ_1^* , ρ_2^* , ρ_3^* перестают быть главными координатами второй основной системы, что и должно найти свое отражение в структуре характеристического уравне-

ния. Чтобы разложить эту структуру, повторим все рассуждения п. 7 применительно к тому случаю, когда перемещение второй основной системы выражается через ее обобщенные координаты ρ_j^* зависимостью

$$v'' = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^*(t) \rho_j^*, \quad (56)$$

и

$$\psi_0^*(t) = 1, \quad (57)$$

и, когда, следовательно, M_0^* равно фактической массе стержня $C-D$, при j же больших, чем нуль,

$$\psi_j^*(t) = 0. \quad (58)$$

Обозначив фактическую массу стержня $C-D$ через M , будем иметь

$$\left. \begin{aligned} M_0^* &= M, \\ \lambda_0^* &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

Поэтому, приняв, как в п. 7, что R есть натяжение каждой из пружин, соединяющей обе основные системы воедино, а N — жесткость этих пружин, можно уравнения движения первой основной системы выписать, как и в случае, рассмотренном в п. 7, в форме равенств (33)

$$M_0^* [\rho_0^* + (\rho_0^*)^2 \rho_0^*] = 2R \psi_0^*(t), \quad (60)$$

Уравнения движения второй основной системы изменятся, однако, по сравнению с равенствами (33) в п. 7. Изменится также и выражение для R .

Действительно, в силу условий (57) и (58) будем известно равенства (34) иметь

$$R = N \left(\psi_0^* - \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j^*(t) \rho_j^* \right); \quad (61)$$

для написания же уравнений движения второй основной системы придется составить выражение для ее потенциальной энергии и kinetic сумм.

Обозначив через M_j^* и λ_j^* обобщенные массы и собственные частоты стержня $C-D$, вычисленные в предположении, что ρ_0^* равно нулю, можем в случае, если $\rho_0^* \neq 0$, принимать, как и в случае, когда $\rho_0^* = 0$,

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} M_j^* (\lambda_j^*)^2 (\rho_j^*)^2, \quad (62)$$

так как при перемещении стержня как твердого целого потенциальная энергия его гибко не изменится.

Что же касается живой силы стержня $C-D$, то, обозначив через $\psi(z)$ его его, отнесенной к единице длины, и через $2k_2$ его длину, получим

$$T = \frac{1}{2} \int_{-k_2}^{+k_2} \frac{r(z)}{g} (\psi')^2 dz,$$

что по подстановке ψ' из (50) дает

$$T = \frac{1}{2} \int_{-k_2}^{+k_2} \frac{r(z)}{g} \left[k_1^2 + \sum_{j=1}^n \sigma_j^2(z) \beta_j^2 \right] dz,$$

или, выполнив возведение скобки в квадрат,

$$T = \frac{1}{2} \int_{-k_2}^{+k_2} \frac{r(z)}{g} \left[k_1^2 + 2k_1 \sum_{j=1}^n \sigma_j^2(z) \beta_j + \sum_{j=1}^n \sigma_j^2(z) \beta_j^2 \right] dz. \quad (63)$$

В последнем равенстве величина

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_{-k_2}^{+k_2} \frac{r(z)}{g} \sum_{j=1}^n \sigma_j^2(z) \beta_j^2 dz \quad (64)$$

есть, однако, не что иное, как живая сила стержня $C-D$, вычисленная в предположении, что точки его, соответствующие значениям $\pm k_2$, жестко закреплены, и так как мы условились считать координаты $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ главными координатными параметрами стержня CD именно при указанном только что его устройстве, то можно принять, что

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n M_j^2 \beta_j^2. \quad (65)$$

Принимая это во внимание, можем выражение (63) переписать так:

$$T = \frac{1}{2} M (\beta_1^2) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n M_j^2 (\beta_j^2) + \beta_1 \sum_{j=1}^n A_j \beta_j, \quad (66)$$

где через A_j обозначены интегралы

$$A_j = \int_{-k_2}^{+k_2} \frac{r(z)}{g} \sigma_j^2(z) dz. \quad (67)$$

Располагая выражениями (62) и (66), можем составить уравнение движения второй осевой системы в координатах β_j . Используя для этого схему Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}_j} \right) + \frac{\partial T}{\partial \beta_j} = P_j^*$$

где P_j^* — обобщенные силы, соответствующие координатам β_j , будем в силу (57) и (58) иметь

$$M \beta_1^* + \sum_{j=1}^n A_j \beta_j = -2R \sigma_1^2(\epsilon) = -2R; \quad (68)$$

$$M_j^2 [\beta_j^* + (\beta_j^2)^2 \beta_j] + A_j \beta_j = -2R \sigma_j^2(\epsilon) = 0. \quad (69)$$

Таким образом уравнения движения одномерной системы в рассматриваемом случае дается системой равенств:

$$M_0^2 [\beta_0^* + (\beta_0^2)^2 \beta_0] = 2R \sigma_0^2(\epsilon); \quad (69)$$

$$M_j^2 [\beta_j^* + (\beta_j^2)^2 \beta_j] = -A_j \beta_j; \quad (69)$$

$$M \beta_0^* = -2R - \sum_{j=1}^n A_j \beta_j; \quad (68)$$

$$R = N [\beta_0^* - \sum_{j=1}^n \sigma_j^2(\epsilon) \beta_j]. \quad (61)$$

Чтобы размыкать из этих уравнений формы и частоты одномерной системы, положим

$$\left. \begin{aligned} \beta_0 &= \sum_{\alpha} v_{\alpha} \bar{\beta}_{\alpha} \\ \beta_j &= \sum_{\alpha} v_{\alpha} \bar{\beta}_{\alpha} \\ \sigma_j^2(\epsilon) &= \sum_{\alpha} \sigma_j^2(\epsilon) \bar{\beta}_{\alpha} = \sum_{\alpha} v_{\alpha} \bar{\beta}_{\alpha} \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

а также

$$\bar{\beta}_{\alpha} = A_{\alpha} \cos(\bar{\omega}_{\alpha} t + \epsilon_{\alpha}).$$

Тогда из системы (60), (69), (68) и (61) будет следовать

$$M_0^2 [(\bar{\omega}_{\alpha}^2 - \lambda_0^2) v_{\alpha} = 2N (v_{0\alpha}^* - v_{\alpha}^*) \sigma_0^2(\epsilon); \quad (71)$$

$$M_j^2 [(\bar{\omega}_{\alpha}^2 - \lambda_j^2) v_{\alpha} = +A_j \lambda_j^2 v_{\alpha}^*]; \quad (72)$$

$$-M \lambda_0^2 v_{\alpha}^* = -2N (v_{0\alpha}^* - v_{\alpha}^*) + \sum_{j=1}^n A_j \lambda_j^2 v_{\alpha}^*; \quad (73)$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \sigma_j^2(\epsilon) v_{\alpha} = v_{\alpha}^*. \quad (74)$$

Из равенств (72) вытекает, однако,

$$v_{\alpha}^* = \frac{A_j v_{\alpha} \lambda_j^2}{M_j^2 (\lambda_j^2 - \lambda_0^2)}$$

что по подстановке в (73) дает

$$-M \lambda_0^2 v_{\alpha} = -2N (v_{0\alpha}^* - v_{\alpha}^*) + \sum_{j=1}^n \frac{A_j \lambda_j^2}{M_j^2 (\lambda_j^2 - \lambda_0^2) M_j} v_{\alpha}^*.$$

или, что то же,

$$M\bar{\lambda}_2^2 [1 + F_*(\bar{\lambda}_2)] v_{2m}^* = 2N(v_{2m}^* - v_2^*), \quad (75)$$

где через $F_*(\lambda)$ обозначена для простоты функция

$$F_*(\lambda) = \frac{1}{\lambda} \sum_{\alpha=1}^n \frac{M M_{\alpha} \{ \lambda \} \Omega P}{M_{\alpha}^2 (\lambda \Omega^2 - \lambda^2)}, \quad (76)$$

являющаяся, очевидно, вещественной отделимой.

Обращая теперь к равенству (71), видим, что

$$v_{2m}^* = \frac{2N(v_{2m}^* - v_2^*)}{M_2 (\lambda \Omega^2 - \lambda^2)},$$

что по подстановке в (74) дает

$$v_2^* = 2N(v_{2m}^* - v_2^*) \sum_{\alpha=1}^n \frac{M_{\alpha} \{ \lambda \} \Omega P}{M_{\alpha}^2 (\lambda \Omega^2 - \lambda^2)},$$

или, принимая во внимание (75),

$$v_2^* = [1 + F_*(\bar{\lambda}_2)] v_{2m}^* \sum_{\alpha=1}^n \frac{M M_{\alpha} \{ \lambda \} \Omega P}{M_{\alpha}^2 (\lambda \Omega^2 - \lambda^2)}.$$

С помощью обозначения

$$F_*(\lambda) = \sum_{\alpha=1}^n \frac{M M_{\alpha} \{ \lambda \} \Omega P}{M_{\alpha}^2 (\lambda \Omega^2 - \lambda^2)} \quad (77)$$

получимому только что равенству можно придать вид

$$v_2^* = F_*(\bar{\lambda}_2) [1 + F_*(\bar{\lambda}_2)] v_{2m}^*. \quad (78)$$

Равенства (78) и (75) заключают в себе только два неизвестных v_2^* и v_{2m}^* . Исключив из уравнения (75) величину v_2^* с помощью равенства (78), приходим к уравнению

$$M\bar{\lambda}_2^2 [1 + F_*(\bar{\lambda}_2)] v_{2m}^* = 2N(1 - F_*(\bar{\lambda}_2) [1 + F_*(\bar{\lambda}_2)]) v_{2m}^*.$$

Показываемому, что v_{2m}^* может быть отличным от нуля лишь в том случае, если

$$M\bar{\lambda}_2^2 [1 + F_*(\bar{\lambda}_2)] = 2N(1 - F_*(\bar{\lambda}_2) [1 + F_*(\bar{\lambda}_2)]), \quad (79)$$

откуда и могут быть найдены все частоты главных свободных колебаний вынужденной системы.

Введем теперь обозначение

$$r^2 = \frac{2N}{M} \quad (80)$$

и обращая внимание на то, что уравнению (79) нельзя удовлетворить, полагая

$$1 + F_*(\bar{\lambda}_2) = 0,$$

можно уравнение (79) переписать так:

$$\frac{\bar{\lambda}_2^2}{r^2} = \frac{1}{1 + F_*(\bar{\lambda}_2)} - F_*(\bar{\lambda}_2). \quad (81)$$

Здесь $F_1(\bar{\lambda}_2)$ и $F_2(\bar{\lambda}_2)$ имеют смысл, приведенный выше. Равенству (81) можно придать вид

$$\frac{\bar{\lambda}_2^2}{r^2} = 1 - \frac{F_1(\bar{\lambda}_2)}{1 + F_*(\bar{\lambda}_2)} - F_2(\bar{\lambda}_2),$$

или, что то же,

$$1 - \frac{\bar{\lambda}_2^2}{r^2} = F_1(\bar{\lambda}_2) + F_2(\bar{\lambda}_2). \quad (82)$$

Здесь через $F_2(\lambda)$ обозначена функция:

$$F_2(\lambda) = \frac{F_2(\lambda)}{1 + F_*(\lambda)}, \quad (83)$$

обращающаяся в нуль одновременно с функцией $F_1(\lambda)$ и являющаяся разрывно непрерывной с переходами через бесконечность при всех тех значениях $F_*(\lambda)$, когда

$$1 + F_*(\lambda) = 0. \quad (84)$$

Корни уравнения (83) определяются, как видно из (75), те частоты главных свободных колебаний второй основной системы, которые соответствуют случаю, когда жесткость связи, соединяющей вторую основную систему с первой, равна нулю.

Таким образом функция $F_2(\lambda)$ переходит через бесконечность при всех тех значениях λ^2 , которые соответствуют тем частотам главных свободных колебаний второй основной системы, которые соответствуют случаю, когда система эта с первой основной системой не связана.

В данном отвлеченном уравнении (82) сложено с уравнением (45). Легко видеть, что уравнение (82) путем выделенного из функции соответствующего множителя, пропорционального отношению масс обеих основных систем, может быть приведено к тому же виду, что и уравнение (45), полученное в п. 7 иным путем.

Таким образом независимо от того, будет ли принят за вторую основную систему стержень $C-D$, свободный от каких-либо связей с внешней средой, как тот же стержень $C-D$, но подвешенный в точках подвеса на пластинные опоры, в обоих случаях для одной и той же вынужденной системы приходим к одному и тому же характеристическому уравнению с той лишь разницей, что в первом случае все выкладки, служащие для вывода уравнения, получаются более простыми.

16. Можно привести ряд иных примеров систем, для расчета которых частот которых непосредственно используют рассмотренную схему п. 15.

Допустим (рис. 11), что размыкая частоты формы и обобщенные массы корабля, считая какую-либо тяжелую часть его материальной точкой, подвижной по нейтральной оси корабля, и отдельно изучены главные колебания этой точки, считая ее стержнем, жестко заданным у основания.

Тогда разуме, чем соединять обе системы водоню, нужно ввести в число координатных параметров точки какой-либо



Рис. 11.

такой, который позволял бы основанию точки представляться, следуя за колебаниями корабля, и для размыкания частот корабля с установленной на нем, точкой можно повторить в соответствующем виде все рассуждения п. 15.

В качестве второго примера может служить колебание стержня с концами свешивающимися концами.

Допустим (рис. 12), что изучены отдельно колебания той части стержня, которая лежит между его опорами A и B , как колебание балки, свободно открытой по концам, и отдельно изучены колебания консоли $B-C$, как балки, жестко заданной одним концом. Тогда разуме, чем соединять обе основные системы водоню, следует ввести в число обобщенных координат второй основной системы координату, соответствующую направлению этой системы вокруг ее опорной точки, ибо только после этого можно заставить обе рассматриваемые системы колебаться совместно.

Очевидно, что и в этом случае для перехода от обеих основных систем к системе водонюменной придется прибегнуть к рассуждениям, аналогичным рассуждениям п. 15.

Если бы, однако, за первую основную систему принять тот же стержень $A-B$, свободно открытый на концах, за вторую же основную систему стержень $B-C$, считая последний лишь подвешенным, а не заданным в точке B , то для размыкания частот и форм главных свободных колебаний водонюменной системы можно воспользоваться рассуждениями п. 7.

17. До сих пор мы не касались вопроса о размыкании обобщенных масс, соответствующих главным свободным колебаниям водонюменной системы, сосредоточив все внимание на размыкании частот этих колебаний. Остановившись кратко на размыкании именно обобщенных масс водонюменной системы. Знать их бывает полезно во всех тех случаях, когда требуется размыкать



Рис. 12.

либо вынужденные колебания самой этой водонюменной системы, либо же нужно полученную водонюменную систему принять за основную для перехода от нее к системе, еще более усложненной. Для размыкания данных обобщенных масс не требуется составлять размерные выражения для форм главных свободных колебаний водонюменной системы достаточно знать обобщенные массы для всех главных свободных колебаний обеих основных систем и связь между главными координатами этих последних систем и главными координатами системы водонюменной.

Допустим для примера, что переход от обеих основных систем к системе водонюменной совершается по схеме п. 7.

Пусть ρ_k^1 — главные координаты;
 M_k^1 — соответствующие главные координатам обобщенные массы } для первой основной системы
 ρ_k^2 ; M_k^2 — соответствующие величины для второй основной системы.

Тогда кинетическая энергия первой основной системы может быть представлена равенством

$$T_1 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n M_k^1 (\dot{\rho}_k^1)^2, \quad (85)$$

а кинетическая энергия второй основной системы зависящим образом

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n M_k^2 (\dot{\rho}_k^2)^2. \quad (86)$$

Допустим, что методом, изложенным в п. 7, размыканы совокупность параметров ρ_k^1 и ρ_k^2 , входящих в равенства

$$\left. \begin{aligned} \rho_k^1 &= \sum_{\alpha} v_{k\alpha}^1 \bar{\rho}_\alpha \\ \rho_k^2 &= \sum_{\alpha} v_{k\alpha}^2 \bar{\rho}_\alpha \end{aligned} \right\} \quad (87)$$

связывающих главные координаты водонюменной системы $\bar{\rho}_\alpha$ с главными координатами обеих основных систем.

Тогда для вычисления кинетической энергии T водонюменной системы достаточно подставить величины ρ_k^1 и ρ_k^2 из (87) в выражение

$$T = T_1 + T_2 = \frac{1}{2} \left\{ \sum_k M_k^1 (\dot{\rho}_k^1)^2 + \sum_k M_k^2 (\dot{\rho}_k^2)^2 \right\}.$$

Это дает

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \sum_k M_k^1 \sum_{\alpha} \sum_{\beta} v_{k\alpha}^1 v_{k\beta}^1 \dot{\bar{\rho}}_\alpha \dot{\bar{\rho}}_\beta + \sum_k M_k^2 \sum_{\alpha} \sum_{\beta} v_{k\alpha}^2 v_{k\beta}^2 \dot{\bar{\rho}}_\alpha \dot{\bar{\rho}}_\beta \right\}.$$

или, что то же,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{\beta} \bar{y}_{\alpha} \bar{y}_{\beta} \left[\sum_{\alpha} M_{\alpha}^{\alpha} v_{\alpha}^{\alpha} v_{\alpha}^{\alpha} + \sum_{\beta} M_{\beta}^{\beta} v_{\beta}^{\beta} v_{\beta}^{\beta} \right]. \quad (88)$$

Координаты \bar{y}_{α} являются, как сказано, главными координатами андиоменионной системы. Поэтому произведения соответствующих им скоростей $\dot{\bar{y}}_{\alpha}$, $\dot{\bar{y}}_{\beta}$ из равенства (88) должны выпасть, для чего требуется, чтобы при всяких m и n , α и β , равных друг другу, было

$$\sum_{\alpha} M_{\alpha}^{\alpha} v_{\alpha}^{\alpha} v_{\alpha}^{\alpha} + \sum_{\beta} M_{\beta}^{\beta} v_{\beta}^{\beta} v_{\beta}^{\beta} = 0. \quad (89)$$

Зависимости (89) позволяют переписать равенство (88) следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} M_{\alpha}^{\alpha} (\dot{\bar{y}}_{\alpha})^2. \quad (90)$$

Для этого достаточно положить

$$M_{\alpha} = \sum_{\alpha} M_{\alpha}^{\alpha} (v_{\alpha}^{\alpha})^2 + \sum_{\beta} M_{\beta}^{\beta} (v_{\beta}^{\beta})^2. \quad (91)$$

Равенствами (91) и определяются обобщенные массы, соответствующие главным колебаниям андиоменионной системы.

Таким образом все эти обобщенные массы можно вычислить, не составляя развернутых выражений для форм главных свободных колебаний андиоменионной системы. Достаточно знать лишь обобщенные массы, соответствующие главным координатам обеих основных систем, а равно и связь этих координат с главными координатами системы андиоменионной.

18. Остановимся теперь на вопросе о нахождении перемещения какой-либо точки андиоменионной системы, соответствующей заданному значению одной из главных координат системы.

Для этого можно, как и при решении вопроса в 7, пользоваться связью между главными координатами андиоменионной системы и главными координатами обеих основных систем без предварительного составления развернутых выражений для форм всех главных колебаний андиоменионной системы.

Пусть, например, требуется найти перемещение той точки второй основной системы, где z имеет некоторое определенное значение (скажем, $z = n$), соответствующее n -му главному колебанию системы. Для этого могут служить формулы

$$v^{\alpha}(a) = \sum_{\beta} v_{\beta}^{\alpha}(a) \bar{y}_{\beta}^{\alpha} \quad (92)$$

$$\bar{y}_{\beta}^{\alpha} = \sum_{\gamma} v_{\gamma}^{\beta} \bar{y}_{\gamma}^{\alpha}. \quad (93)$$

Поэтому в частном случае, когда из всех главных координат андиоменионной системы только одна n -я отлична от нуля, все \bar{y}_{β}^{α} должны определяться равенствами

$$\bar{y}_{\beta}^{\alpha} = v_{\beta}^{\alpha} \bar{y}_n. \quad (94)$$

и интересующее отклонение рассматриваемой точки второй основной системы будет

$$v^{\alpha}(a) = \left[\sum_{\beta} v_{\beta}^{\alpha}(a) v_{\beta}^{\alpha} \right] \bar{y}_n. \quad (95)$$

Аналогично можно поступать и в более сложных случаях. Так, например, если соединить воедино две основные системы и к полученной таким образом первой андиоменионной системе присоединить третью основную систему, то, размыкая частоты главных свободных колебаний сначала первой андиоменионной системы, а затем аналогичным образом и второй, можно выразить все главные координаты первых двух основных систем через главные координаты первой андиоменионной системы, затем же эти последние, а равно и главные координаты третьей основной системы выразить через главные координаты второй андиоменионной системы.

Желая после этого разыскать перемещение какой-либо точки первой основной системы, соответствующее какому-либо частному значению одной из главных координат второй андиоменионной системы, мы должны вычислить соответствующее этому случаю значение всех главных координат первой андиоменионной системы, затем с помощью их связи с главными координатами первой основной системы разыскать значение последних z , наконец, просуммировать влияние найденных таким образом значений всех главных координат первой основной системы на перемещение рассматриваемой точки этой системы.

19. Рассмотрим, наконец, вопрос о разыскании начальных значений главных координат андиоменионной системы по заданным отклонениям всех ее точек.

Зная отклонения в начальный момент всех точек первой основной системы, находим, пользуясь ортогональностью форм всех главных колебаний первой основной системы, начальные значения всех главных координат ее, т. е. начальные значения величин \bar{y}_{β}^{α} .

Аналогично, зная начальные отклонения второй основной системы, находим начальные значения ее главных координат, т. е. величин \bar{y}_{β}^{α} .

Когда таким образом начальные значения всех величин \bar{y}_{β}^{α} и \bar{y}_{β}^{α} найдены, для нахождения начальных значений главных координат андиоменионной системы, т. е. величин \bar{y}_{β}^{α} , можно обратиться к равенствам (87) и свойству ортогональности (89).

Умножив \bar{y}_{β}^{α} с уравнение первой группы системы (87) на $M_{\alpha}^{\alpha} v_{\alpha}^{\alpha}$, \bar{y}_{β}^{α} с уравнение второй группы той же системы на $M_{\beta}^{\beta} v_{\beta}^{\beta}$ и сложив

затем все уравнения преобразованной системы (87), будем иметь

$$\sum_k M_k^* \dot{v}_k + \sum_j M_j^* \dot{v}_j = \sum \bar{p}_k (\sum_k M_k^* v_k + \sum_j M_j^* v_j)$$

или, приняв во внимание равенство (89)

$$\begin{aligned} \bar{p}_k &= \frac{\sum_k M_k^* \dot{v}_k + \sum_j M_j^* \dot{v}_j}{\sum_k M_k^* (v_k^2) + \sum_j M_j^* (v_j^2)} = \\ &= \frac{1}{M_k^*} (\sum_k M_k^* \dot{v}_k + \sum_j M_j^* \dot{v}_j) \end{aligned} \quad (96)$$

Равенство (96) позволяет вычислить начальные значения всех главных координат возмущенной системы. Аналогичным путем можно найти начальные значения производных по времени от всех этих главных координат.

20. Подводя итог сказанному, видно, что изучение колебаний многих стержневых систем удобно бывает вести методом последовательного перехода от систем, составляющих отдельные части интересующей нас сложной системы, к системам, включающим все большее и большее число этих составных частей.

Если главные колебания обеих систем, соединенных совместно, предварительно изучены, то разыскание частот, форм и изменений во времени главных координат системы, составленной из обеих основных систем, может производиться, как видно из вышесказанного, относительно просто.

Примечание. Этот, использованный применительно к некоторым простейшим случаям малых колебаний упругих систем С. А. Гершгориним, заслуживает значительно более широкого использования, чем это делалось до сих пор.

9. О ПРОДОЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ БРУСА РАВНОГО СОПРОТЯВЛЕНИЯ*

Исследование колебаний брусьев переменного сечения обычно затрудняется тем обстоятельством, что даже при всех тех допущениях, которые обычно делаются при изучении этих колебаний, уравнения движения не могут быть приведены к уравнениям с постоянными коэффициентами. Так называемый брус равного сопротивления** представляет в этом отношении исключение. Дифференциальное уравнение его продольных колебаний может быть приведено к уравнению линейному с постоянными коэффициентами. Нахождение продольных колебаний бруса равного сопротивления поэтому несколько не труднее, чем в случае бруса призматического. Так как для брусьев равного сопротивления исследование продольных колебаний представляет наибольший интерес, то в настоящей статье и будут рассмотрены именно эти колебания.

1. Сечение бруса равного сопротивления может быть задано, как известно, законом

$$F = F_0 e^{-\frac{\gamma}{K} x},$$

где F_0 — сечение бруса в его верхнем конце, см²;

ось ox — направлена по оси стержня вниз;

γ — вес единицы объема стержня, кг/см³;

K — допускаемое в стержне при растяжении напряжение, дин/см²;

x — абсцисса сечения, см.

Величины γ и K — некоторые постоянные, поэтому брус равного сопротивления является частным случаем бруса, сечения которого определяются законом:

$$F = F_0 e^{-\alpha x}, \quad (1)$$

где α — величина постоянная.

* Печатается впервые.

** При растяжении.

Если в основу исследования положить гипотезы:

1) несжимаемости сечений, перпендикулярных к оси стержня;
2) пренебрежимой малости влияния поперечного сжатия, то дифференциальное уравнение свободных колебаний будет

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(E F \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\gamma F}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}.$$

Приняв его и замечая, что при F , определенном равенством (1),

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(E F \frac{\partial w}{\partial z} \right) = E F_0 e^{-\alpha z} \left(-\alpha \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right),$$

можно видеть, что дифференциальное уравнение свободных колебаний бруса равносильно соотношению:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \alpha \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\gamma}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (2)$$

Вводя в рассмотрение главные колебания, можно всякое свободное колебание рассматривать как некоторую сумму главных колебаний:

$$w = \sum X \varphi,$$

где φ — главные координаты системы;

X — их нормальные функции.

В рассматриваемом случае, в силу основных гипотез, нормальные функции X суть функции одного лишь аргумента.

Свободные главные колебания системы отличаются тем, что все главные координаты являются простыми гармоническими функциями времени, а всякое главное колебание, раз начавшись, протекает так, как если бы все остальные колебания отсутствовали.

Свойствами этими можно воспользоваться для нахождения вида нормальных функций X .

Действительно, пусть p — угловая скорость главной координаты φ , и пусть X выбрана так, что в начальный момент координата φ достигнет своего максимального значения. Тогда по свойству (1) должно быть

$$\varphi = \varphi_0 \cos pt,$$

но по свойству (2) колебание

$$w = X \varphi_0 \cos pt \quad (3)$$

должно иметь возможность существовать независимо от других колебаний, так что (3) должно быть частным решением уравнения (2). Легко, однако, видеть, что это последнее возможно только тогда, когда X удовлетворяет уравнению

$$X'' - \alpha X' + \frac{g}{\gamma} X = 0, \quad (4)$$

где для простоты введено обозначение

$$a^2 = \frac{g}{\gamma}. \quad (5)$$

2. Для того чтобы главные колебания могли протекать независимо одно от другого, они должны, помимо сказанного выше, удовлетворять каждому порознь всем условиям закрепления стержня. В качестве таковых естественно принимать, что на нижнем конце стержня висит некоторый груз весом P_1 , а верхний конец стержня или закреплен неподвижно, или также висит на себе некоторую массу P_2 . Последний случай может представлять некоторый интерес в связи с исследуемым движением механизма поднимающего рассматриваемый брус. В этом случае под грузом поднимающего разумеется приведенную массу поднимаемого механизма. Этот случай является более общим, так как допуская $P_1 = \infty$ эквивалентно условию полной неподвижности верхнего конца стержня. В дальнейшем будет принято, что стержень на верхнем конце закреплен к грузу, масса которого есть P_2 . Указанные граничные условия аналитически могут быть выражены равенствами

$$E F_0 \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{P_1}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{при } z = 0;$$

$$E F_1 \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{P_2}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{при } z = l.$$

Для того чтобы колебание (3) им удовлетворяло, его нормальная функция должна удовлетворять условиям

$$\left. \begin{aligned} X' &= -\frac{P_1}{E_0 \gamma} \frac{g^2}{a^2} X \quad \text{при } z = 0; \\ X' &= \frac{P_2}{E_1 \gamma} \frac{g^2}{a^2} X \quad \text{при } z = l. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Условиями этими определяются соотношения между постоянными интегрирования, входящими в общий интеграл нормальной функции X , и угловая скорость p соответствующего ей главного колебания.

3. Нетрудно видеть, что общий интеграл дифференциального уравнения (4):

$$X = e^{\frac{\alpha}{2} z} (A \cos \pi z + B \sin \pi z). \quad (7)$$

где

$$\pi^2 = \frac{g^2}{a^2} - \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2. \quad (8)$$

Выражение (7) удовлетворяет граничным условиям (6), если постоянные интегрирования A и B и величина μ удовлетворяют одновременно уравнениям

$$\left. \begin{aligned} A[k_0(\mu^2 + \beta^2) + \beta] &= -\mu B; \\ A\{[k_1(\mu^2 + \beta^2) - \beta] \cos \mu + \mu \sin \mu\} &= \\ = B\{\mu \cos \mu - [k_1(\mu^2 + \beta^2) - \beta] \sin \mu\}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Для простоты введены обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi l}{2} &= \beta, & \pi l &= \mu; \\ \frac{P_0}{P_0 \gamma l} &= k_0, & \frac{P_1}{P_1 \gamma l} &= k_1. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Равенствам (9) можно одновременно удовлетворить только тогда, когда μ удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\mu [k_1(\mu^2 + \beta^2) - \beta] + [k_0(\mu^2 + \beta^2) + \beta]}{[k_1(\mu^2 + \beta^2) - \beta] [k_0(\mu^2 + \beta^2) + \beta] - \mu^2}. \quad (11)$$

каковое вместе с выражением

$$p^2 = \alpha^2 \left[\mu^2 + \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \right] = \mu^2 (\mu^2 + \beta^2) \quad (12)$$

может служить для нахождения угловых скоростей p , а следовательно, и периода

$$T = \frac{2\pi}{p} \quad (13)$$

главных колебаний рассматриваемой системы.

Нетрудно видеть, что уравнение (11) можно удовлетворить, положив

$$\mu = \varepsilon_0 + \varepsilon_1, \quad (14)$$

где ε_0 и ε_1 определяются тем, что

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varepsilon_0 &= \frac{\mu}{k_0(\mu^2 + \beta^2) + \beta}; \\ \operatorname{tg} \varepsilon_1 &= \frac{\mu}{k_1(\mu^2 + \beta^2) - \beta}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

так что равенства (14) и (15) наряду с уравнением (11) могут служить для нахождения величин μ .

4. Приняв во внимание обозначения (15) и первое из равенств группы (9) и полагая производную постоянной равной величине $B = \cos \varepsilon_0$, нетрудно выражение (7) преобразовать к виду

$$X = e^{\frac{\alpha x}{2}} \sin(\alpha x - \varepsilon_0), \quad (16)$$

что и может быть признано за общее выражение для нормальной функции одного из главных колебаний, если только $\mu = \pi l$ удовлетворяет либо уравнению (11) либо совокупности уравнений (14) и (15).

Выражение (16) обнаруживает любопытное свойство нормальных функций рассматриваемых колебаний. Они имеют вид синусоид, амплитуда конк растет при перемещении сверху вниз по показательному закону. Значение нормальной функции на верхнем конце есть

$$X(0) = -\sin \varepsilon_0;$$

на нижнем же

$$X(l) = e^{\beta} \sin(\mu - \varepsilon_0),$$

или, принимая во внимание (14):

$$X(l) = e^{\beta} \sin \varepsilon_1.$$

Таким образом ε_0 и ε_1 — граничные (для концов стержня)

фазы той синусоиды, на которой умножим ее на $e^{\frac{\alpha x}{2}}$ получается вид нормальной функции.

5. Потенциальная энергия растянутого стержня в силу первой из основных гипотез может быть найдена с помощью выражения

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l E F \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Если отклонение системы задано одной из главных координат

$$u = X_0 \varphi_0,$$

то

$$\begin{aligned} V &= \frac{E}{2} \varphi_0^2 \int_0^l F(X_0')^2 dx = \\ &= \varphi_0^2 \frac{E F_0}{2} \int_0^l \left[\sin(\alpha_0 x - \varepsilon_{0,0}) + \alpha_0 \cos(\alpha_0 x - \varepsilon_{0,0}) \right]^2 dx. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что в силу равенства (8)

$$\frac{F_0}{F} = \alpha_0^2 + \left(\frac{\alpha}{2} \right)^2,$$

и вводя величину δ посредством равенства

$$\operatorname{tg} \delta_0 = \frac{\alpha}{2\alpha_0} = \frac{\beta}{\mu_0}, \quad (17)$$

нетрудно видеть, что

$$V = \varphi_0^2 \frac{K F_0 \beta^2 l}{2\beta^2} \int_0^l \cos^2 (\alpha_n x - \delta_n - \epsilon_{n,0}) dx = \varphi_0^2 \frac{K F_0 \beta^2 l}{4\beta^2} (1 + C_n), \quad (18)$$

где

$$C_n = \frac{\sin 2\alpha_n}{2\alpha_n} \cos (\epsilon_{1,n} - \epsilon_{2,n} - 2\delta_n). \quad (19)$$

В общем случае, если отклонение системы определяется некоторой совокупностью главных отклонений:

$$\eta = \sum X_n \varphi_n$$

потенциальная энергия системы, как известно, есть сумма потенциалов энергии от каждого из главных отклонений в отдельности:

$$V = \frac{K F_0 l}{4\alpha^2} \sum_n \varphi_n^2 \varphi_n^2 (1 + C_n). \quad (20)$$

б. Если движение системы определяется изменением одной из главных координат, т. е. если

$$\eta = X_n \varphi_n$$

и

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = X_n \varphi_n'$$

то для вычисления кинетической энергии системы может служить выражение

$$T = \frac{\varphi_0^2}{2\beta} \left[P_1 X_1^2(t) + P_2 X_2^2(t) + \int_0^l F_1 \gamma X_1^2 dx \right].$$

Подставляя сюда F из выражения (1) и X из выражения (16), легко видеть, что

$$\begin{aligned} T &= \frac{\varphi_0^2}{2\beta} F_0 \gamma l \left[k_1 \sin^2 \epsilon_0 + k_2 \sin^2 \epsilon_1 + \int_0^l \frac{\sin^2 (\alpha_n x - \delta_n)}{l} dx \right] = \\ &= \varphi_0^2 \frac{F_0 \gamma l}{2\beta} \left[\frac{1}{2} - \frac{\sin^2 \epsilon_0 + \sin^2 \epsilon_1}{4\alpha} + k_1 \sin^2 \epsilon_0 + k_2 \sin^2 \epsilon_1 \right]. \end{aligned}$$

Пользуясь выражением (15), нетрудно найденное выражение для живой силы привести к такому виду:

$$T = \varphi_0^2 \frac{F_0 \gamma l}{4\beta} (1 + C_n). \quad (21)$$

где

$$C_n = \frac{k_1 (\alpha l^2 + \beta^2) + \beta}{\alpha l} \sin^2 \epsilon_0 + \frac{k_2 (\alpha l^2 + \beta^2) - \beta}{\alpha l} \sin^2 \epsilon_1,$$

или, что то же,

$$C_n = \frac{2k_1 \alpha l - (k_1 (\alpha l^2 + \beta^2) + \beta)}{(k_1 (\alpha l^2 + \beta^2) + \beta^2 + \alpha l)} + \frac{2k_2 \alpha l - (k_2 (\alpha l^2 + \beta^2) - \beta)}{(k_2 (\alpha l^2 + \beta^2) - \beta^2 + \alpha l)}. \quad (22)$$

Если движение системы определяется изменением не одной лишь какой-либо, а всех главных координат, то, как известно, живая сила системы определяется суммой живых сил каждого из главных движений.

Поэтому в общем случае

$$T = \frac{F_0 \gamma l}{4\beta} \sum_n \varphi_n^2 (1 + C_n). \quad (23)$$

7. Если, пользуясь схемой Лягушки и выражениями (20) и (23), составить уравнения свободных колебаний системы в главных координатах, то это даст для каждого из них уравнение вида

$$\frac{F_0 \gamma l}{2\beta} (1 + C_n) \varphi_n'' + \beta^2 \frac{K F_0 l}{2\alpha^2} (1 + C_n) \varphi_n = 0, \quad (24)$$

которое, если принять во внимание обозначение (5), обращается в

$$\varphi_n'' (1 + C_n) + \beta^2 (1 + C_n) \varphi_n = 0.$$

Уравнение это дает для φ_n гармоническое колебание с угловой скоростью β_n тогда и только тогда, если

$$C_n = C_n.$$

Но одним из исходных пунктов всех изложенных выше рассуждений было (3), что угловая скорость рассматриваемого колебания есть β_n . Ясно, следовательно, что величины C_n и C_n , определенные равенствами (19) и (22), идентичны. В этом можно было бы убедиться и непосредственно, приняв во внимание (14) и (15).

8. Дифференциальные уравнения вынужденных колебаний во второй лагранжиановой форме имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_n} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_n} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_n} = \Phi_n, \quad (25)$$

где Φ_n есть обобщенная сила, соответствующая рассматриваемой координате и определяемая равенством

$$\Phi_n = \int_0^l X X_n dx.$$

где буквой X обозначена возмущающая сила, действующая в сечении, абсцисса которого есть x ; X_n есть значение нормальной функции для того же сечения, а суммирование распространяется на все внешние силы.

Принимая во внимание равенства (16), можно видеть, что для рассматриваемой системы

$$\Phi_n = \int_0^l X \varepsilon^{\frac{2n}{l}} \sin(\pi_n x - \varepsilon_{n,0}) dx. \quad (20)$$

Выполнив дифференцирование в левой части уравнения (25) и принимая во внимание сказанное в п. 7, нетрудно уравнения вынужденных колебаний придать такой вид:

$$\frac{F_n \gamma l}{2p} (1 + C_n) [\psi_n'' + p_n^2 \psi_n] = \Phi_n. \quad (25)$$

Величину

$$M_n = \frac{F_n \gamma l}{2p} (1 + C_n) \quad (22)$$

можно назвать приведенной массой системы в n -ом главном колебании ее. Вычисление ее же представляет затруднений, так как для нахождения C_n могут служить равенства (19) или (22) по желанию. Удобнее пользоваться вторым из них, как не заключающим в себе тригонометрических величин. Выражение (22) показывает, между прочим, что если k_1 и k_2 очень велики, т. е. грузы на концах несут очень тяжелые массы, или же если p_n достаточно велико, т. е. рассматриваемое колебание имеет угловую скорость достаточно большую, то C_n близко к нулю и приведенная масса рассматриваемого стержня достаточно близка к величине $\frac{F_n \gamma l}{2p}$, т. е. к половине массы названного цилиндрического стержня, огибаемого вокруг рассматриваемого цилиндрического стержня.

В. Выше (в п. 6) было установлено, что при всяком n :

$$F_n X_1''(0) + P_1 X_2''(l) + \int_0^l F \gamma X_2'' dx = p M_n = \frac{F_n \gamma l}{2} (1 + C_n). \quad (28)$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что при всяком n и k_1 друг другу не равных, имеет место равенство

$$F_n X_n(0) X_n(0) + P_1 X_n(l) X_n(l) + \int_0^l F \gamma X_n X_n dx = 0, \quad (29)$$

являющееся непосредственным следствием того, что в выражении

(23) живой силы через главные координаты их произведения или $\psi_n \psi_n'$ не вкладывает.

Равенства (28) и (29) позволяют по начальным значениям перемещений всех точек стержня найти начальные значения главных координат известным приемом Фурье:

$$\psi_n = \frac{F_n u'(0) X_n(0) + P_1 u'(l) X_n(l) + \int_0^l F \gamma u X_n dx}{p M_n}. \quad (30)$$

точно так же, как по начальным скоростям тела найти начальные значения производных по времени от главных координат:

$$\psi_n' = \frac{F_n u''(0) X_n(0) + P_1 u''(l) X_n(l) + \int_0^l F \gamma u' X_n dx}{p M_n}. \quad (31)$$

Дифференциальными уравнениями (25) и начальными условиями (30) и (31) главные координаты определяются вполне. В каждом частном случае их нахождение не представляет затруднений. Необходимо лишь помнить, что перемещения u и их производные по времени u' , входящие в правые части выражений (30) и (31), суть перемещения и скорости всех точек тела и их относительны по отношению к центру инерции всего стержня движения.

10. Величина M_n приведенной массы стержня определяется для всякого тона колебаний величиной параметра C_n . Полезно поэтому несколько остановиться на формулах (19) и (22), определяющих его.

Формулы эти справедливы при всяких значениях параметров k_1 и k_2 , определяющих массы грузов, прикрепленных к концам стержня, точно так же, как и при всяких значениях параметра β , характеризующего форму стержня.

1. Положив в них $\beta = 0$, можно получить решение для цилиндрического стержня с грузами на концах:

$$C_n = \frac{k_2}{k_1 p_n^2 + 1} + \frac{k_1}{k_1 p_n^2 + 1}. \quad (32)$$

II. Если положить k_2 равным бесконечности, то согласно формуле (15) будет ε_n равно нулю и перемещение стержня на верхнем конце будет равно нулю $X(0) = 0$. В выражении (22) при этом обращается в нуль первый член правой части.

III. Если положить $k_1 = \infty$, то получится решение для стержня с нижним концом неподвижным. В этом случае в выражении C_n обращается в нуль второй член правой части.

* См. Steinhilber, где они получены как обобщения задачи Рейнольдса колебания упругой сферы, а также Love — Timpe, стр. 213. Свойство нормальных функций, выраженное равенством (29), Timpe называет die Kompensations Eigenschaft der Normalfunktionen.

IV. Если положить $k_1 = k_2 = \infty$, то получится решение для стержня, у которого оба конца неподвижны. В этом случае $C_n = 0$ и приведенная масса стержня для всякого тона

$$M_n = \frac{F \gamma l}{2g}.$$

Формула (11) показывает, что в этом случае

$$\operatorname{tg} \mu_n = 0$$

и, следовательно,

$$\mu_n = \pi; \mu_n = 2\pi; \mu_n = 3\pi; \dots$$

так что угловая скорость n -го колебания есть (согласно формуле (12))

$$\mu_n^2 = \frac{g}{l} [(n\pi)^2 + \beta^2]. \quad (33)$$

Периоды главных колебаний при $\beta \neq 0$ не составляют, следовательно, в этом случае гармонического ряда.

V. Если положить $k_2 = k_1 = 0$, то получится решение для стержня с обоими свободными концами. В этом случае C_n также равно нулю, $\mu_n = n\pi$ и

$$\mu_n^2 = \frac{g}{l} [(n\pi)^2 + \beta^2].$$

то на концах стержня $e_2 \neq e_1$. В пределе, при μ_n большом $\operatorname{tg} e_2$ стремится к $+\infty$, а $\operatorname{tg} e_1$ к $-\infty$, так что при n достаточно большом можно считать $e_2 = \frac{\pi}{2}$, а $e_1 = \pi + \frac{\pi}{2}$.

11. Случай, когда верхний конец стержня закреплён неподвижно, заслуживает несколько более подробного рассмотрения.

Здесь, как было указано выше,

$$k_2 = \infty, \quad e_2 = 0.$$

Величина k_1 зависит от величины груза F_1 , висевшего на нижнем конце стержня:

$$k_1 = \frac{F_1}{F_2 \gamma l}.$$

Величина $\frac{F_1}{F_2}$ есть напряжение, вызываемое в нижнем сечении стержня грузом, к нему там подвешенным. Весьма мало вероятно, чтобы к нижнему концу бруса равного сопротивления был подвешен груз большей того, при котором напряжение в стержне F_2 ; F_1 будет превышать допустимое в его материале напряжение R . Обычно, следовательно,

$$k_1 = \frac{R}{F_2 \gamma l}.$$

А так как

$$\frac{R}{F_2 \gamma l} = \frac{1}{\alpha l} - \frac{1}{2\beta},$$

то обычно величина k_1 лежит в пределах

$$0 < k_1 < \frac{1}{2\beta}. \quad (34)$$

Посмотрим, чему равны корни трансцендентного уравнения (11) в этих двух предельных случаях; воспользуемся тем, что, в силу равенства $e_2 = 0$, величина μ равна величине e_1 и, следовательно, уравнение (11) эквивалентно уравнению

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{\mu}{k_1(\mu^2 + \beta^2) - \beta}. \quad (35)$$

I. Если $k_1 = 0$, т. е. нижний конец стержня свободен, то уравнение (35) обращается в

$$\operatorname{tg} \mu = -\frac{\mu}{\beta}.$$

Все его корни таковы, что при них $\operatorname{tg} \mu < 0$ и, следовательно, корни эти лежат в пределах

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi}{2} < \mu_1 < \frac{2\pi}{2}; \\ \frac{3\pi}{2} < \mu_2 < \frac{4\pi}{2}; \\ \frac{5\pi}{2} < \mu_3 < \frac{6\pi}{2}; \\ \frac{(2n-1)\pi}{2} < \mu_n < \frac{2n\pi}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

II. Если $k_1 = \frac{1}{2\beta}$, т. е. на нижнем конце стержня висит груз предельного веса, то уравнение (35) принимает вид

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{2\beta\mu}{\mu^2 - \beta^2}.$$

При малых значениях μ его правая часть отрицательна. При большом μ она положительна. От отрицательных значений к положительным она переходит при $\mu = \beta$, претерпевая разрыв непрерывности. Если $\beta < \frac{\pi}{2}$, то уравнение (35) имеет корни лишь при таких μ , при которых $\operatorname{tg} \mu > 0$, так что все корни уравнения лежат в пределах

$$\frac{2n-2}{2}\pi < \mu_n < \frac{2n-1}{2}\pi. \quad (37)$$

При $\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{2}$ один из корней уравнения, имело μ , лежащий в пределах, устанавливаемых неравенством (36); остальные в пределах, даваемых неравенствами (37). При $\frac{3\pi}{2} < \beta < \frac{5\pi}{2}$ неравенствами (36) определяются два корня μ_1 и μ_2 , при $\frac{5\pi}{2} < \beta < \frac{7\pi}{2}$ — три μ_1 , μ_2 и μ_3 и т. д. Зная пределы корней, нетрудно последовательно приближенно вычислить их величину.

Вычисляя μ , нетрудно с помощью выражения (22) найти соответствующие значения величин C_n . Если $k_1 = 0$, то

$$C_n = \frac{\beta}{\mu_1^2 + \beta^2}. \quad (38)$$

Если же $k_1 = \frac{1}{2\beta}$, то, как нетрудно видеть,

$$C_n = \frac{1}{\mu_1^2 + \beta^2}. \quad (39)$$

Имея значения C_n , нетрудно найти приведенные массы стержня и, согласно уравнения (25'), найти с помощью начальных условий (30) и (31) все главные координаты системы.

12. В качестве примера рассмотрим следующую задачу. Найти колебания от внезапной нагрузки нижнего конца бруса равного сопротивления предельным грузом, если верхний конец стержня неподвижен.

С того момента, как к нижнему концу бруса подвешен груз, он начинает совершать колебания около своего начального положения равновесия. Если брус сначала был в покое, то начальные значения производных по времени от всех главных координат надо считать равными нулю (согласно выражению (31)). Так как никакие возмущающие внешние силы, кроме сил тяжести, на брус не действуют, то в уравнениях движения можно считать обобщенные силы Φ_n равными нулю, и, следовательно, принимать

$$\varphi_n = \varphi_n^0 \cos p_n t,$$

где φ_n^0 — начальное значение соответствующей главной координаты.

Для нахождения величин φ_n^0 можно было бы вычислить для начального момента времени отклонения всех точек стержня и, выполнив интегрирование в правой части выражений (30), найти φ_n^0 . Можно, однако, применить и более простой путь, а именно допустить, что груз P_1 , подвешенный к нижнему концу стержня, висит на нем все время, но до момента $t = 0$ его влияние на стержень нейтрализуется силой, равной его весу и направленной вверх. При такой постановке задачи окажется, что вплоть до момента $t = 0$ на систему будет действовать некоторая внешняя сила, которую можно будет разложить на обобщенные силы Φ_n ,

с помощью формулы (26). Принимая во внимание, что сила эта P_1 и сосредоточена в сечении $x = l$, легко видеть, что

$$\Phi_n = -P_1 X_n(l) = -P_1 e^{\beta} \sin(\beta x_n). \quad (40)$$

Подставляя это выражение в уравнение (25'), можно найти значение главной координаты φ_n от статического действия рассматриваемой силы, положив в уравнение (25) $\varphi_n^0 = 0$. Это дает

$$\varphi_n = \frac{\Phi_n}{p_n^2 M_n} = \frac{\Phi_n}{p_n^2 \frac{P_1 \gamma l}{2\beta} (1 + C_n)}.$$

Положив сюда C_n из выражения (39), Φ_n из выражения (40) и p_n^2 из выражения (22), легко видеть, что начальное значение координаты

$$\varphi_n^0 = -\frac{P_1 e^{\beta} 2\beta l \sin(\beta x_n)}{\beta^2 P_1 \gamma l (\mu_n^2 + \beta^2 + 1)},$$

или, принимая во внимание последнее из выражений (10),

$$\varphi_n^0 = -\frac{2\beta l k_1}{\beta^2 (\mu_n^2 + \beta^2 + 1)} \sin(\beta x_n).$$

Но груз примет в условии задачи максимальный, так что

$$k_1 = \frac{1}{2\beta},$$

вследствие чего

$$\varphi_n^0 = -\frac{e^{\beta}}{\beta^2} \frac{\sin(\beta x_n)}{\beta (\mu_n^2 + \beta^2 + 1)}$$

и, следовательно,

$$\varphi_n = -\frac{e^{\beta}}{\beta^2} \frac{\sin(\beta x_n)}{\beta (\mu_n^2 + \beta^2 + 1)} \cos p_n t$$

и

$$u = -\frac{e^{\beta}}{\beta^2} \sum_n X_n \frac{\sin(\beta x_n)}{\beta (\mu_n^2 + \beta^2 + 1)} \cos p_n t.$$

Найденное выражение можно еще преобразовать подстановкой величины β^2 из выражения (5).

Это дает для всякого x

$$u = -\frac{\gamma l}{E} \sum_n \frac{\sin(\beta x_n)}{\beta (\beta^2 + \mu_n^2 + 1)} X_n \cos(p_n t),$$

а для нижнего конца стержня:

$$u(l) = -\frac{\gamma l}{E} \sum_n \frac{e^{\beta} \sin^2(\beta x_n)}{\beta (\beta^2 + \mu_n^2 + 1)} \cos(p_n t).$$

Нетрудно видеть, что $\gamma R^2 \rho^2 : B$ — статическое удлинение рас-
смазанного стержня под действием собственного веса и веса
груза P_1 на его конце. Введя для этой величины обозначение

$$u_0 = \frac{\gamma R^2 \rho^2}{B},$$

можно видеть, что

$$u(\beta) = -v_0 \sum_{\alpha} \frac{\sin(\alpha l_0)}{(\beta^2 + \alpha^2 + 1)\beta} \cos(\beta_0 l_0). \quad (41)$$

С помощью формулы (41) нетрудно просчитать для ряда раз-
личных значений времени t соответствующие значения величины
 $u(\beta)$ и найти максимальное значение этой величины.

10. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ К НАХОЖДЕНИЮ ЧАСТОТ И ФОРМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОЛЕНЧАТЫХ ВАЛОВ*

Известно, что одним из самых практических способов нахож-
дения частот и форм главных свободных колебаний упругих
систем является комбинация метода Реллея с методом последо-
вательных приближений. В этой комбинированной методе формы
главных свободных колебаний вычисляются методом последо-
вательных приближений, частоты же соответствующих колебаний —
с помощью зависимости, вытекающей из известной теоремы
Реллея.

Этот вычислительный прием используется с большим успехом
уже более десяти лет в разных областях инженерного дела, но
те нашел еще себе приложения в области исследования крутиль-
ных колебаний. Несколько лет тому назад в лекциях, читанных
мной в ЛГУ, была сделана попытка распространить эту методику
на исследование крутильных колебаний. Поскольку до сих пор
она не завоевала еще себе должного распространения, целесообразно
изложить этот прием. От метода, предложенной Н. С. Третьяковым,
метода, излагаемой ниже, отличается тем, что частоты
и формы главных свободных колебаний в процессе последо-
вательных приближений находятся в порядке возрастания частоты
соответствующих колебаний, в то время как в методе Третьякова
наиболее интересное из главных свободных колебаний — коле-
бание наименьшей частоты находится последним.

1. Допустим, что K_i — момент инерции массы i -го из n звеньев
исследуемой системы; $C_{ij} = \frac{GJ_{ij}}{l_{ij}}$ — приведенная жесткость
участка вала между i -ым и j -ым звеньями, а φ_i — угол поворота
 i -го звенья.

Если пренебречь массой самого вала, то жесткий стержень системы
представится равенством

$$\Gamma = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n K_i (\varphi_i)^2. \quad (1)$$

* Работа выполнена в 1952 г. Печатью не оверена.

потенциальная же энергия аала формулой

$$V = \frac{1}{2} \{ C_{1,2} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + C_{2,3} (\varphi_2 - \varphi_3)^2 + C_{3,4} (\varphi_3 - \varphi_4)^2 + \dots + C_{n-1,n} (\varphi_{n-1} - \varphi_n)^2 \} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} C_{i,i+1} (\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2. \quad (2)$$

Здесь через n обозначено число всех маятников, входящих в состав исследуемой системы.

Составим уравнения движения этой системы по схеме Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} \right) + \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = 0 \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n.$$

получаем общезвестную систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} K_1 \varphi_1'' &= C_{1,2} (\varphi_2 - \varphi_1); \\ K_2 \varphi_2'' &= C_{1,2} (\varphi_2 - \varphi_1) + C_{2,3} (\varphi_3 - \varphi_2); \\ K_3 \varphi_3'' &= C_{2,3} (\varphi_3 - \varphi_2) + C_{3,4} (\varphi_4 - \varphi_3); \\ &\dots \dots \dots \\ K_{n-1} \varphi_{n-1}'' &= C_{n-1,n} (\varphi_n - \varphi_{n-1}) + C_{n-2,n-1} (\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}); \\ K_n \varphi_n'' &= C_{n-1,n} (\varphi_{n-1} - \varphi_n). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

которой все главные колебания должны удовлетворять каждому порознь.

Обозначив через:

λ_k частоту k -го из главных свободных колебаний системы;
 $\theta_{i,k}$ амплитуду колебаний i -го маятника в k -ом главном колебании, можно непосредственно из (3) получить для λ_k^2 и $\theta_{i,k}$ систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k^2 K_1 \theta_{1k} &= C_{1,2} (\theta_{2k} - \theta_{1k}); \\ \lambda_k^2 K_2 \theta_{2k} &= C_{1,2} (\theta_{2k} - \theta_{1k}) + C_{2,3} (\theta_{3k} - \theta_{2k}); \\ &\dots \dots \dots \\ \lambda_k^2 K_n \theta_{nk} &= C_{n-1,n} (\theta_{n-1,k} - \theta_{nk}). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Совокупность амплитуд $\theta_{i,k}$, соответствующих определенной частоте значения параметра k , является формой k -го главного свободного колебания системы. Если бы мы ее как угодно образом нашли, то можно было бы воспользоваться для определения частоты соответствующего главного колебания системы известной формулой Релея:

$$\lambda_k^2 = \frac{T(\theta_{i,k} = 0; \theta_k^2 = 1)}{T(\theta_{i,k} = \theta_k^2 = 1)}, \quad (5)$$

где $T(\theta_{i,k} = 0; \theta_k^2 = 1)$ — частное значение величины T , соответствующее случаю, когда $\theta_k^2 = 1$, а все остальные θ_k^2 равны нулю; $T(\theta_{i,k} = \theta_k^2 = 1)$ — частное значение величины T , соответствующее случаю, когда $\theta_k = 1$, а все остальные θ_k равны нулю.

В рассматриваемом случае круглых колебаний формула Релея принимает в силу равенств (1) и (2) вид равенства

$$\lambda_k^2 = \frac{\sum_i C_{i,i+1} (\theta_{i+1,k} - \theta_{i,k})^2}{\sum_i K_i \theta_{i,k}^2}, \quad (6)$$

которым и можно воспользоваться для определения частоты любого из главных круглых колебаний аала, если форма главного колебания предварительно найдена.

Таким образом весь вопрос сводится в сущности к определению лишь форм всех главных колебаний исследуемой системы, так как зная форму того или иного из этих колебаний, определить соответствующую форму частоты уже нетрудно. Для определения частот главных свободных колебаний можно воспользоваться методом последовательных приближений.

2. Сложив все уравнения типа (3), нетрудно видеть, что любое из свободных колебаний исследуемой системы должно удовлетворять условию

$$\sum_i K_i \varphi_i' = 0, \quad (7)$$

т. е. условию уравновешенности момента сил инерции всех вращающихся масс. Так как условие (7) должно удовлетворять все главные колебания, притом каждое порознь, то нет ничего удивительного в том, что между амплитудами $\theta_{i,k}$ колебаний отдельных масс, соответствующих каждому отдельному главному колебанию, должна существовать зависимость

$$\sum_i K_i \theta_{i,k} = 0. \quad (8)$$

вытекающая непосредственно из уравнений (4), если все эти уравнения сложить. Условие (8) является тем каноническим условием, которому должны быть подчинены формы всех главных свободных колебаний системы в силу уравновешенности главного момента сил инерции исследуемой системы.

При разномыслии формы основного из главных свободных колебаний системы методом последовательных приближений можно поступить так.

Для первого приближения принимают

$$\theta_{i,k} = \mu_{i,k}$$

где $\mu_{i,k}$ — любая совокупность чисел, удовлетворяющая тому условию

$$\sum_i K_i \mu_{i,k} = 0. \quad (9)$$

которому должны, как мы видели, удовлетворять числа $\theta_{i,k}$.

числа, подобранные таким образом, чтобы совокупность $\mu_{i,2}$ удовлетворяла условиям:

1) уравновешенности сил наряду со вторым из главных свободных колебаний

$$\sum K_i \mu_{i,2} = 0, \quad (15)$$

2) ортогональности форм обоих главных колебаний по отношению друг к другу

$$\sum K_i \mu_{i,2} \theta_{i,1} = 0, \quad (16)$$

Последнему глаго подчинить совокупность чисел $\mu_{i,2}$ потому, что всегда две формы двух разных главных свободных крутильных колебаний рассматриваемого ваза должны удовлетворять условию

$$\sum K_i \theta_{i,1} \theta_{i,2} = 0,$$

если k и j друг другу не равны.

Теория сходимости процесса последовательных приближений показывает, что, подчинив функции $\mu_{i,2}$ условиям (15) и (16) и разыскав новую совокупность чисел $\mu_{i,1}$ как такое решение уравнений

$$\left. \begin{aligned} C_{1,2}(\mu_{1,2} - \mu_{1,1}) - \lambda^2 K_1 \mu_{1,2} \\ C_{2,2}(\mu_{2,2} - \mu_{2,1}) + C_{2,2}(\mu_{2,1} - \mu_{2,2}) - \lambda^2 K_2 \mu_{2,2} \\ C_{3,2}(\mu_{3,2} - \mu_{3,1}) + C_{3,4}(\mu_{3,1} - \mu_{3,2}) - \lambda^2 K_3 \mu_{3,2} \\ \dots \dots \dots \\ C_{n-1,2}(\mu_{n-1,2} - \mu_{n-1,1}) - \lambda^2 K_n \mu_{n,2} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

которое удовлетворяет условию

$$\sum K_i \mu_{i,1} = 0, \quad (18)$$

получим совокупность чисел, более близкую к форме свободных колебаний второго тона, чем совокупность чисел $\mu_{i,1}$.

Чтобы видеть насколько отличаются числа $\mu_{i,1}$ от $\mu_{i,2}$, полезно подобрать в равенствах (17) множитель λ^2 так, чтобы наибольшее из чисел $\mu_{i,2}$ было равно соответствующему из чисел $\mu_{i,1}$. Если должным подбором величины λ^2 в уравнениях (17) удастся сделать $\mu_{i,2}$ равными $\mu_{i,1}$ при всяком i , то вторую из форм главных свободных колебаний можно считать найденной. Если окажется, что $\mu_{i,1} = \mu_{i,2}$ не при всяком i , то нужно продолжить процесс последовательных приближений. При этом следует перед каждым последовательным решением уравнений типа (17) не забывать о необходимости ортогонализации совокупности чисел $\mu_{i,2}$ подставляемых в правую часть равенств (17) по отношению к форме свободных колебаний основного тона.

Решение уравнений вида (17) приближает совокупность чисел $\mu_{i,2}$ к форме второго из главных колебаний только в том случае,

если совокупность таковых, подставляемых в правую часть этих равенств, взаимно ортогональна с числами $\theta_{i,1}$.

Потому для нахождения $\theta_{i,2}$ во втором приближении надо поступить так. Определив числа $\mu_{i,1}$ для первого приближения как такое решение системы уравнений (17), где $\mu_{i,2} = \mu_{i,1}$ — любая совокупность чисел, удовлетворяющих условиям (15) и (16), которая удовлетворяет условию (18), надо принять за новое приближение для $\theta_{i,2}$ совокупность чисел

$$v_{i,1} = \mu_{i,1} + \gamma_0 \theta_{i,1}, \quad (19)$$

где γ_0 определяется из условия, чтобы было

$$\sum K_i v_{i,1} \theta_{i,1} = 0. \quad (20)$$

Определив γ_0 из уравнения (19) и подставив $v_{i,1}$ с помощью равенств (20), можно определить новое приближение для $\theta_{i,2}$ как такую совокупность чисел $\mu_{i,2}$, которая, будучи решением системы уравнений,

$$\left. \begin{aligned} C_{1,2}(\mu_{1,2} - \mu_{1,1}) - \lambda^2 K_1 v_{1,1} \\ C_{2,2}(\mu_{2,2} - \mu_{2,1}) + C_{2,2}(\mu_{2,1} - \mu_{2,2}) - \lambda^2 K_2 v_{2,1} \\ C_{3,2}(\mu_{3,2} - \mu_{3,1}) + C_{3,4}(\mu_{3,1} - \mu_{3,2}) - \lambda^2 K_3 v_{3,1} \\ \dots \dots \dots \\ C_{n-2,2}(\mu_{n-2,2} - \mu_{n-2,1}) - \lambda^2 K_n v_{n,1} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

удовлетворяет одновременно уравнению

$$\sum K_i \mu_{i,2} = 0. \quad (22)$$

Если эта совокупность чисел не пропорциональна совокупности чисел $\mu_{i,1}$, ранее найденной, то надо перейти к следующему приближению:

$$v_{i,2} = \mu_{i,2} + \gamma_0 \theta_{i,1}, \quad (23)$$

где γ_0 — постоянная, определяемая из уравнения

$$\sum K_i v_{i,2} = 0,$$

и разыскав $\mu_{i,2}$ как такую совокупность чисел, которая, удовлетворяя уравнениям

$$\left. \begin{aligned} C_{1,2}(\mu_{1,2} - \mu_{1,1}) - \lambda^2 K_2 v_{1,2} \\ C_{2,2}(\mu_{2,2} - \mu_{2,1}) + C_{2,2}(\mu_{2,1} - \mu_{2,2}) - \lambda^2 K_2 v_{2,2} \\ C_{3,2}(\mu_{3,2} - \mu_{3,1}) + C_{3,4}(\mu_{3,1} - \mu_{3,2}) - \lambda^2 K_3 v_{3,2} \\ \dots \dots \dots \\ C_{n-1,2}(\mu_{n-1,2} - \mu_{n-1,1}) - \lambda^2 K_n v_{n,2} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

удовлетворяет одновременно условию

$$\sum K_i \mu_{i,2} = 0. \quad (25)$$

При этом в решении системы (21) и в решении системы (24) постоянная λ^2 должна быть выбрана так, чтобы одно из чисел $\mu_{i,1}$ было равно соответствующему из чисел $\mu_{i,2}$.

Форму второго главного колебания можно считать найденной, когда с достаточной степенью точности окажется

$$\mu_{i,1} = \mu_{i,2} \quad (26)$$

при всяком i .

Когда условие (26) с достаточной точностью удовлетворено, можно принять

$$\theta_{i,1} = \mu_{i,1}$$

и определить частоту второго из главных свободных колебаний системы с помощью формулы (6).

4. Описанный выше процесс последовательных приближений может быть использован и для нахождения частоты свободных колебаний третьего тона. Можно также пользоваться решением уравнений (21), но нужно поднимать совокупность чисел $\mu_{i,2}$ в левую и правую часть этих уравнений, помимо условий

$$\sum_{\tau} K_{\tau} \nu_{i,1} = 0 \quad (27)$$

$$\sum_{\tau} K_{\tau} \nu_{i,1} \theta_{i,2} = 0, \quad (28)$$

еще условием

$$\sum_{\tau} K_{\tau} \nu_{i,2} \theta_{i,1} = 0, \quad (29)$$

где $\theta_{i,1}$ — формы свободных колебаний первого, а $\theta_{i,2}$ — второго тона. Для этого достаточно принять

$$\mu_{i,1} = \mu_{i,1} + \gamma_6 + \gamma_7 \theta_{i,1} + \gamma_8 \theta_{i,2} \quad (30)$$

где $\gamma_6, \gamma_7, \gamma_8$ — числа, определяемые из уравнений (27), (28) и (29), а $\mu_{i,1}$ — любая совокупность чисел, по виду хоть сколько-нибудь схожая с трехузловым колебанием системы, т. е. меняющая между $i = 1$ и $i = 3$ свой знак трижды.

Выбрав числа $\mu_{i,1}$ произвольно и определив γ_6, γ_7 и γ_8 равенстве (30) из условий (27), (28) и (29), т. е. из уравнений

$$\sum_{\tau} K_{\tau} \mu_{i,1} + \gamma_6 \sum_{\tau} K_{\tau} = 0; \quad (31)$$

$$\sum_{\tau} K_{\tau} \mu_{i,1} \theta_{i,1} + \gamma_7 \sum_{\tau} K_{\tau} \theta_{i,1}^2 = 0; \quad (32)$$

$$\sum_{\tau} K_{\tau} \mu_{i,1} \theta_{i,2} + \gamma_8 \sum_{\tau} K_{\tau} \theta_{i,1}^2 = 0, \quad (33)$$

следует эквивалентным уравнением (27)–(29),* можно, подставив $\mu_{i,1}$ с помощью (30), определить числа $\mu_{i,2}$ из системы уравнений (21) и (22).

Подобрав в решении этих уравнений члены λ^2 так, чтобы любое (лучше всего большее из чисел $\mu_{i,2}$) оказалось равным соответствующему числу $\mu_{i,1}$, следует посмотреть, равны ли все числа $\mu_{i,2}$ соответствующим числам $\mu_{i,1}$ при всяком i , и, если нет, разложить форму свободных колебаний третьего тона в следующий приближении.

Для этого надо сначала разложить числа $\mu_{i,2}$ с помощью равенства

$$\mu_{i,2} = \mu_{i,1} + \gamma_9 + \gamma_{10} \theta_{i,1} + \gamma_{11} \theta_{i,2}, \quad (34)$$

где γ_9, γ_{10} и γ_{11} получаются посредством равенств

$$\left. \begin{aligned} \gamma_9 &= -\frac{\sum_{\tau} K_{\tau} \mu_{i,2}}{\sum_{\tau} K_{\tau}}; \\ \gamma_{10} &= -\frac{\sum_{\tau} K_{\tau} \mu_{i,2} \theta_{i,1}}{\sum_{\tau} K_{\tau} \theta_{i,1}}; \\ \gamma_{11} &= -\frac{\sum_{\tau} K_{\tau} \mu_{i,2} \theta_{i,2}}{\sum_{\tau} K_{\tau} \theta_{i,2}}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

а затем найти числа $\mu_{i,2}$ как такое решение уравнений (24), которое удовлетворяло бы одновременно и условию (26).

Постоянную λ^2 , входящую в (24), следует подобрать так, чтобы большее из чисел $\mu_{i,2}$ было равно соответствующему из чисел $\mu_{i,1}$. Если окажется, что

$$\mu_{i,2} = \mu_{i,1}$$

при всяком i , то наложение формы третьего из главных свободных колебаний системы можно считать законченным. Тогда λ_2 можно найти с помощью (6). В противном случае нужно сделать еще одно или два таких же приближения, пока не окажется, что

$$\mu_{i,2} = \mu_{i,1}$$

при всяком i .

Таким же порядком можно разложить и четвертое из главных свободных колебаний системы, нужно только помнить, что реше-

* Если члены $\theta_{i,1}$ и $\theta_{i,2}$ по условию удовлетворяют уравнению ортогональности

$$\sum_{\tau} K_{\tau} \theta_{i,1} \theta_{i,2} = 0.$$

ние уравнений вида (22) приближает нас к форме четвертого, а третьего из главных свободных колебаний только в том случае если числа $\nu_{i,1}$ подобраны так, что удовлетворяют не только уравнениям (27)–(29), а одновременно и уравнению

$$\sum_i K_i \nu_{i,1} \theta_{i,1} = 0. \quad (30)$$

Таким образом описанный процесс позволяет развязать последовательно сначала основное, затем второе, третье, четвертое и т. д. главные свободные колебания всегда в порядке возрастания частот этих колебаний, т. е. как раз в том самом порядке в котором то обычно и бывает необходимо.

11. О КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ КРУГЛОГО ДИСКА*

(К статье В. И. Кадыкова)

1. Назовем крутильными колебаниями круглого диска такие его плоские колебания, при которых

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{x}{r} \varrho; \\ v &= \frac{y}{r} \varrho; \\ w &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где $\varrho = \varrho(r, t)$ — перемещение по касательной к кругу радиуса r .
Займемся исследованием этих колебаний.

2. В случае свободных колебаний должно быть

$$\varrho = \sum_k \varrho_k(r) A_k \cos(\lambda_k t + \epsilon_k), \quad (2)$$

где $\varrho_k(r)$ — функции, определяющие формы главных свободных колебаний; A_k и ϵ_k — постоянные, зависящие от начальных условий.

Так как все члены ряда (2) должны каждый порознь удовлетворять дифференциальным уравнениям свободных колебаний упругого тела, то

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{v}{r} \varrho_k(r) \cos \lambda_k t; \\ v &= \frac{r}{r} \varrho_k(r) \cos \lambda_k t; \\ w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

должны быть решением этих уравнений.

Известно, что

$$\nabla^2 = i u + j v + k w = \bar{V}_k \cos \lambda_k t \quad (4)$$

* Печатается впервые.

удовлетворяет дифференциальным уравнениям свободных колебаний, если

$$\ddot{V}_k - \text{curl } \bar{A}_k + \text{grad } \varphi_k, \quad (4)$$

где φ_k — любой скаляр, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\Delta - 2\sigma}{1 - 2\sigma} \nabla^2 \varphi_k + \frac{\Delta^2}{\sigma^2} \varphi_k = 0 \quad (5)$$

и \bar{A}_k — любой вектор, удовлетворяющий уравнению

$$\nabla^2 \bar{A}_k + \frac{\Delta^2}{\sigma^2} \bar{A}_k = 0. \quad (6)$$

Здесь σ — постоянная, связанная с модулем сдвига G и плотностью ρ соотношением

$$\sigma^2 = G : \rho \quad (7)$$

Чтобы получить из решения (4), (5) решение типа (3), достаточно положить

$$\varphi_k = 0,$$

$$\bar{A}_k = -k R_k(r),$$

тогда будет

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial}{\partial \theta} R_k(r) \cos \lambda_k t = -\frac{\partial}{\partial r} R_k'(r) \cos \lambda_k t; \\ v &= \frac{\partial}{\partial \alpha} R_k(r) \cos \lambda_k t = \frac{\partial}{\partial r} R_k'(r) \cos \lambda_k t \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

и, приняв

$$R_k(r) = \varrho_k(r), \quad (9)$$

получим из (10) равенства (3).

В силу (9) и (7) функция $R_k(r)$ должна удовлетворять уравнению

$$\nabla^2 R_k(r) + \frac{\Delta^2}{\sigma^2} R_k(r) = \frac{\Delta}{\sigma^2} R_k + \frac{1}{\sigma} \frac{d}{dr} R_k + \frac{\Delta^2}{\sigma^2} R_k = 0, \quad (10)$$

общий интеграл, которого, как известно,

$$R_k(r) = -\alpha_k J_\sigma(\alpha_k r) - \beta_k N_\sigma(\alpha_k r), \quad (11)$$

где $J_\sigma(\alpha_k r)$ — функция Бесселя σ -го порядка, а $N_\sigma(\alpha_k r)$ — того же порядка функция Неймана, для которых имеются таблицы α_k и β_k — произвольные константы, а

$$\alpha_k = \lambda_k : a, \quad (12)$$

Дифференцируя (13) по r и приняв во внимание (11), можно видеть, что

$$\varrho_k(r) = +\alpha_k J_\sigma(\alpha_k r) + \beta_k N_\sigma(\alpha_k r). \quad (13)$$

где $J_\sigma(\alpha_k r)$ и $N_\sigma(\alpha_k r)$ — функции Бесселя и Неймана первого порядка.

Соотношения между α_k и β_k , а равно и числа α_k определяются из тех граничных условий, которым должно быть подчинено решение на окружностях $r=a$ и $r=b$, которыми ограничен диск.

3. В качестве примера рассмотрим случай, когда перемещение обращается в нуль при $r=a$ и неограничено при $r=b$.

Граничными условиями для определения α_k и β_k являются

$$\varrho_k(r) = 0 \text{ при } r = a \quad (14)$$

и

$$R_k = G e_{\theta\theta} = G \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right)_{r=a} =$$

$$= G \left\{ -\frac{v}{r} \left[-\frac{1}{\lambda} \varrho_k'(r) + \frac{1}{r} \varrho_k(r) \right] + \frac{u}{r} \left[-\frac{1}{\lambda} \varrho_k(r) + \frac{1}{r} \varrho_k'(r) \right] \right\}_{r=a} =$$

$$= G \left[\frac{1}{r} \varrho_k(r) - \varrho_k'(r) \right] = 0 \text{ при } r = b, \quad (15)$$

Из этих условий следует

$$+\alpha_k J_\sigma(\alpha_k, a) + \beta_k N_\sigma(\alpha_k, a) = 0 \quad (16)$$

и

$$+\alpha_k J_\sigma(\alpha_k, b) + \beta_k N_\sigma(\alpha_k, b) = 0, \quad (17)$$

что дает решение, отличное от нуля, если

$$\frac{J_\sigma(\alpha_k a)}{J_\sigma(\alpha_k b)} = \frac{N_\sigma(\alpha_k a)}{N_\sigma(\alpha_k b)}. \quad (18)$$

Разыскав корни уравнения (18), можно частоту соответствующих им свободных колебаний диска найти с помощью зависимости (14), а формы этих колебаний — с помощью равенств (15) и (16'). Это дает

$$\varphi_k(r) = \frac{J_\sigma(\alpha_k r)}{J_\sigma(\alpha_k a)} - \frac{N_\sigma(\alpha_k r)}{N_\sigma(\alpha_k a)}. \quad (19)$$

4. Если под действием периодических сил, приложенных к поверхности упругого тела, точка его получает перемещения

$$V = \bar{V}(x, y, z) \cos \omega t, \quad (20)$$

то в самом общем случае

$$\bar{V}(x, y, z) = \text{grad } \varphi + \text{curl } \bar{A}, \quad (21)$$

где φ — скаляр, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\Delta - 2\sigma}{1 - 2\sigma} \nabla^2 \varphi + \frac{\Delta^2}{\sigma^2} \varphi = 0, \quad (22)$$

а \bar{A} — вектор, подчиненный условию

$$\nu^2 \bar{A} + \frac{\omega^2}{\nu^2} \bar{A} = 0. \quad (23)$$

Если в этом решении принять

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 0, \\ \bar{A} &= -R(r) k, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

то получим

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{R}{r} R(r) \cos \omega t, \\ v &= -\frac{R}{r} R(r) \sin \omega t, \\ w &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

приним в силу (23) и (24) надо принять

$$R''(r) + \frac{1}{r} R'(r) + \frac{\omega^2}{\nu^2} R(r) = 0, \quad (26)$$

так как за общий интеграл уравнения (26) можно принимать

$$R(r) = -a_0 J_0(\alpha, r) - b_0 N_0(\alpha, r), \quad (27)$$

где

$$\alpha = \omega : a, \quad (28)$$

то по известному правилу дифференцирования цилиндрических функций

$$R(r) = a_0 J_1(\alpha, r) + b_0 N_1(\alpha, r) \quad (29)$$

и согласно (25)

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{b_0}{r} g(r) \cos \omega t, \\ v &= -\frac{b_0}{r} g(r) \sin \omega t, \\ w &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где

$$g(r) = a_0 J_1(\alpha, r) + b_0 N_1(\alpha, r). \quad (31)$$

Постоянные интегрирования a_0 и b_0 должны быть здесь определены из граничных условий, которым решение должно быть подчинено на границах диска, т. е. при $r = a$ и $r = b$.

Б. Пусть для примера перемещение g при $r = a$ задано, а именно

$$g(a) = c. \quad (32)$$

где c — некоторая заданная постоянная, а при $r = b$ перемещение g ничем не ограничено, так что

$$\frac{1}{r} g(r) - g'(r) = 0 \quad \text{при } r = b. \quad (33)$$

Так как в силу (31)

$$\frac{1}{r} g(r) - g'(r) = \alpha [a_0 J_2(\alpha, r) + b_0 N_2(\alpha, r)], \quad (34)$$

то граничные условия для определения a_0 и b_0 могут быть в рассматриваемом случае написаны так:

$$a_0 J_1(\alpha, a) + b_0 N_1(\alpha, a) = c$$

и

$$a_0 J_2(\alpha, b) + b_0 N_2(\alpha, b) = 0.$$

Отсюда следует

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= c \frac{N_2(\alpha, b)}{J_1(\alpha, a) N_1(\alpha, b) - J_2(\alpha, b) N_1(\alpha, a)}; \\ b_0 &= c \frac{J_2(\alpha, b)}{J_2(\alpha, b) N_1(\alpha, a) - J_1(\alpha, a) N_2(\alpha, b)}; \\ g(r) &= \frac{J_1(\alpha, r) N_2(\alpha, b) - N_1(\alpha, r) J_2(\alpha, b)}{J_1(\alpha, a) N_1(\alpha, b) - N_1(\alpha, a) J_2(\alpha, b)} c. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Выражение это показывает, что вынужденные упругие колебания диска становятся в рассматриваемом случае бесконечно велики всякий раз, как величина

$$J_2(\alpha, a) N_2(\alpha, b) - N_2(\alpha, a) J_2(\alpha, b)$$

обращается в нуль, т. е. всякий раз, когда частота вынужденных колебаний внутреннего края диска совпадает с частотой одного из его главных свободных колебаний, что, конечно, и следовало ожидать.

Б. Применен для нахождения вынужденных колебаний диска метод главных координат, можно очень легко показать, что амплитуда вынужденных крутильных колебаний диска является линейной функцией только в том случае, если частота этих колебаний достаточно мала по сравнению с наименьшей из частот главных свободных колебаний его.

Допущение о линейности зависимости между g и r есть основное допущение, нельзя принятые в работе В. И. Кадыкова.

Сказанное позволяет утверждать, что решение, предложенное В. И. Кадыковым, является достаточно точным лишь до тех пор, пока частота вынужденных колебаний диска достаточно мала, и показывает, каким образом может быть найдено более точное решение задачи в тех случаях, когда решение В. И. Кадыкова перестанет быть в необходимой степени точным.

12. ОБ ОСНОВНОЙ ПРОБЛЕМЕ ДИНАМИКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ МУФТ *

Для увеличения экономичности паровых силовых установок в последнее время все чаще прибегают к соединению в одной установке паровой машины высокого давления с турбиной, использующей отработавший в этой машине пар; при этом обе части установки заставляют обычно работать на один общий гребной вал.

Чтобы крутильные колебания гребного вала, вызываемые неравномерностью вращающего момента, развиваемого паровой машиной, не передавались паровой турбине и передачам, соединяющим ее с гребным валом, передачи соединяются с гребным валом посредством деформируемых муфт. Последние должны быть настолько эластичными, чтобы турбина проходила равномерно, независимо от того, какие крутильные колебания совершаются остальной частью установки.

Вопрос о том, каким образом может быть обеспечено достижение данной цели, является основным вопросом теории таких муфт. Насколько известно, вопрос этот, несмотря на его большую важность, достаточно освещения в технической литературе еще не получил. Целью настоящей статьи является наметить в основных чертах решение указанного вопроса применительно к двум основным разновидностям муфт, а именно в применении к муфтам упругим, с одной стороны, и муфтам гидравлическим, с другой стороны, как к таким двум типам муфт, движение которых следует законам, в некоторых отношениях резко друг от друга отличающимся.

1. Начнем с муфт упругих. Допустим для простоты, что рассматриваемая муфта является единственной частью установочной системы заметно деформироваться, можно в первом приближении заменить рассматриваемую систему двумя валочками, упруго связанными друг с другом. Один из валочков движется вместе с ротором турбины, другой — вместе с гребным валом и соединенный с ним поршневой машиной.

Пусть θ_1 — угловое перемещение того валочка, который соединен с ротором турбины, θ_2 — угловое перемещение валочка, движущегося вместе с гребным валом.

Живая сила T_1 частей установки, движущихся вместе с ротором турбины, должна быть при сделанных допущениях пропорциональна величине $\frac{1}{2} K_1 \theta_1^2$. Обозначим коэффициент этой пропорциональности буквой K_1 , так что

$$T_1 = \frac{1}{2} K_1 \theta_1^2.$$

Примем, что живая сила той части установки, которая движется вместе с гребным валом, есть

$$T_2 = \frac{1}{2} K_2 \theta_2^2.$$

Условимся называть величины K_1 и K_2 приведенными моментами инерции соответствующих частей установки.

Полная живая сила системы тогда

$$T = \frac{1}{2} (K_1 \theta_1^2 + K_2 \theta_2^2).$$

Обозначим знаком N коэффициент пропорциональности между угловой деформацией муфты $\theta_2 - \theta_1$ и сжимающим моментом, передаваемым муфтой. Тогда за потенциальную энергию этой связи можно будет принять

$$V = \frac{1}{2} N (\theta_2 - \theta_1)^2.$$

Примем далее, что M_1 и M_2 — обобщенные силы, соответствующие перемещениям θ_1 и θ_2 , т. е. коэффициенты пропорциональности между элементарным приращением работы всех внешних сил, приложенных к установке, и приращениями $\delta\theta_1$ и $\delta\theta_2$ соответственно.

Выписав основные уравнения движения системы по способу Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_i} + \frac{\partial V}{\partial \theta_i} = M_i,$$

получим

$$\begin{cases} K_1 \ddot{\theta}_1 + N (\theta_2 - \theta_1) = M_1; \\ K_2 \ddot{\theta}_2 + N (\theta_2 - \theta_1) = M_2. \end{cases} \quad (1)$$

Уравнения эти и применят для нахождения, в исследовании.

2. Возьмем рассмотренным функциональной зависимости величины M_1 и M_2 от времени.

* Впервые напечатано в Трудах ВНИТОСС, т. 2, вып. 1, 1935. Доклад, читанный в собрании инженеров ВНИОС 8 марта 1934 г.

Обобщенный внешний момент M_1 , действующий на часть муфты, вращающуюся вместе с ротором турбины, можно с полным основанием считать постоянным: $M_1 = \text{const}$.

Момент M_2 будем считать периодической функцией от времени. Сложив уравнения (1), можно видеть, что

$$K_2 \theta_1' + K_1 \theta_2' = M_1 + M_2 \quad (2)$$

и если среднее значение суммы $M_1 + M_2$ за один полный период пульсации пары M_2 будет отлично от нуля, то система будет двигаться равноускоренно.

Поэтому следует принять, что

$$M_2 = -M_1 + \Pi. \quad (3)$$

где Π — периодическая функция от t , среднее значение которой равно нулю.

Всюкую такую функцию можно разложить в ряд вида

$$\Pi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t + \alpha_k). \quad (4)$$

где a_k и α_k — некоторые заданные постоянные, а

$$\alpha = \frac{2\pi}{\tau}, \quad (5)$$

причем τ — период возмущающей силы. Величина ω в рассматриваемой задаче, очевидно, может быть принята равной средней угловой скорости вращения гребного вала.

Приняв во внимание равенство (3), можно уравнения (1) и (2) привести к виду

$$\begin{cases} K_1 \theta_1' + N(\theta_1 - \theta_2) = M_1; \\ K_2 \theta_2' + N(\theta_2 - \theta_1) = -M_1 + \Pi; \end{cases} \quad (1')$$

$$K_1 \theta_1' + k_1 \theta_1' = \Pi, \quad (2')$$

где M_1 — некоторая заданная постоянная, а

Π — периодическая функция вида (4).

3. Разберем частный случай, когда уругая связь между частями муфты сделана бесконечно жесткой, так что практически

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta.$$

В этом случае равенство (2') обращается в

$$(K_1 + K_2) \theta' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t + \alpha_k).$$

откуда следует, если отбросить свободные колебания системы, которые рано или поздно всегда затухают:

$$\theta = -\frac{1}{K_1 + K_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k^2 \omega^2} \cos(k\omega t + \alpha_k). \quad (6)$$

Полученным выражением определяются, очевидно, те колебания части муфты, движущейся вместе с ротором турбины, которые были бы, если муфта, которой установка снабжена, была абсолютно недеформирующей.

4. Посмотрим, каким законом будет определяться θ_1 при N конечном.

Для этого обратимся к уравнениям:

$$\begin{cases} K_1 \theta_1' + N(\theta_1 - \theta_2) = M_1; \\ K_2 \theta_2' + N(\theta_2 - \theta_1) = -M_1 + \Pi. \end{cases} \quad (1'')$$

Сложив оба эти уравнения, будем по-прежнему иметь

$$K_1 \theta_1' + K_2 \theta_2' - \Pi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t + \alpha_k). \quad (2'')$$

откуда

$$K_1 \theta_1 + K_2 \theta_2 = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k\omega} \sin(k\omega t + \alpha_k). \quad (7)$$

Для получения второго уравнения, дающего θ_1 и θ_2 , поделим первое из уравнений (1'') на K_1 , второе на K_2 . Тогда

$$\theta_1' + \frac{N}{K_1}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{M_1}{K_1};$$

$$\theta_2' + \frac{N}{K_2}(\theta_2 - \theta_1) = -\frac{M_1}{K_2} + \frac{1}{K_2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t + \alpha_k).$$

Вычтя эти уравнения друг из друга, получим

$$(\theta_1' - \theta_2') + N \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} (\theta_1 - \theta_2) =$$

$$= M_1 \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} - \frac{1}{K_2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega t + \alpha_k).$$

Интеграл вынужденных колебаний этого уравнения есть

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{M_1}{N} - \frac{1}{K_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda^2 - k^2 \omega^2} \cos(k\omega t + \alpha_k). \quad (8)$$

где знаком λ^2 обозначена величина

$$\lambda^2 = \frac{N(K_1 + K_2)}{K_1 K_2}, \quad (9)$$

злающаяся, очевидно, ни чем иным, как частотой собственных колебаний муфты.

Чтобы исключить θ_2 из равенств (7) и (8), достаточно сложить (7) с равенством (8), предварительно умножив его на K_2 . Это дает

$$(K_1 + K_2) \theta_1 = \frac{M_1}{N} K_2 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left\{ \frac{1}{k^2 \omega^2} + \frac{1}{\lambda^2 - k^2 \omega^2} \right\} \cos(k\omega t + \alpha_k).$$

или, что то же,

$$\theta_1 = \frac{M_1}{K_1 \lambda^2} - \frac{1}{K_1 + K_2} \frac{\lambda^2 \sqrt{g}}{g^2} \alpha_2 \frac{\lambda^2}{K_2 - \lambda^2 \omega^2} \frac{\cos(\lambda \omega t + \alpha_1)}{(\lambda \omega)^2} \quad (10)$$

Равенство (10) и показывает, как колеблется при N конечном числе установок, движущихся вместе с ротором турбины (турбинная часть комбинированной установки).

5. Исследуем полученное выражение (10).

Если λ^2 бесконечно велико, то первый член в выражении (10) пропадает, все дроби вида $\lambda^2 : (\lambda^2 - K^2 \omega^2)$ обращаются в единицу и равенство (10) обращается в равенство (6), чего и следовало ожидать.

С уменьшением λ^2 первый (постоянный) член в выражении (10) непрерывно возрастает. Происходит это вследствие того, что средний угол закручивания муфты $\theta_1 - \theta_2$ с уменьшением жесткости муфты растет. Как показывает формула (8), этот средний угол закручивания муфты есть

$$(\theta_1 - \theta_2)_{cp} = \frac{M_1}{N} \quad (11)$$

Это среднее значение разности $\theta_1 - \theta_2$ представляет интерес, так как показывает, на какой средней угол сдвига одной части муфты относительно другой необходимо рассчитать муфту. Та часть этого угла, которая входит в формулу (10), такого интереса не представляет, и можно первым членом равенства (10) не интересоваться. Что касается остальных членов суммы, входящей в правую часть равенства (10), то они отличаются от соответствующих членов суммы, входящей в (6), лишь множителем

$$\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - K^2 \omega^2}$$

которые обращаются в нуль при $\lambda^2 = 0$; переходят через бесконечность при $\lambda^2 = K^2 \omega^2$ и обращаются в единицу при $\lambda^2 = \infty$.

Совершенно ясно, что, желая уменьшить с помощью упругой муфты крутильные колебания ротора турбины, требуется, чтобы λ^2 было меньше, чем знаменатель из члена $(K^2 \omega^2)$, а таковым является, очевидно, соответствующее случаю $k = 1$. Таким образом приходим к выводу:

Чтобы упругая муфта уменьшила ротор турбины от крутильных колебаний, ее жесткость должна быть меньше жесткости собственных колебаний муфты, должна быть мала по сравнению со средней скоростью машины ω , которой определяется основной период возмущающих усилий, вызывающих крутильные колебания рассматриваемой системы.

Если мы хотим, чтобы муфта достигала своей цели при всяких режимах машины, то, очевидно, следует добиться того, чтобы указанное выше требование было соблюдено при всяком числе

оборотов машины, которое может у нас длительно поддерживаться.

Условие

$$\lambda \ll \omega \quad (12)$$

стант, однако, для λ наиболее узкие пределы при наименьшем числе оборотов машины на всех тех, при которых возможна ее длительная эксплуатация.

Мы приходим, таким образом, к заключению, что основное требование, которое должно быть предъявлено к муфте, может быть сформулировано так:

Условие частота собственных колебаний муфты λ должно быть значительно меньше средней скорости машины, соединяемой с этой муфтой, даже при наименьшем из всех тех чисел оборотов машины, с которыми необходимо считаться по условиям эксплуатации установки.

6. Для того чтобы изложение, только что сформулированное, было положительно вполне определенным, необходимо, очевидно, конкретизировать, при каком отношении λ к ω можно признать ω , значительно превышающим λ .

Как часто говорил акад. А. Н. Крылов, в технических вопросах надо говорить не прилагательными, а числами.

Посмотрим поэтому, во сколько раз λ должно быть меньше наименьшего из возможных значений ω , для того чтобы колебания ротора турбины уменьшались муфтой в R раз.

На такой вопрос проще всего ответить в том частном случае, когда возмущающий момент, прикладываемый к системе паровой машины, может быть представлен с достаточной точностью одним членом ряда (4). Основываясь поэтому сначала на данном случае. Для определенности допустим, что

$$\Pi = a \cos \omega t \quad (13)$$

Формула (10) тогда даст нам

$$\theta_1 = -\frac{a}{(K_1 + K_2)} \frac{1}{\omega^2} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \omega^2} \cos \omega t + \text{const.} \quad (14)$$

Отбрасывая константу, входящую в это выражение, как не представляющую интереса при исследовании вопроса о колебаниях муфты, займемся первым членом выражения (14).

Если сделать муфту бесконечно жесткой, т. е. если бы λ было достаточно велико, то было бы

$$\theta = \theta_1 = -\frac{a}{(K_1 + K_2) \omega^2} \cos \omega t \quad (14')$$

Сравнивая это выражение с выражением (14), видим, что при λ конечном

$$\theta_1 : \theta = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \omega^2} \quad (15)$$

Если желательна, чтобы муфта уменьшала амплитуду колебаний турбины в определенное число раз, скажем в R раз, то следует добиться того, чтобы

$$\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \omega^2} = -\frac{1}{R} \quad (16)$$

для чего необходимо сделать

$$\frac{\lambda^2}{\omega^2} = \frac{1}{R+1} \quad (17)$$

Таким образом приходим к следующему положению:

Чтобы уменьшить муфта уменьшила амплитуду колебаний турбины в R раз, надо ее сделать столь жесткой, чтобы для наименьшей из эксплуатационных скоростей хода частота λ свободных колебаний муфты не превышала величину

$$\frac{\omega}{\sqrt{R+1}}$$

где ω — частота возмущающей пары.

В общем случае, когда Π определяется не первым лишь членом ряда (4), а всеми этим рядом, колебания муфты будут определяться всеми членами ряда (10), на которые упругость муфты влияет, но каждый по-своему.

Нетрудно, однако, видеть, что если подобрать величину λ^2 так, чтобы в первом члене ряда, входящего в выражение (10), было

$$\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \omega^2} = -\frac{1}{R}$$

то амплитуда наиболее медленного из колебаний, порождаемых паровой машиной, будет уменьшена в R раз, всех же остальных более, чем в R раз.

Можно поэтому сформулировать следующее положение:

Если подобрано частоту λ собственных колебаний муфты так, чтобы для наименьшей из эксплуатационных скоростей хода было

$$\lambda = \frac{\omega}{\sqrt{R+1}} \quad (18)$$

где ω — средняя скорость паровой машины, то все гармоники, из которых состоит крутящее колебание турбины, будут уменьшены муфтой по крайней мере в R раз.

Полезно отметить и следующее обстоятельство: если при наименьшей из эксплуатационных скоростей хода имеется равенство (18), то резонанс не может быть в муфте при эксплуатационных скоростях установки. Резонанс можно ожидать лишь при уменьшенном в $\sqrt{R+1}$ раз числе оборотов установки против

наименьшей из эксплуатационных скоростей ее. Таким образом, если правило, сформулированное выше, соблюдено, то резонанс можно ожидать лишь в период пуска установки и ее остановки, а при этих операциях критическое число оборотов машины можно пройти достаточно быстро.

Можно поэтому сформулировать в следующее положение:

Если подобрано частоту λ свободных колебаний системы согласно условию, формулируемому равенством (18), то резонанс отношения с основным элементом свободных колебаний муфты будет исключен при условии, что в период пуска и остановки машины критическое число оборотов будет проходить достаточно быстро и что частота свободных колебаний второго и вышних тонов, которых здесь для простоты не рассматривали, лежит настолько высоко, что достигнуты резонанса с ней возмущающие силы практически не могут.

7. Во всем вышеизложенном мы касались пока исключительно лишь так называемых упругих муфт, в которых связь между валом турбины и валом паровой машины осуществляется с помощью пружин. Остановились кратко на колебаниях муфт гидравлических, в которых эта связь осуществляется путем передачи заплывающей их жидкости. Муфты эти, предложенные в судостроении Фетингера, отличаются от муфт упругих некоторыми своеобразными особенностями, на которые следует остановиться.

Наиболее характерным отличием этих муфт от муфт упругих является то обстоятельство, что передаваемый ими момент лишь в малой мере должен зависеть у них от взаимного углового смещения обеих половин муфты относительно друг друга. Если такой момент и зависит у этих муфт от данного угла, то, безусловно, в очень слабой мере, является периодической функцией от него. При достаточно большом числе направляющих жидкость лопаток и правильном разное их в движущей и принимающей части муфты можно, по-видимому, без большой погрешности принять, что от разности углов поворота обеих половин муфты относительно друг друга, т. е. от угла $\theta_1 - \theta_2$, у муфт этого типа момент, передаваемый муфтой, зависеть не должен. Он может зависеть, однако, только от разности углов θ_1 и θ_2 , с одной стороны, и от разности их угловых скоростей $\dot{\theta}_1$ и $\dot{\theta}_2$, — с другой. Будучи в муфтах гидравлических практически независим от угла поворота одной части муфты относительно другой ее части, он должен, очевидно, быть функцией от скорости изменения этого угла, т. е. от величины $\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2$, т. е. от скольжения муфты. В самом грубом приближении можно при малых колебаниях муфты считать этот момент, очевидно, линейной функцией от разности $\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2$. Допущение этого очень хорошо согласуется с данными, приведенными в отношении такого рода муфт в докладе Фетингера, читанном в 1931 г. в Германском обществе корабельных инженеров.

Приняв указанное допущение, можно при исследовании движения этих муфт исходить вместо уравнений (17) из уравнений

$$\begin{aligned} K_1 \theta_1' + h(\theta_1' - \theta_2') &= M_1; \\ K_2 \theta_2' + h(\theta_2' - \theta_1') &= -M_1 + \Pi, \end{aligned} \quad (18)$$

где величины K_1 , K_2 , M_1 и Π имеют тот же смысл, что и выше, а h есть некоторый коэффициент, величина которого зависит от устройства муфт.

Сложив оба уравнения (18) и приняв во внимание (4), будем по-прежнему иметь

$$K_1 \theta_1 + K_2 \theta_2 = - \sum_{\varepsilon_1}^{k\omega t} \frac{h_1}{(k\omega)^2} \cos(k\omega t + \varepsilon_1). \quad (20)$$

С другой стороны, из уравнений (18) можно вывести

$$\begin{aligned} (\theta_1 - \theta_2)'' + h \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} (\theta_1 - \theta_2)' &= \\ = -M_1 \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} - \frac{1}{K_1} \sum_{\varepsilon_1}^{k\omega t} a_k \cos(k\omega t + \varepsilon_1). \end{aligned}$$

Отбрасывая частное решение, пропорциональное паре M_1 , как решение, соответствующее некоторому равномерному скольжению и потому не представляющее интереса, займемся решением, имеющим периодический характер. Это решение можно получить из уравнения

$$(\theta_1 - \theta_2)'' + h \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} (\theta_1 - \theta_2)' = - \frac{1}{K_1} \sum_{\varepsilon_1}^{k\omega t} a_k \cos(k\omega t + \varepsilon_1). \quad (21)$$

возложив в нем

$$\theta_1 - \theta_2 = \sum_{\varepsilon_1}^{k\omega t} c_k \cos(k\omega t + \varepsilon_1 + \gamma_k), \quad (22)$$

где c_k и γ_k — некоторые пока неизвестные постоянные.

Подставив (22) в (21), будем, очевидно, иметь

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon_1}^{k\omega t} c_k \left\{ (k\omega)^2 \cos(k\omega t + \varepsilon_1 + \gamma_k) + \right. \\ \left. + h \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} k\omega \sin(k\omega t + \varepsilon_1 + \gamma_k) \right\} = - \frac{1}{K_1} \sum_{\varepsilon_1}^{k\omega t} a_k \cos(k\omega t + \varepsilon_1). \end{aligned} \quad (23)$$

Фигурным скобкам, входящим в левую часть равенства, можно, однако, придать вид

$$\begin{aligned} \left\{ (k\omega)^2 \cos(k\omega t + \varepsilon_1 + \gamma_k) + h \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} (k\omega) \sin(k\omega t + \varepsilon_1 + \gamma_k) \right\} = \\ = \sqrt{(k\omega)^2 + (k\omega)^2 \left(\frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} \right)^2} k\omega \cos(k\omega t + \varepsilon_1 + \gamma_k - \delta_k), \end{aligned}$$

где δ_k определяется зависимостями

$$\cos \delta_k = \frac{(k\omega)^2}{\sqrt{(k\omega)^2 + (k\omega)^2 k^2 \left(\frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} \right)^2}}; \quad (24)$$

$$\sin \delta_k = \frac{h \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} (k\omega)}{\sqrt{(k\omega)^2 + (k\omega)^2 k^2 \left(\frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} \right)^2}}. \quad (24)$$

Чтобы при этих условиях равенство (23) было удовлетворено, необходимо, очевидно, принять

$$\gamma_k = \delta_k; \quad (25)$$

$$c_k = \frac{a_k}{K_1} \frac{1}{\sqrt{(k\omega)^2 + (k\omega)^2 k^2 \left(\frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2} \right)^2}}, \quad (26)$$

что по подстановке в (22) дает

$$K_1 (\theta_1 - \theta_2) = \sum_{\varepsilon_1}^{k\omega t} \frac{a_k \cos(k\omega t + \varepsilon_1 + \delta_k)}{(k\omega)^2 \sqrt{1 + \frac{k^2 (K_1 + K_2)^2}{K_1^2 K_2^2 (k\omega)^2}}}. \quad (27)$$

Равенство (27), будучи сложено с (20), дает

$$(K_1 + K_2) \theta_1 = \sum_{\varepsilon_1}^{k\omega t} \frac{a_k}{(k\omega)^2} \left\{ \frac{\cos(k\omega t + \varepsilon_1 + \delta_k)}{\sqrt{1 + \frac{k^2 (K_1 + K_2)^2}{K_1^2 K_2^2 (k\omega)^2}}} - \cos(k\omega t + \varepsilon_1) \right\}. \quad (28)$$

Чтобы это упростить, займемся преобразованием скобок, в него входящих. Очевидно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_k} \cos(k\omega t + \varepsilon_1 + \delta_k) - \cos(k\omega t + \varepsilon_1) = \\ = \left\{ \frac{1}{A_k} \cos \delta_k - 1 \right\} \cos(k\omega t + \varepsilon_1) - \frac{1}{A_k} \sin \delta_k \sin(k\omega t + \varepsilon_1) = \\ = \sqrt{\left(\frac{\cos \delta_k}{A_k} - 1 \right)^2 + \frac{\sin^2 \delta_k}{A_k^2}} \cos(k\omega t + \varepsilon_1 + \gamma_k), \end{aligned}$$

где

$$A_k = \sqrt{1 + \frac{k^2 (K_1 + K_2)^2}{(k\omega)^2 K_1^2 K_2^2}}; \quad (29)$$

$$\cos \gamma_k = \frac{\frac{1}{A_k} \cos \delta_k - 1}{\sqrt{1 - 2A_k \cos \delta_k + A_k^2}}; \quad (30)$$

$$\sin \gamma_k = \frac{\frac{1}{A_k} \sin \delta_k}{\frac{1}{A_k} \sqrt{1 - 2A_k \cos \delta_k + A_k^2}} \quad (30)$$

Все это дает возможность придать равенству (28) вид

$$(K_1 + K_2) \theta_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k\omega)^2} B_k \cos(k\omega t + \epsilon_k + \gamma_k) \quad (31)$$

где

$$B_k = \frac{1}{A_k} \sqrt{1 - 2A_k \cos \delta_k + A_k^2} \quad (32)$$

Сопоставляя равенства (24) и (29), нетрудно видеть, что

$$A_k \cos \delta_k = 1,$$

так что

$$B_k = \frac{1}{A_k} \sqrt{A_k^2 - 1} = \sqrt{1 - \cos^2 \delta_k} = \sin \delta_k. \quad (33)$$

Найденное выше для θ_1 выражение (31) можно переписать так:

$$\theta_1 = \frac{1}{K_1 + K_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{(k\omega)^2} \sin \delta_k \cos(k\omega t + \epsilon_k + \gamma_k). \quad (34)$$

8. Исследуем найденное общее выражение. Оно отличается от суммы, входящей в выражение (10), выведенное выше для упругих муфт, только тем, что в него вместо динамического множителя

$$\lambda^2: [\lambda^2 - (k\omega)^2]$$

входит множитель

$$\sin \delta_k$$

и колебание, определенное равенством (34), имеет некоторый дополнительный фазовый угол γ_k .

Наибольший интерес представляет сейчас не угол сдвига фаз γ_k , а величина динамического множителя. Последний, в отличие от муфт упругих, в муфтах гидравлических всегда меньше единицы, ибо определяется отношением некоторого угла δ_k .

Если коэффициент λ в формуле (24') сделать равным бесконечности, что соответствует муфте бесконечно жесткой, то очевидно [см. формулу (24')], будем иметь

$$\sin \delta_k = 1.$$

При уменьшении λ , а равно и с увеличением частоты вынужденного колебания $k\omega$ величина $\sin \delta_k$ падает и в пределе при $k\omega$ бесконечно большом обращается в нуль.

Если мы сделаем

$$\sin \delta_k = \frac{1}{R},$$

то, очевидно, при всяком k , большем чем единица, будем иметь

$$\sin \delta_k < \frac{1}{R}.$$

Все гармоника, из которых состоит колебание турбины, будут уменьшены муфтой не менее, чем в R раз, если мы сделаем

$$\sin \delta_k = \frac{\frac{\lambda}{\omega} \frac{K_1 + K_2}{K_1 K_2}}{\sqrt{1 + \frac{\lambda^2 (K_1 + K_2)^2}{\omega^2 (K_1 K_2)^2}}} = \frac{1}{R}.$$

Чтобы последнее равенство имело место, достаточно сделать

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{R^2 - 1}} \frac{\omega K_1 K_2}{K_1 + K_2}. \quad (35)$$

Формулой этой и определяется максимальное значение, которое можно у гидравлической муфты придать коэффициенту λ в уравнениях (19) без того, чтобы муфта не потеряла способности в должной степени смягчать колебания ротора турбины.

Формула (35) в теории гидравлических муфт должна играть такой образом, совершенно ту же роль, какую играет в теории муфт упругих формула (18).

Мы разобрали подробно только действие муфт упругих и гидравлических как двух типов муфт, наиболее резко отличающихся друг от друга. Совершенно так же можно разобрать, очевидно, и всевозможные муфты, по типу своему промежуточные между разобранными выше, т. е. муфты, передающие момент, пропорциональный двучлену вида $N(\theta_1 - \theta_2) + \lambda(\theta_1' - \theta_2')$. Как это может быть сделано, это из вышесказанного.

Мы не касались здесь и вопроса об упругих колебаниях тех обеих частей установки, на которые она разбивается муфтой. Если эти части значительно жестче муфты, то колебание каждой из них должно протекать независимо.

13. О КОЛЕБАНИЯХ ТЯЖЕЛОЙ ЦЕПИ, ЗАКРЕПЛЕННОЙ В ДВУХ ТОЧКАХ*

Рассматриваемая цепь предполагается абсолютно гибкой и невесомой, следовательно, подвергается лишь растягивающему усилию. Кроме того, цепь предполагается нерастяжимой. Точки закрепления цепи A и B предполагаются расположенными на одной горизонтальной прямой в плоскости xy , причем ось oz проходит вертикально посередине между A и B , а ось ox — горизонтально (рис. 1).

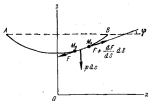


Рис. 1.

Определим форму равновесия цепи. Для этого заметим, что на элемент цепи между точками M_0 и M_1 длиной ds действуют следующие силы:

натяжение в точке M_0	F ;
натяжение в точке M_1	$F + \frac{dF}{ds} ds$;
вес	$p ds$.

* Печатаются отрывки.

Для сохранения цепи в равновесии необходимо и достаточно:

- 1) чтобы она лежала в плоскости xy ;
- 2) чтобы были удовлетворены условия

$$-F \cos \varphi + F \cos \varphi + \frac{dF}{ds} \cos \varphi ds = 0; \quad (1)$$

$$-F \sin \varphi + F \sin \varphi + \frac{dF}{ds} \sin \varphi ds - p ds = 0, \quad (2)$$

или

$$F \cos \varphi = \text{const} = F_0; \quad (3)$$

$$F \sin \varphi - ps = C = F_0 \operatorname{tg} \varphi - ps, \quad (4)$$

где F_0 — натяжение цепи в точке $\varphi = 0$; постоянная же C может быть принята равной нулю, если отсчет длины s вести от точки, где $\varphi = 0$.

$$C = 0, \quad (5)$$

Согласно рис. 1:

$$dx = \cos \varphi ds; \quad dz = \sin \varphi ds.$$

Дифференцирование же уравнения (4) дает

$$\frac{dx}{ds} = \frac{F_0}{p \cos^2 \varphi} d\varphi, \quad (6)$$

следствие чего

$$dx = \frac{F_0}{p \cos^2 \varphi} d\varphi, \quad (7)$$

$$dz = \frac{F_0 \sin \varphi}{p \cos^2 \varphi} d\varphi, \quad (8)$$

откуда

$$x = \frac{F_0}{p} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + C_1,$$

$$z = \frac{F_0}{p \cos \varphi} + C_2,$$

причем постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из условий

$$\left. \begin{aligned} x=0 & \text{ при } \varphi=0, & \text{ откуда } C_1=0; \\ x=0 & \text{ при } z=\frac{F_0}{p}=a, & \text{ откуда } C_2=0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Алла для x и z выражение

$$x = a \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right); \quad (10)$$

$$z = \frac{a}{\cos \varphi}. \quad (11)$$

Исключая из этих выражений угол φ , можно получить уравнение кривой, по которой располагается цепь

$$z = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) = a \operatorname{ch} \left(\frac{x}{a} \right). \quad (12)$$

Радиус кривизны кривой ρ может быть определен на основании выражения (6)

$$\rho = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{a}{\cos^2 \varphi}. \quad (13)$$

Для натяжения цепи может служить формула (3), или, что то же,

$$F = \frac{ap}{\cos \varphi}. \quad (14)$$

Для определения же угла наклона касательной к нити к горизонту, т. е. угла φ , можно пользоваться формулой (4), откуда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x}{a}. \quad (15)$$

Таковы формулы, характеризующие состояние рассматриваемой цепи в случае ее равновесия.

Предположим теперь, что цепь отклонена от своего положения статического равновесия и что α , β и γ ее перемещения, которые каждая точка цепи должна совершить, переходя из положения цепи, соответствующего статическому равновесию ее, к рассматриваемой конфигурации цепи.

Ясно, что в отклоненном своем положении цепь не будет уже находиться в покое и что уравнения движения каждого ее элемента длиной ds , по началу Д'Аламбера могут быть выписаны так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{g} ds \frac{d^2 \alpha}{dt^2} &= d[(F + \delta F) \cos \alpha (F, x)], \\ \frac{p}{g} ds \frac{d^2 \beta}{dt^2} &= d[(F + \delta F) \cos \beta (F, y)], \\ \frac{p}{g} ds \frac{d^2 \gamma}{dt^2} &= d[(F + \delta F) \cos \gamma (F, z)]. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

где δF — приращение усилия F .

Для решения этих уравнений необходимо установить предварительно связь, существующую между $\cos \alpha (F, x)$, $\cos \beta (F, y)$, $\cos \gamma (F, z)$ и перемещениями α , β и γ . Это может быть выполнено следующим образом.

Пусть M есть некоторая точка цепи и M_0 — ее положение, соответствующее статическому равновесию цепи, и M_1 — ее

положение в рассматриваемый некоторый момент времени. Вектор $M_0 M_1$ можно назвать «перемещением» рассматриваемой точки. Проекции его на неподвижные координатные оси ox , oy и oz обозначены ниже буквами α , β и γ .

Введем в рассматриваемую систему координатных осей ξ , η , ζ с началом в точке M (рис. 2), направленных: ось ξ — по касательной к цепи; ось η — по главной нормали;

ось ζ — перпендикулярно к первым двум.

Пусть ξ_0 , η_0 и ζ_0 — направления этих осей, когда цепь находится в состоянии статического равновесия. Косинусы их углов с координатными осями суть очевидно:

	ox	oy	oz
$M_0 \xi_0$	$\sin \varphi$	0	$-\cos \varphi$
$M_0 \eta_0$	0	1	0
$M_0 \zeta_0$	$\cos \varphi$	0	$\sin \varphi$

Благодаря колебаниям цепи система координатных осей ξ , η , ζ не остается в пространстве неподвижной. С одной стороны их начало (точка M) совершает перемещения α , β и γ , с другой стороны, оси эти поворачиваются вокруг точки M , оставаясь взаимно ортогональными.

Допустим, что оси принимают направления ξ , η , ζ , когда точка M приходит в положение M_1 .

Так как взаимное расположение осей ξ , η и ζ остается все время неизменным, то можно считать, что эти оси могут быть из положения ξ_0 , η_0 и ζ_0 переведены в положение ξ , η и ζ вращением всех трех осей на некоторый угол ω вокруг некоторой оси. Отложив ω по направлению этой оси, получим вектор $\vec{\omega}$, изображающий вращение осей ξ , η и ζ . Пусть проекции его на оси ξ_0 , η_0 и ζ_0 даются таблицей

	ξ_0	η_0	ζ_0
$\vec{\omega}$	α	β	γ

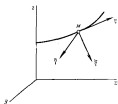


Рис. 2.

Направление силы F , или, что то же, ось ζ_0 , может быть изображено формулой

$$\zeta_0 = \bar{\omega} \zeta_0 + \zeta_0 \quad (18)$$

Спроектируем вектор $\bar{\omega} \zeta_0$ на координатные оси ξ_0 , η_0 и ζ_0 . Принимая во внимание, что проекции на ось вектора $\bar{\omega}$ суть

	ξ_0	η_0	ζ_0
$\bar{\omega}$	α	β	γ
ζ_0	0	0	1

легко видеть, что проекции $\bar{\omega} \zeta_0$ на оси ξ_0 , η_0 и ζ_0 суть

$$\begin{array}{c|ccc} & \xi_0 & \eta_0 & \zeta_0 \\ \hline \bar{\omega} \zeta_0 & \beta & -\alpha & 0 \end{array} \quad (19)$$

а то оси ox , oy и oz

	x	y	z
$\bar{\omega} \zeta_0$	$\beta \sin \varphi$	0	$-\beta \cos \varphi$

что дает возможность написать

$$\left. \begin{aligned} \cos(F, x) &= \beta \sin \varphi + \cos \varphi, \\ \cos(F, y) &= -\alpha, \\ \cos(F, z) &= -\beta \cos \varphi + \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

так как направление силы F , как сказано, совпадает с направлением осей ζ_0 .

Связь между величинами α , β и γ и α , β и γ может быть определена из условия неразрывности нити, причем это удобнее всего сделать, введя в рассмотрение проекции вектора $M_1 M_1'$ на оси $M_0 \xi_0$, $M_0 \eta_0$, $M_0 \zeta_0$, связанные с проекциями u , v и w , являющимися формулы (17), соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 \sin \varphi + w_0 \cos \varphi, \\ v &= v_0, \\ w &= -u_0 \cos \varphi + w_0 \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Обратимся к рис. 3. Пусть M_1 и M_1' — положения двух бесконечно близких точек нити, ds — расстояние между ними.

Пусть M_0 и M_0' — соответствующие положения тех же точек нити, когда она находится в положении статического равновесия. Так как нить неразрывна, то расстояние $M_0 M_0'$ есть также ds . Пользуясь формулой (18) и таблицей (19), можно видеть, что вектор $M_1 M_1'$ имеет на координатные оси $M_0 \xi_0$, $M_0 \eta_0$ и $M_0 \zeta_0$ проекции

	ξ_0	η_0	ζ_0
$M_1 M_1'$	βds	$-\alpha ds$	ds

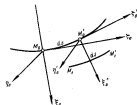


Рис. 3.

Но точка M_1 определяется по отношению к координатным осям $M_0 \xi_0$, $M_0 \eta_0$, $M_0 \zeta_0$ координатами

$$u_0, v_0 \text{ и } w_0.$$

Поэтому точка M_1' по отношению к тем же координатным осям определяется координатами

$$u_0 + \beta ds, v_0 - \alpha ds \text{ и } w_0 + ds \quad (22)$$

Пусть $u_0 + du_0$, $v_0 + dv_0$ и $w_0 + dw_0$ суть координаты точки M_1' по отношению к осям $M_0' \xi_0$, $M_0' \eta_0$ и $M_0' \zeta_0$. Если g есть радиус кривизны нити в рассматриваемом месте, то

$$\left. \begin{aligned} < M_0' \xi_0, M_0 \xi_0 = \frac{ds}{g}, \\ < M_0' \eta_0, M_0 \eta_0 = 0, \\ < M_0' \zeta_0, M_0 \zeta_0 = -\frac{ds}{g}. \end{aligned} \right\}$$

Поэтому координаты точки M_1^* относительно осей $M_0 \zeta_0$, $M_0 \eta_0$, $M_0 \xi_0$ можно выразить так:

$$\begin{aligned} u_1 + du_1 - (w_0 + dw_0) \frac{d\varphi}{\varphi}; \\ v_0 + dv_0; \\ w_0 + dw_0 + (u_0 + du_0) \frac{d\varphi}{\varphi} + d\delta. \end{aligned}$$

Приравняв эти значения найденным выше (см. формулу (22)) и отбрасывая малые величины второго порядка малости, можно видеть:

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} - \frac{w_0}{\varphi}; \\ -\alpha &= \frac{\partial v_0}{\partial \varphi}; \\ 0 &= \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} + \frac{u_0}{\varphi}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание формулы (13) и (6), можно переписать эти уравнения так:

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{\cos^2 \varphi}{\alpha} \left[\frac{\partial u_0}{\partial \varphi} - w_0 \right]; \\ 0 &= \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + u_0; \\ -\alpha &= \frac{\cos^2 \varphi}{\alpha} \frac{\partial w_0}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Формулы (20) и (23) и выражают искомую связь между величинами, входящими в уравнения движения (16). Преобразуем теперь эти уравнения.

Принимая во внимание выражения (3), (4), (16), (20), (21) и

$$F_3 = \alpha r,$$

можно уравнения движения (16) переписать, пренебрегая малыми второго порядка, так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{r}{\varphi} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \sin \varphi + \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \cos \varphi \right) &= \frac{\cos^2 \varphi}{\alpha} \left[\frac{\partial (\delta F \cos \varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial (F \beta \sin \varphi)}{\partial \varphi} \right]; \\ \frac{r}{\varphi} \left(-\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \cos \varphi + \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \sin \varphi \right) &= \frac{\cos^2 \varphi}{\alpha} \left[\frac{\partial (\delta F \sin \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{\partial (F \beta \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right]; \\ \frac{r}{\varphi} \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} &= -\frac{\cos^2 \varphi}{\alpha} \frac{\partial (F \alpha)}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Два первых уравнения группы (23) вместе с двумя же первыми группы (24) определяют колебания нити в ее плоскости, последние же уравнения — колебания, перпендикулярные к этой плоскости.

Колебания, перпендикулярные к плоскости нити

Принимая во внимание выражение (14), можно уравнениям, определяющим v_0 , придать вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} &= -g \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \cos \varphi + \alpha \sin \varphi \right); \\ -\alpha &= \frac{\cos^2 \varphi}{\alpha} \frac{\partial v_0}{\partial \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Как видно из этих уравнений, поперечные колебания нити не зависят от ее натяжения.

Плоское движение нити

Первые два уравнения группы (24):

$$\begin{aligned} \frac{r}{\varphi} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \sin \varphi + \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \cos \varphi \right) &= \\ &= \frac{\cos^2 \varphi}{\alpha} \left[\frac{\partial \delta F}{\partial \varphi} \cos \varphi - \delta F \sin \varphi + \frac{\partial F}{\partial \varphi} F_3 \operatorname{tg} \varphi + \beta \frac{F_3}{\cos^2 \varphi} \right]; \end{aligned}$$

$$\frac{r}{\varphi} \left(-\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \cos \varphi + \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \sin \varphi \right) = \frac{\cos^2 \varphi}{\alpha} \left[\frac{\partial \delta F}{\partial \varphi} \sin \varphi + \delta F \cos \varphi - \frac{\partial F}{\partial \varphi} F_3 \right]$$

могут быть разрешены относительно $\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}$, давая

$$\frac{r}{\varphi} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{\alpha} \left[-\delta F + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{F_3}{\cos \varphi} + \beta \frac{F_3}{\cos^2 \varphi} \sin \varphi \right];$$

$$\frac{r}{\varphi} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = \frac{\cos^2 \varphi}{\alpha} \left[\frac{\partial \delta F}{\partial \varphi} + \beta \frac{F_3}{\cos^2 \varphi} \right].$$

Дифференцируя и складывая, легко получить

$$\frac{r}{\varphi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \varphi} - w_0 \right) = -2 \frac{\cos^2 \varphi}{\alpha} \frac{\partial \delta F}{\partial \varphi} + 2 \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\alpha} \delta F + \frac{F_3}{\alpha} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cos \varphi;$$

$$\begin{aligned} \frac{r}{\varphi} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial \varphi} + v_0 \right) &= \frac{\cos^2 \varphi}{\alpha} \frac{\partial \delta F}{\partial \varphi} - \frac{2 \sin \varphi \cos \varphi}{\alpha} \delta F - \\ &= -\frac{\cos^2 \varphi}{\alpha} \delta F + \frac{2 F_3}{\alpha} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Левые части уравнений могут быть преобразованы с помощью уравнений (23) к такому виду (Жювиль):

$$\left. \begin{aligned} \frac{p}{\sigma} \frac{\alpha}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\Delta F}{\alpha} \cos \varphi \right) + \frac{F_2}{\alpha} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2}; \\ 0 &= \frac{p^2}{\partial p^2} \left(\frac{\Delta F}{\alpha} \cos \varphi \right) + 2 \frac{F_2}{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial p}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Эти уравнения могут быть приняты за уравнения плоского колебания цепи. В них входит координатный параметр β , определяющий колебательное движение цепи, и приращение ее натяжения δF , обусловленное колебанием цепи в ее плоскости.

14. ДВЕ ГЛАВЫ НЕОКОНЧЕННОГО КУРСА * „ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ“

Глава I

ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ МАЛЫХ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ

§ 1. Уравнения движения в декартовых координатах

Рассмотрим сначала некоторые общие свойства малых колебаний системы, состоящей из произвольного числа материальных точек, отличающихся друг от друга индексом i .

Пусть i — номер рассматриваемой точки системы;
 m_i — ее масса;
 x_i, y_i, z_i — три ее декартовых перемещения.

Движение системы будет вполне известно, если знать x_i, y_i и z_i как некоторые функции от времени. Обычно при изучении упругих колебаний и требуется разыскать эти три величины как функции от t . Допустим, что на отдельные точки рассматриваемой системы действуют две категории внешних сил:

силы *связывающие*, т. е. внешние силы, заданные как некоторые известные функции от времени, и силы *восстанавливающие*, magnitude которых зависит лишь от перемещения всех точек системы в данный момент времени.

Условимся проекция на ось ox , oy и oz восстанавливающей силы, действующей на i -ую точку системы, обозначать через X_i, Y_i и Z_i . Условимся также рассматривать лишь колебания таких систем, восстанавливающие силы которых имеют *потенциал*. Обозначим потенциал восстанавливающих сил через U . Тогда проекция на ось ox , oy и oz восстанавливающей силы, действующей на i -ую точку системы, будет $\frac{\partial U}{\partial x_i}$, $\frac{\partial U}{\partial y_i}$ и $\frac{\partial U}{\partial z_i}$ и в декартовых координатах уравнения движения выписутся в форме равенств:

$$\left. \begin{aligned} m_i x_i'' &= X_i + \frac{\partial U}{\partial x_i}; \\ m_i y_i'' &= Y_i + \frac{\partial U}{\partial y_i}; \\ m_i z_i'' &= Z_i + \frac{\partial U}{\partial z_i}. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

* Продолжится впереди.

где черта (') обозначены производные по времени t . Величину V , связанную с потенциалом восстанавливающих сил U зависимостью

$$U = -V, \quad (2)$$

принято называть *потенциальной энергией системы*. Вводя в (1) вместо потенциала внешних сил U , или, как часто говорят, вместо *силы функции* восстанавливающих сил, величину V с помощью зависимости (2), можно придать уравнениям движения (1) форму:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{u}_1' &= X_1 - \frac{\partial V}{\partial u_1}; \\ m_2 \ddot{v}_1' &= Y_1 - \frac{\partial V}{\partial v_1}; \\ m_3 \ddot{w}_1' &= Z_1 - \frac{\partial V}{\partial w_1}. \end{aligned} \right\} \quad (1')$$

Уравнениями (1') можно выписать вообще сколько угодно отдельных материальных точек вводит в состав исследуемой системы. Уравнениями эти точки определяются движением свободной упругой системы, т. е. системы материальных точек, которые все могут перемещаться по направлению всех трех координатных осей.

Нас будут интересовать в дальнейшем колебания не только свободной упругой тела, но и колебания упругих систем, отдельные точки которых не могут иметь в пространстве тех или иных перемещений.

В случае, если перемещения отдельных точек системы по отношению ко внешней среде или изменению расстояний между отдельными точками системы устранены, надо к числу сил, действующих на отдельные точки системы, присоединить реакции связей, обеспечивающие свободу перемещения отдельных точек системы. Условимся проекции сил реакции связей, продолженных к i -й точке системы, обозначать через R_{ix} , R_{iy} и R_{iz} соответственно. В случае наличия таких реакций уравнения движения i -й точки системы надо дополнить членами R_{ix} , R_{iy} и R_{iz} и уравнения эти примут вид равенств

$$\left. \begin{aligned} m_1 \ddot{u}_1' &= X_1 - \frac{\partial V}{\partial u_1} + R_{ix}; \\ m_2 \ddot{v}_1' &= Y_1 - \frac{\partial V}{\partial v_1} + R_{iy}; \\ m_3 \ddot{w}_1' &= Z_1 - \frac{\partial V}{\partial w_1} + R_{iz}. \end{aligned} \right\} \quad (1'')$$

Жесткие связи, устраняющие отдельные перемещения отдельных точек системы или взаимные смещения ее отдельных точек, принадлежат к числу так называемых *идеальных связей*, т. е. связей, реакции коих не могут производить работы ни при каких

возможных, или, как часто говорят, виртуальных перемещениях системы. Так как в дальнейшем нас будут интересовать исключительно системы, подчиненные упомянутым только что жестким связям системы, то можно ограничиться рассмотрением случая, когда в уравнениях движения (1'') реакции R_{ix} , R_{iy} и R_{iz} подчинены условию

$$\sum_i (R_{ix} \delta u_i + R_{iy} \delta v_i + R_{iz} \delta w_i) = 0 \quad (3)$$

(при всяком виртуальном перемещении системы).

Если в состав системы вводит в материальных точек, каждая из которых может свободно перемещаться в направлении всех трех координатных осей, то число независимых виртуальных перемещений системы, или, как говорят, число степеней ее свободы есть $3n$. Если система, состоящая из n материальных точек, подчинена k жестким связям, устраняющим возможность появления у нее k различных абсолютных или относительных по отношению к другим точкам перемещений, то число степеней свободы системы есть $3n - k$. Все перемещения, возможные у такой системы по ее устройству, могут быть выражены через $3n - k$ независимых координатных параметров. Вводя в рассмотрение систему $3n - k$ таких параметров, можно уравнение движения рассматриваемой системы выписать непосредственно в этих обобщенных координатах.

К рассмотрению этих уравнений и переходим.

§ 2. Вторая лагранжева форма дифференциальных уравнений малых колебаний упругой системы

Ограничимся рассмотрением лишь малых колебаний упругих систем. Условием отсчитывать отклонения системы u_i , v_i и w_i от положения ее естественного равновесия в отсутствии внешних сил. При этих условиях все k уравнений жестких связей, которым системы подчинены, должны быть линейными уравнениями типа

$$\sum_i (\lambda_{im} u_i + \lambda_{im} v_i + \mu_{im} w_i) = 0, \quad (4)$$

где m — номер связи, а λ_{im} , λ_{im} , μ_{im} — некоторые заданные константы.

Все же возможные отклонения системы от положения равновесия можно выразить через $3n - k$ величин q_j , связанных с u_i , v_i и w_i системой линейных зависимостей вида

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \sum_j \alpha_{ij} q_j; \\ v_i &= \sum_j \beta_{ij} q_j; \\ w_i &= \sum_j \gamma_{ij} q_j. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где α_{ij} , β_{ij} и γ_{ij} — величины, которые допустимо рассматривать как угодно, лишь бы система уравнений (4) и (5) допускала определение из нее всех q_j , если m_j , v_j и w_j заданы. Аналитическим признаком этой возможности является отличие от нуля определителя, составленного из коэффициентов системы (4) и (5), рассматриваемой как системы уравнений, в которой неизвестными являются величины q_j .

Чтобы на $3n - k$ величин q_j , входящих подстановкой (5), можно было смотреть как на $3n - k$ независимых координатных параметров рассматриваемой системы, надо константы α_{ij} , β_{ij} и γ_{ij} подобрать так, чтобы, во-первых, каждой комбинацией параметров q_j определялась некоторое отклонение системы, принадлежащее к числу возможных ее отклонений; во-вторых же, чтобы всякому возможному отклонению системы соответствовала своя комбинация значений параметров q_j . Первое из этих условий будет соблюдено, если мы подберем параметры α_{ij} , β_{ij} и γ_{ij} , соответствующие определенному частному значению индекса j , так, чтобы при всяком j совокупностью этой определяющей некоторо отклонение, удовлетворяющее всем условиям (4). Второе из этих условий будет удовлетворено, если совокупность величин α_{ij} , β_{ij} и γ_{ij} , соответствующая всем i и j , будет подобрана так, чтобы, задав m_j , v_j и w_j любым образом связанными с начальными на систему связями, мы могли по заданным m_j , v_j и w_j решить систему (5) относительно неизвестных q_j .

Допустим, что подстановка (5) указанным условиям удовлетворяет, и на параметры q_j можно смотреть, как на обобщенные координаты рассматриваемой системы. Умножим первое из уравнений (1') на α_{ij} , второе на β_{ij} , третье на γ_{ij} и сложим все уравнения. После этого просуммируем результаты по всем i . Это приводит к уравнению

$$\sum_j m_j [\alpha'_{ij} \alpha_{ij} + \alpha''_{ij} \beta_{ij} + \alpha'''_{ij} \gamma_{ij}] - \sum_j [X_i \alpha_{ij} + Y_i \beta_{ij} + Z_i \gamma_{ij}] - \sum_j \left[\frac{\partial V}{\partial \alpha_{ij}} \alpha_{ij} + \frac{\partial V}{\partial \beta_{ij}} \beta_{ij} + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{ij}} \gamma_{ij} \right] + \sum_j [R_{ix} \alpha_{ij} + R_{iy} \beta_{ij} + R_{iz} \gamma_{ij}]. \quad (6)$$

Как видно из (5), однако,

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial m_j}{\partial q_j};$$

$$\beta_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial q_j};$$

$$\gamma_{ij} = \frac{\partial w_j}{\partial q_j}.$$

Поэтому

$$\sum_j \left[\frac{\partial V}{\partial \alpha_{ij}} \alpha_{ij} + \frac{\partial V}{\partial \beta_{ij}} \beta_{ij} + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{ij}} \gamma_{ij} \right] = \sum_j \left[\frac{\partial V}{\partial \alpha_{ij}} \frac{\partial m_j}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial \beta_{ij}} \frac{\partial v_j}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial \gamma_{ij}} \frac{\partial w_j}{\partial q_j} \right] = \frac{\partial V}{\partial q_j}.$$

Далее в силу независимости α_{ij} , β_{ij} и γ_{ij} от i можно путем дифференцирования уравнения (6) по i видеть, что

$$\left. \begin{aligned} m'_j &= \sum_i \alpha_{ij} \alpha'_{ij} \\ v'_j &= \sum_i \beta_{ij} \alpha'_{ij} \\ w'_j &= \sum_i \gamma_{ij} \alpha'_{ij} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

и, следовательно,

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial m'_j}{\partial \alpha'_{ij}}; \quad \beta_{ij} = \frac{\partial v'_j}{\partial \alpha'_{ij}}; \quad \gamma_{ij} = \frac{\partial w'_j}{\partial \alpha'_{ij}}.$$

Поэтому должно быть

$$\sum_j m_j [\alpha'_{ij} \alpha_{ij} + \alpha''_{ij} \beta_{ij} + \alpha'''_{ij} \gamma_{ij}] = \frac{d}{dt} \sum_j m_j \left[\alpha'_{ij} \frac{\partial m'_j}{\partial \alpha'_{ij}} + \alpha''_{ij} \frac{\partial v'_j}{\partial \alpha'_{ij}} + \alpha'''_{ij} \frac{\partial w'_j}{\partial \alpha'_{ij}} \right] = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \alpha'_{ij}}.$$

где T , определяемое равенством

$$T = \frac{1}{2} \sum_j m_j [(v'_j)^2 + (w'_j)^2 + (u'_j)^2], \quad (6)$$

и есть не что иное, как живая сила системы.

Наконец величина

$$\sum_j [R_{ix} \alpha_{ij} + R_{iy} \beta_{ij} + R_{iz} \gamma_{ij}]$$

есть не что иное, как коэффициент пропорциональности между приращением координаты q_j и совершаемой при приращении этой координаты работой реальных всех связей. Так как приращение координаты q_j определяется некоторое возможное отклонение системы, а на всяком возможном отклонении системы работ всех идеальных связей системы равна нулю, то в рассматриваемом случае должно быть

$$\sum_j [R_{ix} \alpha_{ij} + R_{iy} \beta_{ij} + R_{iz} \gamma_{ij}] = 0. \quad (7)$$

Величина

$$Q_j = \sum_i [X_i \alpha_{ij} + Y_i \beta_{ij} + Z_i \gamma_{ij}] \quad (7)$$

есть коэффициент пропорциональности между работой внешних сил, совершаемой на перемещении системы, соответствующем малому приращению координаты q_j , и величиной приращения этой обобщенной координаты системы. Величину Q_j , определяемую равенством (7), принято называть обобщенной силой, соответствующей координате q_j .

Подставляя (6), (7), (2) и (7) в (4), нетрудно прийти к следующему виду

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i \quad (8)$$

что и можно принять за уравнение движения, соответствующее координате q_i . От общего типа уравнений Лагранжа, выписывающихся, как известно, в форме равенства

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \quad (9)$$

полученное уравнение (8) отличается отсутствием члена $-\frac{\partial V}{\partial q_i}$. Это совершенно естественно, ибо мы ограничимся рассмотрением только тех координат q_i , которые вводятся подстановкой (5), где α_{ij} , β_{ij} и γ_{ij} являются константами. Декартовы скорости системы u_i , v_i и w_i являются при этих условиях, как видно из (4), линейными функциями только от всех обобщенных скоростей \dot{q}_i , а живая сила системы T , как видно из (7) и (4), — функцией только от всех \dot{q}_i , но не от самих q_i . Все производные вида $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ должны быть равны нулю, что и приводит к изменению уравнения (9) уравнением (8). Везде в дальнейшем будем вводить обобщенные координаты системы q_i исключительно лишь подстановкой (5), считая α_{ij} , β_{ij} и γ_{ij} константами. В соответствии с этим в дальнейшем будем уравнение движения в обобщенных координатах выписывать в форме равенства (8), а не (9).

Уравнение (8) можно выписать по одному для всякого частного значения индекса i . В своей совокупности они определяют движение системы в обобщенных координатах.

§ 3. Уравнения движения в главных координатах

Подставив u_i , v_i , w_i из выражений (4) § 2 в выражение (6), нетрудно видеть, что живая сила системы T определяется через скорости, соответствующие координатам q_i в рассматриваемом случае, так:

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \left[\left(\sum_j \alpha_{ij} \dot{q}_j \right)^2 + \left(\sum_j \beta_{ij} \dot{q}_j \right)^2 + \left(\sum_j \gamma_{ij} \dot{q}_j \right)^2 \right] = \\ = \frac{1}{2} \sum_i m_i \sum_j \sum_k (\alpha_{ij} \alpha_{ik} + \beta_{ij} \beta_{ik} + \gamma_{ij} \gamma_{ik}) \dot{q}_j \dot{q}_k$$

или, после порядка суммирования,

$$T = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k \dot{q}_j \dot{q}_k \sum_i m_i (\alpha_{ij} \alpha_{ik} + \beta_{ij} \beta_{ik} + \gamma_{ij} \gamma_{ik}) \quad (10)$$

Как видно из (10), живая сила системы в рассматриваемых случаях ее движения является однородной целой алгебраической функцией 2-й степени от всех обобщенных скоростей системы \dot{q}_i .

Переходя к рассмотрению потенциальной энергии системы, условимся считать все u_i , v_i и w_i равными нулю в том состоянии системы, которое соответствует положению ее естественного равновесия, когда никаких внешних сил на систему не действует и все X_i , Y_i и Z_i равны нулю. При этих условиях можно будет по началу возможных перемещений считать производные потенциальной энергии системы V по всем декартовым координатам ее u_i , v_i и w_i , а следовательно, и по всем обобщенным координатам, введенным подстановкой (5) равными нулю.

При этих условиях потенциалная энергия системы V не должна заключать в своем составе членов, зависящих от q_i линейно.

Ограничиваясь рассмотрением малых колебаний системы, можно, разлагая V в ряд по степеням всех q_i , пренебречь членами, заключенными в обобщенные координаты в степенях более высоких, чем вторая.

Отсутствие в составе V линейных членов и возможность пренебречь всеми членами, в которые q_i входит в степени более высокой, чем вторая, позволяют считать во всех случаях, которые будем исследовать, V однородным целым алгебраическим полиномом второй степени вида

$$V = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k C_{jk} q_j q_k \quad (11)$$

где C_{jk} — некоторые константы.

Таким образом во всех случаях, которые будут подлежать рассмотрению, можно считать T и V алгебраическими полиномами вида (11)

$$T = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k \quad (12)$$

где

$$A_{jk} = \sum_i m_i (\alpha_{ij} \alpha_{ik} + \beta_{ij} \beta_{ik} + \gamma_{ij} \gamma_{ik}) \quad (13)$$

принимая как все A_{jk} , так и все C_{jk} можно считать константами. Исследование таких полиномов позволило Веберу вывести формулировать следующую важную теорему, известную под именем теоремы Вебера:

если из двух алгебраических полиномов вида

$$V = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k C_{jk} q_j q_k$$

и

$$U = \frac{1}{2} \sum_j \sum_k A_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k$$

где A_{jk} и C_{jk} — константы, по крайней мере один является полиномом, определенным по знаку и обыкновенным, то всегда существует некоторая замена вида

$$q_j = \sum_k p_{jk} P_k \quad (14)$$

где p_{jk} — константа, а P_k — новая переменная, которая освобождает полиномы V и U от произведений различных переменных P_k друг на друга и приводит, следовательно, полиномы V и U к сумме полных квадратов вида

$$V = \frac{1}{2} \sum_k N_k P_k^2$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_k M_k P_k^2$$

Под переменными, определенными по знаку, в этой теореме подразумеваются также, которые на при какой вариации переменных, от коих они зависят, не могут переменить знака; под полиномами обыкновенными — также, которые никаким линейным преобразованием вида (14) нельзя представить как функции от меньшего числа переменных.

Желаю сила системы является полиномом определено положительным и обыкновенным. Поэтому по теореме Вейерштрасса всегда должен существовать некоторая такая подстановка вида (14), с помощью которой потенциальная энергия системы V и кинетическая ее T могут быть обе вместе приведены к виду

$$V = \frac{1}{2} \sum_k N_k P_k^2 \quad (15)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_k M_k (P_k')^2 \quad (16)$$

Координаты P_k , приводящие V и T к сумме полных квадратов вида (15) и (16), называются главными координатами рассматриваемой системы.

Будучи выраженными в главных координатах, уравнения движения (8) принимают вид

$$M_k P_k'' + N_k P_k = P_k \quad (17)$$

где P_k — обобщенная сила, соответствующая координате P_k , а M_k и N_k по аналогии с колебанием системы с одной степенью свободы могут быть названы M_k — обобщенной массой, соответствующей координате P_k , а N_k — обобщенной жесткостью, соответствующей этой координате.

Главные координаты P_k обладают свойством разделяться в дифференциальных уравнениях, им по слезе Лагранжа соответствующих. Каждая из этих координат определяется своим диффе-

ренциальным уравнением, в которое никаких иных неизвестных, кроме нее, не входит. Уравнение это имеет ту же структуру, что и дифференциальное уравнение малых колебаний системы с одной степенью свободы. Введение в рассмотрение главных координат позволяет поэтому свести исследование движения любой упругой системы, совершающей малые колебания без сопротивления, к исследованию движения ряда отдельных простейших систем, с одной степенью свободы каждая.

Колебания системы, совершаемые в отсутствии возмущающих сил, называются свободными.

В случае свободных колебаний все

$$P_k = 0$$

и уравнения движения в главных координатах получают вид

$$M_k P_k'' + N_k P_k = 0 \quad (18)$$

Общий интеграл уравнения (17) дается, как нетрудно видеть, равенством

$$P_k = A_k \cos \lambda_k t + B_k \sin \lambda_k t \quad (19)$$

где

$$\lambda_k^2 = \frac{N_k}{M_k} \quad (20)$$

Величина λ_k , определяемая равенством (20), называется *главной частотой* рассматриваемого главного свободного колебания. Формулой (20) дается связь между угловой частотой, обобщенной массой и обобщенной жесткостью отдельных главных свободных колебаний системы.

§ 4. Составление уравнений вынужденных колебаний в главных координатах

Допустим, что коэффициенты подстановки (5) подобраны так, что обобщенные координаты q_j , вводимые этой подстановкой, обратятся в главные координаты системы. Обозначим коэффициенты подстановки (5), соответствующие этому, через α_k^j , β_k^j , γ_k^j , причем, что

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \sum_k \alpha_k^1 P_k \\ q_2 &= \sum_k \beta_k^2 P_k \\ q_3 &= \sum_k \gamma_k^3 P_k \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Замекая в выражении (6) для T величины α_k^0 , β_k^0 и γ_k^0 величинами β_k^0 с помощью (21), можно получить вместо (10):

$$T = \frac{1}{2} \sum_k \sum_p \beta_k^0 \beta_p^0 \sum_r \omega_r [\alpha_k^0 \alpha_p^0 + \beta_k^0 \beta_p^0 + \gamma_k^0 \gamma_p^0].$$

Что, однако, если β_k^0 — координаты главные, должно быть тождественно выражению (16). Отсюда заключаем, что если подстановка (21) соответствует главным координатам, то

$$M_k = \sum_r \omega_r [(a_k^0)^2 + (b_k^0)^2 + (c_k^0)^2]. \quad (22)$$

при всяком же k , термин k ,

$$\sum_r \omega_r [\alpha_k^0 \alpha_k^0 + \beta_k^0 \beta_k^0 + \gamma_k^0 \gamma_k^0] = 0. \quad (23)$$

Совокупностью параметров α_k^0 , β_k^0 и γ_k^0 , соответствующих определенному частному значению k , определяются декартовы координаты системы в том же отклонении, когда все главные координаты системы, кроме k -й, равны нулю, k -я же главная координата равна единице. Поэтому совокупность параметров α_k^0 , β_k^0 и γ_k^0 , соответствующую определенному частному значению k , можно назвать *единичным отклонением системы*, соответствующим k -й главной координате. Формула (22) даст в случае принятия этой терминологии связь между единичным отклонением и обобщенной массой k -й главной координаты.

Можно представить себе и иначе совокупность параметров α_k^0 , β_k^0 , γ_k^0 , соответствующих определенному частному значению параметра k : в движении системы, определяемом координатами β_k^0 , соотношения перемещений отдельных точек системы друг к другу остаются постоянными и определяется совокупностью параметров α_k^0 , β_k^0 и γ_k^0 , соответствующих данному частному значению k . Совокупностью этих параметров определяется поэтому форма k -го главного колебания системы. Поэтому, говоря о совокупности величин α_k^0 , β_k^0 и γ_k^0 , соответствующих определенному частному значению k , можно вместо термина *единичное отклонение*, соответствующее k -й главной координате, пользоваться более кратким термином *форма k -го главного колебания*, как синонимом. Это и будем делать в дальнейшем.

Равенство (22) показывает, что как только форма соответствующего главного колебания задана, то обобщенную массу системы, соответствующую k -й главной координате, можно немедленно подсчитать.

Ниже увидим, что *деловые частоты главных свободных колебаний* определяются параллельно с разложением форм этих колебаний. Числа M_k^0 обычно находятся в самом процессе разложения форм главных свободных колебаний системы. Поэтому

разыскав M_k из (22), можно обобщенную жесткость N_k подсчитать с помощью зависимости

$$N_k = M_k \lambda_k^2. \quad (24)$$

вытекающей непосредственно из (20).

Обобщенные силы P_k , соответствующие главным координатам, можно по определению понятия *обобщенные силы* подсчитать с помощью общей формулы (7), дающей, принимая во внимание (21) и (5),

$$P_k = \sum_r (X_r \alpha_k^0 + Y_r \beta_k^0 + Z_r \gamma_k^0). \quad (7')$$

Правой частью этого равенства определяется работа мгновенной величины всех внешних сил X , Y и Z , произведенная за единичным отклонением системы, соответствующим рассматриваемой главной координате. Поэтому формула (7') приводит к следующему правилу определения величин обобщенных сил P_k , соответствующих главным координатам системы:

«Мгновенное значение обобщенной силы, соответствующей рассматриваемой обобщенной координате, можно в любой момент времени подсчитать как работу, производимую мгновенными значениями всех возмущающих сил, на единичном отклонении системы, соответствующем этой обобщенной координате.

Правило это применимо к определению величины обобщенных сил вообще и в частности, следовательно, и к определенно обобщенных сил, соответствующих главным координатам системы.

Формулы (22), (20') и (7') позволяют составить дифференциальные уравнения, которым определяется k -я главная координата системы, как только форма и частота этого колебания заданы.

§ 5. Нахождение форм главных свободных колебаний системы с помощью метода частных решений

Для нахождения форм главных свободных колебаний системы можно воспользоваться тем, что каждая из главных координат определяется в случае отсутствия возмущающих сил своим дифференциальным уравнением вида

$$M_k \ddot{x}_k + N_k x_k = 0. \quad (18)$$

в которое никаких иных координат, кроме координаты β_k^0 , не входят. Приняв поэтому, что k -я из главных координат является в функции от времени t по закону

$$\beta_k^0 = A_k \cos(\beta_k t + \epsilon_k),$$

где A_k и c_k — константы, а все остальные главные координаты равны нулю, мы удовлетворим всем уравнениям системы (18). Это показывает, что, если q_j — какое-либо обобщенное координаты системы, а v_{jk} — коэффициенты подстановки (14), связывающие все обобщенные координаты q_j с главной координатой P_k , то, положив при всяком j :

$$q_j = v_{jk} P_k = v_{jk} A_k \cos(\lambda_k t + \alpha_k), \quad (24)$$

мы должны удовлетворить всей совокупности уравнений свободных колебаний системы в обобщенных координатах q_j . Последнее, по сказанному в § 2, можно выписать в форме системы уравнений

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) + \frac{\partial V}{\partial q_j} = 0 \quad (25)$$

или, принимая во внимание (11) и (12), в форме совокупности равенств

$$\sum_k \{ A_{jk} \dot{q}_k^2 + C_{jk} q_k \} = 0, \quad (26)$$

выписанных по одному для всякого частного значения j .

Подставив (24) в (26), увидим, что (24) будет решением системы (26), если определим величину v_{jk} из системы уравнений

$$\sum_k \{ C_{jk} - \lambda_k^2 A_{jk} \} v_{jk} = 0, \quad (27)$$

в которой j есть порядковый номер уравнения.

Система (26) заключает в себе столько уравнений, сколько неизвестных v_{jk} в нее входит. Будучи системой линейных однородных уравнений относительно этих неизвестных, она даст для величин v_{jk} решение, отличное от нуля лишь в том случае, если определитель, составленный из ее коэффициентов, будет равен нулю.

Уравнение

$$\begin{vmatrix} C_{11} - \lambda_1^2 A_{11} & C_{12} - \lambda_1^2 A_{12} & C_{13} - \lambda_1^2 A_{13} & C_{14} - \lambda_1^2 A_{14} & \dots \\ C_{21} - \lambda_1^2 A_{21} & C_{22} - \lambda_1^2 A_{22} & C_{23} - \lambda_1^2 A_{23} & C_{24} - \lambda_1^2 A_{24} & \dots \\ C_{31} - \lambda_1^2 A_{31} & C_{32} - \lambda_1^2 A_{32} & C_{33} - \lambda_1^2 A_{33} & C_{34} - \lambda_1^2 A_{34} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (27)$$

заключает в себе в качестве неизвестной угловой частоты главных свободных колебаний системы λ_k^2 . Определив последние из (27), можно по подстановке каждого найденного λ_k^2 в (26) определить из (26) соотношение между всеми v_{jk} , соответствующими найденному λ_k^2 , чем и определяется форма k -го главного колебания системы.

Чтобы определить после этого связь между главными координатами P_k и декартовыми перемещениями x, y, z , достаточно подставить (14) в (5), что даст

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_j \alpha_{1j} \sum_k v_{jk} P_k = \sum_k P_k \sum_j \alpha_{1j} v_{jk} \\ y &= \sum_j \beta_{1j} \sum_k v_{jk} P_k = \sum_k P_k \sum_j \beta_{1j} v_{jk} \\ z &= \sum_j \gamma_{1j} \sum_k v_{jk} P_k = \sum_k P_k \sum_j \gamma_{1j} v_{jk} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

или, сравнивая (28) с (21),

$$\alpha_k^0 = \sum_j \alpha_{1j} v_{jk}; \quad \beta_k^0 = \sum_j \beta_{1j} v_{jk}; \quad \gamma_k^0 = \sum_j \gamma_{1j} v_{jk} \quad (29)$$

Формулы (29) позволяют найти коэффициенты, связывающие главные координаты системы непосредственно с ее декартовыми перемещениями.

§ 6. Нахождение начальных значений главных координат

Мы видели выше [см. равенство (23)], что формы главных колебаний системы, т. е. совокупности величин α_k^0 ; β_k^0 и γ_k^0 , соответствующие определенному частотному значению k , обладают свойством, в силу которого суммы вида

$$\sum_j m_j (\alpha_k^0 \alpha_k^0 + \beta_k^0 \beta_k^0 + \gamma_k^0 \gamma_k^0)$$

всегда обращаются в нуль, если только α_k^0 ; β_k^0 ; γ_k^0 с одной стороны, и $\alpha_{k'}^0$; $\beta_{k'}^0$ и $\gamma_{k'}^0$ с другой, соответствуют двум разным главным колебаниям системы. Это свойство форм главных свободных колебаний системы принято называть их ортогональностью, так как аналитическое выражение его, формулируемое равенством (23), до некоторой степени сходно с аналитическим условием взаимной ортогональности двух векторов в пространстве.

Ортогональность форм главных свободных колебаний системы весьма упрощает разыскание начальных значений главных координат. Действительно, пусть для какого-либо момента времени t_0 известны смещения системы x_0 и требуется найти значения главной координаты P_k , соответствующие этому отклонению системы. Если бы равенство (23) было неизвестно, то нам пришлось бы находить величины P_k из уравнений (21) с помощью одного из общих правил решения системы линейных алгебраических уравнений. Располагая равенством (23), можно упростить первое из уравнений (21) на $m_j \alpha_k^0$, второе — на $m_j \beta_k^0$, третье — на $m_j \gamma_k^0$ и затем сложить все эти уравнения.

Просуммировав результат по i , получим

$$\sum_i m_i (u_i \alpha_{ik}^0 + v_i \beta_{ik}^0 + w_i \gamma_{ik}^0) = \sum_i m_i \sum_j (\alpha_{ik}^0 \alpha_{jk}^0 + \beta_{ik}^0 \beta_{jk}^0 + \gamma_{ik}^0 \gamma_{jk}^0) P_k + \sum_j P_j \sum_i m_i (\alpha_{ik}^0 \alpha_{jk}^0 + \beta_{ik}^0 \beta_{jk}^0 + \gamma_{ik}^0 \gamma_{jk}^0).$$

В силу (23) множители при всех P_k , кроме P_k , равны в правой части этого уравнения нулю. Поэтому по нему непосредственно следует

$$P_k = \frac{\sum_i (u_i \alpha_{ik}^0 + v_i \beta_{ik}^0 + w_i \gamma_{ik}^0) m_i}{\sum_i m_i [(\alpha_{ik}^0)^2 + (\beta_{ik}^0)^2 + (\gamma_{ik}^0)^2]} = \frac{1}{M_k} \sum_i m_i (u_i \alpha_{ik}^0 + v_i \beta_{ik}^0 + w_i \gamma_{ik}^0).$$

Полученное равенство справедливо при всяком k и при всяком t . Поэтому оно должно оставаться справедливым как в том случае, если мы заменим в нем видимость α на k , так и в том случае, если мы его продифференцируем по t . Выполнив это, можно получить:

$$P_k = \frac{1}{M_k} \sum_i m_i (u_i \alpha_{ik}^0 + v_i \beta_{ik}^0 + w_i \gamma_{ik}^0); \quad (30)$$

$$P_k^* = \frac{1}{M_k} \sum_i m_i (u_i^* \alpha_{ik}^0 + v_i^* \beta_{ik}^0 + w_i^* \gamma_{ik}^0). \quad (31)$$

Равенства (30) и (31) позволяют определить для начального момента времени значение всех главных координат P_k и их производных по времени, если для этого момента времени декартовы отклонения и скорости системы известны.

Все вышесказанное показывает, что если формы и частоты каждого из главных свободных колебаний системы определены, а начальное состояние системы известно, то можно без труда составить для каждой из главных координат дифференциальное уравнение движения в главных координатах

$$M_k P_k'' + N_k P_k = F_k, \quad (17)$$

и найти начальные значения всех этих координат и их производных по времени:

$$\left. \begin{aligned} P_k &= P_k^0 \\ P_k' &= (P_k^0)' \end{aligned} \right\} \text{ при } t=0, \quad (32)$$

Дифференциальным уравнением (17) и начальными условиями (32) каждая из главных координат вполне определяется и можно ее разложить как функцию от t .

§ 7. Распространение полученных результатов на общий случай колебаний упругого тела

Упругое тело является с точки зрения теории малых колебаний механической системой с бесконечно большим числом степеней свободы, ибо всякий его элементарный параллелепипед, каков он в теле является, бесконечное множество, имеет массу и может перемещаться, как правило, по всем трем взаимноперпендикулярным направлениям. Перегруппировать все отдельные массы таких элементарных параллелепипедов нет возможности. Отделить их друг от друга можно лишь совокупностью их декартовых координат и естественным состоянием тела. Условимся координаты эти обозначать через x, y, z , а перемещения различных точек тела в направлении осей ox, oy, oz через u, v, w .

Чтобы перемещения всех точек тела во все моменты времени были известны, надо u, v, w не определять как функции от x, y и z , с одной стороны, и времени t , — с другой.

Форма каждого из главных колебаний упругого тела должна определяться некоторыми функциями от параметра k , служащего для нумерации точек упругого тела. Равенство (21) можно при этих условиях заменить таким:

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_k u_k(x, y, z) P_k; \\ v &= \sum_k v_k(x, y, z) P_k; \\ w &= \sum_k w_k(x, y, z) P_k. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

где P_k — главные координаты системы, а $u_k(x, y, z)$, $v_k(x, y, z)$ и $w_k(x, y, z)$ — функции, определяющие осевой совокупностью осцилляций (или, что то же, форму) каждого из главных движений рассматриваемой системы.

Роль отдельных масс системы, которые ранее мы обозначали через m_i , принимают на себя в этом случае элементарных параллелепипедов $\Delta x \Delta y \Delta z$; роль параметров α_{ik}^0 — функции $u_k(x, y, z)$; роль параметров β_{ik}^0 — функции $v_k(x, y, z)$; роль же параметров γ_{ik}^0 — функции $w_k(x, y, z)$. Суммирование по i заменится при этом интегрированием по всему объему тела, и, в частности, связь между формой k -го главного свободного колебания и его обобщенной массой M_k преобразуется вместо (22) в

$$M_k = \iiint_V \rho [u_k^2(x, y, z) + v_k^2(x, y, z) + w_k^2(x, y, z)] dx dy dz, \quad (34)$$

условие ортогональности принимает вид равенство

$$\iiint_V \rho [u_k(x, y, z) u_l(x, y, z) + v_k(x, y, z) v_l(x, y, z) + w_k(x, y, z) w_l(x, y, z)] dx dy dz = 0, \quad (35)$$

а формулы (30) и (31) принимаю вид

$$P_0 = \frac{1}{M_k} \iiint_V [\omega v_k(x, y, z) + v v_k(x, y, z) + w v_k(x, y, z)] dx dy dz; \quad (36)$$

$$P_k = \frac{1}{M_k} \iiint_V [w' v_k(x, y, z) + v' v_k(x, y, z) + w' v_k(x, y, z)] dx dy dz. \quad (37)$$

Последний вычисляется общий путь разложения заданных отклонений системы v , v и w и ее скоростей w' , v' и w' в ряды вида (33) по формам главных свободных колебаний упругого тела.

Если внешние силы, приложенные к телу, являются силы объемные, а X , Y и Z — составляющие этих сил по оси ox , oy и oz , причем все три величины заданы функциями от x , y , z и t , то на основании выражения (7') можно обобщенные силы, соответствующие главным координатам упругого тела, вычислять с помощью равенств

$$P_k = \iiint_V [X v_k(x, y, z) + Y v_k(x, y, z) + Z w_k(x, y, z)] dx dy dz, \quad (38)$$

в которое в этом случае переходит выражение (7'). Таким образом, как только формы и угловые частоты какого-либо из главных свободных колебаний упругого тела известны, так сейчас же становится возможным выписать как дифференциальное уравнение (17), так и начальные условия для каждого из главных упругих колебаний тела и определить соответствующую главную координату P_k как функцию от t .

Введение в рассмотрение главных координат позволяет, таким образом, и в случае систем с непрерывно распределенной массой сразу исследовать всякого малого колебания системы с исследованно колебаний ряда отдельных систем с одной степенью свободы каждая. В дальнейшем будем неоднократно пользоваться этим приемом. Расчетные схемы, в основных чертах намеченные выше, будут поведены в последующем ряду примеров. Воздерживаясь пока от приведения специальных примеров, иллюстрирующих все изложенное, обратимся к рассмотрению различных случаев колебаний упругих систем с одной степенью свободы k , в частности, к изучению действия на системы этого рода так называемых механических сил.

Как видно из изложенного, все относящееся к наложению вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы может быть непосредственно применено к изучению малых колебаний произвольной упругой системы, формы главных свободных колебаний которой предварительно найдены.

§ 1. Вступительные замечания

Малые колебания упругой системы, отклонение которой определяется одной обобщенной координатой P_k , определяются дифференциальным уравнением

$$M_k \ddot{P}_k + N_k \dot{P}_k = P_k(t), \quad (1)$$

в котором M_k — обобщенная масса системы; N_k — обобщенная вязкость системы; $P_k(t)$ — обобщенная сила, заданная как функция от t и начальными условиями движения.

Если отклонение системы в начальный момент P_k^0 , а начальное значение производной по времени $(\dot{P}_k)^0$, то начальные условия движения даются равенствами

$$P_k = P_k^0 \quad \text{при } t = 0; \quad (2)$$

$$\dot{P}_k = (\dot{P}_k)^0 \quad \text{при } t = 0. \quad (3)$$

Дифференциальное уравнение (1) приближает к числу линейных с постоянными коэффициентами. Его общий интеграл легко находится методом вариации произвольных постоянных. Так как при таком чисто аналитическом способе составления общего интеграла уравнения (1) механический смысл его остается несколько затуманенным, то составим этот общий интеграл уравнения (1) на основании чисто механических соображений, переходя постепенно от случаев нагрузки системы более простой и более сложной. Начнем с рассмотрения статического отклонения системы под действием силы, во времени не меняющейся.

§ 2. Статическое отклонение под действием силы во времени неизменной

Допустим, что на покоящуюся систему, движение которой определяется уравнением (1), действует постоянная сила $P_k = P_k^0$ и требуется определить статическое отклонение системы под действием этой силы. Очевидно, для этого достаточно найти такой интеграл уравнения

$$M_k \ddot{P}_k + N_k \dot{P}_k = P_k^0, \quad (4)$$

где P_k^0 — const, который удовлетворяет условию $\dot{P}_k = 0$ при всяком t .

Такой интеграл уравнения (4) дается выражением

$$P_k = |P_k|_{t=0} - \frac{P_k^0}{N_k} \quad (5)$$

Формулой (5) определяется статическое отклонение системы, вызываемое действием силы P_k^0 во времени не меняющейся.

§ 3. Действие силы, внезапно приложенной

Допустим, что на систему, которая до момента $t=0$ покоилась в своем естественном состоянии, при $t=0$ начинает внезапно действовать сила $P_k = P_k^0$, после этого сохраняющая собой величину неменяющуюся, так что изменение силы $P_k(t)$ во времени может быть представлено рис. 1.

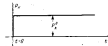


Рис. 1.

В этом случае движение системы определяется дифференциальным уравнением (4) и начальными условиями

$$P_k = 0, \quad \dot{P}_k = 0 \quad \text{при } t = 0. \quad (6)$$

Интеграл уравнения (4), удовлетворяющий начальным условиям (6), дается равенством

$$P_k = \frac{P_k^0}{N_k} (1 - \cos \lambda_k t), \quad (7)$$

где

$$\lambda_k^2 = \frac{N_k}{M_k}. \quad (8)$$

Зависимость между отклонением системы p_k и временем t , соответствующая равенству (7), иллюстрируется рис. 2.

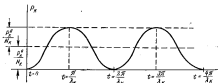


Рис. 2.

Как видно из графика, максимальное отклонение системы с одной степенью свободы, вызываемое действием внезапно прило-

женной силы, превышает статическое отклонение системы, вызываемое действием силы той же величины в два раза.

$$|P_k|_{\max} = 2 \frac{P_k^0}{N_k} = 2 |P_k|_{\text{ст}} \quad (9)$$

§ 4. Действие кратковременного импульса

Допустим, что на систему, до момента $t=0$ покоящуюся в своем естественном состоянии, начинает при $t=0$ действовать сила, при $t=0$ внезапно возрастающая до величины P_k^0 , затем сохраняющая эту величину до момента $t=T$ и при $t=T$ внезапно исчезающая.

Специальный только что закон изменения силы P_k во времени можно изображать зависимостью

$$P_k^{(0)} = P_k^0 + | \dot{P}_k |, - P_k^0 \quad (10)$$

где члены за знаком $| \dot{P}_k |$ следует принимать во внимание при t , большем чем T .

Для нахождения отклонения системы, вызываемого действием подобного рода силой, необходимо [считая $P_k^{(0)}$ определенным выражением (10)] разыскать такой интеграл уравнения (1), который удовлетворял бы начальным условиям движения (6) и условиям непрерывности величин p_k и \dot{p}_k при всяком t , большем чем нуль.

Так как движение системы, порождаемое силой $P_k(t)$, определенное равенством (10), можно считать складывающимся из движения, вызываемого силой $P_k^0(t)$, внезапно появляющейся при $t=0$, и силой $-P_k^0$, внезапно появляющейся при $t=T$, то на основании сказанного в предыдущем параграфе, можно считать, что при P_k , изменяющемся во времени (рис. 3), отклонение системы p_k определяется зависимостью



Рис. 3.

$$P_k = \frac{P_k^0}{N_k} \{ (1 - \cos \lambda_k t) + | \dot{P}_k | - [(1 - \cos \lambda_k (t - T))] \}. \quad (11)$$

В этом случае в движении системы следует различать две стадии: первую, соответствующую значению t , лежащему в пределах

$$0 < t < T, \quad \text{когда}$$

$$P_k = \frac{P_k^0}{N_k} (1 - \cos \lambda_k t), \quad (7)$$

и определяющуюся, следовательно, тем же законом, что и в слу-

час, рассмотренном в § 3, и второму, соответствующую значению удельного ускорения условию $T < t$, тогда

$$P_k = \frac{F_k^0}{N_k} [\cos \lambda_k (t - T) - \cos \lambda_k t],$$

или, что то же,

$$P_k = \frac{F_k^0}{N_k} 2 \sin \frac{\lambda_k T}{2} \sin \lambda_k \left(t - \frac{T}{2} \right). \quad (12)$$

В какую из двух стадий движения система достигнет своего максимального отклонения, зависит от того, что больше: промежуток ли времени T или величина

$$\frac{\pi}{\lambda_k} = \frac{\tau_k}{2},$$

где τ_k — период свободных колебаний системы.

В случае, если

$$T > \frac{\pi}{\lambda_k} = \frac{\tau_k}{2},$$

система достигнет своего максимального отклонения в первую стадию движения, когда $t = \frac{\tau_k}{2} = \frac{\pi}{\lambda_k}$, причем максимальное отклонение системы в этом случае определяется равенством (9).

В случае, если $T < \frac{\pi}{\lambda_k} = \frac{\tau_k}{2}$, система не успеет достигнуть своего максимального отклонения в первую стадию движения. Ее максимальное отклонение определяется в этом случае величиной

$$|P_k|_{\max} = \frac{F_k^0}{N_k} 2 \sin \frac{\lambda_k T}{2} \quad (13)$$

и получается при

$$t = \frac{T}{2} + \frac{\tau_k}{2},$$

когда сила P_k , действующая при $t < T$, уже вновь обратится в нуль. Максимальное отклонение системы, как видно из (13), всегда меньше двойного статического.

Во сколько раз меньше величина $|P_k|_{\max}$, чем

$$2 |P_k|_{st} = 2 \frac{F_k^0}{N_k},$$

зависит от величины

$$\sin \frac{\lambda_k T}{2} = \sin \frac{\pi T}{\tau_k}.$$

Если отношение $\frac{T}{\tau_k}$ мало по сравнению с единицей, то отклонение $|P_k|_{\max}$, определенное формулой (13), к удвоенному статическому отклонению системы может быть весьма мало по сравнению с единицей. Действие кратковременных импульсов, характеризующих рис. 3, лучше поэтому характеризовать при $T < \frac{\tau_k}{2}$ не величиной силы F_k^0 , а величиной ее импульса

$$J = F_k^0 T. \quad (14)$$

Вводя величину J с помощью (14), можно переписать (13) так:

$$|P_k|_{\max} = \lambda_k \frac{J^0 T}{N_k} \frac{2}{T \lambda_k} \sin \frac{\lambda_k T}{2},$$

или, применяя во внимание (8),

$$|P_k|_{\max} = \frac{J}{\sqrt{N_k M_k}} \frac{\sin \frac{\lambda_k T}{2}}{\frac{\lambda_k T}{2}} = \frac{J}{\sqrt{M_k N_k}} \chi_k. \quad (15)$$

где χ_k связано с отклонением T ; τ_k зависимостью

$$\chi_k = \frac{\sin \frac{\lambda_k T}{2}}{\frac{\lambda_k T}{2}} = \frac{\sin \pi \frac{T}{\tau_k}}{\pi \frac{T}{\tau_k}} \quad (16)$$

и, в силу условия $T < 0,5 \tau_k$, лежит всегда в пределах

$$\frac{2}{\pi} < \chi_k < 1. \quad (17)$$

Сказанное позволяет сформулировать следующие положения: 1. Действие силы, минимизирующее по времени, и соответствующее рис. 3, отличается от действия силы, внезапно приложенной и затем сохраняющей свою величину неизменно долго, лишь в том случае, если длительность действия силы T меньше полупериода свободных колебаний системы $0,5 \tau_k$.

2. Если $T > 0,5 \tau_k$, то максимальное отклонение системы, вызываемое действием такой силы

$$|P_k|_{\max} = 2 |P_k|_{st}$$

определяется также же, как и в случае силы, внезапно приложенной и затем сохраняющей свою величину неизменно долго.

3. Если $T < 0,5 \tau_k$, то максимальное отклонение системы меньше двойного статического и, как показывает формула (15), зависит не столько от величины усилия F_k^0 , сколько от его импульса $J = F_k^0 T$.

Вследствие этого нагрузки, изменяющиеся во времени в соответствии с рис. 3, следует относить к категории усеченной внезапно приложенных, если $T > 0,5 \tau_n$, и к категории кратковременных импульсов, если $T < 0,5 \tau_n$. В последнем случае максимальное отклонение системы определяется же формулой (9), а формулой (15).

Положения, сформулированные выше, поясняют, почему система, способная выдерживать лишь сравнительно небольшую статическую нагрузку, но обладающая относительно малой жесткостью и относительно большим периодом собственных колебаний, может выдержать иногда без всякого для себя вреда также нагрузки из числа кратковременных, которые разрушают системы, выдерживающие значительно большую статическую нагрузку, но отличающиеся значительно большей жесткостью и, следовательно, относительно малым периодом собственных колебаний. У системы сравнительно малой период собственных колебаний системы маяк, и для нее определенная кратковременная нагрузка является кратковременным импульсом, отклонения под действием которого составляют лишь весьма малую долю от статического отклонения системы.

Та же нагрузка по отношению к системе жесткой является нагрузкой, внезапно приложенной, и вызывает у жесткой двойное статическое отклонение.

По свидетельству А. Н. Крылова, при испытании водонепроницаемого «Джезского» был следующий случай: палубы, не способные без остаточных деформаций выдержать нагрузку даже в одну атмосферу, выдержали взрыв снаряда внутри прилегающего к ней пространства, заполненного водой, а то время как приборы, специально сконструированные для измерения давления, действовавшего на палубу, и рассчитанные на статическую нагрузку почти в десять атмосфер, разрушились. У палубного перекрытия период свободных колебаний был велик. У этого перекрытия нагрузка от взрыва снаряда вызвала деформацию, составляющую лишь малую долю от деформации, статически соответствующую максимальному давлению от взрыва снаряда. У приборов, предназначенных для записи этого давления период колебаний был мал. Для них давление при взрыве оказалось силой, внезапно приложенной. У них поэтому оно вызвало двойное статическое отклонение. В результате сравнительно слабая палуба устояла, а сравнительно жесткие и в приложении статических нагрузок сравнительно прочные приборы разрушились.

С явлениями особого рода мы сталкиваемся, в частности, при исследовании качки, получающейся у корабля, после бортовой качки корабля залп дается очень короткий промежуток времени. Угол крена корабля, получившийся под действием залпа, составляет лишь малую долю от угла статического крена под действием

усилия, величина этого угла усилию при откате орудий. Качку корабля, вызываемую действием залпа, поэтому нельзя считать статической.

В этом отношении характерным может быть следующий пример. Пусть водонепроницаемый корабль $D = 25\,000$ т. Малая метацентрическая высота его $A = 3,0$ м; период боковой качки $\tau = 20$ сек. Орудий 12. Каждое дает при откате усилие в 1000 м, приложенное к кораблю на 6 м выше его центра тяжести. Длительность отката $T = 0,2$ сек. Спрашивается, какой угол крена получит корабль после залпа по борту из всех орудий?

Ответ дается формулой (15), в которую вместо P_0 следует подставить величину кренившей пар. т. е. $6 \cdot 12\,000 = 72\,000$ мт, под N_0 подразумевать коэффициент пропорциональности между углом крена и величиной восстанавливающего момента, т. е. величину $D A = 25\,000 \cdot 3,0 = 75\,000$ мт, а под β_0 — угол крена в радианах. Если бы мы сочли усилие отката при залпе действующим статически, то получили бы для крена корабля не с чем несравнимую цифру

$$\theta = \frac{72\,000}{75\,000} \text{ рад.} \approx 55^\circ.$$

Учтя множитель $2 \sin \frac{\beta_0 T}{2}$, входящий в формулу (13), получим

$$\theta_{\max} = \frac{72\,000}{75\,000} 2 \sin \left(\frac{2 \cdot 0,2}{20} \right) \approx \frac{72\,000}{75\,000} \frac{2 \cdot 0,2}{20} \approx 3^\circ.$$

что можно считать соответствующим действительности.

При расчете подкреплений под орудия необходимо сосчитать длительность действия отката с длительностью периода рассматриваемого главного свободного колебания системы, хотя благодаря относительной большой жесткости подкреплений под орудия случаи, когда длительность выстрела оказывается меньше, чем полупериод свободных колебаний системы, являются довольно редкими исключениями.

§ 5. Действие мгновенного импульса

Рассмотрим предельный случай, когда длительность импульса T бесконечно мала, величина же импульса, связанная с величиной усилия P_0 и длительностью его воздействия на систему T формулой (14), остается конечной.

В этом случае коэффициент β_0 в формуле (15) обращается в единицу и максимальное отклонение системы оказывается связанным с величиной импульса J формулой

$$|\beta|_{\max} = \frac{J}{\sqrt{3} N_0}. \quad (18)$$

Простое сопоставление формул (15) и (18) показывает, если принять во внимание пределы, в которых лежит x_0 , что действие импульса бесконечно кратко (будем также импульсы называть мгновенными) всегда больше, чем действие этой же величины импульса кратковременного. Поэтому, отсюда для простоты все кратковременные импульсы в категориях импульсов мгновенных, мы сделаем ошибку, всегда направленную в запас прочности, иногда, достигающую $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) 100 = 57\%$ от вычисленной величины.

В дальнейшем нам потребуется знать не только максимальное отклонение системы, вызываемое действием мгновенного импульса, но и колебание системы, вызываемое такого рода импульсом, как функцией от времени. Ответ на этот вопрос можно получить с помощью формулы (12), которая в предельном случае $T = 0$ превращается в формулу

$$P_k = \frac{F_k}{M_k} \lambda_k T \sin \lambda_k t = \frac{F_k T}{M_k} \sin \lambda_k t. \quad (19)$$

§ 6. Действие силы, являющейся любой функцией от времени

Силу, являющуюся любой функцией от времени, можно рассмотреть как непрерывную последовательность мгновенных импульсов, действующих на систему в различные моменты времени. Отклонение, получаемое системой к определенному моменту

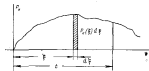


Рис. 4.

под действием такой силы, можно подсчитать как сумму отклонений, получаемых ею под действием всех импульсов, действовавших на систему до того момента времени, для которого требуется подсчитать отклонение системы.

Допустим, что рис. 4 дает эпор изменения силы $P_k(t)$ во времени, что t — тот момент времени, для которого требуется подсчитать отклонение системы, а ξ — тот момент времени, когда на нее действует очередной импульс $P_k(\xi) d\xi$ из числа тех, непре-

рывной последовательностью которых можно заменять силу P_k , действующую на исследуемую систему.

Допустим, что время t отсчитывается с того же момента, когда начинает действовать сила P_k , и что в этот момент времени отклонение системы x_0 и скорость ее $(\dot{x}_0)'$ равны нулю.

Мы видели в предыдущем параграфе, что мгновенный импульс, величина которого есть $P_k T$, порождает у покоящейся системы движение, определяемое формулой (19).

От момента действия на систему очередного импульса $P_k(\xi) d\xi$ до момента, к которому требуется определить отклонение системы, проходит, как видно из рис. 4, время $(t - \xi)$. Можно поэтому считать, что импульс этот к моменту времени t даст системе отклонение

$$dP_k = \frac{P_k(\xi) d\xi}{\lambda_k M_k} \sin \lambda_k (t - \xi),$$

так что под действием всех таких импульсов вместе к моменту t система получит отклонение

$$P_k = \int_{t=0}^{t=t} \frac{P_k(\xi)}{\lambda_k M_k} \sin \lambda_k (t - \xi) d\xi. \quad (20)$$

Формулой (20) и определяется колебание системы, вызываемое действием силы $P_k(t)$, являющейся произвольной функцией от времени, если в момент начала действия этой силы система находилась в равновесии.

§ 7. Другое выражение для перемещения системы, вызываемое действием силы, являющейся произвольной функцией от t

Выражение (20), полученное в предыдущем параграфе, можно преобразовать интегрированием по частям. Полагая

$$\frac{P_k(t)}{\lambda_k M_k} = u; \quad \sin \lambda_k (t - \xi) d\xi = dv,$$

можно, пользуясь известной формулой

$$\int u dv = |uv| - \int v du$$

и считая, что при $t = 0$ сила $P_k(t)$ равна нулю, получить

$$P_k = \int_{t=0}^{t=t} \frac{P_k(\xi)}{\lambda_k M_k} [1 - \cos \lambda_k (t - \xi)] d\xi,$$

или, принимая во внимание (8),

$$P_k = \int_{t=0}^{t=1} \frac{F_k^0(t)}{N_k} [1 - \cos \lambda_k (t - \xi)] d\xi \quad (21)$$

Попробуем разобраться в физическом смысле полученной формулы (рис. 5).

$F_k^0(\xi) d\xi$ есть, очевидно, приращение, получаемое силой $P_k(t)$ за

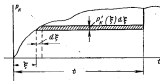


Рис. 5.

бесконечно малый промежуток времени $d\xi$, начинающийся с момента, когда $t = \xi$.

$\frac{F_k^0(\xi) d\xi}{N_k}$ — статическое отклонение системы под действием силы $F_k^0(\xi) d\xi$;

$t - \xi$ — промежуток времени между моментом, когда на систему начала в течение бесконечно малого времени, т. е. практически внезапно, действовать сила $F_k^0(\xi) d\xi$, и тем моментом времени, для которого определяется отклонение системы.

Как видно из формулы (7), величина

$$\frac{F_k^0(\xi) d\xi}{N_k} [1 - \cos \lambda_k (t - \xi)]$$

есть отклонение системы, получаемое к моменту времени t в результате того, что на эту систему при $t = \xi$, когда она находилась в покое, начала внезапно действовать сила $F_k^0(\xi) d\xi$.

Интегралом, входящим в (21), учитывается суммарное отклонение, получаемое системой в результате того, что в различные моменты времени сила $F_k^0(\xi)$ получает различные приращения. Поэтому формула (21) показывает, что отклонение, получаемое системой к определенному моменту времени, под действием силы, являющейся заданной функцией от времени, можно подсчитать, просуммировав отклонения, получаемые этой системой в результате того, что во все предшествующие моменты времени сила $F_k^0(\xi)$

получает непрерывно как бы высшие приращения $F_k^0(\xi) d\xi$. При этом действие каждого такого отдельного приращения силы $F_k^0(\xi) d\xi$ следует учитывать в предположении, что в момент появления каждого отдельного приращения сила F_k^0 , порожаемое им у системы отклонение, а равно и начальная его скорость равны нулю. Результат этот можно было бы вывести, конечно, и непосредственно.

При пользовании формулой (21) особое внимание надо обращать на те моменты времени, где сила $F_k^0(t)$ получает *конечные* приращения. В этих точках эпюры, аналогичной эпюре рис. 5, надо считать величину $F_k^0(\xi)$ бесконечно большой, а величину $F_k^0(\xi) d\xi$ конечной, выделяя соответствующие элементы интеграла, входящего в формулу (21), для особого их учета.

Понимая сказанное примером. Пусть сила $F_k^0(t)$ изменяется в функции от времени (рис. 6).

Интеграл, входящий в правую часть равенства (21), включает в себе и этот случай для конечных элементов. Одни при $t = 0$, другой при $t = T_k$. Вообще зависимость величины $F_k^0(t)$ в этом случае такова:

$$\text{при } 0 < t < dt \quad F_k^0(t) = \frac{F_k^0}{dt};$$

$$\text{при } dt < t < T_1 \quad F_k^0(t) = \frac{F_k^0(t) - F_k^0}{T_1};$$

$$\text{при } T_1 < t < T_2 \quad F_k^0(t) = 0;$$

$$\text{при } T_2 < t < T_2 + dt \quad F_k^0(t) = -\frac{F_k^0}{dt};$$

$$\text{при } T_2 + dt < t \quad F_k^0(t) = 0.$$

Это и должно быть принято во внимание при вычислении величины отклонения системы P_k с помощью равенства (21). Как видно из последнего, в рассматриваемом случае

$$P_k = \frac{F_k^0}{N_k} [1 - \cos \lambda_k t] + \int_{t=0}^{t=1} \frac{F_k^0(t) - F_k^0}{N_k T_1} [1 - \cos \lambda_k (t - \xi)] d\xi$$

при $0 < t < T_2$,

$$P_k = \frac{F_k^0}{N_k} [1 - \cos \lambda_k t] + \int_{t=0}^{t=T_2} \frac{F_k^0(t) - F_k^0}{N_k T_1} [1 - \cos \lambda_k (t - \xi)] d\xi$$

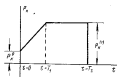


Рис. 6.

при $T_1 < t < T_2$ (а)

$$P_x = \frac{P_x^0}{N} \left[1 - \cos \lambda_k t \right] + \int_{t=T_1}^{t=T_2} \frac{P_x^0 - P_x^0}{N_k T_1} [1 - \cos \lambda_k (t - \xi)] d\xi + \left[\frac{P_x^0}{N_k} - \frac{P_x^0}{N_k} [1 - \cos \lambda_k (t - T_2)] \right] \text{ при } T_2 < t,$$

если только в начальный момент времени при $t = 0$ система находится в покое. Если в начальный момент $P_x = P_x^0$ и $P_x^0 = (P_x^0)^2$, то к движению системы, вызываемому действием силы $P_x^0(t)$, надо прибавить свободные колебания системы, порождаемые начальным ее возмущением. Отклонение, соответствующее этим свободным колебаниям системы, определяется зависимостью

$$P_x = P_x^0 \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} (P_x^0)^2 \sin \lambda_k t$$

и должно быть прибавлено к отклонению, даваемому формулами (а), если в момент, когда начинается движение, P_x и P_x^0 не равны нулю.

§ 8. Действие силы, нарастающей до максимума по линейному закону

Давление в орудийных компрессорах изменяется при откате орудия по закону, близкому к представленному рис. 7.

Оно возрастает от нуля до максимума в течение времени T по закону, близкому к линейному, затем сохраняется до момента времени T_1 свою величину постоянной; и, наконец, от $t = T_1$ до $t = T_2$ убывает по закону, близкому опять-таки к линейному.

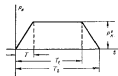


Рис. 7.

Поэтому при исследовании каждого из главных колебаний подпружиненной под орудие приходится сталкиваться с учетом действия усилки, характер изменения которых во времени представлен рис. 7.

Первый вопрос, который обычно в таких расчетах возникает, это вопрос о том, к какой категории сил следует отнести нагрузку, изменяющуюся во времени согласно рис. 7: к категории нагрузок внезапно приложенных, или же к категории нагрузок, действующих статически?

В нормальном орудийном компрессоре давление возрастает до своей максимальной величины примерно в течение того проме-

жутка времени, который требуется снаружи на прохождение всего орудийного ствола. Этот промежуток времени измеряется обычно сотнями долей секунды. На первый взгляд может показаться, что силу, нарастающую до своего максимума в течение нескольких сотых долей секунды, надо, безусловно, отнести к категории сил, нарастающих внезапно. Более подробное рассмотрение вопроса показывает, что это заключение во многих случаях нельзя признать правильным.

Так как величина силы никогда практически не возрастает до своего максимума в буквальном смысле слова, всегда в течение некоторого хотя и малого, но конечного промежутка времени, то нужно иметь какой-то объективный признак, по которому можно было бы судить, приближается ли во всем отдельном случае данная сила по своему действию к силам, приложенным внезапно, к силам, вызывающим лишь статическое отклонение системы, или же силам, настолько кратковременным, что они не могут вызвать даже статического отклонения системы. Очевидно, в этом отношении длительность нарастания силы до максимума должна играть существенную роль. Полезно поэтому рассмотреть влияние этого фактора в четком виде.

Рассмотрим, какое влияние на повоющую систему может оказать сила (рис. 8), нарастающая до своего максимума P_x^0 по линейному закону в течение промежутка времени T и затем сохраняющая свою величину неизменно долго?

Ответ на этот вопрос можно получить, очевидно, с помощью формулы (21), в которой надо принять

$$P_x^0(t) = \frac{P_x^0}{T} \text{ при } 0 < t < T$$

и

$$P_x^0(t) = 0 \text{ при } T < t.$$

Принимая это во внимание, получим с помощью формулы (21) для периодов ступенчатого движения, продолжавшейся до тех пор пока $t < T$,

$$P_x = \frac{P_x^0}{N_k T} - \frac{P_x^0}{N_k T \lambda_k} \sin \lambda_k t \quad (22)$$

и для второй стадии движения, начинающейся с момента, когда t становится большим чем T ,

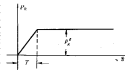


Рис. 8.

$$R_0 = \int_{t=0}^{t=T} \frac{F_0^k}{N_k^k} [1 - \cos \lambda_k (t - \xi)] d\xi = \\ = \frac{F_0^k}{N_k^k} \left[T + \frac{1}{\lambda_k} (\sin \lambda_k (t - T) - \sin \lambda_k t) \right].$$

или, что то же,

$$R_0 = \frac{F_0^k}{N_k^k} \left[1 - \frac{2}{\lambda_k T} \sin \frac{\lambda_k T}{2} \cos \lambda_k \left(t - \frac{T}{2} \right) \right]. \quad (22)$$

Как показывает формула (22), в течение всей первой стадии движения прональная R_0 никогда не принимает отрицательных значений. Поэтому своего максимального отклонения система под действием рассматриваемых сил может достигнуть лишь во время второй стадии движения, когда R_0 определяется формулой (23).

Исследуя зависимость (23), нетрудно видеть, что максимальное значение величины R_0 определяется равенством

$$|R_0|_{\max} = \frac{F_0^k}{N_k^k} \left| 1 + \frac{2}{\lambda_k T} \left| \sin \frac{\lambda_k T}{2} \right| \right|. \quad (24)$$

где под $\left| \sin \frac{\lambda_k T}{2} \right|$ следует подразумевать абсолютную величину синуса угла $\frac{\lambda_k T}{2}$, при этом значении (24) величина R_0 достигает при $\sin \frac{\lambda_k T}{2}$ положительном, когда $\cos \lambda_k \left(t - \frac{T}{2} \right) = -1$, при $\sin \frac{\lambda_k T}{2}$ же отрицательном, когда $\cos \lambda_k \left(t - \frac{T}{2} \right) = +1$. Величина $\sin \frac{\lambda_k T}{2}$ положительна, если $\frac{\lambda_k T}{2}$ лежит либо в пределах

$$0 < \frac{\lambda_k T}{2} < \pi,$$

либо между

$$2\pi < \frac{\lambda_k T}{2} < 3\pi,$$

либо между

$$4\pi < \frac{\lambda_k T}{2} < 5\pi$$

и т. д.

Величина же $\cos \lambda_k \left(t - \frac{T}{2} \right)$ обращается в -1 при $\lambda_k t$, равном нечетному числу $\pi + \frac{\lambda_k T}{2}$, так что в моменту, когда система достигает первый раз своего максимального отклонения, определяется:

при $\frac{\lambda_k T}{2}$, лежащем в пределах

$$0 < \frac{\lambda_k T}{2} < \pi;$$

$$2\pi < \frac{\lambda_k T}{2} < 3\pi;$$

$$4\pi < \frac{\lambda_k T}{2} < 5\pi$$

когда $\lambda_k t$ достигает значения

$$\lambda_k t = \pi + \frac{\lambda_k T}{2};$$

$$\lambda_k t = 3\pi + \frac{\lambda_k T}{2};$$

$$\lambda_k t = 5\pi + \frac{\lambda_k T}{2}.$$

и т. д.

Величина $\sin \frac{\lambda_k T}{2}$ отрицательна в тех случаях, когда $\frac{\lambda_k T}{2}$ лежит либо в пределах

$$\pi < \frac{\lambda_k T}{2} < 2\pi,$$

либо между

$$3\pi < \frac{\lambda_k T}{2} < 4\pi,$$

либо же между

$$5\pi < \frac{\lambda_k T}{2} < 6\pi$$

и т. д. Во всех этих случаях система достигает своих максимальных отклонений, когда

$$\cos \lambda_k \left(t - \frac{T}{2} \right) = +1, \quad (25)$$

т. е. когда $\lambda_k t$ равно четному числу $\pi + \frac{\lambda_k T}{2}$.

Своего максимального отклонения система достигает в первый раз, следовательно,

при $\frac{\lambda_k T}{2}$, лежащем в пределах

$$\pi < \frac{\lambda_k T}{2} < 2\pi;$$

$$3\pi < \frac{\lambda_k T}{2} < 4\pi;$$

$$5\pi < \frac{\lambda_k T}{2} < 6\pi$$

когда $\lambda_k t$ достигает значения

$$\lambda_k t = 2\pi + \frac{\lambda_k T}{2};$$

$$\lambda_k t = 4\pi + \frac{\lambda_k T}{2};$$

$$\lambda_k t = 6\pi + \frac{\lambda_k T}{2}.$$

и т. д.

Обозначив через t_1 величину

$$t_1 = t - T,$$

т. е. (см. рис. 8) время, отсчитываемое от начала второй стадии движения, можно на основании всего только что отмеченного видеть, что, в каких бы пределах ни лежала величина $\frac{\lambda_k T}{2}$, система достигнет своего максимального отклонения в первый раз для t_1 , дополнив величину $\frac{T}{2}$ до ближайшего кратного полу-периода свободных колебаний системы, т. е. при t_1 , удовлетворяющем условию

$$t_1 + \frac{T}{2} = n \frac{T_k}{2}, \quad (26)$$

где $T_k = \frac{2\pi}{\lambda_k}$ — период свободных колебаний рассматриваемой системы, а n — наименьшее целое число, при котором t_1 определенное равенством (25), получается положительным.

Каково бы ни было T , всегда можно принять, что

$$T = (n-1) \frac{T_k}{2} + \alpha, \quad (27)$$

где n — число целое, а

$$0 < \alpha < \frac{T_k}{2}. \quad (28)$$

Поэтому t_1 , определенное зависимостью (25), всегда можно найти с помощью равенств

$$t_1 = \frac{T_k}{2} - \alpha. \quad (29)$$

Отсюда видно, что время, прошедшее от начала второй стадии движения до момента, когда система достигнет своего максимального отклонения, всегда лежит в пределах

$$0 < t_1 < \frac{T_k}{2}$$

и никогда не превышает, следовательно, полупериода свободных колебаний системы.

Что касается величины максимального отклонения системы, то как видно из (24),

$$|R|_{\max} = |R|_{kr} [1 + \chi_k]. \quad (30)$$

Из

$$\chi_k = \frac{\left| \sin \frac{\lambda_k T}{2} \right|}{\frac{\lambda_k T}{2}} = \frac{\left| \sin \left[\pi \frac{T}{T_k} \right] \right|}{\pi \frac{T}{T_k}}. \quad (31)$$

Величина $(1 + \chi_k)$ показывает, во сколько раз превосходит величину статистического отклонения системы

$$|R|_{kr} = \frac{F_k^2}{N_k}$$

максимальное отклонение системы в данном частном случае. Величиной $(1 + \chi_k)$ определяется так называемый динамический

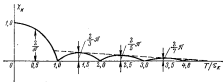


Рис. 9.

коэффициент, т. е. тот множитель, на который надо возмnoжить статистическое отклонение системы для получения величины ее максимального динамического отклонения.

Как видно из (31), величина этого коэффициента есть функция от отношения T/T_k , и, в от отношении длительности нарастающей нагрузки до ее максимума к периоду свободных колебаний системы. Общий характер зависимости, связывающей величину $1 + \chi_k$ с отношением T/T_k , представлен графически на рис. 9 сплошной линией.

Ввиду того, что ни величина T , ни величина T_k практически никогда не могут быть определены с абсолютной точностью, а при T/T_k больших даже небольшие колебания величин $\frac{\lambda_k T}{2}$

вызывают заметные колебания величин $\sin \frac{\lambda_k T}{2}$, осторожнее в практических расчетах вместо кривой для χ_k , даваемой согласно формуле (30) сплошной линией рис. 9, пользоваться кривой, изображенной пунктиром, что равносильно принятию при $T/T_k = T_k$, лежащие приблизительно в пределах $0,8 < T/T_k < 1,5$ за χ_k того его значения, которое дает для χ_k формула (30) при $T/T_k = 1,5$.

Таблица 1

$T : \tau_k$	0,03	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70
χ_k	1,00	0,98	0,92	0,85	0,76	0,64	0,51	0,37

Продолжение

$T : \tau_k$	0,80	0,86	0,86 - 1,50	1,50	2,0	3,0	5,0	10,0	∞
χ_k	0,25	0,21	0,21	0,21	0,16	0,10	0,06	0,03	0,00

и принято при $T : \tau_k$, большем чем 1,5 величину $\left| \sin \pi \frac{T}{\tau_k} \right|$ за единицу. Ряд значений величины χ_k , соответствующих пунктирной кривой рис. 9, собран в табл. 1, отходящей от предложенной в статье, записанной в «Ежегоднике Союза морских инженеров» за 1916 г., лишь в части значений, относящихся к значениям аргумента $T : \tau_k$, лежащим в пределах $0,5 < T : \tau_k < 1,5$.

Как видно из таблицы и рис. 9, динамический множитель $(1 + \chi_k)$ отличается от единицы больше, чем на 21% лишь при значениях $T : \tau_k$, меньших чем 0,86. Он отличается от нуля на 20% лишь при $T : \tau_k$, большем чем 0,50, потому что грубые предельно большие динамические множители, доходящие с точностью $\pm 20\%$, можно все равно считать нарастающие до момента в течение промежутка времени, не превышающего 0,5 от периода свободных колебаний системы, от момента к моменту нагрузки, внезапно приложенных, а все усилия, нарастающие до максимума в течение промежутка времени, превышающего период свободных колебаний системы, к категории нагрузок, действующих статически.

§ 9. Действие усилит, равномерно нарастающих до своей максимальной величины и сохраняющих свою величину в течение ограниченного промежутка времени

В предыдущем параграфе были рассмотрены колебания, вызываемые у системы с одной степенью свободы усилием, которое достигает своей максимальной величины, затем сохраняли ее неопределенно долго. Дальнейшее орудийных компрессоров, измеряемое в десятых долях секунды, обычно к моменту достижения системой своего максимального отклонения не успевает еще начать убывать. Поэтому в большинстве случаев действия орудийных компрессоров подпадает под случай, рассмотренный в предыдущем параграфе. Иногда, правда довольно редко, могут встре-

титься и такие случаи, когда период собственных колебаний подкрепления под грузом окажется настолько велик, что давление в компрессоре к моменту достижения системой своего максимального отклонения оказывается исчезающим. Чтобы оценить влияние этого фактора в своем первом приближении, рассмотрим случай, когда закон изменения силы P_k во времени может быть представлен второй рас. 10.

В этом случае надо различать три отдельные стадии движения. Во время первой стадии нагрузка системы постепенно возрастает, отклонение же системы определяется формулой (22). Как отмечено в § 8, система достигает своего максимального отклонения не раньше окончания этой стадии движения.

Во время второй стадии нагрузка системы сохраняет свою величину неизменной, отклонение же системы определяется формулой

$$P_k = \frac{P_k^0}{N_k} \left[1 - \frac{2}{\lambda_k T} \sin \frac{\lambda_k T}{2} \cos \lambda_k \left(t - \frac{T}{2} \right) \right], \quad (23)$$

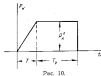


Рис. 10.

Если эта стадия движения продолжается достаточно долго и ее длительность T_0 , как отмечено в предыдущем параграфе, превышает половину длительности нарастающей нагрузки $\frac{T}{2}$ до ближайшего кратного полупериода свободных колебаний системы, то система в течение второй стадии движения успевает достигнуть одного из своих максимальных отклонений, определяемого формулой:

$$|P_k|_{\max} = |P_k|_{cr} [1 + \chi_k] \quad (30)$$

$$\chi_k = \frac{\sin \pi \frac{T}{\tau_k}}{\pi \frac{T}{\tau_k}}. \quad (31)$$

Если длительность этой стадии движения настолько мала, что T_0 меньше половины величины $\frac{T}{2}$ до ближайшего кратного полупериода свободных колебаний системы, то в течение всей второй стадии движения отклонение системы увеличивается и система достигает своего максимального отклонения лишь в третьей стадии движения, когда нагрузка системы уже обратилась в нуль.

Третий стадий движения начинается с момента, когда нагрузка системы исчерпа. Во время этой стадии движения, как видно из формулы (21), отклонение системы определяется зависимостью

$$P_k = \frac{F_k^0}{N_k} \left[\cos \lambda_k (t - T_0 - T) - \frac{2}{\lambda_k T} \sin \lambda_k \frac{T}{2} \cos \lambda_k \left(t - \frac{T}{2} \right) \right] \quad (32)$$

и, как легко видеть из сопоставления формул (24) и (32), вообще не может превышать величины, определенной формулами (30) и (31). Поэтому, если вторая стадия движения была достаточно долго для того, чтобы система успела в течение нее достигнуть максимума, определяемого формулами (30) и (31), то эти формулы и определяются максимальное отклонение системы.

Если длительность второй стадии движения не удовлетворяет неравенству

$$T_0 + 0,5 T = n + 0,5 \tau_k, \quad (33)$$

где n — ближайшее целое число, при котором T_0 получится положительным, то максимальное отклонение системы получается во время третьей стадии движения и определяется максимумом величины P_k , определенной формулой (32). Для определения величины максимума достаточно принять во внимание, что

$$\begin{aligned} \cos \lambda_k (t - T_0 - T) &= \\ &= \cos \lambda_k t \cos \lambda_k (T_0 + T) + \sin \lambda_k t \sin \lambda_k (T_0 + T); \\ \cos \lambda_k (t - 0,5 T) &= \cos \lambda_k t \cos (\lambda_k 0,5 T) + \sin \lambda_k t \sin (\lambda_k 0,5 T) \end{aligned}$$

и, вводя формулу (32) и

$$\begin{aligned} P_k = \frac{F_k^0}{N_k} \left\{ \cos \lambda_k (T_0 + T) - \frac{\sin \lambda_k T}{\lambda_k T} \right\} \cos \lambda_k t + \\ + \left[\sin \lambda_k (T_0 + T) - \frac{1 - \cos \lambda_k T}{\lambda_k T} \right] \sin \lambda_k t. \quad (32') \end{aligned}$$

выразить $|P_k|_{\max}$ по формуле

$$\begin{aligned} |P_k|_{\max} = \\ = \frac{F_k^0}{N_k} \sqrt{\left[\cos \lambda_k (T_0 + T) - \frac{\sin \lambda_k T}{\lambda_k T} \right]^2 + \left[\sin \lambda_k (T_0 + T) - \frac{1 - \cos \lambda_k T}{\lambda_k T} \right]^2} \quad (34) \end{aligned}$$

Какой из двух зависимостей для $|P_k|_{\max}$ — данной ли равенствами (30) и (31) или же данной равенством (34), следует пользоваться, зависит от того, удовлетворено ли условие (33) или же нет.

§ 10. Влияние длительности убывания нагрузки

В предыдущем параграфе для простоты был рассмотрен случай, когда приложенная к последующей системе нагрузка исчерпа, как показано на рис. 10, внезапно. Обратимся теперь к рассмотрению влияния нагрузки, исчезающей, как и появляющаяся в течение некоторых конечных промежуточных времени. Обозначим при этом (рис. 11) через:

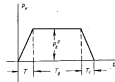


Рис. 11.

T — длительность равномерного возрастания нагрузки до максимума;

T_0 — длительность сохранения во своей максимальной величине P_k^0 ;

T_1 — длительность равномерного убывания нагрузки.

В этом случае в движении системы следует различать уже четыре отдельные стадии.

Во время первой стадии нагрузка системы возрастает по линейному закону, отклонение же системы определяется формулой (22) § 8.

Во время второй стадии движения нагрузка системы сохранит свою величину, а отклонение системы определяется формулой (24), если эти стадии движения даются достаточно долго, то, как было отмечено в § 9, система успевает достигнуть своего движения отклонения, определяемого формулами (30) и (31).

Во время третьей стадии движения нагрузка системы убывает по линейному закону, отклонение же определяется зависимостью

$$\begin{aligned} P_k = \frac{F_k^0}{N_k} \left\{ 1 - \frac{2}{\lambda_k T} \sin \frac{\lambda_k T}{2} \cos \lambda_k \left(t - \frac{T}{2} \right) - \frac{t - T - T_0}{T_1} + \right. \\ \left. + \frac{\sin \lambda_k (t - T - T_0)}{\lambda_k T_1} \right\}. \quad (35) \end{aligned}$$

легко выводимой из (21).

Во время четвертой стадии движения нагрузка системы равна нулю, ее движение происходит по инерции и определяется зависимостью

$$\begin{aligned} P_k = \frac{F_k^0}{N_k} \left[\frac{2}{\lambda_k T_1} \sin \frac{\lambda_k T_1}{2} \cos \lambda_k \left(t - T - T_0 - \frac{T_1}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{2}{\lambda_k T} \sin \frac{\lambda_k T}{2} \cos \lambda_k \left(t - \frac{T}{2} \right) \right]. \quad (36) \end{aligned}$$

Как видно из (35) и (36), ни во время третьей, ни во время четвертой стадии движения отклонение системы не может достигнуть в этом случае отклонения, определяемого формулами (30) и (31). Если во время второй стадии движения отклонение системы успеет достигнуть значения, определяемого этими формулами, условия чего были подробно рассмотрены выше, то система достигнет своего максимального отклонения, как и в случае, рассмотренном в § 8, и определится формулами (30) и (31).

Если во время второй стадии движения система не успевает достигнуть своего максимального отклонения, то надо исследовать движение ее сначала во время третьей, а затем во время четвертой стадии таволого. При этом момент достижения максимального отклонения, соответствующий третьей стадии движения, может быть определен путем уравнивания нулю производной Δ по t , а максимум ее отклонения в четвертую стадию движения также с помощью приема, использованного в конце § 9.

Расстояние этого максимума в общем виде приводит к довольно громоздким выкладкам, но применительно к каждому отдельному частному случаю может быть выполнено без труда. Надо лишь, чем к нему приступить, подставить в формулы (35) и (36) числовые значения величин $\lambda_k T$, $\lambda_k T_0$ и $\lambda_k T_1$, соответствующие данному частному случаю, как то сделано в приводящем ниже примере.

Пример. Исследовать движение системы в частном случае, когда

$$\lambda_k T = \frac{2\pi}{3};$$

$$\lambda_k T_0 = \frac{\pi}{2};$$

$$\lambda_k T_1 = \frac{2\pi}{3}.$$

Проверим прежде всего, не определяется ли максимальное отклонение системы формулами (30) и (31). Для этого проверим, доходит ли T_0 величине $0,5T$ до полуцикла свободных колебаний системы $0,5\tau_k$. Имеем

$$\lambda_k T = \frac{2\pi T}{\tau_k} = \frac{2\pi}{3}$$

и, следовательно,

$$T = \frac{1}{3}\tau_k$$

Задано также, что

$$\lambda_k T_0 = \frac{2\pi T_0}{\tau_k} = \frac{\pi}{2},$$

поэтому

$$T_0 = \frac{\tau_k}{4}.$$

t	$\frac{5}{12}\tau_k$	$\frac{6}{12}\tau_k$	$\frac{7}{12}\tau_k$	$\frac{8}{12}\tau_k$	$\frac{9}{12}\tau_k$
$\lambda_k t$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{8}{6}\pi$	$\frac{9}{6}\pi$
$\lambda_k t - \frac{\pi}{6}$	$\frac{4}{6}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{6}{6}\pi$	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{8}{6}\pi$
$\cos\left(\lambda_k t - \frac{\pi}{6}\right)$	-0,500	-0,865	-1,000	-0,865	-0,500
$0,355 \cos\left(\lambda_k t - \frac{\pi}{6}\right)$	-0,478	-0,826	-0,955	-0,826	-0,478
$1 - 0,960 \cos\left(\lambda_k t - \frac{\pi}{6}\right)$	1,478	1,826	1,955	1,826	1,478
$\frac{12t - 5\tau_k}{4\tau_k}$	0,000	0,250	0,500	0,750	1,000
Равенство	1,478	1,576	1,455	1,076	0,478
$\left(\lambda_k t - \frac{5}{6}\pi\right)$	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{2}{6}\pi$	$\frac{3}{6}\pi$	$\frac{4}{6}\pi$
$\sin\left(\lambda_k t - \frac{5}{6}\pi\right)$	0	0,500	0,865	1,000	0,865
$\frac{3}{2\pi} \sin\left(\lambda_k t - \frac{5}{6}\pi\right)$	0	0,239	0,413	0,478	0,413
$\eta_k = \frac{F_k}{M_k}$	1,478	1,835	1,868	1,554	0,891

Таким образом в данном случае

$$0,5 T + T_2 = \frac{1}{6} \tau_k + \frac{1}{4} \tau_k = \frac{5}{12} \tau_k.$$

что является полупериодом свободной колебаний системы.

Система достигает своего максимального отклонения либо во время третьей стадии движения, когда в силу (35)

$$F_k = \frac{F_k^0}{N_k} \left[1 - \frac{6}{\pi} \sin \frac{\pi}{6} \cos \left(\lambda_k t - \frac{\pi}{6} \right) - \frac{t - \frac{5}{12} \tau_k}{\frac{1}{3} \tau_k} + \frac{\sin \left(\lambda_k t - \frac{5}{6} \pi \right)}{\frac{2}{3} \pi} \right]$$

или

$$\frac{5}{12} \tau_k < t < \frac{3}{4} \tau_k$$

или же во время четвертой ее стадии, когда в силу (36)

$$F_k = \frac{F_k^0}{N_k} \left[\frac{3}{\pi} \sin \frac{\pi}{3} \cos \left(\lambda_k t - \frac{1}{6} \pi \right) - \frac{6}{\pi} \sin \frac{\pi}{6} \cos \left(\lambda_k t - \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

или

$$\frac{3}{4} \tau_k < t$$

Чтобы определить максимальное значение F_k , подставим ряд значений t этой величины для ряда частных значений t , относящихся к третьей стадии движения.

Имеем $\frac{6}{\pi} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{\pi} = 0,955$ (табл. 2).

Во время четвертой стадии движения в рассматриваемом случае:

$$F_k = \frac{F_k^0}{N_k} = \frac{3}{\pi} \cdot 0,955 \cos \left(\lambda_k t - \frac{7}{6} \pi \right) - \frac{6}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cos \left(\lambda_k t - \frac{1}{6} \pi \right) = -0,925 \cos (\lambda_k t - 30^\circ) - 0,955 \cos (\lambda_k t - 30^\circ) = -1,781 \cos (\lambda_k t - 30^\circ).$$

Таким образом максимальное отклонение, которого система достигает во время четвертой стадии движения, есть $1,781 \frac{F_k^0}{N_k}$, а во время

как в третью стадию движения отклонение системы достигнет, по крайней мере, величины $1,860 \frac{F_k^0}{N_k}$. Чтобы уточнить максимальное значение отклонения системы, можно построить по цифровым значениям в предыдущей таблице график, иллюстрирующий изменение величины F_k во время третьей стадии движения.

Если бы длительность сохранения амплитуды своего максимального значения увеличилась до бесконечности, то максимальное отклонение системы возросло бы в данном случае до $1,955 \frac{F_k^0}{N_k}$.

Если бы длительность убывания амплитуды T_1 увеличилась до нуля, то максимальное отклонение системы определялось бы максимумом колебаний

$$F_k = \frac{F_k^0}{N_k} \left[\cos \left(\lambda_k t - \frac{5}{6} \pi \right) - 0,955 \cos \left(\lambda_k t - \frac{1}{6} \pi \right) \right] =$$

$$= \frac{F_k^0}{N_k} \left[-\cos (\lambda_k t + 30^\circ) - 0,955 \cos (\lambda_k t - 30^\circ) \right] = -\frac{F_k^0}{N_k} \left[\cos \lambda_k t \cos 30^\circ - \sin \lambda_k t \sin 30^\circ \right] + 0,955 \left[\cos \lambda_k t \cos 30^\circ + \sin \lambda_k t \sin 30^\circ \right],$$

или, что то же, величинам

$$F_k = -\frac{F_k^0}{N_k} \left[1,955 + 0,865 \cos \lambda_k t - 0,045 + 0,500 \sin \lambda_k t \right] = -\frac{F_k^0}{N_k} \left[1,450 \cos \lambda_k t - 0,022 \sin \lambda_k t \right].$$

При $T_2 = 0$ максимальное отклонение системы было бы, следовательно, равно

$$F_k \max = \frac{F_k^0}{N_k} \sqrt{(1,450)^2 + (0,022)^2} \approx 1,450 \frac{F_k^0}{N_k}.$$

РАЗДЕЛ II

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ
ВИБРАЦИИ КОРАБЛЯ**

13. ОЧЕРК РАЗВИТИЯ И СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА О ВИБРАЦИИ СУДОВ *

1. Первой работой, в которой вопрос о вибрации судов был выдвинут в качестве самостоятельной проблемы, является, по-видимому, доклад *O. Schlick's* 1884 г. [1]. Уже в этой работе было отмечено, что колебания корабля, вызываемые его вибрацией, сложны по всем с узругими колебаниями длинного свободного стержня, что они не являются следствием слабости судовой корпуса; забавляются при определенных числах оборотов машин и уменьшаются при уменьшении и при увеличении таковых, и те числа оборотов машины, которые соответствует максимальной вибрации корабля, совпадают с числами собственных свободных колебаний его, как одного упругого целого.

Главнейшими причинами, вызывающими вибрацию, являются: неравномерность упорного давления, неуравновешенность гребных винтов и, особенно, силы инерции параллельно-поперечно движущихся масс машины. Отметим, что подкрепление корпуса корабля может лишь изменить, да и то немного, критические числа оборотов машины, но не может заметно отразиться на величине упругих колебаний при резонансе, *Schlick*, в упомянутом своем докладе, отмечает, что наиболее действительными средствами к устранению вибрации являются: изменение числа оборотов

* В основу настоящего обзора легло сообщение, сделанное автором в Ленинградском маломальском обществе 29 февраля 1932 г. Предполагая использовать его как материал в заключительный глава подготовленного к печати курса вибрации судов, автор будет благодарен за указания и замечания, как в отношении изложения, так и нестрогойности освещения отдельных вопросов. Автор вынужден был вкратце в настоящем обзоре некоторых работ, не относящихся непосредственно к вопросу о вибрации судов, но делалась это лишь в той мере, в которой соответствующие работы имели значение на развитие рассматриваемого вопроса или непосредственно дополняли изложение, выполнявшееся в основной области настоящего обзора. В частности, автор не мог остановиться на ряде важных и интересных работ, не укладывавшихся в рамки настоящего обзора. Некоторые наиболее важные из них упомянуты в списке литературы [78]. Наиболее интересные работы, относящиеся к вибрации судов по числу не упомянутых в обзоре, см. в том же списке [76].

Первое издание в Прикладной математике и механике, т. I, № I, 1932.

машин и уравновешивание сил инерции одних движущихся частей силами инерции других масс. В последнем отношении *Sehlicke* предлагал вначале уравновешивать действие машины лишь неуравновешенными силами инерции гребного винта; идея дальнейшего развития не получившая, но интересная потому, что возможность ее возникновения в эту эпоху может служить характеристической чертой науки в рассматриваемой области в то время. В конце доклада *Sehlicke*'а того же 1884 г. описано простое устройство для наблюдения и записи судовой вибрации и колебаний гибкой рейки с грузом и карандашом на свободном конце.

Судя по первому докладу *Sehlicke*'а, вибрация судового корпуса наблюдалась в то время довольно часто, главным образом у судов с быстроходными машинами (многочислы) и у судов сочень легкими корпусами (реже паролодки общепного типа).

Jarrow'у [2] принадлежат заслуга постановки первых опытов для наблюдения периодов свободных колебаний судового корпуса с целью выяснения причины этих колебаний: на одном из своих многочисленных заставил машину работать при снятом гребном винте. Опыт показал, что действительно главной причиной вибрации корабля является не гребной винт, а неуравновешенность механизмов корабля.

Рост мощности судовых установок и все увеличивающаяся их быстроходность заставляла очень скоро обратиться к всемерно мер для уравновешивания не только вращающихся, но и прямолинейно-возвратно движущихся масс, и в самом начале десятилетия годов почти одновременно *Taylor* [3], *Jarrow* [4], *Teasdale* и *Sehlicke* [5] начали для этой цели средство в виде надлежащего подбора масс отдельных поршней машины и правильной установки их кривошипов.

К 1893 г. *Sehlicke* [6] сконструировал для записи судовой вибрации специальной прибор, названный им паллографом. С помощью него он произвел большую серию опытов над вибрацией различных судов сначала для сравнения вибрации, вызываемой действием винта различного типа, затем для экспериментального определения периодов главных свободных колебаний различного типа судов и, наконец, для выяснения причин той «нестаточной» вибрации, которая наблюдается у судов с совершенно уравновешенными машинами.

В 1894 г. *Sehlicke* [7] опубликовал свои известные формулы для приближенного определения периодов свободных вертикальных колебаний корабля, построенные по образцу соответствующей формулы, служащей для определения периодов свободных колебаний пружинистых стержней, но с итерационным коэффициентом, зависящим от типа судна; в 1895 г. он обратил внимание на вертикальные колебания высших частот и на существование у многих судов ясно выраженных крутальных колебаний всего корпуса.

Дальнейшими работами *Sehlicke*'а и других исследователей [8] было выяснено, что неравномерность вращения мазута машины обычно не порождает судовой вибрации и что причина так называемой «нестаточной» вибрации, наблюдаемой у судов, имеющих вполне уравновешенные машины, лежит в неравномерности гидродинамической картины работы винтов и неоднородности штиля отдельных лопастей. Исследования эти пролили свет на ряд особенностей вибрации, наблюдаемой у судов с винтами различного типа, равно как и на их зависимость от числа винтов и лопастей.

В 1911 г. в юбилейной сессии Английского общества корабельных инженеров *Sehlicke* подвел итоги экспериментальной работе по изучению данного вопроса [9]. Этот его доклад, а также и другой в 1912 г. в Германском обществе корабельных инженеров [10] представляют большой интерес и в настоящее время и являются последними работами *Sehlicke*'а.

Благодаря упомянутым выше работам *Jarrow*'а, *Sehlicke*'а, *Teasdale*, *Taylor*'а, кроме того, работам *Daily*, *Madupin*'а, *Macfarlan*, *Craig*'а и др. [11], теория уравновешивания сил инерции прямолинейно-возвратно движущихся масс к 1910 г. была разработана достаточно хорошо. Было, в частности, совершенно отчетливо сформулировано, что в случае некомпенсации по недостатку числа цилиндров полностью уравновесить как силы, так и пары того или иного вращающегося, иногда можно (имея при определенных числах оборотов) добиться взаимного компенсирования их влияний, причем комбинация взаимно уравновешивающейся силы и пары зависит от места установки машины по длине корабля.

Положив это, отмеченное выше *Sehlicke*'ом, было в 1907 г. значительно обобщено *Wekinger*'ом [12], замодернировавшим свои взгляды любительскими опытами со специально сконструированной упругой моделью. Опытами этими было установлено, что статическое уравновешивание в машине сил инерции прямолинейно движущихся масс уничтожает вибрацию, если машина обладает настолько небольшой частью длины корабля, что упругую девию последнего на всем протяжении машины можно считать прямой; вообще же для отсутствия вибрации необходимо уравновешивать работу сил инерции отдельных поршней машины, производимую на пересеченных тех точек корабля, где находится поршень. Так как соотношение между амплитудами отдельных таких точек меняется в зависимости от числа оборотов машины, то полное уравновешивание машины возможно лишь при некотором совершенно определенном числе оборотов машины.

Давая общую характеристику направлению, по которому шла разработка вопроса в этот период его развития, можно сказать, что вопрос изучался в то время преимущественно с качественной стороны и почти исключительно экспериментально, и только теория уравновешивания сил инерции была разработана вкратце.

2. Вопрос о предварительном определении периодов и форм главных свободных колебаний корабля почти не привлекал к себе внимания исследователей до 1900 г., кроме вышеупомянутых полуматематических формул *Seelig's*, можно отметить только предложение *Maihoeke* [13], который, за отсутствием в то время каких-либо приемов теоретического решения этой задачи, предлагал определять периоды главных свободных колебаний корабля эмпирически на малых моделях. Последние он рекомендовал делать в форме длинных стержней, площади и моменты инерции отдельных поперечных сечений которых в известном масштабе воспроизводили бы кривые жесткости и масс несущего судна. Положение узловых точек по длине корабля он предлагал определять также экспериментально, основываясь на том, что истинные их положения должны совпадать с периодами главных свободных колебаний корабля в отсутствие максимума. Только с 1900 г. появляются первые работы, относящиеся к вопросу о предварительном подсчете периодов и форм главных свободных колебаний судового корпуса, как непрямоугольного свободного бруса. Первой работой была, по-видимому, работа *Gömbel's* в 1901 г. [14].

Для интегрирования основного дифференциального уравнения задачи:

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) = -g(x) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$

при граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } x=0 \text{ и } x=l,$$

где $EI(x)$ — жесткость стержня по отношению к изгибу, а $g(x)$ масса его единицы длины. *Gömbel* применял прием, заключающийся по аналогии с колебаниями стержня прямоугольного сечения простым и естественным, а именно, положив некоторое v в рассматриваемом глазом колебание равным

$$v = v_0(x) \sin \lambda_0 t$$

и свел эту подстановку вопроса к интегрированию уравнения:

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} \left[EI(x) \frac{\partial^2 v_0(x)}{\partial x^2} \right] = \lambda_0^2 g(x) v_0(x) \quad (1)$$

при граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{\partial^2 v_0(x)}{\partial x^2} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[EI \frac{\partial^2 v_0(x)}{\partial x^2} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } x=0, x=l, \quad (2)$$

он применял для решения этого уравнения методу приближенного нахождения отдельных частных решений задачи по заданным при $x=0$ граничным условиям.

При разложении решений можно было для граничных условий при $x=0$ брать непосредственно их равенств (2). Отклонение стержня $v_0(x)$ при $x=0$ могло быть выбрано совершенно произвольно. Величому соотношения $v_0'(0): v_0(0)$ можно было распространяться с целью удовлетворить одному из условий при $x=l$. Чтобы удовлетвориться и второе условие на правом конце, надо было вводящим образом задаться в уравнении (1) частотой искомого колебания λ_0 .

Так *Gömbel* и поступил, заменив вторую группу граничных условий несколько иной формой тех же по существу условий и разбивая частные решения уравнения (1), соответствующие различным комбинациям значений величин λ_0^2 и $[v_0'(0): v_0(0)]$, профически с помощью перебора вынужденно угадывал.

Выяснив ошибку в граничных условиях для $x=l$, соответствующую ряду отдельных комбинаций исходных величин λ_0^2 и $[v_0'(0): v_0(0)]$, *Gömbel* для разложения λ_0^2 , удовлетворяющего обоим условиям задачи, пользовался, как он называл, «пространственной интерполяцией» величинами данной ошибки.

Методы эти были вскоре обобщены и значительно более изящную математическую форму, прием было показано, что всякой «пространственной интерполяцией» для определения истинного λ_0 не требуется, так как благодаря линейности основного дифференциального уравнения вопрос сводится к нахождению λ_0^2 , как корня некоторого уравнения с одной неизвестной, получаемого из граничных условий при $x=l$. Сделано это было А. Н. Крыловым, предложившим в своем курсе авиации судов 1907 г. разложить общий интеграл уравнения (1) в форме

$$v_0(x) = A F_1(x) + B F_2(x),$$

где A и B две постоянные интегрирования, а $F_1(x)$ и $F_2(x)$ два известных частных решения уравнения (1), удовлетворяющие граничным условиям при $x=0$ и вычисляемые для всякого частного значения λ_0^2 методом приближенного численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для этого интегрирования А. Н. Крылов предлагал вначале [15] метод, основанный на допущении, что рассматриваемый стержень может быть разбит на отдельные участки, на протяжении каждого из которых его можно было бы рассматривать как стержень прямоугольный.

В своей работе 1914 г. В. Л. Сушинов [16] дал более строгую методу разложения искомой функции в ряд Маклорена, которая практического применения не могла получить по сложности выкладок, с ней сопряженных.

В 1917 г. А. Н. Крылов внес существенное изменение в свою методу, предложив пользоваться для численного разлага-

нин функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$ методом Штермера—Адамса. Соответствующая вычислительная схема была детально разработана в ряде трудов А. Н. Крылова [17], сначала применительно к нахождению колебаний вынужденных (считая, что возмущающая сила приложена к одной какой-либо точке корабля), а затем и для разъяснения колебаний свободных. Мы не останавливаемся здесь на подробностях данного приема, так как он вошел в новое издание сочинения А. Н. Крылова «О некоторых уравнениях математической физики». Заметим лишь, что если эта методика может быть применена к разъяснению вынужденных колебаний корабля еще сравнительно просто, то для определения с помощью нее колебаний свободных необходимо λ_1^2 разъяснить из уравнения вида:

$$\begin{vmatrix} F_1'(0); & F_2'(0) \\ F_1''(0); & F_2''(0) \end{vmatrix} = 0,$$

для чего придется функцию $F_1(z)$ и $F_2(z)$ вычислять для нескольких частных значений искомого параметра λ_1^2 . Количество выкладок, и притом требующих большого сравнительно внимания (либо метода Штермера, как всякая экстраполяционная методика, очень чувствительна к погрешностям вычисления), при решении задачи таким путем довольно велико. Это заставляет искать иных путей практического разрешения вопроса.

Не касаясь изложения графического приема, предложенного в 1921 г. *Sondine*'ом [18], так как он по существу своему очень мало отличается от метода, предлагавшейся в свое время *Stroh*'ом, заметим, что в статье *Sondine*'а можно найти указания на литературу вопроса, а данис очерно не использованную. Заметим также, что в 1912 г. *Gömbö* [19] предложил аналогичную методу приближенного нахождения отдельных частных решений основного уравнения (также графическую) применительно к нахождению крутных колебаний корабля, как неэрмитического бруса. По идее своей эта методика ничем не отличается от той, которая в задаче о крутных колебаниях судов является способом Толле. Решения получаются построением графика для величин «статического» момента неуравновешенных сил инерции в функции от λ_1^2 и нахождения с помощью него точки, где этот остаточный момент равен нулю.

3. Переходя к характеристике других методов, нужно остановиться на так называемой методе последовательных приближений, введенной в задаче о нахождении критических нагрузок сжатых стоек переменного сечения еще *Vainello* [20], но примененной к нахождению периодов собственных колебаний неэрмитических стержней впервые, по-видимому только *Mottog*'ом [21] 1905 г. и *Wahlberg*'ом [12], 1907 г.

Теоретическая база под эту методу была поведена В. Л. Сушенковым, доказавшим сходимость процесса применяемых в ней последовательных интегрирований и показавшим, что в

предела этот процесс приводит к выходящей формы и периода того из главных свободных колебаний системы, которое отличается наименьшей частотой. Доказательство было изложено В. Л. Сушенковым в докладе [22], читанном в Обществе морских инженеров в 1916 г., где даны также указания и на то, каким образом следует пользоваться методом последовательных приближений при разъяснении свободных колебаний высших порядков.

Любопытно, что то в сущности очень простое и естественное видоизменение метода *Mottog*'а, которое приводит к последней форме, до сих пор, по-видимому, ускользало от многих исследователей, стремившихся воспользоваться методом последовательных приближений для разъяснения колебаний высших частот, а оно, в частности, не приводило и в последнем издании теории турбина *Stroh*'а, хотя вопрос об определении этих колебаний методом последовательных приближений в данном курсе уделено много внимания. Изложение метода *Mottog*'а, помимо его собственных работ, можно найти в докладе Н. В. Анкина [23] в Американском обществе морских инженеров — 1918 г.

При разъяснении периодов и форм главных свободных колебаний методом последовательных приближений исходным пунктом является дифференциальное уравнение (1) и граничные условия (2). Решение их ведется так: заданная для первого приближения какому-либо выражением кривой упругой линии, совместная с граничными условиями задача, например, приняв

$$\varphi_0(z) = \varphi_0(z) = \alpha + \beta \frac{z}{l} + \sin \frac{\pi z}{l},$$

где α и β — две постоянные, определяемые из условий общей уравновешенности сил инерции, т. е. из уравнений

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l q(z) \varphi_0(z) dz &= C_1 \\ \int_0^l \int_0^l q(z) \varphi_0(z) dz^2 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

подставляя $q(z)$ вместо $\varphi_0(z)$ в правую часть уравнения (1) и путем четырехкратного интегрирования находят из левой части этого уравнения для $\varphi_1(z)$ новое приближение:

$$\varphi_1(z) = \varphi_0(z),$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_1(z) = \lambda^2 \left[\int_0^z \int_0^z \frac{1}{EI} \int_0^z \int_0^z q(z) \varphi_0(z) dz^2 dz + A_1 \int_0^z \frac{1}{EI} dz + \right. \\ \left. + B_1 \int_0^z \frac{z}{EI} dz + C_2 + D_2 z \right], \end{aligned}$$

Входящие сюда постоянные интегрирования A_1, B_1, C_1 и D_1 определяются частью из условий (2), а также в силу условий (3) только

$$A_1 = B_1 = 0,$$

частью же из условий уравновешенности сил энергии:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l g(z) \varphi_1(z) dz &= 0, \\ \int_0^{l/2} g(z) \varphi_2(z) dz &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3')$$

Неопределенная пока постоянная λ^3 подбирается после этого так, чтобы в какой-либо точке стержня, например при $z=0$, было:

$$\varphi_1(z) = \varphi_2(z). \quad (4)$$

Если окажется, что

$$\varphi_1(z) = \varphi_2(z)$$

при всяком z , то $\varphi_2(z)$ можно принять за «форму» основного из главных свободных колебаний стержня, а величину λ , соответствующую из условия (4), за его угловую частоту:

$$\lambda = \lambda_0.$$

Если окажется, что

$$\varphi_1(z) \neq \varphi_2(z)$$

то при всяком z , то, подставив $\varphi_1(z)$ в правую часть уравнения (1), продолжат описанный процесс, пока не окажется, что при всяком z с достаточной точностью

$$\varphi_1(z) = \varphi_{n-1}(z).$$

Доказательство сходности означенного процесса основано на том, что если разложить функции $\varphi_n(z)$ в ряд по формам главных свободных колебаний системы есть:

$$\varphi_n(z) = \sum_k A_k \varphi_k(z),$$

то разложение в неограниченный ряд функции $\varphi_n(z)$, называемой процессом, названного выше, должно быть:

$$\varphi_n(z) = \sum_k A_k \left(\frac{\lambda}{\lambda_k}\right)^n \varphi_k(z).$$

Поэтому, если только не принять каких-либо особых мер к тому, чтобы в выражениях для $\varphi_1(z), \varphi_2(z) \dots \varphi_n(z)$ и т. д. коэф-

фициент A_k был равен нулю, то процесс последовательных приближений должен привести к разложению формы и периода того из главных свободных колебаний, которое отличается наименьшей частотой.

Для нахождения вышеописанным способом периода и формы свободных колебаний второго тона следует лишь добиться того, чтобы в течение всего процесса вычислялся

$$A_k = 0. \quad (*)$$

Если $\varphi_k(z)$ предварительно определено, то достигнуть условия (*) всегда можно с помощью известного свойства взаимной ортогональности форм главных свободных колебаний, выражающегося в рассматриваемом случае условием:

$$\int_0^l g(z) \varphi_k(z) \varphi_l(z) dz = 0 \quad (5)$$

при всяких k и l , друг другу не равных.

Получая условием (5), можно всегда добиться того, чтобы функция $\varphi_k(z)$ и все $\varphi_n(z)$ были взаимно ортогональными с $\varphi_k(z)$. Если это достигнуто, то процесс последовательных приближений должен привести к определению функции $\varphi_k(z)$ и соответствующего ей периода колебаний и т. д. (см. приложение).

4. Любопытное замечательное свойство последовательных приближений было дано А. П. Черниковым [24], предлагающим разбивать искомые функции $\varphi_k(z)$ в форме ряда вида

$$\varphi_k(z) = J_0(z) + \lambda^2 J_2(z) + \lambda^4 J_4(z) + \lambda^6 J_6(z), \quad (6)$$

где $J_n(z)$ — общий интеграл уравнения:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[EI \frac{d^2}{dz^2} J_n(z) \right] = 0,$$

а все остальные $J_n(z)$ частные интегралы уравнений:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left[EI \frac{d^2}{dz^2} J_n(z) \right] = \lambda^2 g(z) J_{n-1}(z).$$

* Можно отметить по Динскому вопросу как статью Carmona's A Simple Numerical Method for Treatment of Elastic Stability Questions and Simple «Characteristic Value Questions», *Rubber, Mag.*, 1932, vol. 14, p. 661.

Предложенный автором метод последовательных приближений, автор статьи отмечает, что по величине ошибок

$$|\varphi_n(z) - \varphi_{n-1}(z)| \text{ и } |\varphi_n(z) - \varphi_{n-1}(z)| \text{ и}$$

можно судить о степени близости достигнутого приближения. С применением такого замечания не только можно убедиться, так же можно указать точки стержня отклонения эти могут быть очень велики даже тогда, когда λ^2 очень мало, достаточно мало.

На последнем русском работе, посвященном методу последовательных приближений, заслуживает внимания три статьи муж. В. И. Писоткина [30].

не заключающие воях постоянных интегрирований, кроме четырех входящих в общий интеграл для $J_0(z)$. Разыскав с помощью последовательных интегрирований $J_0(z)$, $J_1(z)$, $J_2(z)$ и т. д., можно прийти выражению (6) вид:

$$v_k(z) = A F_1(z) + B F_2(z) + C F_3(z) + D F_4(z),$$

где $F_j(z)$ выражаются рядами

$$F_1(z) = 1 + \lambda^2 \int_0^z q(z) dz^2 \frac{1}{E^2} dz^2 +$$

$$+ \lambda^4 \int_0^z q(z) dz^2 \frac{1}{E^2} dz^2 \int_0^z q(z) dz^2 \frac{1}{E^2} dz^2 + \dots$$

$$F_2(z) = z + \lambda^2 \int_0^z z q(z) dz^2 \frac{1}{E^2} dz^2 +$$

$$+ \lambda^4 \int_0^z z q(z) dz^2 \frac{1}{E^2} dz^2 \int_0^z q(z) dz^2 \frac{1}{E^2} dz^2 + \dots$$

$$F_3(z) = \int_0^z \frac{1}{E^2} dz^2 + \lambda^2 \int_0^z \frac{1}{E^2} dz^2 q(z) dz^2 \frac{1}{E^2} dz^2 +$$

$$+ \lambda^4 \int_0^z \frac{1}{E^2} dz^2 q(z) dz^2 \frac{1}{E^2} dz^2 q(z) dz^2 \frac{1}{E^2} dz^2 + \dots$$

$$F_4(z) = \int_0^z \frac{z}{E^2} dz^2 + \lambda^2 \int_0^z \frac{z}{E^2} dz^2 q(z) dz^2 \frac{1}{E^2} dz^2 +$$

$$+ \lambda^4 \int_0^z \frac{z}{E^2} dz^2 q(z) dz^2 \frac{1}{E^2} dz^2 q(z) dz^2 \frac{1}{E^2} dz^2 + \dots$$

A, B, C и D — постоянные интегрирования, знаком \int обозначен k -кратный интеграл, взятый по z , в пределах от $z=0$ до $z=z$.

Постоянные A, B, C и D определяются две из условий при $z=0$, две другие из условий при $z=1$. Так как, однако, соответствующие граничные условия однородны относительно неизвестных A, B, C и D , то усложняют условия совместным лишь при некоторых частных значениях параметра λ^2 . Условие совместных граничных условий дает для λ^2 алгебраическое уравнение тем более высокой степени, чем больше членов удерживается в рядах для $F_j(z)$.

Приме этот, может быть и не полный, во-видимому другим авторами к рассматриваемой задаче ее применялся и замечан

в том отношении, что позволяет сразу находить несколько значений величины λ^2 , соответствующих нескольким главным колебаниям системы из числа наиболее медленных ей присущих. Проще ли от того приема, который был описан в п. 3, и не приводит ли он иногда в процессе выкладки к вычислению малых разностей близких величин, пока не выяснено.

Малозначная метода имеет сходные черты с одной стороны с методом последовательных приближений, изложенной в п. 3, с другой же с методом частых решений, изложенной в п. 2. От последней она отличается лишь тем, что позволяет оставить для определения λ^2 уравнение (пряда приближенное), куда λ^2 входит явно, в то время как в соответствующее уравнение, полученное процессом, изложенным в п. 2, λ^2 входит не явно.

С другой стороны обе только что рассмотренные методы имеют сходство с методо численного решения «несколько» уравнения, данной в свое время Лейбне [25]. К рассмотрению сходства мы продолжим вернуться особо, так как объем настоящего обзора не позволяет здесь на нем задерживаться.

5. Переходим к рассмотрению метода Релея—Ритца и ее модификаций.

Еще в семидесятых годах прошлого столетия Релей [25], воспользовавшись зависимостью между периодом колебания и его формой, вытекающей непосредственно из закона живой силы, установил важное положение, что «частоты колебаний системы, определяемые этой зависимостью, обращаются в свои относительные минимумы, если путем удаления всех связей, не присущих рассматриваемой системе, этой последней дается возможность совершать одну из своих главных свободных колебаний. Так как всякая функция возле своего относительного максимума, а также минимума меняется относительно мало, то, задаваясь для свободных колебаний системы формами, не слишком отличающимися от истинных, можно для частоты колебаний получать значения, близкие к точным».

Релей использовал этот прием в своем курсе теории звука [27] для разысканий приближенных значений периода свободных колебаний некоторых систем, не слишком отличающихся от таковых, для которых точное решение задачи было известно. В частности, для разыскания периода свободных колебаний стержней, не слишком отличающихся от призматических, метода эта была применена еще самим Релеем. Пользовались ею также сравнительно редко и то лишь для получения того, что теперь принято называть «черным приближением» для несомного периода. Она называлась «черным приближением» для несомного периода. Она называлась к себе особое внимание с тех пор, как была видоизменена Вальтером Ритцем (W. Ritz) и целых рядов модификаций приближений для значения исковых величин.

В Ритцем [28] задача была значительно обобщена, и истинным пунктом его рассуждений были наме положения, чем у Релея: показан в своем основном мемюаре, что многие задачи математи-

ческой физики, вместо решения соответствующих дифференциальных уравнений, могут быть сведены к разысканию минимумов некоторых определенных интегралов. В. Ритц предложил для разыскания экстремумов пользоваться не строгими решениями вариационного исчисления, сводящими вопрос к решению упомянутых дифференциальных уравнений, а путем разыскания искомого функций в форме рядов, коэффициенты которых подбираются так, чтобы рассматриваемый интеграл обращался в минимум. В задачах динамики упомянутый интеграл может быть получен как исходя из основного вариационного принципа динамики, формулированного Гамильтоном:

$$\delta \int_0^1 (T - V) dt = 0,$$

так и непосредственно из условия, что при всяком малом отклонении тела от его истинного движения работа сил инерции и сил упругих должна быть во все время движения равна нулю.

В какой бы из двух форм мы ни взяли этот интеграл, система алгебраических линейных уравнений, к которой сводится задача о разыскании коэффициентов разложения искомого формы главных свободных колебаний в ряд по функциям, удовлетворяющим граничным условиям задачи, будет всегда той же, что система, данная вышеупомянутой теоремой Релея. Вышние приближения метода Релея, таким образом, должны давать тот же результат, что и метода Ритца.

В настоящее время, для разыскания вышних приближений для форм и периодов главных свободных колебаний системы, пользуются и непосредственно уравнениями Лагранжа в их второй форме, рассматривая коэффициенты разложения искомого формы свободного колебания системы в ряд как координатные параметры системы в Лагранжском смысле.* Прием этот также ведет быстро к цели и приводит решение задачи к тем же самым алгебраическим уравнениям, что и метода Ритца или вышние приближения методом Релея.

К вопросу о нахождении периодов колебаний корабля метода Ритца была применена впервые по-видимому Е. В. Красноперовым [29], который искал форму основного из свободных колебаний корабля в форме

$$\psi_1(z) = a_0 + a_1 \psi_1(z), \quad (7)$$

где $\psi(z)$ — форма соответствующих свободных колебаний стержня призматического, а постоянные a_0 и a_1 подбираются из условия

$$\delta \int_0^1 EI [\psi_1'(z)^2 - \lambda^2 q(z) \psi_1(z)] dz = 0,$$

* См. например работы В. Л. Суванкова [22].

что дает для них уравнения

$$\begin{cases} (C_{00} - \lambda^2 A_{00}) a_0 + (C_{01} - \lambda^2 A_{01}) a_1 = 0 \\ (C_{10} - \lambda^2 A_{10}) a_0 + (C_{11} - \lambda^2 A_{11}) a_1 = 0, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$C_{ij} = \int_0^1 EI \psi_i'(z) \psi_j'(z) dz;$$

$$A_{ij} = \int_0^1 q(z) \psi_i(z) \psi_j(z) dz,$$

где все интегралы берутся по всей длине корабля, а $\psi_0(z) = 1$. Для вычисления этих интегралов Е. В. Красноперов составил вспомогательные таблицы, считая, что кривые для $EI(z)$ и $q(z)$ заменены ломаными линиями, имеющими постоянное значение на протяжении каждого из 16 равных участков длины корабля.

Вскоре Б. Л. Суванков [22], исходя из уравнений Лагранжа и принимая для $\psi_1(z)$ более общее выражение:

$$\psi_1(z) = a_0 + \delta \varphi^2 + \sum_1^n a_i \psi_i(z), \quad (9)$$

где $\psi_i(z)$ функции, определяющие формы главных свободных колебаний стержня призматического, разработал для нахождения основного свободного колебания схему, отличающуюся лишь в некоторых деталях от предложенной впоследствии В. Д. Горюхиным [30].

Член, пропорциональный φ , введен в выражение (9) Б. Л. Суванковым (у В. Д. Горюхиного он пропущен) с той целью, чтобы учесть несимметричность распределения масс корабля относительно середины его длины, если такаякая несимметрия имеется. Введение этого члена позволяет достигнуть полной уравновешенности суммы всех сил инерции корабля как в отношении их главного вектора, так и в отношении моментов, причем это почти не усложняет расчета, так как уравнение для λ^2 получается линейным, если в выражении (9) удерживается только $\psi_1(z)$; квадратич, если удерживается $\psi_1(z)$ и т. д.

Хотя в докладе Айзюффа [23] (1918 г.) на метод Ритца применительно к нахождению свободных упругих колебаний корабля и было обращено специальное внимание, тем не менее вначале его в судостроении за границей не пользовались или почти не пользовались. В 1922 г. Тойбеном [31] была разработана для численного периода главных свободных колебаний корабля трех ионных тонна вычислительная схема, основанная на применении первого приближения метода Релея. В ряду (9) Тойбэн удерживал при нахождении λ^2 один лишь член, содержащий $\psi_1(z)$, отбрасывая

член a_0 и b_2 . Для вычисления оставшихся в решении интегралов он дал графики функций $\{v_1^2(z)\}^2$, а также $\{v_1^2(z)\}^2$, а похища которых решение может быть получено весьма быстро.

Еще дальше, в смысле упрощения решения, пошел Г. Е. Павленко [32], искавший для $v_1(z)$ решение в той же форме, что и Тоби, но сделавший дополнительные допущения, что кривая моментов инерции корабля и кривая его жесткостей могут быть для первого приближения заменены несимметричными параболоми, и вычислявший все интегралы, входящие в решение при этих предположениях — раз навсегда.*

К сожалению в решениях Тоби'a и Г. Е. Павленко члены a_0 и b_2 по существу не приняты, смена инерции поэтому не уравновешена, и полной уверенности в достаточной точности решения иметь нельзя: даже если получать погрешности, в случае пропусков членов a_0 и b_2 , предсказан быть не может.

Все упомянутые авторы искали для рассматриваемого неупругого бруса решения, разлагая формы его свободных колебаний по таким сравнительно сложным функциям, как формы соответствующих колебаний привязанного стержня. Так как решение разлагается приближенно, то, естественно, возник вопрос, нельзя ли для функций $v_1(z)$, входящих в выражение (9), принять какую-либо совокупность других функций — более простых. С этим вопросом связан непосредственно другой, не менее важный: каковы условия должны быть подчинены фундаментальные функции в методе Рунге—Рунда. Обычно принято считать, что фундаментальные функции должны удовлетворять граничным условиям задачи. Элементарные соображения показывают, что их надо подчинить не граничным, а кинематическим условиям задачи: каждая фундаментальная функция должна определять собой некоторую, а все они вместе всякое возможное отклонение рассматриваемой системы. Так как граничные условия на концах свободного стержня задаются не кинематической системы, а условиями силового типа, то в задаче о колебаниях корабля нет необходимости подчинять фундаментальные функции граничным условиям:

$$EI v_1''(z) = 0 \quad \text{и} \quad [EI v_1'(z)] = 0.$$

* Тот же путь решения задачи был принят Нот'ом [33], составлявшим для расчета некоторых стержней, у кока.

$$I(z) = I \left(1 + \alpha_1 \frac{z}{l} + \alpha_2 \sin \frac{\pi z}{l} \right),$$

$$q(z) = q \left(1 + \alpha_3 \frac{z}{l} + \alpha_4 \sin \frac{\pi z}{l} \right).$$

использованные таблицы, упрощающие процесс и как первого приближения методом Рунге—Рунда.

Ряд (9) можно заменить рядом [34]

$$v_1(z) = a_0 + b_2 z + \sum_1^{\infty} \alpha_i \sin \frac{i\pi z}{l} \quad (10)$$

или, что то же, рядом

$$v_1(z) = \sum_1^{\infty} \alpha_i \varphi_i(z), \quad (11)$$

где

$$\varphi_i(z) = \sin \frac{i\pi z}{l} + \alpha_i + \beta_i \frac{z}{l}.$$

а α_i и β_i определяются из условий уравновешенности сил инерции.

Как показали подсчеты, сделанные независимо автором настоящего сборника [34] и Мюллером [35], составившим результаты своих расчетов с данными специальных опытов и с некоторыми точными решениями, полученными Николаевым [36], замена ряда (11) даже одним лишь первым членом его дает обычно для периода свободных колебаний основного тона значение, практически близкое к истинным. Путем же сохранения в ряду (11) двух членов можно ошибку в вычислении λ^2 уменьшить настолько, что она будет лежать вне пределов точности обычных инженерных расчетов.

6. Если для получения с помощью метода Рунге—Рунда достаточно точного значения периода свободных колебаний основного тона и можно удерживать в ряду (11) только лишь один первый его член, то для получения периода свободных колебаний высших частот приходится, как правило, в этом ряду удерживать несколько таких членов. Вычислительная работа при этом сильно увеличивается, так как, помимо необходимости вычисления большого количества квадратур, каждую из них приходится брать по большому количеству ординат, в связи с тем, что подынтегральные функции проходят в них через нуль большое число раз. Кроме того, при решении задачи в высших приближениях численные выкладки очень часто бывают сопряжены и методом Рунге—Рунда с вычислением малых разностей базисных волн, что сопряжено с потерей точности вычислений.

Метод Рунге—Рунда поэтому не может быть признан вполне рентабельным рассматриваемый вопрос.

Переходя к характеристике других расчетных приемов, следует прежде всего упомянуть о том видоизменении метода Рунда, которое в 1915 г. было предложено для аналогичных задач строительной механики Б. Г. Галеркиным [37].* Для того чтобы выйти с помощью этого приема решение уравнения (1) в форме (11), следует подставить ряд (11) непосредственно в уравнение (1) и, умножив результат подстановки поочередно на каждую из функций

* Известно, что указанный прием был предложен впервые в 1913 г. М. Г. Бубновым, термом затем использованный Б. Г. Галеркиным. В настоящее время он известен как метод Бубнова—Галеркина. — Прим. ред.

$\varphi_1(z)$, проинтегрировать затем его по z в пределах всей длины рассматриваемого стержня. Нетрудно видеть, что таким путем можно прийти к тем же самым линейным уравнениям для определения коэффициентов α_k , к которым задача приводится в оригинальной методе Рунта [38], [39].

Этот по существу не новый, но не применявшийся в рассматриваемой задаче прием *Vienno* и *Koeb* [40] видоизменили, предложив вместо поочередного умножения основного уравнения задачи на функции $\varphi_k(z)$, с последующим интегрированием результата по всей области, для которой решение разыскивается, разделить всю эту область на столько различных участков, сколько удерживается в ряду (1) членов, и приравнять друг другу для каждого из участков левые результаты интегрирования обеих частей основного уравнения задачи.

Приме этот замечание на первый взгляд в том отношении, что требует ваять несколько более простых квадратур. Как показала в своей дипломной работе А. А. Бевальд [41], в задаче об интегрировании уравнения (1) от каких-либо упрощений не идет: коэффициенты системы для определения величин α_k , получаемой этим путем, не отличаются существенно (система уравнений для α_k не квадратна); поэтому таких коэффициентов приходится вычислять почти вдвое больше; точность же результата при сохранении одинакового числа членов ряда получается значительно меньшей, чем в оригинальной методе Рунта или методе В. Г. Галеркина.

Интересно отметить, что метод, несколько сходная с методом *Vienno*—*Koeb*'а в применении именно к задаче о колебаниях стержня, предлагалась в 1904 г. *Battaglini* [42], но применена не получила. См. по этому поводу заметку *Chee* [43].

Любопытная, но вряд ли удачная идея была предложена в 1929 г. *Ingli's* [44]. В случае, если кривые нагрузки и жесткости (характеризуемые функциями $I(z)$ и $q(z)$) более или менее плавные, *Ingli's* предлагает разложить их в тригонометрические ряды. Искомое $v_k(z)$ он ищет в форме такого же ряда, определяя коэффициенты последнего из уравнений, получаемых путем приравнения друг другу коэффициентов у синусов и косинусов различной кратности в результате подстановки всех этих трех рядов в уравнение (1). Отмечая, что если кривые $I(z)$ и $q(z)$ не плавные, то этот прием может потребовать вычисления сравнительно большого числа каждого из трех упомянутых рядов, *Ingli's* для последнего случая предлагает метод, сходный с первой методикой А. Н. Крылова, описанной выше: весь стержень он разделил на отдельные участки, на протяжении каждого из которых I и q могут считаться постоянными. В точках перехода от одного участка к другому в значениях $v_k(z)$ и $v_k'(z)$ получаются разрывы непрерывности, величины которых подбираются из условия, чтобы исчезающий момент и перерезывающая сила были здесь непрерывны.

Поднятия всемогущее решение двум граничным условиям на одном из концов стержня, *Ingli's*, сохраняя в общем интеграле упругой

длины две постоянные интегрирования, вычисляет два частных решения, комбинируя каждое вид алгебраических полиномов от искомой частоты колебания. Путем исключения постоянных интегрирований из двух оставшихся граничных условий задачи составляется характеристическое уравнение для λ^2 в форме неострого алгебраического уравнения, корни которого и дают искомые частоты главных свободных колебаний системы. Прием этот сходен, таким образом, с некоторыми чертами с описанным приемом разложения в ряды по степеням λ^2 , предлагавшимся в рассматриваемой задаче В. Н. Черенюкиса, но отличается от последнего в том отношении, что позволяет обойтись без многократных последовательных интегрирований. Оба метода *Ingli's* требуют немалого количества числовых выкладок и вряд ли могут считаться шагом вперед.*

Гораздо более практичным следует признать те приемы интегрирования уравнения (1), которые основаны на комбинировании методов Рунта и методов последовательных приближений *Vianello*—*Morgan*'а. К задаче о вибрациях судов этот прием был применен, в частности *Lockwood*—*Taylor*'ом [45] и несколько ранее, но в менее разработанном виде *Boiley*'ем [47], а еще того ранее В. Л. Суцкевичем [22]. Сущность его сводится к следующему.

Для первого приближения на упругую линию судна принимается кривая:

$$v_k(z) = v_0(z) + \alpha_k + \beta_k \frac{z}{l} = v_k(z),$$

где $v_0(z)$ — упругая линия арматурных стержней, соответствующая колебаниям k -го тона, а α_k и β_k константы, определяемые на условии уравновешенности сил инерции (3). Найденная таким образом упругая кривая подставляется в правую часть основного дифференциального уравнения (1), после чего способом *Morgan*'а [путем четырехкратного интегрирования уравнения (1)] определяется более точное выражение для $v_k(z)$, которое и подставляется в формулу Рунта:

$$\lambda_k^2 = \frac{\int_0^l z I \left(\frac{d^4 v_k(z)}{dz^4} \right)^2 dz}{\int_0^l q(z) v_k(z) dz} \quad (12)$$

К сожалению *Lockwood*—*Taylor* и *Boiley* не обращали внимания на то обстоятельство, что процесс четырехкратного интегри-

* Метод, сходный с первой методикой *Ingli's* а, иногда применительно к другим задачам, предлагал *Gokhale* [45], предполагая, что в некоторых случаях предлагаемой им прием приводит решение задачи к тем же уравнениям, что и оригинальный метод Рунта, но несколько быстрее в вычислениях.

решения уравнения (1) отличает разложение искомой функции в ряд от присутствия в нем всех членов, кроме отличающегося наименьшей частотой. Поэтому предложенное *L. Taylor*'ом уточнение формы свободных колебаний, позволяя почти точность вычисления величины λ_k , при вычислении всех остальных λ_k может оказывать вредное влияние. Чтобы этого не было, следует лишь перед интегрированием уравнения (1) сделать функцию $\varphi_k(x)$, подставляемую в правую часть этого уравнения, взаимно ортогональной по отношению ко всем $\varphi_j(x)$, где $j \neq k$, а это легко достигается, если пользоваться ортогональностью функций $\varphi_k(x)$, т. е. условием

$$\int_0^l g(x) \varphi_k(x) \varphi_j(x) dx = 0, \quad \text{при } k \neq j \quad (5)$$

и искать $\varphi_k(x)$ в форме:

$$\varphi_k(x) = \varphi_k(x) + \alpha_k + \beta_k \frac{x}{l} + \gamma_k \varphi_1(x) + \delta_k \varphi_2(x) + \dots$$

С этой поправкой разбираемый вычислительный прием может быть признан наиболее быстро и просто ведущим к цели. Одной из характерных его особенностей является то, что он совершенно устраняет необходимость дифференцирования по координате x : подынтегральная функция в числителе выражения (12) находится при росте по схеме *Lockwood—Taylor*'а — *Сувеникова* с помощью двукратного интегрирования уравнения:

$$[E I(x) \varphi_k''(x)]'' = \lambda^2 g(x) \varphi_k(x).$$

Так как в процессе дифференцирования функциональных рядов их сходимость всегда ухудшается, то замена дифференцирования рядов их интегрированием, характерная для метода *Lockwood—Taylor*'а — *Сувеникова*, должна облегчать нахождение точных значений величин λ_k^2 .

7. Вопрос о таком видоизменении метода Рунге—Рунда, которое позволило бы обходиться без дифференцирования функциональных рядов, имеет свою любопытную историю.

Еще в 1909 г., независимо от работ В. Рунда, *Mooley* [48] обратил внимание на то, что вместо формулы Рунге

$$\lambda^2 = \frac{\int_0^l E I(x) (\varphi'' \varphi)'' dx}{\int_0^l g(x) (\varphi_k(x))^2 dx} \quad (13)$$

частоту свободных колебаний основного тона можно размыслить с помощью равенства:

$$\lambda^2 = \frac{\int_0^l g(x) \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx}{\int_0^l g(x) \varphi_1^2(x) dx} \quad (14)$$

где $\varphi_1(x)$ есть любая кривая, не слишком отличающаяся от форм свободных колебаний основного тона, а $\varphi_2(x)$ второе приближение к последней, найденное с помощью четырехкратного интегрирования уравнения:

$$[E I \varphi_2''(x)]'' = g(x) \varphi_1(x).$$

К той же зависимости несколько позже пришел *Кэй* [49] (1918 г.), и затем *Косб* [50], (1926 г.), а в самое последнее время и *Кларк* в *Trask* [51], (1930 г.). Если принять во внимание, что интеграл, входящий в числитель выражения (14), есть не что иное, как удвоенная потенциальная энергия, соответствующаягибупо кривой $\varphi_2(x)$, вычисленная по теореме Клапейрона [как сумма работы усилий $g(x) \varphi_1(x) dx$ на перемещениях $\varphi_2(x)$], то придется в методе *Lockwood—Taylor*'а — *Сувеникова*, рассмотренной в конце п. 5, признать видоизменение той же метода *Mooley*'а — *Косб*'а.

Вопрос о том, в какой зависимости друг от друга находятся результаты, даваемые формулами (13) и (14), был исследован подробно *Косб*'ом, воспользовавшимся разложением функции $\varphi_1(x)$ в ряд по формам главных свободных колебаний рассматриваемого непрямоугольного стержня.

Принимая

$$\varphi_1(x) = \sum_k A_k \varphi_k(x)$$

и принимая во внимание, что тогда

$$\varphi_2(x) = \sum_k A_k \frac{1}{\lambda_k^2} \varphi_k(x),$$

* Формула (14) привлекла в несколько более обобщенном виде, чем у *Mooley*'а, который принимал:

$$\varphi_1(x) = 1,$$

так что $\varphi_2(x)$ определяла собой форму упругой линии стержня под действием собственного веса.

Косел, в частности, показала, что в силу ортогональности функций $\varphi_k(z)$

$$\int_0^l g(z) \varphi_k(z) \varphi_l(z) dz = \sum_k A_k^2 \frac{1}{\lambda_k^2} \int_0^l g(z) \varphi_k^2(z) dz$$

$$\int_0^l g(z) \varphi_l^2(z) dz = \sum_k A_k^2 \frac{1}{\lambda_k^2} \int_0^l g(z) \varphi_k^2(z) dz,$$

так, что если считать функции $\varphi_k(z)$ нормализованными, так чтобы все интегралы вида

$$\int_0^l g(z) \varphi_k^2(z) dz$$

были равны единице, то из выражения (14) будет следовать

$$\lambda^2 = \frac{\sum_k A_k^2 \frac{1}{\lambda_k^2}}{\sum_k A_k^2 \frac{1}{\lambda_k^2}} \quad (14a)$$

Так как при тех же условиях

$$\int_0^l g(z) \varphi_l^2(z) dz = \sum_k A_k^2 \int_0^l E I [\varphi_l'(z)]^2 dz = \sum_k A_k^2 \lambda_k^2,$$

то на основании формулы (13)

$$\lambda^2 = \frac{\sum_k A_k^2 \lambda_k^2}{\sum_k A_k^2} \quad (15a)$$

Ясно, что ряды в выражении (15a) сходятся значительно хуже, чем в равенстве (14a) и, следовательно, первое приближение методы *Moisley*'а—*Kosel*'а должно давать для λ^2 значительно лучшие результаты, чем соответствующее приближение методы Рунда—Ритца; добившись же того, чтобы в разложении $\varphi_l(z)$ ряд по $\varphi_k(z)$, $(k-1)$ первых членов ряда были равны нулю, можно воспользоваться методом *Moisley*'а—*Kosel*'а с таким же успехом и для приближенного нахождения частоты колебаний l -го тона.

В работах *Trinkle* [52] (1930 г.) и *Hohenberg*'а и *Prager*'а (1932 г.) было выдвинуто новое вычислительное методы Ритца, точнее для λ^2 значения менее точно, чем формула (14a), но требующие не четырехкратных, а всего лишь двукратных интегрирований заданных функций. Сущность этого предложения всего отчетливее видно из упомянутой работы *Hohenberg*'а и *Prager*'а и сводится к следующему.

Если $\varphi_0(z)$ есть форма свободных колебаний l -го тона, частота которого есть λ_l^2 , то между λ_l^2 и $\varphi_0(z)$ должно существовать с одной стороны соотношение:

$$\lambda_l^2 = \frac{\int_0^l E I(z) [\varphi_0'(z)]^2 dz}{\int_0^l g(z) [\varphi_0(z)]^2 dz} \quad (13)$$

с другой же зависимости:

$$[E I(z) \varphi_0'(z)]' - \lambda_l^2 g(z) \varphi_0(z) = 0, \quad (14)$$

которую можно представить также в форме двух равенств:

$$M'' - \lambda_l^2 g(z) \varphi_0(z) = 0$$

$$M = E I(z) \varphi_0'(z), \quad (15)$$

где M — изгибающий момент, соответствующий упругой линии, определяемой перемещением $\varphi_0(z)$.

Исключив с помощью равенства (15) $\varphi_0(z)$ из выражения (13), можно получить равенство:

$$\lambda_l^2 = \frac{\int_0^l \frac{(M'')^2}{g(z)} dz}{\int_0^l \frac{M^2}{E I(z)} dz} \quad (16)$$

которым *Hohenberg* и *Prager* и рекомендуют пользоваться для определения λ_l^2 вместо равенства (13).

Если допустить, что в выражении (16) вводится вместо M , определенного исходя из формы l -го свободного колебания расматриваемого стержня, M , вычисленное путем интегрирования уравнения

$$M'' = g(z) \varphi_0(z), \quad (**)$$

где $\varphi_0(z)$ не есть форма какого-либо из главных свободных колебаний, ж определится рядом:

$$\varphi_0(z) = \sum_k A_k \varphi_k(z), \quad (***)$$

а $\varphi_k(z)$ нормализованные формы свободных колебаний рассматриваемого стержня, то нетрудно видеть, что равенство (16) даст для λ_l^2

$$\lambda_l^2 = \frac{\sum_k A_k^2}{\sum_k A_k^2 \frac{1}{\lambda_k^2}} \quad (17)$$

Поэтому, если в выражении (***) для $\varphi_i(z)$ все A_k кроме A_i будут равны нулю, то из (17) получится для частоты i -го колебания стержня точная его величина. Если же $\varphi_i(z)$ лишь приблизительно равно $\varphi_i(z)$, причем $A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_{i-1} = 0$, то из (17) можно получить для λ_i^2 приближенное значение, более точное, чем даваемое формулой Релея, т. е. равенство (13). Разумеется, что при интегрировании уравнения (*) M должно быть подчиняемо всем граничным условиям задачи стержня.

Нужно отметить также, что приведенное изложение рассмотренной методы не совпадает в точности ни с данным *Tribble* ни с данным *Hohenzelle*'ом и *Prager*'ом: *Tribble* комбинирует ее с методом Рунда, принимая для вышних приближений для искомого $\varphi_i(z)$ многочленные выражения вида:

$$\varphi_i(z) = \alpha_i \varphi_2(z) + \beta_i \varphi_3(z),$$

где φ_2 и φ_3 определяются методом последовательных интегрирований исходя из различных φ_1 , а *Hohenzelle* и *Prager* рассматривают исключительно колебания основного тона. Формула (16) выведена *Hohenzelle*'ом и *Prager*'ом лишь для рассылания λ_i^2 . Им же принадлежит и установление аналогии между нулю и выражением (13). Приведенное выше обобщение формулы (16) в оригинальной работе упомянутых авторов нет.

В настоящее время, как видно из изложенного, мы располагаем уже большим количеством разнообразных приемов для интегрирования уравнения (1), позволяющих заложить известный результат с желательной степенью точности и при сравнительно очень небольшой затрате труда. Не останавливаясь на обзоре этих приемов, отметим лишь, что за последнее время появилась ряд работ, посвященных решению рассмотренной задачи с помощью теории интегральных уравнений. Отсылая интересующихся этим вопросом к соответствующим работам *Van der Dungen*'а [54] (1926; 1928 г.г.); *Hohenzelle*'а [55] (1930 г.), *Schmitt*'а [56] (1926 г.) и *Holland*'а [57] (1928 г.), перейдем к вопросу о том, какие намеки на взгляды на физическую сущность явления вибрации судов намечались за время, прошедшее с 1911 г.

По мере того, как совершенствовались методы интегрирования уравнения (1), к которому вопрос вначале сводился, участились попытки сопоставить результаты теоретического подсчета с результатами практического опыта и разобраться в причинах их несоответствия. Наряду с этим шло более углубленное изучение всего вопроса в целом, в результате чего взгляды на физическую сторону явления во многом изменились. В настоящее время можно считать признанным, что первоначальная постановка вопроса была лишь верным и притом грубым приближением к истине.

Прежде всего, по-видимому, возник вопрос об учете влияния моментов сил инерции вращательного движения поперечных

сечений корабля. Попытку учесть это влияние, не говоря о более ранних работах, можно отметить, в частности, в одной из трех цитированных выше работ *Marrow*'а. Несколько позже обращено было внимание на необходимость учета так называемых «перемещений от сдвига», т. е. перемещений от перехода отдельных элементов стержня вибрирующего стержня, под влиянием перемещающих сил. С. П. Тимошенко касается обоих этих явлений в своем курсе теории упругости [58], 1916 г., ограничиваясь, однако, рассмотрением лишь стержней призматических. Для учета рассмотренных явлений он вводит в основное дифференциальное уравнение свободных поперечных колебаний призматических стержней соответствующие дополнительные члены. Тот же подход к вопросу сохранен и в статье Тимошенко, помещенной в *Philosophical Mag.*, 1921 г., [59].

Оказывается, что у призматических стержней влияние сил инерции от вращательного движения поперечных сечений, притом оба явления растут по мере уменьшения откосов дна стержня к его высоте, и получаются для колебаний вышних частот больше. Если они и можно иногда пренебречь при рассмотрении колебаний основного тона, то в колебаниях вышних частот учитывать их необходимо. Так как в колебаниях вышних тонов длина стержня между соседними узлами почти может оказаться, как правило, небольшой по сравнению с высотой сечения стержня, то возник вопрос, можно ли для учета обоих рассмотренных явлений пользоваться гипотезой плоских сечений. Попыткой разобраться в этом вопросе является работа С. П. Тимошенко, 1922 г. [60], в которой упругие плоские колебания прямоугольной полосы рассматриваются исходя из общей связи между перемещениями и объемами силами, данной еще Ламе. Ограничиваясь рассмотрением частного случая, когда перемещения в плоскости xy определяются выражениями вида:

$$u = \cos \alpha x (M \sin \pi y + N \operatorname{th} \pi y) \cos \lambda t;$$

$$v = \sin \alpha x \left(M \frac{m}{\alpha} \operatorname{ch} \pi y + N \frac{n}{\alpha} \operatorname{ch} \pi y \right) \cos \lambda t,$$

где m , n и α некоторые постоянные, связанные с искомой частотой λ , Тимошенко удалось удовлетворить условию отсутствия изгибов на продольных краях полосы. Полученное им решение не может быть, однако, подлинно произвольным условием на поперечных краях полосы и поэтому является некоторым частным решением задачи. Если граничные условия на поперечных краях полосы не отличаются от тех, которым удовлетворяет рассматриваемое частное решение, то, как показывают численные просчеты С. П. Тимошенко, приближенный учет деформаций сдвига, принятый в его предыдущих работах, дает результаты очень близкие к более точным, получаемым путем инте-

гравитации уравнений Ляпу, причем обычно поправка на сдвиги значительно превосходит ту, которой учитывается влияние вращательного движения поперечных сечений.

Первая попытка учесть поправку на влияние сдвигов энергетическим путем, с помощью метода Релея, принадлежит в отношении неэризматического бруса, по-видимому, *Nicol'sky* [64]. Странным образом, однако, *Nicol'sky* вводит ее лишь при вычислении потенциальной энергии системы, забывая, что перемещение от сдвигов должно влиять и на ее живую силу. В результате ошибка поправка эта у *Nicol'sky*'а поперит даже по своему знаку (увеличивает частоту колебаний, а не уменьшает, как бы следовало на самом деле).

Вопрос о том, в какую сторону должна влиять поправка, в 1928 г. был предметом оживленной дискуссии в английских судостроительных обществах, а связан с докладами *Cole*'а [64] и *Loebison-Taylor*'а [65], причем вопрос о том, каким образом ее следует учитывать у неэризматических стержней при пользовании методом Релея так и остался открытым. Автор настоящего обзора остановился на вычислениях этой поправки подробно в особой заметке, помещенной в «Кораблестроитель» № 14—15, 1929 г. [63].* Примененный в статье метод рассуждений приблизительно таков: пусть v_1 есть поперечное перемещение корабля от изгиба; v_2 такое же перемещение, но от сдвигов, а

$$v = v_1 + v_2$$

общее перемещение. Тогда потенциальная энергия V будет складаться из потенциальной энергии изгиба:

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2 v_1}{dz^2} \right)^2 dz$$

и потенциальной энергии от сдвигов:

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_0^l G \omega \left(\frac{dv_2}{dz} \right)^2 dz,$$

живая же сила стержня T может быть рассмотрена как сумма живой силы поперечного поступательного перемещения отдельных точек корабля

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) \left(\frac{\partial v_1 + v_2}{\partial t} \right)^2 dz$$

* Статья эта под названием «К вопросу о периоде свободных колебаний колеблющегося корабля» помещена в *Вестник* флота.

и живой силы вращательного движения его отдельных сечений

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(x) \left(\frac{\partial v_1 + v_2}{\partial t} \right)^2 dz,$$

где $\rho(x)$ — радиус инерции масс, движущихся вместе с рассматриваемым сечением корабля.

Выбрав какую-либо совокупность функций $\varphi_1(z); \varphi_2(z) \dots$, удовлетворяющих условию уравновешенности сил инерции стержня, полагаем:

$$\begin{aligned} v_1 &= \sum a_i \varphi_1(z) \\ v_2 &= \sum b_i \varphi_2(z) \end{aligned} \quad (18)$$

и рассматривая параметры a_i и b_i как координаты системы в лагранжевом смысле, можно методом частных решений легко получить для λ характеристическое уравнение, корнями которого определяются искомые частоты главных свободных колебаний стержня. При этом все λ могут быть выражены через все a_i , причем в зависимости между ними искомого λ не входит. Поэтому характеристическое уравнение получается относительно искомого λ^2 уравнением n -й степени, где n — число членов, оставляемых в каждом из рядов (18).

К численно рассматриваемым поправкам также легко может быть применена как метода *Morley*'а—*Kocka*'а, так и метода *Tytle*'а. Учет поправки на изгибные поперечные сечения и на влияние сдвигов в стенках профиля не вносит поэтому существенных затруднений в расчет, во всяком случае при сложном приближении к нему подходе.

Гораздо большие принципиальные трудности возникают в связи с правильным учетом того, какие из продольных связей корабля и в какой мере можно считать участвующими в его общем изгибе. Вопрос этот выходит далеко из рамок настоящего обзора, и мы отсылаем заинтересованных к живому обзору развития учения об общей крепости корабля, помещенному в 7 выпуске трудов Научно-исследовательского института судостроения, где дана краткая характеристика соответствующих основных работ.* Здесь мы остановимся лишь на двух вопросах, а именно: на вопросе о влиянии забортной воды и на влиянии сопротивлений, вызывающих затухание свободных колебаний и определяющих амплитуду вынужденных колебаний при резонансе.

9. Вопрос о влиянии забортной воды не пока он был очень отчетливо поднят в работах *Günzler*'а [14] (1901 г.) и *Wekemer*'а

* Эта статья под названием «Краткий очерк развития проблем затухания сил в учении об общей крепости корабля» помещена в *Вестнике* флота. Подзаголовок «Труды по прочности корабля, Судостроение, 1956, стр. 37.

[12] (1907 г.), витрированных выше. Величину это может быть гравитационным, деагфуррующим, инерционным.

Всего явнее теоретическому учету поддается первое. Величину его можно подсчитать, исходя из изменения силы поддержания воды, являющегося результатом вертикальных перемещений отдельных сетевых корабля. Оно настолько невелико, что вряд ли может внести в Δ^2 поправку, превышающую 1—2%. Его поэтому не учитывали до сих пор и не учитывают и сейчас.

Важную инерцию забортной воды очень долго не придавали должного значения. Одной из причин, заставлявших обратить внимание на эту сторону вопроса, были опыты *Henderson's* (1909 г.). Составляя частоты свободных колебаний двух малых моделей с частотами колебаний соответствующих судов, *Henderson* пришел к заключению, что переходить с помощью закона механического подобия от периода свободных колебаний модели к периоду свободных колебаний соответствующего корабля можно, но при этом нужно модуль Юнга считать для корабля в целом процентов на 25—30 меньше, чем для того материала, из которого судно построено.

В 1924 г. *Nicola* [61], желая разобраться в причинах этого явления, повторил опыты *Henderson's* с той лишь разницей, что он исследовал, помимо колебаний простейших моделей в воздухе, колебания тех же моделей, когда они частично погружены в воду.

Выяснилось, что при погружении модели в воду частота колебаний модели резко падает, как будто бы масса модели при этом увеличилась. Для моделей треугольного сечения *Nicola* определил эту дополнительную массу равной приблизительно 70% от остаточного веса модели, для моделей прямоугольных он считал относительную дополнительную массу функцией от отношения ширины модели к глубине ее погружения в воду.

Сделав, что результаты опытов над малыми моделями нельзя распространить на натуру без всяких изменений, *Nicola* в качестве первого шагу грубого приближения к истине предложил считать, что забортная вода увеличивает массу корабля приблизительно на 50%.

Вскоре было отмечено, что при принятии за судно груза квадрат периода его собственных колебаний возрастает не пропорционально водоизмещению корабля, а значительно медленнее. Это заставило предполагать, что избыточная масса корабля, учитываемая инерцией забортной воды, зависит, по всей вероятности, главным образом от ширины и длины судна и почти не зависит от его осадки. В 1928 г. *Caldwell* [62] предложил считать эту дополнительную массу равной площади грузовой верхней палубы корабля, умноженной на $\frac{1}{2}$ от его максимальной ширины. Этот грубый расчет наперед подтвержден не был, но был, по-видимому, все же известным шагом к правильному разрешению вопроса.

Дальнейший шаг в этом направлении был сделан почти одновременно и, по-видимому, независимо в работах *Mosby's* [66] и *F. Lamb's* [67], а затем *Lockwood—Taylor's* [69]. *Mosby's* работал по преимуществу экспериментально. Воспользовавшись известным решением гидромеханики для бесконечного эллиптического цилиндра, перемещающегося в потенциальном потоке, *Mosby's* обратил внимание на то обстоятельство, что для такого цилиндра избыточная или присоединенная масса жидкости равна массе ее, помещающейся в круговой цилиндре, диаметр которого равен поперечной оси рассматриваемого эллиптического цилиндра. Предполагая, что для плоских прямоугольных стержней присоединенная масса жидкости должна быть приблизительно такой же, *Mosby's* для проверки предположения поставил опыты над свободными упругими колебаниями длинных плоских стержней прямоугольного сечения, погруженных в воду и подвешенных за свои узловые точки. Выяснилось, что при вариации толщины и ширины сечения стержня изменение периода колебаний следует очень точно закону, вытекающему из названного предположения. Опыт подтвердил предположение, что у плоских стержней форма поперечного сечения почти не влияет на величину присоединенной массы жидкости.

Было сделано несколько опытов по наблюдению горизонтальных колебаний прямоугольных полос при различном погружении их в воду. Эти опыты дали интересные результаты, которые не удалось пока полностью объединить и объяснить.

Был сделан опыт по наблюдению вибраций 60-футовой гонимой восьмерки весом 280 английских фунтов при вертикальных колебаниях в воздухе и в воде. Период колебаний в воздухе оказался у этого особенно легкого судна равным всего лишь 54% от такового на воде.

Предложенная результаты своих опытов над колебаниями стержней, погруженных в воду, распространить на вертикальные колебания корабля возле поверхности воды, *Mosby's* поставил специально опыты в целях изучения направления струй, отбрасываемых колеблющимся возле поверхности воды нормально. Явные признаки вихрей возле скулы опыты не обнаружил. *Mosby's* склонен был признать, что при колебаниях корабля у поверхности воды избыточная масса жидкости может считаться равной приблизительно половине той, которая присоединяется под водой к колебаниям сдвоенной модели, имеющей форму погруженной в воду части корабля и зеркального ее отображения от поверхности воды.

Это допущение было принято *F. Lamb's* *a priori* и легло в основу его работы [67], посвященной выяснению явления формы подводных обтекаемых стертанных корпус корабля на величину присоединенной к нему массы воды.

Методом конформных преобразований *F. Leiby* удалось перейти от задачи об обтекании жидкостью круглого цилиндра к задаче об обтекании цилиндрических тел, очертания которых очень близко подходят к очертаниям поперечных сечений корабля.

F. Leiby пришел к заключению, что в каждом поперечном сечении корабля в его вращении участвует масса воды, пропорциональная квадрату ширины корабля в этом месте и некоторому коэффициенту, зависящему от поперечного сечения корабля. Для этого коэффициента *F. Leiby* составила подробные таблицы.

Для того чтобы учесть непрямолинейность корабля, *F. Leiby* вводит в свое решение поправочные коэффициенты, зависящие их величины из решения, полученного в свое время *Lamb* для двух- и трехлопастных колебаний эллипсоидов вращения. Полученное решение согласуется с результатами опытов *Nicola*, для массы же жидкости, присоединенной к кораблю обтекаемому, дает величину того же порядка, что и масса самого корабля.

В своей работе 1930 г. *Lockwood—Taylor* [60] оспаривает правильность некоторых выводов *F. Leiby* и приводит таблицу поправок на непрямолинейность очертаний корабля, не останавливаясь подробно на ее выводе. Его работа содержит также ряд сведений, необходимых для определения величин массы жидкости, участвующей в горизонтальных колебаниях корабля. *L. Taylor* составил результаты теоретического расчета периодов свободных колебаний основного тона для четырех судов с фактической частотой замеренных у этих судов колебаний, причем получив очень хорошее совпадение данных расчета с данными опыта.

В столь же хорошем соответствии оказались и положениям узлов, вычисленные и наблюдаемые фактически.

Одно из исследований *L. Taylor* о судьях было испытано на мелководье и на глубокой воде, причем частота вертикальных колебаний на мелкой воде оказалась меньше, чем при плавании в открытом море. Глубина воды под килем на период горнолопастных колебаний в этом случае влияния не имела. Этот опыт ставит вопрос об учете влияния глубины фарватера. Некоторые новые экспериментальные данные по вопросу о влиянии заборной воды имеются в работе *Шалюмова* [70] (1932 г.), хотя приведенное общее освещение этого вопроса несколько устарело и весьма дискуссионно.

Цитированная выше работа *L. Taylor* содержит еще и единственную пока запись свободных затухающих колебаний корабля. Декремент этих колебаний весьма мал и насколько можно судить по нему, а также по некоторым выводам *Nicola*, *L. Taylor* склонен считать, что главной причиной затухания свободных колебаний корабля должно считаться не демпфирующее действие заборной воды, а явление упругого гистерезиса в материале продольных связей корабля. *Mosby* на осно-

вании своих опытов над малыми моделями придерживается того же мнения.

Порядок величин тех сопротивлений, которые встречает судно при вибрации, может быть охарактеризован наблюдаемой при резонансе величиной динамического множителя. У судна, испытанного *L. Taylor* о, этот множитель оказался равным 67, в то время как его величина, вычисленная на основании наблюдений над затуханием свободных колебаний, должна была быть у колебаний основного тона около 95. Цифры эти относятся к колебаниям, частота коих была около 100 минут. При увеличении частоты колебаний сопротивление, как показывают наблюдения, растет.

Как бы ни были малы сопротивления, встречаемые корпусом корабля при его упругих колебаниях, они являются практически единственным фактором, препятствующим беспредельному росту вынужденных колебаний при резонансе. Без увеличения их причин, законов и величин наш сведения о колебаниях упругих систем не могут считаться полными. Вопрос об учете их влияния при определении форм и периодов главных свободных колебаний корабля, а также при нахождении амплитуды вынужденных колебаний привлек к себе внимание ряда исследователей.

Помимо ряда работ, посвященных экспериментальному изучению величин внутреннего сопротивления упругих тел [71], можно отметить интересные попытки ввести учет внутренних сопротивлений в основные дифференциальные уравнения упругих колебаний призматических стержней. Этого рода работы были опубликованы *Holzer* о [72], *Mate* [73] и *Sevian* [74].

Одной из основных причин, усложняющих расчет упругих колебаний при наличии сопротивлений, является абсолютность закона, что эти сопротивления, даже если они следуют линейному закону и определяются функцией рассеяния, как правило, не позволяют разделять переменные в уравнениях Лагранжа.

Небезынтересна, может быть, в связи с этим та система дифференциальных уравнений малых упругих колебаний системы, в которой переменные всегда могут быть разделены [75]. Такая система уравнений для случая, когда в составе ее нет гироскопических членов, была предложена автором настоящего обзора.* Она позволяет полностью распространить метод главных координат на большинство тех упругих колебаний, когда у системы нет таких координат, которые могут быть разделены в уравнениях Лагранжа.

Имеется также полная возможность распространить метод Рунге—Рунга и другие методы исследования малых колебаний упругих систем, перечисленные выше, на колебания систем, не имеющих благодаря наличию сопротивлений главных координат.

* См. статью настоящего обзора под заголовком «Об одной форме основных дифференциальных уравнений малых колебаний систем, не имеющих гироскопических членов».

нат, разделяющихся в уравнении Лагранжа. У этого рода систем отдельные точки в случае свободных и в случае вынужденных колебаний, как правило, колеблются с некоторым сдвигом фаз, в связи с чем все вычислительные приемы требуют соответствующего видоизменения. Не имея возможности остановиться здесь на этом подробно, мы предлагаем вернуться к нему в ближайшем будущем особо.

В настоящем обзоре мы касались только вопроса о поперечных колебаниях, как наиболее практически важных колебаниях корабля. Вопрос о крутильных колебаниях разработан в настоящее время почти также полно. Хотя крутильные колебания у винтовых машин стержней, как правило, должны наблюдаться в комбинации с горизонтальными поперечными колебаниями, их принято в судостроении пока рассматривать особо. Методика совместного расчета колебаний крутильных и поперечных привлекла к себе внимание за последние годы в связи с возросшим [77]. В какой мере перенос ее в область судостроительных расчетов необходим, остается пока открытым.

ЛИТЕРАТУРА

1. O. Schlick. On the Vibration of the Steam Vessel. T. I. N. A. 1884, p. 24.
2. Jarrow. On the Balancing of Engines and the Vibration of Ships. T. I. N. A. 1882, p. 213.
3. Jarrow. Выводы из поездки Шюкка. 1884.
4. Taylor and Melville. Balancing of Marine Engines. T. S. N. A. M. E. 1891.
5. Jarrow. Note on a sujet de la manière d'équilibrer les machines marines et de la vibration des navires. Mémoires du Génie Maritime. 1892.
6. O. Schlick. Über die Mittel zur Beseitigung der Vibrationen von Dampfmaschinen. Hamburg. 1884.
7. O. Schlick. On an Apparatus for Measuring and Registering the Vibration of Steamers. T. I. N. A. 1883, p. 167.
8. O. Schlick. The Further Investigations on the Vibration of Steamers. T. I. N. A. 1894, p. 350.
9. O. Schlick. On the Vibrations of Higher Order in Steamers and on Torsional Vibration. T. I. N. A. 1895, p. 287.
10. O. Schlick. Les vibrations des vapeurs. B. A. T. M. 1890, p. 394.
11. O. Schlick. On some Experiments made on Board of the Atlantic Liner „Deutschland“ during her Trial Trip. T. I. N. A. 1907, p. 48.
12. O. Schlick. Die Untersuchung der Vibrationsercheinungen von Dampfmaschinen einem Beispiel erläutert. Leipzig 1903.
13. Pissoneau. Etude expérimentale sur des vibrations dues aux machines marines. B. A. T. M. 1885.
14. Berlin. Schiffschwingungen, ihre Ursachen und Kritik der Mittel zu ihrer Vermeidung. Z. V. D. I. 1899, S. 981.
15. Heile. Vibrationsercheinungen neuer Schnellmaripfen. Schiffbau. Jahr. 8. S. 329.
16. Berlin. Mesures comparées des vibrations observées sur les croiseurs „Platan et Vesta“. B. A. T. M. 1901.
17. Riabcock. Forces d'inertie et vibration des navires. B. A. T. M. 1912, p. 233.
18. Melville. Vibration of Steam Ships. T. S. N. A. M. E. 1902. Engineering 75. 1903.

19. Lelong. Etude sur les vibrations des navires. B. A. T. M. 1894, p. 62.
20. Berlin. Sur la détermination des forces d'inertie dans les machines alternatives. J. S. T. G. 1907, p. 125.
21. O. Schlick. Our Present Knowledge of the Vibration Phenomena of Steamers. T. I. N. A. 1911, Part II, p. 121.
22. O. Schlick. Unsere gegenwärtigen Erkenntnisse der Vibrationsercheinungen bei Dampfmaschinen. J. S. T. G. 1912.
23. Dalby. The Balancing of Engines with special Reference to Marine Work. T. I. N. A. 1899, p. 145.
24. Dalby. On the Balancing of the Reciprocating Parts of Engines, including the Connecting Rod. T. I. N. A. 1907, p. 103.
25. Dalby. A Comparison between five Types of Engines, with Respect to their Inertia Forces. T. I. N. A. 1905, p. 271.
26. O. Schlick. On the Balancing of Steam Engines. T. I. N. A. 1890, p. 135.
27. Normann. Des vibrations des navires et moyens de les atténuer. Mémoire d. Génie Marin. 1892.
28. Haas. Sur les vibrations des navires et d'équilibre des machines. Revue de Mécanique 1907.
29. Brillier. Etude sur l'équilibre des machines marines. Génie Civil. 1903.
30. Lelong. Sur la détermination des forces d'inertie dans des machines alternatives. B. A. T. M. 1891, p. 125.
31. Macculpine. A Solution of the Vibration Problem. T. I. N. A., 1907, p. 598.
32. Macfarlane Gray. Geometry of Engine Balancing. T. I. N. A. 1903, p. 84.
33. Duhau. Mémoires sur la détermination des angles descaignes. B. A. T. M. 1904, p. 25.
34. Wahnreyer. Les Vibrations à bord, leur cause, simples moyens d'y remédier. B. A. T. M. 1907, p. 345.
35. Mallock. On the Vibration of Ships and Engines. T. I. N. A. 1884, p. 295.
36. Gumbel. Ebene Transversalschwingungen freier stabförmiger Körper mit variablem Querschnitt. J. S. T. G. 1893, p. 211.
37. А. Н. Крылов. Выборка судов. Курс лекций, читанных в 1907 г. автореф. сол. 6. Политехн. институт.
38. A. Kriloff and C. H. Mallock. Die Theorie des Schiffes. Encycl. d. Math. Wiss. 44, S. 549—562.
39. Б. Л. Сувычкин. К вопросу о вычислении свободных поперечных судов. Изв. ЦИВ. Политехн. институт, 1914, том XVI, стр. 576.
40. А. Н. Крылов. О расчете продольных кораблей, произвольного работной его машины. Известия Главного Морск. Инст. Петроград, 1917, том II, стр. 201.
41. A. N. Kriloff. Sur les vibrations d'un navire produites par le travail de sa machine. Изв. B. A. Haye 1918, стр. 915.
42. Prof. A. N. Kriloff. Выводы из поездки Николаева. T. I. N. A. 1924, p. 128.
43. А. Н. Крылов. Приближенное частотное пересечение обобщенными дифференциальными уравнениями. Берлин. Р. математический институт. 1923.
44. Southwell. On a Graphical Method for Determining the Frequencies of Lateral Vibrations or Whirling Speeds for a Rod of Non-uniform Cross Section. Philos. Mag. 1917. Vol. 24, p. 418—431.
45. I. G. Gumbel. Torsional Vibration of Elastic Shafts of any Cross Section and Mass Distribution and their Application to the Vibration of Ships. T. I. N. A. 1912, p. 219.

20. Vianello, K. V. D. I. 1895, 5, 1450.
 Delaporta. *Revue de Mech.* 1903, Vol. III, p. 517.
 21. Morrow. On Lateral Vibration of Bars of Uniform and Varying Cross Section. *Phil. Mag.* Vol. 10, 1885, p. 113.
 22. Morrow. On Lateral Vibration of Loaded and Unloaded Bars. *Phil. Mag.* Vol. 11, 1886, p. 334.
 23. Morrow. On Lateral Vibration of Bars Subject to Forces in the Direction of their Axes. *Phil. Mag.* Vol. 12, 1885, p. 293.
 24. Б. Я. Сухомов. О методах собственных колебаний неравномерных стержней. *Изв. Союз. Мор. Инж. Петербург, 1916*, стр. 64.
 25. Акимов. On Vibration of Beams of Variable Cross Section. *T. S. N. A. M. E.* 1928, p. 181.
 26. А. П. Чернышев. Общая теория свободных колебаний судов. Рукопись в коллекторе НИИСТ.
 27. А. П. Курлюк. О кинематическом резонансе упряжки, движущейся по изогнутой дорожке, определяющим частоту малых колебаний материальной системы П. М. Е. Н. 1933, стр. 593.
 28. J. W. Strutt (Baron Rayleigh). On General Theorems relating to Bifurcation and Instability and Steady Motion. *Phil. Mag.* March, 1875.
 29. J. W. Strutt. (Baron Rayleigh). Theory of Sound. Part I. Chap. IV, V, VIII, 1894.
 30. Chree. *Philos. Mag.* Vol. 7, 1874, p. 304.
 31. Ritz. W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Randwertprobleme. *Göttinger Nachrichten.* Math. Kl. 1899.
 32. Ritz. W. Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern. *Ann. Phys.* Bd. 28, S. 157—186.
 33. Ritz. W. Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der Mathematischen Phys. *Crelle Journ.* Bd. 135, 1903.
 34. Ritz. W. *Ouvrages complètes.* Paris, Gauthier-Villars 1917.
 35. Е. В. Краковатор. Применение метода Ритца к исследованию свободных колебаний балки. *Изв. ЦИ. Полет. Инст.* 1916, том 23, стр. 377.
 36. В. А. Горавский. Определение частоты собственных колебаний судов при помощи метода Ритца. *М. М. Е. Н.* 1923, стр. 227.
 37. T. B. I. Method of Determining the Natural Periods of Vibration of Ships. *T. I. N. A.* 1922.
 38. Павловский Г. Е. Определенные интегралы судов. Сборн. Теория и практика судостр. Вод. Инж. Петербург, 1916, стр. 178.
 39. Павловский Г. Е. *Учебник.* 1928, Vol. 1, стр. 131.
 40. H. H. Analytische Ermittlung der Kräfteverläufe verjüngter Stäbe. *Proc. I. Int. Congres. for Appl. Mech.* Delft, 1925, p. 282.
 41. Пашкович П. К вопросу о выборе функциональных функций в методе Ритца—Панца. *Курс теоретической механики* № 14—15, 1928, стр. 48.
 42. Moulin. The Lateral Vibrations of Non-uniform Bars, with Application to Ships. *Proc. of Cambridge Phil. Soc.* 1927, Vol. XXXIV, Part IV, p. 121.
 43. Nicholson. *Proc. Royal Soc. A.* Ser. 1927, p. 506.
 44. Wrinch. On the Lateral Vibration of Rods of Varying Cross Section. *Phil. Mag.* Vol. 46, 1925, p. 223.
 45. Wrinch. *Proc. Royal Soc.* Vol. C7, 1925, p. 458—508.
 46. Б. Г. Галеркин. Страницы истории. *Вест. инж.* 1925, № 19.
 47. Бененку. *S. A. M. M.* 7, (1927), K. 80—81.
 48. В. Н. Новоторцев. Метод последовательных приближений и применение к исследованию свободных колебаний нелинейных стержней. Труды Севкавказского инст. Инж. Науч. СССР № 23, 1929.
 49. В. Н. Новоторцев. То же применительно к исследованию изогнутых стержней. Труды Севкавказ. инст. В. Н. № 26, 1932.
 50. H. H. Novotorcev. To the Application of Successive Approximation Method to the Study of Non-linear Vibrations of Beams. *Phil. Mag.* Vol. 3, 1925, p. 237.
 51. H. H. Novotorcev. Graphical and Numerical Methods for Solving Strong Problems. *P. I. I. C. A. M. Delft.* 1923, 3.
 52. Бененку А. А. Применение метода Бененку—Кокса к исследованию свободных колебаний стержней. Дипл. раб. Украинск. Инж. Инст.
 53. Gallet. On the Lateral Vibration of Bars. *Phil. Mag.* Vol. 5, 1894, p. 397.
 54. Chree. *Philos. Mag.* Vol. 3, 1905, p. 125.
 55. Inglis. Natural Frequencies and Modes of Vibration on Beams of Non-uniform Mass and Section. *T. I. N. A.* 1925, p. 145.
 56. Goldbrough. A Note on the Method of Ritz for the Solution of Problems in Elasticity. *Phil. Mag.* Vol. 7, 1925, p. 342.
 57. Goldbrough. *Proc. Roy. Soc. A.* Ser. Vol. CXXVII, p. 680, 1925.
 58. Lockwood-Taylor. Ship Vibration Periods. Trans. North-East Coast Inst. of Eng. and Shipbuilders, Jan. 1928.
 59. Bailey. *Procs. of Soc. 1933.* T. I. N. A. 1925.
 60. Morley. The Calculation of Vibration and Whirling Speed. *Engineering.* Vol. 88, 1909, p. 185, 207.
 61. Kull. Z. V. D. I. Bd. 52, 1918, S. 249; 270.
 62. Blaess. Z. V. D. I. Bd. 49, 1914, S. 189.
 63. Koch. Bestimmung derbeiden Drehzahlen schnell laufender Wellen. *P. I. I. C. A. M. Zürich* 1928, p. 252.
 64. Koch. Einige Versuchsregeln von der Loe der Klaunderfütterung an Vringstücken mit der Torsion Mechanik. *Diss. Delft.* Inst. Waltsman 1923.
 65. Kayser and Troche. Beton und Eisen 1929, S. 15; 119.
 66. Fränkle. Bemerkung hinfichtlich Drehzahlen beliebiger Ordnung nach dem Verfahren von Ritz. *Ing. Archiv.* Bd. 1, 1929, S. 459.
 67. Hohenemser u. Prager. Über das Zusammenhänge nach Rayleighschen Verfahren der Schwingungsbild. *Ing. Arch.* Bd. III, 1922, S. 306.
 68. Van den Dungen. Les Equations intégrales à plusieurs paramètres et la technique des vibrations. *P. I. I. C. A. M. Zürich* 1926, p. 113.
 69. Van den Dungen. Les problèmes généraux de la rotordynamique vibrations. *Mémoires des Sciences Mathématiques.* Paris 1929, Fasc. 4.
 70. Plattner. An essay des palatons critiques de tension et de flexion. *P. I. I. C. A. M. Zürich* 1929, p. 392.
 71. Hohenemser. Praktische Wege zur angrenzenden Schwingungsbildung elastischer Systeme. *Ing. Arch.* 1930, Bd. 3, H. 271.
 72. Schwerdt. Über die Transversalschwingungen von Stäben verschiedenen Querschnitts. *P. I. I. C. A. M. Zürich.* 1928, p. 138.
 73. Howland. On the Application of Integral Equations to Whirling Speed of Shafts. *Phil. Mag.* Vol. 3, 1927, p. 514.
 74. Тимошенко. Курс теории упругости. Ч. II, 1916, стр. 206—207.
 75. Тимошенко. On the Correction for Shear of the Differential Equation of Bristlelike Beam. *Philos. Mag.* Vol. 41, 1927, p. 744.
 76. Тимошенко. On the Transverse Vibration of Bars of Uniform Cross Section. *Philos. Mag.* Vol. 43, 1925, p. 123.
 77. Nichols. Vibration of Ships. *T. I. N. A.* 1924, p. 141.
 78. Cole. The Natural Periods of Vibrations of Ships. *Trans. Inst. of Eng. and Shipbuilders of Scotland.* Dec. 1928, p. 43.
 79. Павловский П. Ф. К вопросу о периоде свободных поперечных колебаний корабля. *Корабли* № 14—15, 1929, стр. 40.
 80. Бененку А. P. The Vibration of Ships and the Use of Dynamical Models for Determining the Elasticity of Ships. *T. I. N. A.* 1926, p. 29.
 81. Calderwood. *Procs. of Soc.* Lockwood-Taylor's 1929, см. 146).

65. Moulton. On the Periods of Free Bars Immersed in Water P. Cambridge. Ph. S. XXIV, Part. IV, p. 460.

67. Frank Lewis. The Inertia of Water Surrounding a Vibrating Ship. T. S. N. A. M. E. 1929, p. 229.

68. Moulton. Some Vibration Problems in Naval Architecture. P. III. I. C. M. 1930, Stockholm, p. 28.

Mullin and Brown. Proc. Cambridge Ph. S. January 1930.

49. Lockwood-Taylor. Vibration of Ships. T. I. N. A. 1930, p. 162.

50. Schudlowsky. Die Beibringung und Messung der elastischen Biegeschwimmungen von Schiffkörpern. J. S. T. G. 1929, S. 791.

71. Rowett. Elastic Hysteresis of Steel. Proc. Royal Soc. A. Ser. 49, 1913/14, p. 328.

Föppl u. Schauf. Die Werkstoffdämpfung bei Dreh- und Biegeschwimmungsbeanspruchung. Forschungsheft. V. D. I. 235, 1930.

Kasackstedt. Die Werkstoffdämpfung bei Drehbewegungen nach dem Dauerprüfverfahren. Berlin 1926. N. K. M. Verlag.

Buzmann. Diss. Inwandschw. 1925.

Honda and Kanno. Phil. Mag. 1927, Vol. II.

72. Holzer. Biegeschwimmungen mit Berücksichtigung der Stauenergie und innerer Dämpfung. Z. A. M. M. Bd. 2 (1918), S. 212.

73. Muto. Harmonic to sea, 190 a pattern (72). Z. A. M. M. Bd. 19, 1930, S. 348.

74. Senawa. Wirkung des Rindrockens auf die Biegeschwimmung eines Stabes mit innerer Dämpfung. Z. A. M. M. Bd. 12, 1922, 275.

75. Петкович П. Ф. Об одной форме малых свободных колебаний системы, в которой геронических элементов. Изв. Ленингр. Политех. Инст. Том 32, 1929, стр. 25.

76. Dalby. The Possible Vibration of a Ship's Hull under the Action of an Unbalanced Force. Shipbuilder 1929.

Abell. W. S. Vibration of Ship. Shipbuilder, 1929.

Gallowood. Period of Vibration of Steam Vessels. T. S. N. A. M. E. 1925.

King Selter. Some Experiments on the Influence of Burning Balance of Propellers in the Vibration of Ships. T. I. N. A. 1917.

Horn. Horizontal- und Torsionsschwimmungen auf Frachtschiffen. W. R. H. 1925.

Roop. Natural Frequencies of Hull Vibrations. T. S. N. A. M. E. 1930, p. 126.

Monte Santiago Observations. W. R. H. 22, II, 1924.

Robert Sulzer. Cause and Prevention of Vibration of Motor Ships. T. I. N. A. 1929, p. 154.

77. Штенк. Гекопелле Тормона- und Biegeschwimmungen von Tragobjekten. P. II. I. C. A. M. Zürich 1925, p. 131.

Грибманн. О горизонтальных поперечных колебаниях продольных стоек. Труды Н. Т. Ком. Н. К. П. С., том 48, стр. 94.

С. Бернштейн. Исследование свободных торсионных колебаний продольных стоек. Труды Н. Т. Ком. Н. К. П. С., том 48, стр. 121.

Панкович П. Ф. О поперечных колебаниях трубчатых мостов. Изв. Мех. и Физик. Инст. Том II, стр. 14.

8. Bernstein. Über freie Horizontalschwimmungen ebener Brücken. Труды Н. Т. Н. К. П. С. Сер. 48, стр. 80.

78. N. M. Kryloff. Les méthodes de solution approchée des problèmes de la physique mathématique. Mémoires des S. Mathém. Fasc. 45. Paris, 1937.

Treffitz. Ein Gegenstück zum Ritzschen Verfahren. P. II. I. C. A. M. Zürich, 1926, p. 131.

80. Hsu. On an Application of the New Method of the Calculus of Variation to some Problems in the Theory of Elasticity. Phil. Mag. Vol. 16, 1930, p. 806, p. 808.

Conrart. Über direkte Methoden der Variationsrechnung zur Lösung von Randwertproblemen. P. I. I. C. A. M. Dell. 1929, p. 229.

Hilfermeyer. Die Methoden zur angrenzten Lösung von Randwertproblemen der Elastizität. J. Springer, Berlin, 1929.

ГЛАВНЕЙШИЕ СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

T. I. N. A. Transactions of the Institution of Naval Architects.

T. S. N. A. M. E. Transactions of the Society of Naval Architects and Marine Engineers.

H. A. T. M. Bulletin de l'Association Technique Maritime.

Z. A. M. M. Zeitschrift für angewandte Mechanik und Mathematik.

P. () J. C. A. M. Proceeding of the () International Congress for Applied Mechanics.

I. R. T. G. Jahrbuch der Schiffstechnischen Gesellschaft.

Z. V. D. I. Zeitschrift des Vereins der Deutch. Ingenieure.

H. M. E. H. Исследования Академии Наук СССР. Отдел. матем. и естествозн.

W. R. H. Werft, Reederei und Hafen.

T. H. T. R. — II. K. B. C. Труды научно-исследовательского института Н. К. П. С.

16. ВИБРАЦИЯ КОРАБЛЯ*

Вибрация судов — упругие колебания корпуса судна, вызываемые разнородными силами периодического характера. Благодаря большой частоте (редко ниже 100 периодов в минуту) уже при сравнительно небольшой амплитуде (несколько миллиметров) колебания эти отражаются неблагоприятно и на людях и на приборах, находящихся на судне. Они способны также порожать в корпусе судна явления усталости металла.

Местная вибрация, в которой участвуют отдельные лишь части судна, может быть устраняема у готового судна дополнительными усилками корпуса в районе вибрации.

В общей вибрации судна весь его корпус участвует как один упругий брус. У востроенного судна она не может быть устранена путем дополнительных усилений корпуса судна. Меры к ее устранению ищутся; уничтожение усилий, вызывающих вибрацию и надлежащий выбор периода этих усилий, если их нельзя уничтожить.

Главнейшие усилия, вызывающие общую вибрацию судна: а) неравномерные силы инерции частей машин, имеющих архаично-незаконное движение; б) силы инерции неравномерных вращающихся частей машин; в) неравномерность вращающего момента главной машины; г) неравномерность осевого давления гребных винтов; д) удары струй, отбрасываемых гребными винтами. Период их либо совпадает с периодом τ одного оборота машины (см. п. б), либо составляет от него простую долю вида $\frac{\tau}{n}$, где n — целое. В случае д) обычно n — число лопастей. Усилия эти обычно невелики и при статическом действии неспособны вызвать заметную деформацию судна. Вибрация судна становится заметной лишь в условиях резонанса, когда период возмущающей силы совпадает с одним из периодов главных свободных колебаний судна.

Обычно для почти полного устранения вибрации судна достаточно изменить период возмущающей силы на 10—15%.

* Статья написана по просьбе К. П. Боклевского в 1928 г. для Технической энциклопедии.

Такое изменение числа оборотов главной машины является наиболее действительным средством к устранению вибрации у востроенного судна и достигается временною гребнейю винта. При постройке судов рекомендуется нормальное число оборотов иметь либо не менее чем на 10—15% меньше критического, либо же на 40—50% больше критического. Последнее, чтобы вибрация не наступила при всегда возможных временных падениях



Рис. 1.

числа оборотов машины. Если машина может дать возмущающие усилия, период которых может совпасть с одним из периодов главных свободных колебаний судна, то все такие усилия должны быть тщательно уравновешены при проектировании машины.

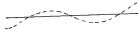


Рис. 2.

Главные свободные колебания судна — гармонические колебания, из которых складывается его колебание по вращению — в отсутствие возмущающих сил. Они обладают свойством затухаемости. Их периоды и формы зависят от жесткости и массы судна и закона их распределения вдоль него. Основные формы свободных колебаний судна — колебания: поперечные (вертикальные и горизонтальные), крутильные и продольные. Каждому роду



Рис. 3.

колебания соответствуют свои формы и периоды главных свободных колебаний. Продольные колебания наблюдаются всего реже.

Из поперечных колебаний чаще всего наблюдаются вертикальные колебания. В основном томе их пучности располагаются у концов судна и вблизи середины его. Две узловые точки получаются приблизительно (см. рис. 1) на расстоянии $\frac{1}{4}$ длины судна от каждого из его концов. На рис. 2 изображен общий характер упругой линии судна, соответствующий 2-му типу вертикальных колебаний. В ней имеются три узловые точки. В упругой линии 3-го тона узловых точек четыре (рис. 3).

За дифференциальное уравнение упругих поперечных колебаний судна обычно берут:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + g \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

где E — модуль Юнга; I — момент инерции площади поперечного сечения продольных связей судна относительно его нейтральной оси; g — масса судна, приходящаяся на единицу его длины.

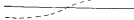


Рис. 4.

v — вертикальное перемещение судна в сечении, находящемся на расстоянии x от его левого конца; t — время.

Граничные условия:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \text{ и } \frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0 \text{ на обоих концах судна. Условие со-}$$

пряжения: v и $\frac{\partial v}{\partial x}$ непрерывны на всем протяжении судна.

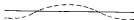


Рис. 5.

Если масса судна распределена вдоль его оси (не сосредоточена в его отдельных сечениях), то, кроме того, и $EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, а также и $\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)$ также непрерывны.

Горизонтальные поперечные свободные колебания судна вполне аналогичны вертикальным. В их дифференциальных

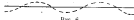


Рис. 6.

уравнениях величина I есть момент инерции судна, взятый не относительно горизонтальной, как у колебаний вертикальных, а относительно вертикальной оси.

При крутильных колебаниях сечения судна поворачиваются вокруг его продольной оси. Крутильное колебание осанного тона (рис. 4) имеет одну узловую точку, колебание 2-го тона — две узловые точки; колебание третьего тона три узла и т. д. (рис. 5 и 6). За дифференциальное уравнение крутильных колебаний судна принимают:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - \theta \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0, \quad (2)$$

где θ — угол поворота поперечного сечения судна, лежащего на расстоянии x от его левого конца; c — жесткость судна при кручении, которую можно находить по Bredt'у (см. Lorenz, *Tech. Elastizitätstheorie*, 1913, стр. 98, а также Bredt, *Zeitschr. d. Vereinig. d. Deutsche. Ing.*, 1896, стр. 815); i — полярный момент инерции массы судна, приходящийся на единицу его длины и взятый относительно оси кручения.

Граничные условия

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$$

на обоих концах судна.

Если вся масса судна распределена вдоль него (не сосредоточена в его отдельных лишь сечениях), то условия сопряжения сута: θ и $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ непрерывны на всей длине судна.

Продольные колебания судна по форме сходны с крутильными. Их дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EF \frac{\partial w}{\partial x} \right) - g \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (3)$$

где w — осевое перемещение сечения, находящегося на расстоянии x от левого конца судна; F площадь поперечного сечения продольных связей в нем.

Граничные условия и условия сопряжения — аналогичны таковым при колебаниях крутильных.

Уравнения (1)–(3) поддаются лишь численному приближенному решению. Для определения периодов и форм главных свободных колебаний судна пользоваться можно одним из следующих четырех методов.

1. Метод Рэлея (L. Rayleigh). См. Tobin, «A method of determining the natural ship vibrations», а также G. Pauletz, *Ing.*, 1905, т. 1, стр. 747. 2. Метод Ритца (W. Ritz) см. Е. Красноперов. Применение метода Ритца к последовательным свободным колебаниям. Известия Петроградского Политехнического Института 1916 г.; Б. Л. Сушеников, О вычислении свободных колебаний неэвклидовых стержней, Ежегодн. Сочин. Морск. Инж., 1916 г., Петроград. С. П. Тимошенко, Теория упругости. Часть 2, § 42. 3. Метод последовательных приближений (Morrow's) см. *Philosophical Magazine*, 1905–1906. См. также Б. Л. Сушеников *loc. cit.* Сходные по графической методу были даны также Savel'ev см. *Jahrbuch der Schiffbautechn. Gesellschaft*. 4. Метод Визелло — Коэля, название которой можно найти в статье Visello, помещенной в «Proceedings of the International Congress for Applied Mechanics, Delft, 1924, где указана и относящаяся к этой методу литература.

Для нахождения вынужденных колебаний судна под действием заданной возмущающей силы можно пользоваться методом Adama's Störmer's, применением которой к этой задаче

было дано А. П. Крыловым. См. его статьи в Ежегоднике Союза Морск. Инж. за 1917 г., а также работу «Sur la calcul de vibrations l'un n'estre produites par la temp. de la machines» в Известиях Росс. Акад. Наук за 1918 г., стр. 915.

Отмеченные методы дают достаточные средства для преодоления тех аналитических трудностей, которые связаны с нахождением свободных и вынужденных колебаний судна. В менее благоприятных условиях находится вопрос об определении тех величин, которые входят в основные уравнения (1)–(3) в качестве их коэффициентов. Здесь пока не все ясно. В частности, не выяснено: а) чему в точности следует считать для судна равным модуль Кута K ; б) все ли продольные связи корпуса в равной мере могут быть зачитываемы в то его состояние, которое охарактеризуется изгибом, скручиванием и кручением; в) все ли нагрузка судна должна в равной мере зачитываться при определении величин g и μ , особенно важен этот вопрос в отношении грузов жидких и сыпучих; г) какие погрешности вносят от применения к судну (бруску призматическому) основных формул, выведенных для бруска призматического. Это особенно относится к нахождению форм и периодов высших тонов, на которые все эти погрешности оказывают более сильное влияние. Для удовлетворительного решения данных вопросов необходима, пока отсутствующая, систематизация планомерно поставленных опытов.

При нахождении форм поперечных колебаний высших тонов следует дополнять уравнение (1) членами, учитывающими влияние вращающего момента, а также моменты сил инерции от движения мачты, сосредоточенной в каждом сечении судна.

Для грубого определения периодов вертикальных колебаний основного тона выгода пользуется эмпирической формулой Шаняка (O. Schlick):

$$\frac{40}{T} = C \sqrt{\frac{T}{F D}}, \quad (4)$$

- где T — период колебаний судна, сек.;
 I — момент инерции площади поперечного сечения миделя, м^4 ;
 P — вес судна, т;
 L — длина судна, м;
 C — коэффициент, который по Шаняку равен для судов:

океан. океан. (включая) 3 420 000
 пассажирск. 3 150 000
 грузовых велич. океанск. 2 800 000

О записи вибрации см. галерею фото.

Дальнейшую литературу вопроса можно найти в справочнике *Joboke Hilfsbuch für den Schiffbau* и у *Horfa* см. его *Technische Schiffsbaulehre*, изд. 1922. См., кроме того, статьи Б. Л. Сиденкова в Изв. Петербургского Политехнического Института, 1914 г., т. XXI.

17. ВИБРАЦИЯ КОРАБЛЯ

§ 1. Общие положения*

Корпус судна, как всякое упругое тело, способен совершать периодические упругие колебания. Чтобы обнаружить эти колебания, достаточно, сообщить какой-либо толчок или начальное отклонение, предоставить его затем самому себе. Колебания, таким образом полученные, носят наименование свободных. Их величина зависит от начального возмущения, сообщенного системе. На периоды и скорость затухания определяются исключительно устройством системы, т. е. частям и величинами отдельных масс, входящих в состав системы, характером упругой связи между ними и сопротивлением, действующим в системе.

Какой бы толчок или отклонением ни сообщался судну в начальный момент, совокупность порождаемых ими колебаний всегда можно разложить на некоторые отдельные простейшие колебательные движения, отличающиеся каждое своим периодом, своей скоростью затухания и своей специфической формой, т. е. своей особой совокупностью отношений между величинами переменных отдельных масс системы в каждый данный момент. Эти простейшие свободные колебания системы носят наименование ее главных свободных колебаний. От характера возмущения, сообщенного системе, зависит, в какой пропорции возникнут у нее все эти ее главные упругие колебания и в какой последовательности они совершаются. Иными словами, от начальных условий движения, т. е. совокупности начальных отклонений и скоростей масс системы, зависит как величина амплитуды, так и фазовый угол всех главных свободных колебаний. В случае свободных колебаний начальное возмущение системы распадается таким образом на отдельные главные колебания, которые протекают затем по времени каждое по своему ему именно присущему закону, определенному устройством системы.

Количество различных главных свободных колебаний системы равно числу степеней свободы ее, т. е. числу тех линейно независимых переменных, которыми может быть определено во всякий момент положение всех ее масс. Так как в состав корпуса

* Впервые опубликовано в Саровчанке по судостроению, т. 3, 1934.

корпус вводит множество элементов, то и число различных главных свободных колебаний корпуса также бесконечно велико. Наиболее медленные из них порождаются всегиче и наблюдаются почти во все время. При изучении упругих колебаний корпуса главное внимание уделяется поэтому им.

Если на корпус корпуса действует какая-либо периодическая внешняя сила, то суммарные перемещения всех точек корпуса во всякий данный момент складываются из некоторого колебательного движения, имеющего тот же период, что и период возмущающей силы, и свободных колебаний корпуса, зависящих от начальных условий движения и постепенно затухающих. Рано или поздно свободные колебания прекращаются. Остающийся после этого колебание, период которого равен периоду возмущающей силы, носит наименее колебания вынужденного.

Если возмущающая сила есть сила гармоническая, т. е. сила, меняющаяся в функции от времени по закону синуса или косинуса, то и соответствующая ей вынужденное колебание системы есть гармоническое колебание того же периода. Амплитуда этого колебания зависит не только от амплитуды возмущающей силы и устройства системы, но и от соотношения между частотой возмущающей силы и частотами свободных колебаний системы. Колебание это по отношению к возмущающей силе совершается с некоторым сдвигом фаз, зависящим главным образом от относительной величины сопротивлений, действующих в системе, и от того же соотношения между периодом возмущающей силы и периодами главных свободных колебаний ее. Форма вынужденных колебаний также существенно образом зависит от этого соотношения.

Если период возмущающей гармонической силы достаточно велик, то судно под действием такой силы деформируется статически: его прогиб во всякий данный момент равен статическому прогибу под действием рассматриваемой силы, т. е. прогибу, вычисленному в предположении, что сила эта уравновешивается реакцией опор рассматриваемой упругой системы, а если танков системы нет, то силами инерции от движения всей системы, как твердого целого. По мере постепенного увеличения частоты возмущающей силы амплитуда колебаний корпуса постепенно растет, достигая в первый раз своего максимума, когда период возмущающей силы достигает некоторого значения, близкого к периоду основного, т. е. наиболее медленного из главных свободных колебаний корпуса. В этот момент форма вынужденных колебаний корпуса близка к форме основного из главных свободных колебаний его, амплитуда же этих колебаний тем больше, чем меньше величина сопротивлений, которые корпусу в своем колебательном движении приходится преодолевать. Когда период возмущающей силы достигает этой величины, то говорят, что наступил резонанс между возмущающей силой и основным из главных свободных колебаний корпуса.

При дальнейшем увеличении частоты возмущающей силы вынужденные колебания корпуса сначала увеличиваются, обычно довольно быстро и тем быстрее, чем меньше сопротивления действуют на колеблющуюся систему, потом же постепенно нарастают, достигая своего второго максимума приблизительно тогда, когда период возмущающей силы становится равен периоду второго из главных свободных колебаний корпуса. В этот момент, т. е. в момент резонанса со вторым из главных свободных колебаний корпуса, форма вынужденного колебания близка к форме второго главного свободного колебания рассматриваемой упругой системы. Величина, которой в этот момент достигает амплитуда вынужденных колебаний, зависит опять-таки в существенной мере от сопротивлений, действующих в системе. Дальнейшее увеличение роста частоты возмущающей силы сопровождается сначала некоторым падением амплитуды вынужденных колебаний, притом тем более резким, чем меньше относительная величина сопротивлений, затем резонансом с третьим главным свободным колебанием корпуса и т. д.

Все области отдельных резонансов сопротивления почти не влияют на амплитуду вынужденных колебаний корпуса. В моменты резонансов динамический множитель, т. е. отношение амплитуды вынужденных колебаний к статическому отклонению под действием соответствующей силы, зависит почти исключительно от относительной величины сопротивлений, действующих в системе. Чем меньше сопротивление, тем больше динамический множитель в момент резонанса и тем резче бывает выражен самый резонанс, т. е. тем резче падает амплитуда колебаний корпуса при удалении от резонанса. Сопротивления, встречаемые корпусом при его вибрации, относительно весьма невелика (по наблюдениям Локкуд—Тайлора динамический множитель в момент резонанса с основным из главных свободных колебаний корпуса достигает иногда таких цифр как 100). Резонансы поэтому у упругих колебаний корпуса выражены резко и, изменив частоту возмущающей силы на 10—15% в ту или другую сторону, можно почти полностью выйти из области резонанса. По наблюдениям Локкуд—Тайлора наименьше воле критической скорости числа оборотов машины на 2—3% уже бывает достаточно для того, чтобы амплитуда вынужденных колебаний уменьшилась вдвое. Сами возмущающие силы, действующие на корпус, по сравнению с его массой и жесткостью весьма невелики. Поэтому упругие колебания корпуса бывают выражены более или менее резко только вблизи резонансов. Отсюда следует, что если вибрация имеет местный характер, т. е. если вибрирует заметно только какое-либо отдельная часть корпуса корпуса, какое-либо палубное перекрытие, переборка, рубка, мачта, подкрепление под мезанин и т. д., то устранить вибрацию можно сравнительно очень легко: путем установки у этой части конструкции какого-либо дополнительного подкрепления, изменяющего жесткость этой части кон-

струкции и этим повышающего частоту ее свободных колебаний. Борьба с таким путем с общей вибрацией корабля конечно невозможно, так как это потребовало бы коренной переделки всего корпуса в целом.

Предварительные подсчеты вибрации корабля имеют особое значение в отношении общей вибрации корабля, и при проектировании кораблей обычно ограничиваются только ими.

Упругие колебания, свойственные судам в целом — это все те общие колебания, которые могут совершать длинные упругие стержни.

Основные типы упругих колебаний: 1) поперечные вертикальные (при которых судно изгибается в своей вертикальной плоскости); 2) поперечные горизонтальные (в которых судно колеблется параллельно направлению ватерлинии); 3) крутильные (при которых судно скручивается); 4) продольные, при которых судно удлиняется и укорачивается без поворота его поперечных сечений. Для того чтобы все эти четыре рода колебаний можно было рассмотреть как независимые, необходимо, чтобы геометрические места центров тяжести как всех масс, лежащих в отдельных поперечных сечениях корабля, так и жесткостей всех продольных связей корабля были одной и той же прямой линией. Если это условие не соблюдается, то колебания продольные неотделимы от колебаний поперечных вертикальных, а крутильные — от поперечных горизонтальных. Хотя упомянутые условия оказываются соблюденными только в некоторых исключительных частных случаях, вообще же продольные колебания корабля всегда в некоторой степени сопутствуют его вертикальным поперечным колебаниям, крутильные же колебания — поперечным горизонтальным, и наоборот, тем не менее все упомянутое выше четыре основных типа колебаний судного корпуса как упругого целого принято рассматривать независимо, либо практически сакр разделяются у всякого реального корабля.

Чаще всего наблюдаются у судовых корпусов колебания поперечные вертикальные. Основное колебание этого типа или все колебания, которые свойственны кораблю как целому, отличается обычно минимальной частотой. За ними следуют колебания поперечные горизонтальные, крутильные и наконец продольные, которых в чистом виде у кораблей почти не зарегистрировано, благодаря тому, что частота основного колебания этого последнего типа относительно слишком высока, чтобы сакр могла быть выявлена теми периодическими условиями, которые на кораблях обычно действуют.

Как всякому упругому стержню, масса которого распределена вдоль всей его длины, корпус корабля свойственно множество главных свободных колебаний каждого из четырех упомянутых выше типов. Все колебания определенного типа отличаются друг от друга своей частотой, скоростью затухания и формой. Наиболее медленное колебание каждого типа может наименоваться

основным колебанием этого типа; остальные колебания принято измерять в порядке возрастания их частот и называть вторым, третьим и так далее колебаниями вертикальными, горизонтальными, крутильными или продольными, в зависимости от их типа или соответственно колебаниями второй, третьей и т. д. частоты определенного типа. По аналогии с акустикой вместо колебаний второй, третьей и т. д. частоты говорят также колебание второго, третьего и т. д. тона. Так как каждое отдельное колебание определенного типа отличается от всех остальных колебаний этого типа своим особым ему свойственным числом узловых точек, т. е. тех по-



Рис. 1.



Рис. 2.

речных сечений корабля, которые не участвуют в этом колебании, то вместо колебание того или иного тона говорят также колебание одноузловое, двухузловое, трехузловое и т. д.

Свободно плавающий корабль может перемещаться как твердое целое, не деформируясь: а) вперед и назад, б) вверх и вниз; в) вращаясь вокруг своей вертикальной оси. Эти три движения не носят колебательного характера (их период бесконечно велик). Остальные три движения, которые корабль может совершать как твердое целое, суть: г) не имеющие узлов крутильное колебание, т. е. боковая кренка; д) не имеющие узлов вертикальное колебание (кренка вертикальная); е) одноузловое поперечное колебание (кренка килевая). Все эти движения обычно исключаются из числа упругих колебаний корабля, ибо корпус корабля при них предполагается недеформируемым, как почти недеформируемым. К числу главных свободных упругих колебаний, из которых складывается вибрация корпуса всякого корабля,



Рис. 3.



Рис. 4.

относятся таким образом: 1) основное двухузловое поперечное вертикальное (рис. 1); 2) трехузловое вертикальное поперечное колебание, или вертикальное колебание второго тона (рис. 2); 3) четырехузловое вертикальное поперечное колебание, или вертикальное поперечное колебание третьего тона (рис. 3) и т. д.; 4) также же колебания, но горизонтальные; 5) основное одноузловое крутильное колебание (рис. 4); 6) двухузловое крутильное колебание или крутильное колебание второго тона, форма которого в основных чертах характеризуется рис. 1; 7) трехузловое крутильное колебание или крутильное колебание третьего тона

(рис. 2); 8) четырехугольное круглявое колебание (круглящее четвертого тона) и т. д.; 9) также же колебания как в пп. 5—8, но продольные.

Наиболее заметной величины достигают обычно у судовых корпусов лишь колебание основное вертикальное и такое же горизонтальное и реже круглявое; из колебаний двухугольных только колебание вертикальное, реже горизонтальное; из колебаний же трехугольных почти исключительно колебание вертикальное.

Если на корпус впрямь действует гармоническая возмущающая сила, то по мере роста частоты возмущающей силы получается сначала резонанс с основным вертикальным колебанием корпуса, потом колебание это несколько стихает и становится отчетливо видимым обычно основное поперечное горизонтальное колебание; затем колебание вертикальное второго тона, основное круглявое и т. д., причем последовательность, в которой выделяется отдельная величина, зависит от соотношения периодов их. Не исключены случаи и резонанса сразу с несколькими колебаниями различных тонов, например, с основным горизонтальным и колебанием второго тона вертикальным и т. п.

Всюкую негармоническую периодическую возмущающую силу можно представить разложенной в ряд Фурье, т. е. трактовать как сумму целого ряда гармонических сил, отличающихся различной частотой.

Основной гармоникой возмущающей силы называется та, период которой равен периоду возмущающей силы τ . Угловая частота этой гармонки

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau}$$

Второй гармоникой возмущающей силы, или возмущающей силой второго порядка, называется гармоника, частота которой 2ω . Третьей гармоникой, или возмущающей силой третьего порядка, называется гармоническая составляющая возмущающей силы, частота которой 3ω , и т. д. Амплитуды этих гармоник очень быстро уменьшаются с увеличением порядка гармонки, и практическое влияние их на корпус корабля оказывают обычно лишь гармонки основные и несколько других, по своему порядку близких к ним. Если n — порядок гармоник последней в этом ряду, т. е. последний из тех, которые оказывают на корпус корабля хоть какое-либо влияние, то при постепенном увеличении числа оборотов машины сначала $n-1$, затем $(n-2)\pi$, $(n-3)\pi$ и т. д. гармоника возмущающей силы входит последовательно в резонанс с различными главными свободными колебаниями судна в порядке возрастания частот последних. Последовательность этих резонансов определяется соотношением между периодами всех главных свободных колебаний корабля. Основной задачей теории вибрации судов является определение того, каких гармоник возмущающей силы следует избегать при проектиро-

вании данного корабля и какая амплитуда может быть допущена у отдельных гармоник возмущающей силы для того, чтобы вибрация данного корабля не превысила допустимых пределов.

В соответствии со всем изложенным выше эта основная задача распадается на ряд частных задач, главнейшими из которых являются: определение форм и периодов всех главных свободных колебаний в зависимости от их типа и номера тона; определение величин вынужденных колебаний корабля под действием периодических сил; выяснение тех мероприятий, с помощью которых вибрация может быть сведена у данного или проектируемого судна в границы допустимого.

§ 2. Определение периодов и форм главных свободных поперечных колебаний корабля

1. Основные предельные расчеты. При рассмотрении главных свободных колебаний корабля его принимают за прямой длинный стержень переменного сечения, к которому прилагается все основное зависимость, на которых основывается расчет прямых пружинных балок. Обычно расчет ведут в предположении, что деформация корпуса корабля определяется вполне его изгибом, т. е. укорочением и сжатием продольных связей корабля. Поправки на влияние сдвигов в бортах судна под действием перерезающих сил вводятся особо, если ответ желательно получить более точный. Таким образом предполагается также, что всю массу стержня, которым мысленно заменяют корабль, можно считать в каждом поперечном сечении корабля сосредоточенной на его упругой линии. Поправку на влияние моментов сил инерции, происходящих от вращения поперечных сечений корабля, вводят опять-таки, если та потребуется, особо.

2. Влияние забортной воды. Очень важный вопрос о том, каковы те условия, которые прилагаются к корпусу при его вибрации забортной водой. Различают влияние забортной воды: гравитационное; демпфирующее; вынужденное.

Гравитационное влияние забортной воды сводится к тому, что когда то или иное сечение корабля погружается в воду, то судно со стороны воды получает дополнительную силу поддержки, равную весу воды, вытесняемой кораблем при его погружении в воду. Влияние это совершенно отсутствует при колебаниях горизонтальных. В случае вертикальных колебаний его можно учесть, представив себе, что судно повиснет как бы на сплюснутом упругом основании, реакция которого, отнесенная к единице длины корабля, есть $2\delta\delta\epsilon$, где δ — удельный вес воды; $\delta\epsilon$ — полуширина грузовой ватерлинии в рассматриваемом сечении корабля; ϵ — вертикальное перемещение корабля в том же месте. Влияние это, играющее очень существенную роль в теории качки корабля, оказывается учитываемым в вопросах упругих колебаний его корпуса, ибо жесткость упомянутого выше упругого основания начисто

мала по сравнению с жесткостью самого корабля. Влияние это, если его учесть, изменяет период собственных главных свободных упругих колебаний корабля, обычно не более чем на 1—2% (мы пренебрегаем). Поэтому как в случае горизонтальных, так и в случае вертикальных колебаний расчет ведут в предположении, что судно шпангоут во внешнему пространству не прикреплено и колеблется как совершенно свободный упругий стержень.

Демпфирующее влияние заборной воды пока еще изучено очень плохо, но все те сведения, которые к настоящему времени по данному вопросу накоплены, показывают, что влияние это весьма невелико даже по сравнению с демпфирующим влиянием упругого твистереза и во всяком случае не может иметь большого влияния на периоды главных свободных колебаний корабля. При определении этих периодов демпфирующим влиянием заборной воды поэтому пренебрегают.

Инерционным влиянием заборной воды также очень долго пренебрегали. Когда, однако, было сделано несколько попыток сопоставить результаты теоретического подсчета вибрации с результатом наблюдения ее у плавающих судов, с одной стороны, и было поставлено несколько специальных опытов со стержнями, вибрировавшими сначала в воздухе, а затем на поверхности воды, с другой стороны, то выяснилось, что инерционным влиянием заборной воды пренебрегать нельзя: к вибрирующему кораблю как бы присоединяется довольно большие массы заборной воды, сумма которых есть величина того же порядка, что и масса самого корабля. Вопрос о точном учете величин присоединенных масс в настоящее время еще не получил окончательного разрешения: существуют два различных способа учета этого влияния — способ Франкис—Лисенс (*Frankis—Lissens*) и способ Локауд—Тайлора (*Lockwood—Taylor*), дающих довольно близкие результаты.

По Лисенсу вес воды, присоединяющийся к каждой точке вибрирующего корабля, будучи отнесен к единице длины корабля, может быть подсчитан с помощью зависимости

$$r = 0,5 \pi \delta \delta' \rho e J, \quad (1)$$

где δ — удельный вес воды в тоннах на 1 м³;
 δ' — полуширина судна в данном сечении по действующей ватерлинии, м;
 e — коэффициент, зависящий от формы очертания погруженной в воду части рассматриваемого шпангоута и определяемый с помощью графиков на рис. 5—10;
 J — поправочный коэффициент, учитывающий неплоскостность потока воды возле вибрирующего судна и вычисляемый с помощью данных табл. 1;
 r — присоединенный вес воды в тоннах на 1 мет. м длины судна. Порядок пользования этими графиками таков. В различных точках длины корабля проводится ряд поперечных сечений, которые и вычерчиваются с помощью ординат, откладываемых с теорети-

ческого чертежа в таком масштабе, чтобы углубление корабля по данному шпангоуту изображалось отрезком той же длины, что и на рис. 5—12. Если отношение ширины судна к осадке совпадает в данном сечении корабля с одной из величин этого отношения, для которого имеются соответствующие кривые на

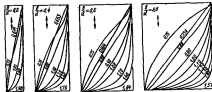


Рис. 5.

Рис. 6.

Рис. 7.

Рис. 8.

рис. 5—12, то ширину судна по ватерлинии откладываются на этом чертеже в том же масштабе, что и углубление корабля.

Сопоставляя форму рассматриваемого шпангоута исследуемого корабля с формами двух ближайших к нему шпангоутов,

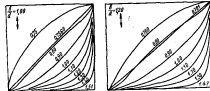


Рис. 9.

Рис. 10.

для которых рис. 5—12 дают коэффициент e , можно определить величину этого коэффициента для рассматриваемого сечения исследуемого корабля. Если отношение полуширины шпангоута δ к углублению его d не совпадает с одним из тех, для которых имеются графики на рис. 5—12 (например, если $\delta/d = 1,3$), то приходится вычертить рассматриваемый шпангоут в двух указанных масштабах ширины, приняв отклонение полуширины шпан-

Отношение длины судна L к ширине B во ВЛ	3	4	5	6	7	8
J для осевого 2-ухлового колебания	0,56	0,635	0,70	0,755	0,79	0,82
J для 3-ухлового колебания	0,47	0,555	0,625	0,68	0,73	0,76

гоута во интервалы к углублению к двум ближайшим значениям, для которых рис. 5—12 содержат соответствующие графики.



Рис. 11.

достью), можно построить кривую для массы воды, присоединяемой в каждой данной точке корпуса к единице его длины.

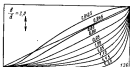


Рис. 12.

Выведенные данные относятся к вертикальным колебаниям корабля.

Локкуд—Тайлор рекомендует несколько более простой метод приближенной оценки количества воды, участвующего в вертикальных колебаниях корабля.

$$r = \delta K F \frac{\delta}{82} c, \quad (2)$$

Таблица 1

9	10	11	12	13	14	15	16	17
0,84	0,86	0,87	0,885	0,90	0,91	0,92	0,93	0,94
0,79	0,815	0,83	0,85	0,86	0,87	0,89	0,90	0,91

где r и δ имеют те же значения, что и в формуле (1);

F — площадь погруженной части рассматриваемого шпангоута, м²;

b — ширина судна при этом шпангоуте, м;

d — углубление судна при этом шпангоуте, м;

c — коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения шпангоута, значения которого берутся из табл. 2;

K — поправка на неэквивалентность потока, значения которой берутся из табл. 3.

Примечания 1. Для эллиптической обшивки $c = 1$.

2. Для шпангоутов, отличающихся от прямоугольного таким же количеством и ширины, при котором коэффициент поправки эквивалента есть 0,86, коэффициент c меньше, чем для сечения прямоугольного, приблизительно на 10%.

3. Приближенно можно принять вообще $c = 1$.

При горизонтальных поперечных колебаниях корабля присоединяемый вес коле массы по Локкуд—Тайлору может быть принятым (в тоннах на 1 нос. м корабля) базисом $0,8 d^2$, где d — осадка судна по данному шпангоуту в м; в оконечностях же — осадка $0,6 d^2$.

Таблица 2

Значение коэффициента c

прямоугольного сечения	Шпангоут				
	треугольного сечения		из двух круглых стг		
	$b:d$	c	$b:d$	c	c
4	1,07	2	1,19	2	1,00
3	1,12	1,5	1,13	1,5	1,03
2,5	1,15	1	1,06	1,0	1,04
2	1,19	0,5	0,98	0,5	1,01

Отношение длины судна к гиреве	6	7	8	9	10
К для 2-уровневого колебания	0,674	0,724	0,764	0,797	0,825
К для 3-уровневого колебания	0,564	0,643	0,682	0,723	0,760

3. Исходные данные для расчета. Исходными данными для предварительного определения периода главных свободных колебаний колебаний корабля являются:

а) кривая веса судна на единицу его длины (в дальнейшем предположим, что эта кривая приведена к стандартному виду и дает средний вес судна на единицу его длины для каждого из 20 равных отрезков его полной длины);

б) кривая веса присоединенной массы воды (ее можно построить одним из двух указанных выше способов);

в) кривая моментов инерции площадей поперечных сечений продольных связей корабля, вычисленные обычными приемами с учетом всех тех продольных связей, которые покрывают по длине корабля не менее 10% его полной длины.

Известны, также прогиб, а равно и потерявшие устойчивость при сжатии, выводится в расчет с редуцированными коэффициентами, как и при подсчете элементов эквивалентного бруса во втором приближении. При расчетных вертикальных колебаниях корабля моменты инерции вычисляются относительно горизонтальной нейтральной оси поперечного сечения; при расчетных колебаниях горизонтальных — относительно вертикальной оси. Сечения всех из стальных стоек заменяются эквивалентными сечениями стальных связей путем умножения их фактической площади на отношение модуля Юнга данной связи к нормальному модулю Юнга у стальной конструкции, принимаемому обычно равным $2 \cdot 10^6$ дин. Вычетов на заклепочные отверстия не делается. Шарниры листов берутся теоретические, т. е. между центрами продольных связей. При вычислении величин моментов инерции судна особое внимание следует обращать на правильное определение жесткости судна на протяжении средних двух третей его длины.

Если предполагается вычисление прогиба с учетом деформаций от сдвигов в стенках профиля, то необходимо дополнительно иметь кривую приведенных площадей стенок эквивалентного бруса, за какую площадь можно принимать при вычислении вертикальной вибрации произведение из высоты судна на среднюю высоту суммарную толщину его бортов и внутренних продольных переборок возле данного шпангоута; при вычислении же горизонтальной вибрации — произведение из ширины судна и

суммы средних по ширине корабля толщин зауженных и динтовых перекрытий. Если предполагается учесть, кроме того, поправку на влияние сил инерции вращательного движения, то необходимо дополнительно иметь еще кривую радиусов инерции веса, принимающих участие в этом вращательном движении, вычисленных относительно соответствующей нейтральной оси.

Основные обозначения:

- l — полная длина корабля, м;
- g — ускорение силы тяжести, м/сек²;
- E — модуль Юнга, принимаемый равным $2 \cdot 10^6$ дин/см² = $2 \cdot 10^9$ н/м²;
- G — модуль сдвига, принимаемый равным $0,770 \cdot 10^6$ отн = $7,70 \cdot 10^8$ н/м²;
- q — вес 1 пог. ж длиной судна, кг;
- r — вес воды, присоединенной к 1 пог. ж длины корабля, кг;
- I — моменты инерции площади поперечного сечения продольных связей корабля, участвующих в его изгибе, м⁴;
- ω — приведенная площадь стенок эквивалентного бруса, м²;
- e — радиус инерции веса корабля, участвующих во вращательном движении его поперечных сечений, м;
- λ_k — угловая частота k -го главного свободного поперечного колебания корабля, сек.⁻¹;
- τ_k — период этого колебания в секундах, связанный с величиной λ_k соотношением

$$\tau_k = \frac{2\pi}{\lambda_k}; \quad (3)$$

ν_k — число колебаний в минуту, связанное с λ_k и τ_k соотношением

$$\nu_k = \frac{60}{\tau_k} = \frac{60\lambda_k}{2\pi} = 9,55\lambda_k; \quad (4)$$

η — координата, измеренная вдоль оси корабля от его крайней кормовой оконечности, м;

ξ — вспомогательный аргумент, определенный соотношением

$$\xi = x/l; \quad (5)$$

$v = v(x) = v_1 + v_2$ — ордината упругой линии корабля в рассматриваемый момент в рассматриваемом его поперечном сечении, суммарная от изгиба и сдвига;

v_1 — то же от изгиба, т. е. укорочения и сжатия продольных связей корпуса корабля;

v_2 — то же от сдвига в стенках эквивалентного бруса под действием переизменяющихся усилий;

V_1 — потенциальная энергия изгиба, определяемая зависимостью

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{v_1'''}{l} \right)^2 dx; \quad (6)$$

V_1 — потенциальная энергия корпуса,

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^l G \omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 dz; \quad (7)$$

V — полная потенциальная энергия деформации корпуса корабля:

$$V = V_1 + V_2; \quad (8)$$

$M(z, t)$ — кинематический момент в данном сечении корабля в данный момент;

T_1 — кинетическая энергия поступательного поперечного перемещения всех масс, участвующих в колебаниях корабля, т. е.

$$T_1 = \frac{1}{2g} \int_0^l (r - q) \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 dz; \quad (9)$$

T_2 — кинетическая энергия вращательного движения поперечных сечений корабля:

$$T_2 = \frac{1}{2g} \int_0^l q \omega^2 \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 dz; \quad (10)$$

T — полная кинетическая энергия всей системы:

$$T = T_1 + T_2; \quad (11)$$

4. Определяемые частоты основного свободного колебания в первом приближении производятся обычно без учета влияния сдвигов и вращений поперечных сечений, т. е. принимаем:

$$T = T_1; \quad V = V_1; \quad \omega_0 = 0.$$

Простейшую вычислительную схему дает для этого метода Рунге, следуя которой можно все вычисление разбить на следующие операции:

Операция 1. Выбирают какую-либо функцию $\varphi_1(z)$, по форме приближающуюся к форме упругой линии корабля в основном его поперечном колебании, при этом подожную условиям уравновешенности сил инерции, т. е. уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l (r + q) \varphi_1(z) dz &= 0; \\ \int_0^l (r + q) (z - 0,5l) \varphi_1(z) dz &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

или, что то же, условиями

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l (r + q) \varphi_1(z) dz &= 0; \\ \int_0^{0,5l} (r + q) \varphi_1(z) dz &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12')$$

Такую функцию можно всего проще разыскать в форме

$$\varphi_1(z) = \alpha_0 + \beta_1 \left(\frac{z}{l} - 0,5 \right) + \sin \pi \frac{z}{l} = \alpha_0 + \beta_1 (\xi - 0,5) + \sin \pi \xi. \quad (13)$$

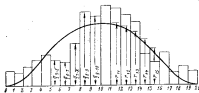


Рис. 13.

для чего следует лишь определить постоянные α_0 и β_1 из уравнений (12), в развернутом виде имеющих вид:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 \int_0^l (r + q) d\xi + \beta_1 \int_0^l (r + q) (\xi - 0,5) d\xi + \\ + \int_0^l (r + q) \sin \pi \xi d\xi &= 0; \\ \alpha_0 \int_0^l (r + q) (\xi - 0,5) d\xi + \beta_1 \int_0^l (r + q) (\xi - 0,5)^2 d\xi + \\ + \int_0^l (r + q) (\xi - 0,5) \sin \pi \xi d\xi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12'')$$

Кривая для r (кривая присоединенной массы воды), если построить ее по одному из вышеприведенных правил, получается плавной. Все интегралы, в которые входит r , легко вычисляются по этому с помощью правила трапеций. Кривая веса самого судна

Таблица 4

№ отсеков	1	2	3	4	5	6	7	8	Примечание
r	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	
0	0	-0,50			0				1. Столбцы 6-8 заполняются с помощью таблиц натуральных чисел. 2. Несомые интегралы связаны с вычислением в таблице сумм r с помощью равенств: $\int r d\xi = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^n r_i$ $\int r(\xi - 0,5) d\xi = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^n r_i$ $\int r(\xi - 0,5)^2 d\xi = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^n r_i$ и т. д.
1	r_1	-0,45			0,156				
2	r_2	-0,40			0,309				
3	r_3	-0,35			0,454				
19	r_{19}	+0,45			0,156				
20	0	+0,50			0,309				
Суммы	$\sum_{i=1}^n r_i$		$\sum_{i=1}^n r_i$	$\sum_{i=1}^n r_i$		$\sum_{i=1}^n r_i$	$\sum_{i=1}^n r_i$		

(кривая для g) обычно приводится в проектах в форме ступенчатой кривой, состоящей из двадцати прямоугольников равной длины. Все интегралы, в которые входит g , удобнее всего вычислять с помощью правила средних ординат.

Пользуясь обозначениями на рис. 13, можно все вычисления уложить в табл. 4 и 5.

Подсчитав суммы $\sum_{i=1}^n r_i$ и $\sum_{i=1}^n g_i$ с помощью этих таблиц, составляют уравнения (12'')

$$\alpha_4 (\sum_{i=1}^n r_i + \sum_{i=1}^n g_i) + \beta_1 (\sum_{i=1}^n r_i + \sum_{i=1}^n g_i) + (\sum_{i=1}^n r_i + \sum_{i=1}^n g_i) = 0$$

$$\alpha_1 (\sum_{i=1}^n r_i + \sum_{i=1}^n g_i) + \beta_1 (\sum_{i=1}^n r_i + \sum_{i=1}^n g_i) + (\sum_{i=1}^n r_i + \sum_{i=1}^n g_i) = 0 \quad (12'')$$

и решив их находят α_2 и β_2 .

Примечание 1. Если расположение масс относительно центра симметрично, то D выйдет равным нулю и для нахождения α_2 достаточно составить и решить уравнение

$$\alpha_2 (\sum_{i=1}^n r_i + \sum_{i=1}^n g_i) + (\sum_{i=1}^n r_i + \sum_{i=1}^n g_i) = 0 \quad (12''')$$

Таблица 5

№ отсеков	1	2	3	4	5	6	7	8	Примечание
g	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	
0-1	g_{0-1}	-0,475			0,0785				1. Столбцы 6-8 заполняются с помощью таблиц натуральных чисел. 2. Несомые интегралы связаны с вычислением сумм g с помощью равенств: $\int g d\xi = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^n g_i$ $\int g(\xi - 0,5) d\xi = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^n g_i$ $\int g(\xi - 0,5)^2 d\xi = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^n g_i$ и т. д.
1-2	g_{1-2}	-0,425			0,233				
2-3	g_{2-3}	-0,375			0,388				
3-4	g_{3-4}	-0,325			0,542				
4-5	g_{4-5}	-0,275			0,697				
18-19	g_{18-19}	0,425			0,233				
19-20	g_{19-20}	0,475			0,0785				
Суммы	$\sum_{i=1}^n g_i$		$\sum_{i=1}^n g_i$	$\sum_{i=1}^n g_i$		$\sum_{i=1}^n g_i$	$\sum_{i=1}^n g_i$		

Таблица 6

1	2	3	4	5	6	7
№ сегментов	Ординаты кривой веса последовательной воды	Суммы абарто	$\frac{1}{2} \times (3)$	Ординаты кривой собственного веса	(4)+(5)	
					Φ_{n-1}	Φ_{n-2}
0	r_0					0-1
1	r_1	$r_0 + r_1$	$0,5(r_0 + r_1)$	Φ_{n-1}	Φ_{n-1}	
2	r_2	$r_0 + r_2$	$0,5(r_0 + r_2)$	Φ_{n-2}	Φ_{n-2}	1-2
3	r_3	$r_0 + r_3$	$0,5(r_0 + r_3)$	Φ_{n-3}	Φ_{n-3}	2-3
4	r_4	$r_0 + r_4$	$0,5(r_0 + r_4)$	Φ_{n-4}	Φ_{n-4}	3-4
.	4-5
.
18	r_{18}					18-19
19	r_{19}	$r_{18} + r_{19}$	$0,5(r_{18} + r_{19})$	Φ_{n-18}		
20	r_{20}	$r_{18} + r_{20}$	$0,5(r_{18} + r_{20})$	Φ_{n-20}		19-20

2. Вместо того, чтобы вычислять суммы $\sum_{i=0}^n r_i$ и $\sum_{i=0}^n \Phi_{i-1}$ отдельно в двух разных таблицах, можно все вычисление выполнить в форме табл. 5, т. е. по правую сторону отделить. Для этого следует лишь внести во вторую строку табл. 5 не ординаты кривой собственного веса корабля, а средние для каждого отрезка участка значения суммарного веса с единицы длины Φ_{i-1} всей выходящей системы, включая и вес заборной воды. Вычислить их можно и с помощью табл. 6.

3. Если кривая собственного веса задана не в форме ступенчатой кривой, а в виде некоторой плавной кривой, такой же как кривая притока, то вместо масс воды, то есть вместо сумм $\sum_{i=0}^n r_i$ можно производить вычисления в табл. 4, вводя в ее второй столбец вместо ординат кривой веса притока значения r_i корабля или ординаты кривой полного веса, т. е. значения $r_i + \rho$.

Операция 2. Определив постоянные α_1 и β_1 , вычисляют с помощью формулы (13) ряд частных значений функции $\varphi_1(\xi)$ для равноудаленных значений ординаты ξ . Если все вычисления ведутся с помощью таблиц вида 5, то $\varphi_1(\xi)$ вычисляется для ξ равных последовательно 0,025; 0,075; 0,125; 0,175 и т. д. Если все вычисления ведутся с помощью табл. 4, то $\varphi_1(\xi)$ подсчитывается для значений ξ , равных 0,0; 0,05; 0,10; 0,15; 0,20 и т. д. В первом случае вычисления в некоторых значениях $\varphi_1(\xi)$ выполняются в табл. 7, во втором — в табл. 8.

Таблица 7

1	2	3	4	5	6	Примечание
№ участков	ξ	$\beta_1(\xi-0,5)$	$\beta_1(\xi-0,5) + \alpha_1 \sin \pi \xi$	$\alpha_1 \times \xi$	$\varphi_1(\xi)$	
0-1	0,025				0,0785	При составлении таблицы приняты $\alpha_1 = \beta_1 = 2$. Столбцы 6-8 получаются путем сложения столбцов 4-го и 5-го
1-2	0,075				0,333	
2-3	0,125				0,368	
.	.				.	
.	.				.	
18-19	0,925				0,233	
19-20	0,975				0,0785	

Таблица 8

1	2	3	4	5	6	Примечание
№ сегментов	ξ	$\beta_1(\xi-0,5)$	$\beta_1(\xi-0,5) + \alpha_1 \sin \pi \xi$	$\alpha_1 \times \xi$	$\varphi_1(\xi)$	
0	0,00			0		1. $\alpha_1 = \beta_1 = 2$. Столбцы 6-8 получаются путем сложения столбцов 5-го и 4-го
1	0,05			0,156		
2	0,10			0,309		
3	0,15			0,454		
.	.			.		
19	0,95			0,156		
20	1,00			0,000		

Операция 3. Определив указанным выше способом необходимые значения функции $\varphi_1(\xi)$, получают:

$$v = \varphi_1(\xi) \sin \lambda, t \quad (14)$$

и вычисляют λ_1 с помощью формулы

$$\lambda_1^2 = \frac{\int_0^t \pi^2 [\varphi_1(\xi)]^2 d\xi}{\int_0^t \frac{\pi + \xi}{\xi} \varphi_1^2(\xi) d\xi} \quad (15)$$

$$\lambda = \frac{\pi^2 E I_0 g}{D_{20} B} \quad (15)$$

где

$$A = \int_0^1 \frac{I}{I_0} [\sin(\pi \xi)]^2 d\xi, \quad (15')$$

$$B = \int_0^1 \frac{r+g}{g_0} [\varphi_1(\xi)]^2 d\xi. \quad (15'')$$

з I_0 и g_0 — два произвольно выбираемых частных значения величин I и $g+r$, за которые всего удобнее принимать круглые цифры, близкие к средним значениям I и $r+g$.

Если кривая для I плавная, то интеграл A легко берется по правилу трапеций, для чего может служить схема, данная в табл. 9.

Если кривая для $r+g$ приведена к виду некоторой плавной кривой, то интеграл B вычисляется с помощью таблицы, аналогичной табл. 9. Если кривая суммарного веса $r+g$ приведена к виду ступенчатой кривой, состоящей из 20 прямоугольников одинаковой ширины, то вычисление интеграла B может быть выполнено с помощью табл. 10, в которую вносятся значения $\varphi_1(\xi)$, подсчитанные для середины длины каждого из двадцати участков, на которые разбивается длина корабля.

Разыскивая с помощью табл. 9 и 10 суммы \sum_1 и \sum_2 , можно для искомого λ воспользоваться непосредственно зависимостью

$$\lambda = \frac{\pi^2 E I_0 g}{D_{20}} \frac{\sum_1}{\sum_2} \quad (15''')$$

вытекающей из равенств (15').

Раньше чем открывать табл. 9 или 10, рекомендуется проверить, что найденное $\varphi_1(\xi)$ действительно удовлетворяет условиям уравновешенности сил инерции.

Проверку эту следует делать путем вычисления интегралов

$$\int_0^1 \frac{r+g}{g_0} \varphi_1(\xi) d\xi,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{r+g}{g_0} \varphi_1(\xi) \varphi_1(\eta) d\xi d\eta,$$

каковые всегда можно уложить в таблицы, обычно применяемые для вычисления интегралов с переменным верхним пределом.

Таблица 9

1	2	3	4	5	Примечание
№ ординат	I	$\frac{I}{I_0}$	$\sin^2 \pi \xi$	$\frac{I}{I_0} \sin^2 \pi \xi$	
0			0,000		1. Столбцы 4-й записываются с помощью таблицы натуральных синусов 2. \sum_1 получается суммированием значений 5-го столбца 3. $A = \frac{1}{20} \sum_1$ 4. При вычислениях принять $I_0 =$
1			0,024		
2			0,095		
3			0,206		
.			.		
.			.		
19			0,024		
20			0,000		
				\sum_1	

Таблица 10

1	2	3	4	5	Примечание
№ участков	$r+g$	$\frac{r+g}{g_0}$	$\varphi_1(\xi)$	$\frac{r+g}{g_0} \varphi_1(\xi)$	
0-1					1. Столбцы 4-й записываются с помощью данных табл. 6 2. \sum_1 получается суммированием значений 5-го столбца 3. $B = \frac{1}{20} \sum_1$ 4. При вычислениях принять $g_0 =$
1-2					
2-3					
.					
.					
18-19					
19-20					
			Сумма	\sum_1	

Если коэффициенты α_2 и β_2 , входящие в $\varphi_1(\xi)$, найдены правильно, то оба интеграла должны обращаться при $\xi = 1$ в нуль.

Подсчитав для ряда равноудаленных значений ξ в особой таблице интеграл

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{r+g}{g_0} \varphi_1(\xi) \varphi_1(\eta) d\xi d\eta,$$

можно подставить всюду частоту λ_1 вместо формулы Релея (15) по формуле Навье-Сеймса и Фрагера:

$$\lambda_1^2 = \frac{-2E_1 g \int_0^l \frac{r+g}{9b} (\varphi_1(\xi))^2 d\xi}{\varphi_1^2 \int_0^l \frac{I_0}{J} \left[\int_0^l \frac{r+g}{9b} \varphi_1(\xi) d\xi \right]^2 d\xi}$$

которая должна дать для λ_1^2 значение, несколько меньшее данного формулой (15) и притом более точное. Вычисляя λ_1^2 по формуле Навье-Сеймса и Фрагера, следует для проверки подставить λ_1^2 и по формуле Релея, чтобы избежать случайных ошибок, всегда возможных в сложных расчетах.

Результат, только что полученный, вычислен без учета влияния сдвигов и сил инерции вращательного движения поперечных сечений.

Чтобы учесть влияние сил инерции вращательного движения поперечных сечений, достаточно ввести в формулы (15) вместо дроби $\frac{A}{B}$ дробь $\frac{A}{B+B_1}$,

$$B_1 = \int_0^l \frac{r+g}{9b} \frac{I_0}{J} [\beta_1 + \pi \cos \pi \xi]^2 d\xi. \quad (16)$$

Обычно величина B_1 настолько мала по сравнению с B , что в вычислениях B_1 никакой необходимости не представляется: вполне достаточно ограничиться прикидкой по формуле (16) порядком величины B_1 .

Поправка за сдвиги в стержнях профилей более существенна. Чтобы ее учесть, достаточно для вычисления λ_1^2 пользоваться не зависимостью (15), а зависимостью

$$\lambda_1^2 = \frac{\pi^2 E I_0 g}{J^2 9b} \frac{A}{B} \frac{1}{\left(1 + \frac{\pi^2 E I_0 A}{J^2 G a_0 C}\right)}, \quad (17)$$

$$C = \int_0^l \frac{I_0}{a_0} [\beta_1 + \pi \cos \pi \xi]^2 d\xi. \quad (17')$$

а a_0 — любое произвольно выбранное частное значение величины a , за которое всего удобнее принять какую-либо круглую цифру, близкую к среднему значению a . Интеграл C всегда можно вычислить с достаточной точностью, составив соответствующую таблицу, аналогичную табл. 8.

Поправка, данная формулой (17), может превышать 5% и пренебрегать ею не рекомендуется.

5. **Определение периодов связанных свободных колебаний внешних тросов.** Чтобы определить методом Релея период второго из главных свободных колебаний, необходимо предварительно раскрыть способ, изложенный выше, форму свободных колебаний основного троса. Будем предполагать, что эта форма определяется функцией $\chi_1(z)$. Тогда в первом приближении за форму свободных колебаний второго троса можно принять

$$\varphi_2(z) = \varphi_0(z) + \eta \chi_1(z), \quad (18)$$

где η — некоторая постоянная, которую следует определять из условия взаимной ортогональности функции $\varphi_2(z)$ и $\chi_1(z)$ по отношению к исходной силе системы, т. е. из условия

$$\int_0^l \frac{r+g}{9b} \varphi_2(z) \chi_1(z) dz = 0,$$

что дает

$$\eta = - \frac{\int_0^l \frac{r+g}{9b} \varphi_0(z) \chi_1(z) dz}{\int_0^l \frac{r+g}{9b} \chi_1^2(z) dz}. \quad (19)$$

За $\varphi_2(z)$ можно в первом приближении принять:

$$\varphi_2(z) = \alpha_2 + \beta_2 \frac{z}{l} + \sin 2\pi \frac{z}{l} = \alpha_2 + \beta_2 \xi + \sin 2\pi \xi, \quad (20)$$

определяя α_2 и β_2 из условия уравновешенности сил инерции, т. е. из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \frac{r+g}{9b} \varphi_2(z) dz &= 0; \\ \int_0^l \frac{r+g}{9b} \frac{z}{l} \varphi_2(z) dz &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Общий порядок расчета получится при этом таким: а) определяются постоянные α_2 и β_2 из уравнений (21); б) подсчитывается ряд частных значений функции $\varphi_2(z)$, позволяющих вычислить интеграл, входящий в числитель формулы (19); в) вычисляются оба интеграла, входящих в эту формулу, и находится неизвестная пока постоянная η ; г) найденные φ_2 и η подставляются

в формулу (18) и находится необходимое число частных значений функции $\psi_1(z)$; д) найденное $\psi_1(z)$ подставляется в формулу

$$\lambda_1^2 = \frac{\int_0^L EJ(\psi_1''(z))^2 dz}{\int_0^L \frac{z+z_0}{z_0} (\psi_1'(z))^2 dz} \cdot \frac{1}{1+K_2} \quad (22)$$

где

$$K_2 = \frac{\int_0^L EJ(\psi_1''(z))^2 dz}{\int_0^L G\omega(\psi_1''(z))^2 dz} \quad (23)$$

Все вычисление легко укладывается в схему, аналогичные изложенным выше. При взлождении производных $\psi_1''(z)$ и $\psi_1'(z)$ первый член равенства (18) дифференцируется аналитически. Если за функцию $\chi_1(z)$ принимается функция $\psi_1(z) = \alpha_1 + \beta_1(z - 0,5) + \sin \pi z$, то $\chi_1''(z)$ может быть также найдено аналитически. Ни в коем случае, конечно, не следует падать этих производных методами приближенного табличного дифференцирования функции $\chi_1(z)$.

§ 3. Приближенные формулы для вычисления частоты колебаний первого тона

Для самой грубой ориентировки в порядке частот главных свободных колебаний основного тона могут служить приближенные формулы Шлипка и Толда.

По Шлипку число n_0 колебаний в минуту в основном главном свободном вертикальном колебании корабля может быть найдено с помощью зависимости:

$$n_0 = C \sqrt{\frac{J_y}{BL^3}} \quad (24)$$

где J_y — момент инерции модельного сечения, в m^4 ;

B — весовое водоизмещение, в т;

L — длина судна, в м;

C — эмпирический коэффициент, по Шлипку равный:

у очень острых судов (миноносцев) 3 140 000

у больших транспортах 3 440 000

у грузовых с полными очертаниями 2 800 000

У построенного в 1906 г. пакетбота «*Albatros Augusta Victoria*» C было равно 3 170 000. По Хорну коэффициент 2 800 000 может

быть применен к нахождению периодов главного свободного вертикального колебания у современных грузовиков в полном грузу. В балласте C лежит по Хорну в пределах от 2 200 000 до 2 400 000.

Если подставить коэффициент C для 17 грузовых судов, данные о которых опубликованы Толдом, то средняя его величина получится около $C = 2 400 000$ с вероятной ошибкой $\pm 10\%$.

У трехузлового колебания число колебаний в минуту по Шлипку выше, чем у колебания двухузлового, в 1,85—2,00 раза. По некоторым другим источникам это отношение бывает и значительно выше. У двух судов, данные о которых опубликованы были Локкуд—Тайлором в 1930 г., отношение это было приблизительно 2,1 и 2,3 при одном и том же в обоих случаях водоизмещении.

У судов, геометрически подобных, между числом колебаний в минуту n и длиной судна L существует зависимость

$$nL = C_1 = \text{const} \quad (25)$$

где C_1 зависит от типа судна. По данным *Johson's* у пассажирских быстрходных судов германской постройки начала 1900-х годов C_1 было около 13 800 м/мин; у германского старого легкого крейсера «*Vikings*» 13 900 м/мин; у миноносцев около 10 000 м/мин. Для грузовиков от 6000 до 12 000 м водоизмещения Хорн дает для C_1 пределы 10 500 < C_1 < 11 500 м/мин.

По Толду:*

$$n_0 = 94 000 \sqrt{\frac{BH}{BL^3}} \quad (26)$$

где B, H и L — соответственно ширина, высота борта от палубы и длина, в м;

D — водоизмещение, в т;

n_0 — число колебаний в минуту (в основном поперечном вертикальном колебании).

Формула эта относится к грузовикам нормального построения. На формулу Толда, как и на формулу Шлипка, надо смотреть как на грубо приближенные.

Johson приводит по данным Шлипка нижеследующие ориентировочные числа колебаний в минуту (для основных вертикальных колебаний) судов разных типов:

Нормальное пассажирское быстрходное длиной около 200 м	50—55
Германское быстрходное германского построения 1900 г	60—75
Большие нормальные грузовики (в полном грузу)	85—100
Большой крейсер <i>Kaiserin Augusta</i>	102
Большой крейсер <i>Novos</i>	150
Малый крейсер <i>Osborn</i>	114
Малый крейсер <i>Wala</i>	190
Минононец S 42	230

* *Transactions N. E. Coast Inst.*, XII, 1931.

Как показали подробные исследования Муллера (Muller), главная погрешность формулы Шлихга имеет своим происхождением неправильное допущение, будто масса корабля может быть охарактеризована, в смысле ее влияния на число упругих колебаний корабля, только лишь величиной ее, являющейся в среднем на единицу длины корабля. Ошибка, вытекающая из этого допущения, по Муллеру значительно больше ошибки, происходящей от принятия неправильного закона распределения жесткости корабля по его длине. В последнем отношении можно возможно точнее учесть величину J за протяжении средней части корабля, где судно деформируется сильно. Меньшее значение имеет правильность учета величины J в оконечностях корабля.

§ 4. Определение амплитуд вынужденных колебаний корабля

1. Метод главных координат. Известно, что те обобщенные координаты, значениям которых определяются отдельные главные колебания упругой системы в случае отсутствия сопротивлений, разделяются в уравнениях Лагранжа. Координаты эти P_k называются главными и образуют живую силу системы T и потенциальную энергию ее V в сумму полных квадратов вида:

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_k M_k (\dot{P}_k)^2, \\ V &= \frac{1}{2} \sum_k N_k P_k^2. \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

где M_k и N_k — некоторые постоянные, между которыми существует зависимость

$$\lambda_k^2 = \frac{N_k}{M_k}. \quad (28)$$

Здесь λ_k — угловая частота рассматриваемого колебания. Величины M_k суть обобщенные массы; величины N_k — обобщенные жесткости, соответствующие отдельным главным координатам системы.

Между формами главных свободных колебаний системы, т. е. функциями, определяющими отклонения системы, соответствующие каждой главной координате, и обобщенными массами системы M_k , соответствующими этим координатам, существует зависимость:

$$M_k = \int_0^l \frac{r+g}{g} [\psi_k(x)]^2 dx, \quad (29)$$

где $\psi_k(x)$ — формы главных свободных колебаний, т. е. функции, определяемые тем, что

$$v = \sum_{k=1}^n \psi_k(x) P_k(t), \quad (30)$$

v — ордината упругой линии корабля, а $P_k(t)$ главные координаты системы.

Определив форму и частоту какого-либо из главных свободных колебаний (способом, изложенным выше), можно найти соответствующую массу системы M_k по формуле (29), после чего соответствующая обобщенная жесткость N_k найдется непосредственно с помощью равенства (28). Интеграл, входящий в равенство (29), может быть легко приближенно с помощью любого правила численного квадратур.

В случае, когда сопротивлением можно пренебречь, уравнения вынужденных колебаний, если их составить по схеме Лагранжа, получат для каждой главной координаты P_k вид

$$M_k \ddot{P}_k + N_k P_k = F_k, \quad (31)$$

где F_k — обобщенная сила, соответствующая рассматриваемой главной координате. Чтобы вычислять последнюю, достаточно подсчитать работу всех приложенных к кораблю внешних возмущающих сил, произвольную на перемещениях, которые точки приложения их совершают при увеличении данной главной координаты на единицу.

Если на корабль действует несколько поперечных, вертикальных сил $R_k^z(t)$, приложенных в сечениях, где $z = e_k$, то для k -го главного вертикального колебания:

$$F_k = \sum_j R_k^z(t) \psi_k^z(e_k). \quad (32)$$

Если на корабль в сечении, где $z = e_k$, действует в двусторонней плоскости пара $\Pi_k(t)$, направленная в сторону увеличения производной $\frac{dv}{dt}$, то:

$$F_k = \Pi_k(t) \psi_k'(e_k). \quad (33)$$

Если на корабль действует гармоническая возмущающая сила или пара, то все соответствующие ей обобщенные силы F_k суть гармонические же силы той же угловой частоты. Если $F_k = F_k^0 \cos \omega t$, то уравнение (31) допускает частное решение:

$$P_k = \frac{F_k^0 \cos \omega t}{N_k - M_k \omega^2} = \frac{F_k^0 \cos \omega t}{N_k \left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda_k^2}\right)}. \quad (34)$$

Если $P_k = P_k^0 \sin \omega t$, то соответствующее частое решение вынужденных колебаний есть:

$$P_k = \frac{P_k^0 \sin \omega t}{N_k \left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda_k^2}\right)} \quad (35)$$

Формулы (34) и (35) можно также переписать в форме

$$P_k = \pm \frac{P_k}{N_k} \mu_k \quad (36)$$

где $\frac{P_k}{N_k}$ есть статическое отклонение, соответствующее рассматриваемой обобщенной силе, а

$$\mu_k = \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2 - \omega^2}$$

есть динамический множитель, вычисленный в предположении отсутствия сопротивлений.

Благодаря наличию сопротивлений истинное значение динамического множителя μ_k всегда несколько меньше величины, даваемой формулой

$$\mu_k = \frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2 - \omega^2} \quad (37)$$

Чем меньше относительная величина сопротивлений, тем больше величина динамического множителя в момент резонанса и тем ближе его истинное значение к значению, даваемому (37).

Величина сопротивлений, которые встречает при своей вибрации корабль, изучена пока очень мало. Имеются наблюдения, показывающие, однако, что она весьма мала. При малых сопротивлениях кривая динамического множителя по своему характеру должна быть близка к кривой, изображенной пунктиром на рис. 14. Кривые, вычисленные с помощью формулы (37), изображены на этом рисунке сплошными линиями. Допуская некоторую небольшую ошибку в сторону безопасности, можно вперед до наибольшей более точных данных придерживаться правила: динамический множитель может быть определен с помощью формулы (37), если она дает для μ_k значение меньше, чем некоторое число R . Если по формуле (37) выйдет, что μ_k больше этого предела, надо принять $\mu_k = R$. По приближению Локкуд—Таблора это число R , т. е. значение динамического множителя при резонансе, получается тем меньше, чем больше частоты собственных свободных колебаний корабля и чем больше амплитуды их, и может быть принятым равным

$$R = \frac{6200}{2\pi n} \quad (38)$$

где n — число колебаний в минуту.

На формулу (38) надо смотреть как на весьма приближенную, дающую более или менее точные результаты только тогда, когда амплитуда колебаний относительно мала (будучи величиной порядка 1—2 мм).

С увеличением амплитуды колебаний коэффициент в формуле (38) падает. В одном из случаев, наблюдавшихся Локкуд—Таблором,

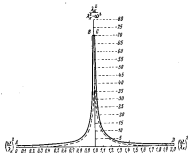


Рис. 14.

ром, когда амплитуда колебаний на миделе была около 7,5 мм при числе колебаний в минуту около 100, коэффициент в формуле (38) был около 2100.

Чтобы определить для какого-либо места корабля методом главных координат амплитуду вынужденного колебания, нужно подсчитать все те главные координаты системы P_k , влияние которых отражается на результирующем суммированном ряде. При этом не следует упускать из вида координат, соответствующих движению корабля как твердого целого (см. подробности в разделе «Качка корабля»), к надо обращать особое внимание на величину тех главных колебаний, период которых больше всего приближается к периоду возмущающей силы, равно как и на те колебания, которым соответствует наибольшее статическое отклонение системы.

2. Другой метод. Метод главных координат, изложенный выше, дает возможность простейшим путем установить величину вынужденных колебаний вблизи резонансов. В тех случаях,

Когда для нахождения амплитуд вынужденных колебаний корабля в ряде (30) приходится суммировать несколько членов амплитуду же колебаний корабля требуется разложить для некоторых лишь частных значений частот возмущающей силы искомый результат может быть вычислен проще, с помощью одного из тех вычислительных методов, которые позволяют упругую линию корабля под действием гармонических возмущающих сил заданной частоты разложить в замкнутом виде, т. е. в случае поперечных колебаний в форме:

$$v = v(z) \sin \omega t, \quad (30)$$

где $v(z)$ — некоторая функция, вид которой зависит, помимо закона распределения масс, от кривой жесткости, а равно и частоты колебания ω .

Главнейшие из этих методов: 1) метод приближенного численного интегрирования дифференциальных уравнений вынужденных колебаний А. Н. Крылова—Штермера—Адамса применительно к поперечным колебаниям корабля, подробно изложенный в книге А. Н. Крылова «О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложение в технических вопросах» и 2) метод последовательных приближений, изложенный применительно к очень большой задаче в сочинении А. Н. Крылова «О расчете балок, лежащих на сплошном упругом основании».

Последний метод сводит весь вопрос к повторному решению статической задачи о нахождении упругой линии корабля по заданной его нагрузке. Нормальный процесс последовательных приближений, им даваемый, оказывается, однако, процессом, сходящимся только тогда, если частота возмущающей силы ω меньше частоты основного из главных свободных колебаний системы. Поэтому они требуют в задаче о вибрации судов, как правило, тех специальных ее выделений, которые рассмотрены в § 20 упомянутого сочинения А. Н. Крылова.

§ 5. Допустимая величина вибрации судовой корпус

Никаких общепринятых норм допустимой амплитуды вибрации корабля еще не выработано. Для того чтобы вибрация корабля могла быть опасной для крепости его корпуса, амплитуда ее должна бы быть числом того же порядка, что статический прогиб корабля под влиянием наибольших моментов к нему приложенных, т. е. быть величиной порядка нескольких сантиметров. Колебания гораздо меньших амплитуд являются, однако, весьма опасными для людей, находящихся на судне.

Влияние вибраций на человеческого организм, по-видимому, характеризуется не амплитудой самого колебания, а амплитудой их ускорений. По германским наблюдениям последнего времени,

произведенным в гражданском строительстве,⁴ вертикальные колебания при частоте 600 в минуту оказываются для нормального здорового человека неприятными тогда, когда их амплитуда достигает 0,035 мм, чему соответствует максимальное значение ускорения около 100 мм/сек². Горизонтальные колебания той же частоты становятся неприятными уже тогда, когда их амплитуда достигает 0,015 мм, ускорение же около 60 мм/сек². При амплитуде 0,035 мм (ускорение около 135 мм/сек²) они уже являются по *Reiber*⁵ сильно раздражающими. Тот же автор указывает, что при 900 кол/мин колебания, амплитуда которых достигает 0,02 мм (ускорение около 180 мм/сек²), отражаются неблагоприятно на здоровье людей, подвергающихся им систематически, особенно во время отдыха. По-видимому, чем меньше частота колебания, тем большей величины ускорения не отражаются еще неблагоприятно на самочувствии людей, находящихся на судне.

Допускаемая амплитуда ускорений должна также зависеть от типа судна. На пассажирских судах, совершающих длительные рейсы, она, естественно, стремится к уменьшению; у судов грузовых или судов, совершающих очень короткие рейсы, ее можно допустить больше. У пассажирских судов, совершающих большие рейсы, Локквуд—Тэйлор предлагает допускать колебания, ускорения которых не превышают 150 мм/сек². С другой стороны, у некоторых грузовых судов, на вибрацию которых со стороны команд никаких жалоб не поступало, зарегистрированы колебания, ускорения которых достигают и даже несколько превосходят 500—800 мм/сек² при частоте от 125 до 150 кол/мин. На быстродвижных катерах специальных назначений, предназначенных для кратковременных операций, допускаются, как правило, колебания и с еще большими значениями максимальных ускорений.

У судов военных допустимые значения амплитуды колебаний определяются не столько самочувствием людей, на корабле находящихся, сколько влиянием ее на типичные специальные устройства — прицелы, приборы и т. д. У военных устройств целесообразно, по-видимому, регулироваться максимум амплитуды угловых колебаний.

§ 6. Причины, вызывающие вибрацию корабля, и способы их устранения

Упругие колебания корпуса корабля возникают в результате действия на него либо периодических сил вращающего характера на судне механизмов, либо в результате ударов и поперечных частей корабля волн, набегающих на него в свежую погоду. Эти удары, однако, следуют, как правило, через такие промежутки времени, что в каждом последующем ударе колебания, вызванные предыдущим, оказываются затухшими. Упругие колебания,

⁴ *Reißer* от *Neue Beobachtungen über Gefühlsbeeinträchtigung* в трудах Стокгольмского конгресса по акустике механике, 1936 г.

вызываемые этой причиной, поэтому редко достигают заметной величины. Наблюдение их позволяет устанавливать периоды свободных колебаний корабля.

Основной причиной вибрации являются неуравновешенные силы инерции вращающихся и привольно движущихся масс его отдельных механизмов и особенно главной машинной установки. Надеждами балансировкой силы инерции вращающихся частей могут быть сведены к нулю. Для этого достаточно привести центр тяжести вращающихся масс к оси вращения, что может быть достигнуто балансировкой статической, а нужно еще добиться и того, чтобы ось вращения была одной из главных осей инерции вращающейся системы. Последнее достигается с помощью динамической балансировки вращающихся масс на особых станках. Обычно динамической балансировке подвергаются только крупные детали быстро вращающихся механизмов, в частности она обязательна в отношении роторов паровых турбин. В отношении деталей поршневых машин, а равно и в отношении гребных винтов обычно довольствуются статической балансировкой.

Главной причиной судовой вибрации являются силы инерции привольно вращающейся движущихся частей поршневых машин. Если машина вращается с постоянной скоростью, то поршни машин совершают периодические колебательные движения, не являющиеся движением строго гармоническим. Чем короче длина шатуна по сравнению с радиусом шатуна, тем больше отличается движение поршня от колебания гармонического. Вообще перемещение поршней, а равно и их ускорение в функции от времени выражаются рядами Фурье, коэффициенты которых с увеличением порядка довольно быстро убывают.

Вопрос уравновесить силы инерции привольно вращающейся движущихся частей машины можно только в том случае, если каждый поршень имеет континуальную движущуюся по той же прямой, с той же скоростью, но в противоположную сторону. В обычных машинах приходится довольствоваться частными уравновешением сил инерции привольно вращающейся движущихся масс, добавляя то, чтобы гармонические силы каждого порядка, прикладываемые к кораблю всеми поршнями машин, в своем действии на корабль нейтрализовались.

Для этого нужно чтобы работа всех сил инерции определенного порядка, проецируемая на единичных отклонениях корабля, соответствующих всем тем его главным колебаниям, которые могут возникнуть под действием рассматриваемой гармонической силы, была равна нулю. Если длина машины настолько мала, корпус же корабля настолько жесток, что на протяжении машинного отделения упругую линию корабля можно принимать за прямую линию, то для практически полного уравновешения всех сил инерции того или иного порядка достаточно уравновесить их главный вектор, равно как и момент относительно какой-либо

точки корабля. Обычно так и поступают, уравновешивая сначала силы и моменты основного порядка, затем вторые гармоники и т. д. Вообще, чем больше число цилиндров машины, тем больше гармоник различного порядка может быть уравновешено. Такое уравновешение сил инерции достигает своей цели только в том случае, если на протяжении машинного корабля, а равно и машинной фундамента, не шатается. Если длина машины настолько велика, а жесткость корабля настолько мала, что пренебречь изгибом корабля на протяжении машинного отделения нельзя, то для определения влияния, оказываемого машиной на корабль, нельзя исходить лишь из значений главного момента и главного вектора сил инерции того или иного порядка, а надо иметь величину сил, прикладываемых к кораблю каждым поршнем в отдельности.

Иногда не удается одновременно добиться не только того, чтобы все обобщенные силы, определяемые формулой (32) и соответствующие всем важнейшим главным колебаниям корабля, были равны нулю, но даже приходится выбирать, уравновесить ли в отношении гармоник того или иного порядка главный вектор вертикальных сил, или же главный их момент, относительно определенного сечения корабля. В этих случаях следует выяснить, влияют ли у корабля силы рассматриваемого порядка упругие колебания всегда более или менее одной формы, или же в зависимости от числа оборотов машины форма вызываемых этими силами колебаний может быть различной. В первом случае можно добиться того, чтобы работа главного вектора гармонических сил рассматриваемого порядка уравновешивалась работой неуравновешенной главного момента их. В частности, если машина стоит в узловой точке корабля, надо уравновешивать главный момент сил инерции привольно вращающейся движущихся масс машины относительно этой узловой точки, если же машина стоит в нулевой, добиваться того, чтобы был уравновешен главный вектор сил инерции рассматриваемого порядка. Если и зависимость от числа оборотов машин шести установки машин может оказаться то в узловой точке, то в нулевой, лучше раньше добиться, чтобы был уравновешен главный вектор сил инерции определенного порядка, и затем уже, если возможно, переходить к уравновешению их главного момента. Если приходится выбирать, уравновесить ли силы одного порядка или силы и момент другого порядка, то нужно подсчитать величины обобщенных сил, соответствующих каждому из этих неуравновешенных усилий поршней, и уравновесить то усилие, которое может вызвать большую вибрацию.

Как бы хорошо ни были уравновешены силы инерции движущихся частей машин, некоторая остаточная вибрация в моменты резонансов всегда неизбежна. Причиной ее являются аэродинамические усилия, прикладываемые к корпусу корабля его винтами. Силы первого порядка этого рода обычно являются следствием

неодинаковости поверхности отдельных лопастей, встречающих различное реактивное воздействие со стороны потока, как правило, несимметричного относительно оси вращения винта, благодаря асимметрии кормы судна. Благодаря отсутствию в потоке, окружающем винт, симметрии даже винты с идеально одинаковыми лопастями арматурой к корпусу судна периодические осевые и поперечные воздействия, частота которых равна частоте оборотов машины, умноженной на число лопастей. Величина периодических импульсов, обычных своем происхождением неравномерности гидродинамического потока, окружающего винты, теоретически пока не изучены. Наблюдения вызванных данными усиленными вибраций показывают, что силы эти относительно невелики. Значительно большей величиной периодические силы арматуры к корпусам колесных судов морского, благодаря ударам лопастей о воду. Угловая частота этих ударов равна угловой частоте вращения машины, умноженной на число лопастей.

У двулантовых судов вибрация не носит такого установленного равномерного характера, как у судов однолантовых, а сопровождается, как правило, биениями. Причиной этого является разность угловых скоростей обеих машин, вызываемая которыми колебания не складываются, то вычитаются в зависимости от изменения их относительных фаз. Одной из возможных причин судовой вибрации является неравномерность вращения вала, прилагается к валам машинами. По Шпанку это явление, однако, невелико. Борьбу с этой причиной вибрации можно, как и при уравнивании сил инерции поступательных движущихся масс, путем увеличения числа цилиндров машины и выбора надлежащих углов установки ее кривошипов. Борьбу с неравномерностью гидродинамической картины, окружающей винты, можно путем удаления винтов от корпуса корабля; у колесных судов на основную причину вибрации можно влиять путем надлежащего устройства импортных лопастей.

§ 7. Меры для устранения вибрации готового корабля

Если у готового корабля замечается вибрация, то прежде всего необходимо выяснить, какого рода колебания у корабля в данном случае наблюдаются и какой причиной они вызваны. Если причиной вибрации, что бывает сравнительно редко, являются дефекты сборки машинной установки, например потуги валов на кронштейнах или неуровню осейна кака-либо месте, которую легко уравнивают, то следует устранить причину вибрации. Если причина вибрации лежит в неправильности формы лопастей гребного вала, винты можно сменить; если главная причина вибрации — неравномерность гидродинамической картины воды винтов, следует попытаться отодвинуть винты дальше от корпуса корабля и корпус. Иногда, как замечено Шпанком, возмущающие силы первого порядка получаются в результате

составного влания неуравновешенных сил инерции машины и влания направленного изгибающего вилтов. В данных случаях можно попытаться бороться с вибрацией путем поворота гребного винта относительно кривошипов машины. Всего проще это достигается в тех случаях, если один из фланцев гребного вала имеет арксосимметричную разметку болтовых дыр. В большинстве случаев устранить причину вибрации у готового судна бывает затруднительно, и единственным средством борьбы с ней является такое изменение соотношения между частотой вынужденных колебаний и частотой возмущающих сил, при котором резонанс был бы устранен. Чтобы выяснить, применимо ли это средство, надо установить, насколько резко вымышен у судна резонанс. Если вынужденные колебания, что бывает сравнительно редко, достигают недопустимой величины не только в моменты резонанса, бороться с общей вибрацией корабля, а в большинстве случаев и вибрацией местной, можно лишь путем устранения причины, вызывающей вибрацию.

Если вибрация наблюдается, как обычно, только при некоторых частотах оборотов машины, то можно, если путем соответствующих регулировок избежать резонанса, установить, каких чисел оборотов надо избегать и насколько и в какую сторону надо изменить соотношение между частотой возмущающей силы и частотой свободных колебаний системы. В большинстве случаев, чтобы совершенно выйти из области резонанса, достаточно бывает, как на рис. 14, изменить соотношение между периодами колебаний не более чем на 10% в ту или иную сторону. При решении вопроса о том, каких чисел оборотов надо избегать, следует учитывать все те изменения в периодах свободных колебаний корабля, которые могут быть вызваны изменением его нагрузки. При решении вопроса о том, в какую сторону и насколько необходимо изменить соотношение частот возмущающей силы и свободных колебаний системы, следует учитывать, что в процессе эксплуатации судна число оборотов машины может иногда падать процентов на 10—15, в то время как такого же изменения числа оборотов в сторону их увеличения ожидать не приходится. Поэтому лучше добиваться того, чтобы частота возмущающей силы была меньше частоты свободных колебаний системы, чем наоборот.

Соотношение между частотой возмущающей силы и частотой собственных свободных колебаний системы можно менять и путем изменения жесткости системы и масс, в нее входящих, и путем изменения числа оборотов механизмов. Переход из этих средств применительно к вибрации местной. Если вибрация носит местный характер, то нужно нащупать места, где вибрация всего резче, и в них именно поставить дополнительные утяжеления в виде соответствующих балластов, ребер жесткости и т. д. Этим путем всегда можно в достаточной мере увеличить частоту свободных колебаний системы. Если вибрация является общей, т. е. захватывает весь корабль в целом или какую-либо важную его часть.

период колебаний которой без капитальной переделки судна и может быть изменен, то выводить из резонанса приходится путем изменения числа оборотов механизма. Иногда для этого приходится идти на такие средства, как смена гребных винтов для изменения их шага. Если колебания вызваны неравномерностью гидродинамической картины в районе винтов и частотой возмущающих импульсов равной угловой скорости машины, умноженной на число лопастей, можно частоту возмущающей силы изменить путем изменения числа лопастей без изменения числа оборотов механизма.

Другим действительным средством является установка динамических гасителей колебаний.*

Для устранения общей вибрации всего корабля прибора этого рода являются довольно громоздкими, но для уменьшения вибрации отдельных крупных деталей судового корпуса, периодических колебаний которых изменить сравнительно трудно, они могут быть весьма полезными. Особенно большого значения заслуживает это средство в тех случаях, когда речь идет об усилении вынужденных колебаний под действием периодических возмущающих сил, а об усилении свободных колебаний порождаемых различного рода неупругими толчками и ударами, которым в некоторых случаях бывает подвержен корпус судна.

В ответственных случаях в настоящее время вибрации корабля и отдельных его деталей изучается иногда экспериментальным путем в самом процессе постройки корабля. Делается это с помощью вибраторных машин, приводящихся прилагать к корпусу корабля периодические силы, а если надо и пары любой частоты, любой образцом направленные. Такие машины довольно широко применяются в настоящее время некоторыми местными испытательными бюро; в частности, они применялись для изучения вибрации тридцатитонна «Ветер» в процессе его постройки.**

Подробный обзор основной литературы, относящейся к вибрации судов, сделан в статье П. Ф. Папковца «Очерк развития современного состояния вопроса о вибрации судов»***

§ 8. Экспериментальное исследование вибрации судовых корпусов

1. Приборы для записи вибрации. Для наблюдения и измерения вибрации применяются приборы двух типов: аннотометры и вибрографы. Первые позволяют измерять лишь амплитуду колебаний,

* С. П. Тимошенко, Теория колебаний в инженерном деле, § 35, в таком же издании Ingén's, Tr. Izv. Voen. Akad. Armii, 1933.

** Фрэнк Душановиче Сатенштейнго на Kobbler, W. R. N., 1930, p. 32.

*** Непериодические события: Прикладная математика и механика, т. 1, вып. 1, Ленинградское высшее-техническое учебное заведение, 1933. Также см. данный сборник.

вторые дают полную картину колебаний, т. е. графическую зависимость перемещений тех точек судна, в которых был установлен прибор, в зависимости от времени. Вследствие того, что колебания судового корпуса в большинстве случаев являются сложными и представляют результат наложения друг на друга отдельных видов элементарных (гармонических) колебаний, более пригодными для исследования вибрации оказываются приборы второго типа, т. е. вибрографы. Из них наибольшей известностью пользуются: паллограф Шлезика, изготовляемый фирмой Майтак, виброграф Гейгера (фирма Леман и Махельс) и виброграф фирмы Кембриджа. Одним из основных требований, предъявляемых к хорошему судовому вибрографу, является возможность регулирования в широких пределах частоты собственных колебаний его маятника: для правильной записи колебания частота эта должна быть равна в три меньше частоты записываемого колебания; чем меньше частота собственных колебаний маятника, тем чувствительнее он ко всяким посторонним влияниям — пруде ускоренной от качки корабля. Поэтому при записи быстрых колебаний выгодно повысить частоту собственных колебаний прибора.

2. Гармонической анализом вибрации. Занесение вибрографом виброграммы для суждения о характере и причинах вибрации должны быть обработаны, и прежде всего сложное записанное колебание следует разложить на составляющие элементарные колебания.

Обычно всякое записанное вибрографом колебание представляет периодическую функцию. Угловой виброграммы, соответствующей одному периоду колебания, согласно теории гармонического анализа может быть разложено в ряд:

$$v = f(\varphi) = A_0 + A_1 \cos \varphi + A_2 \cos 2\varphi + A_3 \cos 3\varphi + \dots \quad (40)$$

$$+ B_1 \sin \varphi + B_2 \sin 2\varphi + B_3 \sin 3\varphi \dots$$

где

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v \cos n\varphi d\varphi = -\frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} v \sin n\varphi d\varphi;$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v \sin n\varphi d\varphi = \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} v \cos n\varphi d\varphi;$$

Для нахождения коэффициентов A и B имеется несколько практических приемов.

* Описание этих и других приборов см. П. Ф. Папковца, Технические измерения деформаций судовых корпусов, вып. 131, Тр. НИОС, Гостехиздат, 1931.

См. также работу П. Ф. Папковца, Труды по прочности корабля, Судостроение, 1936, стр. 133—300.

Табличный способ.* Увеличив выбранную амплитуду, делая выбранный период MN (рис. 15) на достаточное число равных частей и нумеруют ординаты в от некоторой условной выбранной прямой, которую целесообразно провести так, чтобы она не пересекала, но была достаточно близка к кривой. Приведенные ниже таблицы относятся к вычленению по 20 ординатам. Приведенные (по способу трапеций) значения коэффициентов будут:

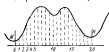


Рис. 15.

$$A_0 = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} y_i$$

$$A_1 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{20} y_i \cos \frac{2\pi i}{20};$$

$$A_2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{20} y_i \cos 2 \frac{2\pi i}{20};$$

$$A_3 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{20} y_i \cos 3 \frac{2\pi i}{20};$$

$$B_1 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{20} y_i \sin \frac{2\pi i}{20};$$

$$B_2 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{20} y_i \sin 2 \frac{2\pi i}{20};$$

$$B_3 = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{20} y_i \sin 3 \frac{2\pi i}{20}.$$

Вычисления производят при помощи табл. 11 и шаблона на прозрачной бумаге (рис. 16—23).

Светлые с правой ординаты вписываются во 2-й столбец таблицы. В соседние столбцы (3—6) заносится произведения ординат на соответствующие косинусы, численные значения которых указаны сверху таблицы. Затем на левую часть таблицы накладывают один из шаблонов и в соответствующий столбец правой части таблицы вписывают цифры, отмеченные шаблоном знаками, указанными на шаблонах. Для правильной работы необходимо, чтобы левая часть таблицы (обозначена двойными линиями) точно соответствовала размерам шаблона. В таблице показан порядок вычислений для двух ординат, а именно — A_2 и B_2 — $10,0$ и $20,0$. Положительные и отрицательные значения правой части таблицы вписываются разными цветами. Суммирование надо производить с обычной по правилам трапеций поправкой на крайние члены, например:

$$10 A_2 = \frac{1}{2} v_2 + 0,8091 v_3 + 0,3090 v_4 - 0,3090 v_5 - \dots \\ \dots + 0,8091 v_{19} + \frac{1}{2} v_{20}.$$

* Подробнее см. В. И. Самарин, Курсы высшей математики, в котором приведен шаблон для определения коэффициентов первых 20 членов разложения Фурье.

Таблица 11

№ орди- наты	$\cos \frac{2\pi i}{20}$				$\sin \frac{2\pi i}{20}$				7	8	9	10	11	12	
	1,0000	0,9397	0,8090	0,6096	0,3090	0,0000	-0,3090	-0,6096							
0									5,88	0,00					
1	10,00	9,51	8,09	5,88	3,09	0,00	-3,09	8,09	0,00						
2	20,00	19,02	16,18	11,75	5,28	0,00	-5,28	16,18	0,00						
3															
4															
5															
6															
7															
8															
9															
10															
11															
12															
13															
14															
15															
16															
17															
18															
19															
20															

Схема с поправкой на крайние члены.
Коэффициенты ряда Фурье

A_4

1	+			
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				

FIG. 16.

A_5

1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				

FIG. 17.

A_6

1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				

FIG. 18.

A_7

1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				

FIG. 19.

A_8

1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				

FIG. 20.

A_9

1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				

FIG. 21.

A_{10}

1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				

FIG. 22.

A_{11}

1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				

FIG. 23.

Здесь мы приводим всего 8 шаблонов для разложения период 9 членов ряда Фурье. Однако при том же числе ординат дольнее точно получается ряд до 21 слагаемого:

$$e_j = A_0 + A_1 \cos \varphi + A_2 \cos 2\varphi + \dots + A_{10} \sin 10 \varphi.$$

Обычно целью гармонического анализа является нахождение амплитуд всех гармонических колебаний, из которых складывается исследуемое. Для определения этих амплитуд соответствующие члены последнего ряда, заключающиеся в себе $\sin n\varphi$ и $\cos n\varphi$ с одинаковыми n , надо складывать попарно, приняв выражение для e к виду:

$$e = A_0 + C_1 \sin(\varphi + \delta_1) + C_2 \sin(2\varphi + \delta_2) + \dots + C_m \sin(m\varphi + \delta_m) \quad (41)$$

с помощью формул:

$$C_m = \sqrt{A_m^2 + B_m^2}; \quad (42)$$

$$\delta_m = \arctg \frac{A_m}{B_m}. \quad (43)$$

Коэффициенты C_m ряда (40) суть амплитуды соответствующих колебаний.

Гармонические анализаторы. Для той же цели — разложения в ряд Фурье — имеются специальные приборы: анализатор Генриха—Корради, Малера и др. Разложение в ряд анализаторами может быть сделано быстрее, но на подготовку к работе иногда затрачивается довольно много времени (критиче. подвергавшиеся анализу, должны быть настроены в заданном масштабе).

Приближенный способ. Для грубой оценки периоды составляющих колебаний и их амплитуд могут быть полезны прилагаемые диаграммы типовых колебаний, получающиеся в результате сложения двух гармонических колебаний разных частот. Сбоку каждой из этих диаграмм показано, каким образом можно по размерам A и B , взятым с диаграммы, найти приближенные значения амплитуд обеих составляющих гармонических колебаний (см. табл. 12 графического анализа виброграмм).

3. Определение частот собственных колебаний судового корпуса. Гармонический анализ позволяет выяснить вопрос о характере и величине колебаний какой либо точки судового корпуса. Однако экспериментальное исследование vibrations иногда ставит много вопросов и иных вопросов, и частота, наложение частоты собственных колебаний корпуса.

При установившемся режиме колебания корпуса вызываются неуравновешенными силами (и моментами) работающих на нем механизмов и в первую очередь главным двигателем. Колебания корпуса будут вынужденными, и собственная частота, являющаяся

Приближенный графический анализ виброграмм

	<p>Гармоническое колебание 1-го порядка: $e = a_1 \cos \varphi$</p>
	<p>Гармоническое колебание 2-го порядка: $e = a_2 \cos 2\varphi$</p>
	<p>Гармоническое колебание 3-го порядка: $e = a_3 \cos 3\varphi$</p>
	<p>Гармоническое колебание 3-го порядка (с другой начальной фазой): $e = -a_3 \cos 3\varphi$</p>
	<p>Гармоническое колебание 4-го порядка: $e = a_4 \cos 4\varphi$</p>

судну, отражены лишь косвенным путем на величине записанных амплитуд, периоды же будут кратны периоду вынуждающего колебания механизма.

Приближенная зависимость вынужденных колебаний какой-либо точки корпуса от возмущающих сил I и II порядков с учетом двух основных собственных тонов судна может быть найдена, пренебрегая влиянием сил оспаривания, в таком виде:

$$\epsilon = \left(\frac{A_1 N^2}{|n_1^2 - N^2|} + \frac{B_1 N^2}{|n_2^2 - N^2|} \right) \cos \frac{2\pi N t}{60} + \left(\frac{A_2 N^2}{|n_1^2 - 4N^2|} + \frac{B_2 N^2}{|n_2^2 - 4N^2|} \right) \cos \left(\frac{4\pi N t}{60} + \delta \right) \quad (44)$$

Первое слагаемое есть вынужденное колебание, вызванное силами 1-го порядка и коэффициент при $\cos \frac{2\pi N t}{60}$ — амплитуда 1-го порядка; второе — то же от сил 2-го порядка. Что касается формы колебаний корпуса, одна из точек которого колеблется по вышеуказанному закону, то она будет зависеть от близости числа оборотов в минуту N (или $4N$) к одному из собственных критических чисел судна n_1 или n_2 в минуту. Когда N (или $4N$) близко к n_1 , упругая линия судна имеет две узловые точки, при N (или $4N$), близком к n_2 , — три узловые точки. Колебание с двумя узлами есть колебание основное (1-го тона) и n_2 — собственное критическое число основного (1-го) тона; трехузловое колебание есть колебание 2-го тона и n_2 — критическое число 2-го тона.

Когда записанные андрограммы указывают на простое синусоидальное колебание, форма упругой линии при некотором наклоне может быть определена несложными методами установочными андрографом в разных местах корпуса (по длине) или даже просто визуально; при сложных колебаниях определение тональности требует большего числа установочных точек и тщательного сопоставления андрограмм.

Как видно из уравнения (44), при постепенном возрастании числа оборотов N в общем случае резонанс может наступить 4 раза (даже если пренебречь порядками и тонами выше 2-го). Картина прохождения через резонанс настолько ясна, что не заметить этого прохождения при надлежащей тщательности постановки опыта почти нельзя, и сомнения могут возникнуть лишь по вопросу о том, какой из четырех резонансов имел место. В этом могут помочь грубоприближенные формулы Шанка и Тодда.

Если резонанс не будет явлен, определить критические числа n_1 и n_2 значительно труднее, так как приходится прибегать к способу наименьших квадратов, применяя его последовательно сначала к разложению основного тона без учета второго, затем к определению второго тона, считая первый известным, и, наконец,

* Между коэффициентами A_1, B_1, A_2, B_2 существует связь: $A_1 : B_1 = A_2 : B_2$.

Результативное колебание 1-го и 2-го порядков:



$$\epsilon = a_1 \cos \varphi + a_2 \cos 2\varphi;$$

$$a_1 = A \text{ (точка);}$$

$$a_2 = 0,567 B + 0,185 A$$

(В пределах: $0,5 < \frac{n_2}{a_1} < 2$ погрешность $\approx 2,5\%$)

(В пределах: $2 < \frac{n_2}{a_1} < 4$ погрешность $\approx 4\%$)

(В пределах: $0,25 < \frac{n_2}{a_1} < 0,5$ формула неприменима)

Результативное колебание 1-го и 3-го порядков:



$$\epsilon = a_1 \cos \varphi + a_3 \cos 3\varphi;$$

$$a_1 = 0,735 A - 0,765 B \text{ (погрешность } \approx 8\%);$$

$$a_3 = 0,96 B - 0,345 A \text{ (погрешность } \approx 18\%);$$

(В пределах: $0,25 < \frac{n_2}{a_1} < 6$)

Результативное колебание 1-го и 3-го порядков:



$$\epsilon = a_1 \cos \varphi + a_3 \cos 3\varphi;$$

$$a_1 = 0,6 A + 0,72 B;$$

$$a_3 = 0,101 A + 0,72 B;$$

(В пределах: $0,25 < \frac{n_2}{a_1} < 4$ погрешность обеих амплитуд $\approx 2\%$)

Результативное колебание 1-го и 4-го порядков:



$$\epsilon = a_1 \cos \varphi + a_4 \cos 4\varphi;$$

$$a_1 = A \text{ (точка);}$$

$$a_4 = 0,522 B + 0,058 A \text{ (погрешность } \approx 4\%);$$

(В пределах: $0,25 < \frac{n_2}{a_1} < 4$)

и корректировку обоих тонов. Намеченный путь не является стандартным и в зависимости от числа и характера заданных виброграмм может быть изменен. Следует заметить, что разбалансировка обоих тонов, в случае если из один из резонансов не был устранен, может быть выполнена лишь в исключительных случаях.

Пример. Определение 1-го тона методом наименьших квадратов.

Виброграммы после их обработки даны следующий материал (см. табл. 13).

Виброграмма

Таблица 13

№ виброграмм	Число оборотов	Амплитуда		
		1-го порядка	2-го порядка	
1	71	Очень мало	-0,7	$A_1 = \frac{A_1 N^2}{n^2 - N^2} + \frac{B_1 N^2}{n^2 - N^2}$ $A_2 = \frac{A_2 N^2}{n^2 - 4N^2} + \frac{B_2 N^2}{n^2 - 4N^2}$
2	90	0,6 мм	Очень мало	
3	101	0,7	0	
4	113	0,9	0,8	
5	116	1,4	1,4	
6	125	2,8	Очень мало	
7	129	4,4	0	

Ограничиваясь учетом лишь 1-го тона и базирясь только на колебаниях 1-го порядка, имеем

$$a_1 = \frac{A_1 N^2}{n^2 - N^2} \quad (a)$$

Для нахождения двух неизвестных A_1 и a_1 данные, приведенные в таблице, позволяют составить семь уравнений вида (a). Уравнение (a) легко приводится к линейному виду:

$$A_1 - \frac{a_1}{N^2} n^2 + a_1 = 0 \quad (b)$$

По семи уравнениям (b) составляются так называемые нормальные уравнения, которых в нашем случае по числу неизвестных будет два.

По общему правилу система μ уравнений относительно ν неизвестных ($\nu < \mu$):

$$\left. \begin{aligned} a_1 x + b_1 y + \dots + l_1 t + m_1 &= 0; \\ a_2 x + \dots &= 0; \\ \dots &= 0; \\ a_\mu x + b_\mu y + \dots + l_\mu t + m_\mu &= 0. \end{aligned} \right\} \mu \text{ условных уравнений с } \nu \text{ неизвестными.}$$

312

если эти уравнения равнозначны, преобразовывается в систему нормальных уравнений Гаусса такого вида:

$$\left. \begin{aligned} [aa]x + [ab]y + \dots + [at]t + [am]m &= 0; \\ [ba]x + [bb]y + \dots + [bt]t + [bm]m &= 0; \\ \dots &= 0; \\ [la]x + [lb]y + \dots + [lt]t + [lm]m &= 0, \end{aligned} \right\} \nu \text{ нормальных уравнений с } \nu \text{ неизвестными}$$

где

$$\left. \begin{aligned} [aa] &= \sum_{i=1}^{\nu} a_i^2 = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_\nu^2 \\ [ab] &= \sum_{i=1}^{\nu} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_\nu b_\nu \\ [la] &= \sum_{i=1}^{\nu} l_i m_i = l_1 m_1 + l_2 m_2 + \dots + l_\nu m_\nu \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{ всего } \nu(\nu+1) \text{ ко-} \\ &\text{эффициентов, из} \\ &\text{ которых только} \\ &\frac{1}{2} \nu(\nu+3) \\ &\text{различны.} \end{aligned}$$

Составление коэффициентов и контрольные вычисления выполнены в табл. 14. В целях удобства и большей точности следует являющимся выбором неизвестных сделать коэффициенты нормальных уравнений положительными и приблизительно равнозначными.

Примечания к табл. 14. 1. Таблица дана в своем общем виде и в данном частном случае благодаря тому, что коэффициенты при одном из неизвестных (A_1) в условных уравнениях равны единице, могла бы быть значительно сокращена, а именно шесть столбцов: 6, 8, 9, 10, 11, 12 можно было выпустить.

2. Столбцы 11 и 15 являются контрольными: каждая цифра их, умножающаяся умножением, должна равняться сумме цифр той же строки трех предыдущих столбцов, а итоговые суммы их должны сходиться по двум направлениям. На небольшие расхождения, отмеченные звездочкой, не следует обращать внимания.

Решать получившиеся нормальные уравнения:

$$7,00 A_1 + 7,62 (-a_1 10^{-4}) + 10,80 = 0;$$

$$7,62 A_1 + 12,83 (-a_1^2 10^{-4}) + 19,71 = 0$$

выгоднее всего определителями, так как они понадобятся для оценки точности неизвестных:

$$A_1 = \frac{\begin{vmatrix} -10,80 & 7,62 \\ -19,71 & 12,83 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 7,00 & 7,62 \\ 7,62 & 12,83 \end{vmatrix}} = \frac{11,5}{31,7} = 0,363 \text{ мм};$$

$$-a_1^2 10^{-4} = \frac{\begin{vmatrix} 7,00 & -10,80 \\ 7,62 & -19,71 \end{vmatrix}}{31,7} = \frac{-15,7}{31,7} = -1,750;$$

$$a_1 = 132,5 \text{ кол./мин.}$$

Таблица 24

Исходные данные	Коэффициенты условий уравнений							1-е нормальное уравнение				2-е нормальное уравнение								
	Амплитуда отрыва δ_0	Линейная δ_1	Линейная δ_2	Линейная δ_3	Линейная δ_4	Линейная δ_5	Средний шаг	(4) + (5) + (6)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
1	71	0	1,93	0,60	0,00	1,00	1,00	0,00	0,00	0,00	1,60	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,60	0,00
2	91	0,5	1,00	0,73	0,60	2,33	2,65	0,73	0,60	2,33	0,73	0,73	0,53	0,44	1,70	0,53	0,44	1,70	0,53	0,44
3	101	0,7	1,00	0,69	0,70	2,39	2,69	0,69	0,70	2,39	0,69	0,69	0,48	0,48	1,65	0,48	0,48	1,65	0,48	0,48
4	113	0,9	1,00	0,71	0,50	2,61	2,61	1,00	0,71	0,90	2,61	0,71	0,29	0,29	1,63	0,29	0,29	1,63	0,29	0,29
5	116	1,4	1,50	1,04	1,40	3,44	3,44	1,00	1,04	1,40	3,44	1,40	3,44	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04	1,04
6	125	2,6	1,90	1,80	2,60	5,60	5,60	1,00	1,80	2,80	5,60	1,80	2,80	1,80	1,80	1,80	1,80	1,80	1,80	1,80
7	129	4,4	1,93	2,55	4,40	8,05	8,05	1,00	2,55	4,40	8,05	2,55	4,40	2,55	2,55	2,55	2,55	2,55	2,55	2,55
Сумма	-	7,93	7,92	10,80	10,80	28,42	7,00	7,62	10,80	25,42	25,42	7,62	12,83	19,71	45,18	45,18	12,83	19,71	45,18	45,18
1-е нормальное уравнение	$7,60 A_1 + 7,62 (-n^2 - 15^{-2}) + 10,80 = 0$																			
2-е нормальное уравнение	$7,62 A_2 + 12,83 (-n^2 - 10^{-2}) + 19,71 = 0$																			

Таблица 25

Исходные данные	Коэффициенты условий уравнений				$(\delta_1^2) A_1 = \frac{(\delta_1^2)}{0,260(2)} = -1,76(3)$	$(\delta_2^2) A_2 = \frac{(\delta_2^2)}{0,260(2)} = -1,76(3)$	$\delta = (4) + (5) + (6)$	$\delta^2 = (7)^2$	Веса и суммы
	Линейная δ_0	Линейная δ_1	Средний шаг	Средний шаг					
1	1,00	0,00	0,00	0,36	0,00	0,36	0,133	0,133	$G_1 = \frac{31,7}{25,83} = 2,47$ $G_2 = \frac{31,7}{7,60} = 4,52$ $\sigma_1 = \sqrt{\frac{3,377}{2,47(7-2)}} = 0,615$ $\sigma_2 = \sqrt{\frac{0,377}{4,52 \cdot 5}} = 0,11$
2	1,00	0,73	0,60	0,36	-1,26	-0,32	0,102	0,102	
3	1,00	0,69	0,70	0,36	-1,21	-0,15	0,023	0,023	
4	1,00	0,71	0,50	0,36	-1,25	-0,01	0,000	0,000	
5	1,00	1,04	1,40	0,36	-1,63	-0,07	0,005	0,005	
6	1,00	1,80	2,80	0,36	-3,17	-0,01	0,000	0,000	
7	1,00	2,55	4,40	0,36	-6,53	0,13	0,017	0,017	

Точность полученных значений оценивается их квадратичными ошибками:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum \sigma^2}{n-1}} \quad (4)$$

где σ — абсолютные ошибки условного уравнения при найденных значениях неизвестных,

$$G_1 = \frac{D}{\Delta U} = \left(\frac{\text{Относительная нормальная уравнений}}{\text{Его весов по данному неизвестному}} \right) \dots \text{ дес. неизвестного}$$

n и ν — число условных и нормальных уравнений соответственно.

Вычисления по оценке точности выполнены в табл. 15.

В рассмотренном примере относительная квадратичная ошибка найденного значения неизвестного A_1 :

$$\frac{0,15}{0,363} = 0,41, \text{ или } 41\%$$

То же для неизвестного $(-n) 10^{-6}$:

$$\frac{0,11}{1,756} = 0,063, \text{ или } 6,3\%$$

То же для критического числа $n_1 = 132,5$:

$$3,15\%$$

Таким образом, с вероятностью, соответствующей квадратичной ошибке (0,683), можно считать, что амплитуда колебаний в данной точке выражается следующей зависимостью (см. уравнение (2))

$$a_1 = \frac{40,22 + 0,61}{(129 + 127)^2 - 39} \Delta T$$

Первый тон найден способом наименьших квадратов с практически достаточной точностью, численное же значение коэффициента A_1 разбавить не удалось (точность 41% недостаточна). Причина последнего заключается по-видимому в том, что некоторые программы записаны вблизи резонанса, где уравнение (2) не учитывающее сил сопротивления, слишком плохо отражает природу явления.

* В случае равноточных уравнений.

15. К ВОПРОСУ О ПЕРИОДЕ СВОБОДНЫХ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ КОРАБЛЯ*

При определении периода главных поперечных колебаний корабля до последнего времени принято было учитывать лишь те деформации корабля, которые обязаны своим происхождением изгибу судового корпуса, т. е. удлинением и укорочением продольных связей его. Поперечными перемещениями от сдвигов до последнего времени было принято пренебрегать. Между тем, как показывают подсчеты, влияние далеко не так мало, как это принято думать ранее. Поэтому в современной технической литературе можно найти попытки учесть данное влияние.** Одной из последних работ, посвященных этому вопросу, является упомянутая работа Cole's. В этой работе в отношении влияния сдвигов сделана грубая ошибка: поправка на влияние сдвигов введена в противоположную сторону, чем то и действительность должно быть. Равно ту же ошибку сделал Nicholl. В работе Cole's она исправлена, несмотря на то, что этот вопрос в связи с докладом Lockwood-Taylor's подвергался специальной дискуссии. В предисловии к докладу Cole's L. Taylor указывал на несправдливость суждений Nicholl's и Cole's. Тем не менее в своем заключительном слове Cole остался при своем первоначальном, явно ошибочном, мнении.

Работа Cole's является довольно интересной: в ней для двух судов сопоставлены данные теоретического, и притом очень простого, расчета с данными практического наблюдения, причем совпадение результатов, вычисленных и наблюдаемых, оказалось очень хорошим. Она вызывает, безусловно, будет вызывать попытки ею пользоваться в практических вычислениях. Нам представляется совершенно необходимым высказать подробно ту принципиальную ошибку, которая в нее вошла.

* Впервые опубликован в журнале «Кораблостроение», 1929 г., № 14/15.

** См. по этому поводу:

Nicholl, Vibration of Ships, *Tr. Inst. Nav. Arch.*, 1924.
Lockwood Taylor, Ship Vibration Periods, *Tr. North — East coast Inst. of Eng. and Shipbuilders*, 1927—28.
Cole, The Natural Periods of Vibration of Ships, *Trans. of the Inst. of Eng. and Shipbuilders in Scotland*, 1928—29.

1. Формула, которой рекомендует пользоваться *Cole* для определения периода главных свободных колебаний корабля, может быть выписана так:

$$\lambda^2 = g E (1 + K) \frac{\int_{-l}^{+l} I \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_{-l}^{+l} m u'^2 dx - \left(\int_{-l}^{+l} \frac{m u du}{\Delta} \right)^2 \Delta} \quad (1)$$

Здесь λ — искомого угловая частота колебания, связанная с его периодом T зависимостью:

$$\lambda = \frac{2\pi}{T};$$

Δ — вес корабля:

$$\Delta = \int_{-l}^{+l} m dx;$$

m — вес корабля на единицу длины его;

g — ускорение силы тяжести;

E — модуль Юнга;

I — момент инерции площади поперечного сечения продольных связей;

u — функция от x , являющаяся аналитическим выражением соответствующей форм главных свободных колебаний призматического стержня;

K — поправка на влияние сдвигов, определяемая по формуле

$$K = \frac{E}{G} \frac{\int_{-l}^{+l} \frac{S^2}{I} dx}{\int_{-l}^{+l} \frac{M^2}{I} dx}$$

где

$$S = \int_{-l}^{+l} m u dx;$$

$$M = \int_{-l}^{+l} S dx;$$

G — модуль сдвига;

σ — приращение площади сечения эквивалентного бруса

Вычисления, выполненные *Cole* и *Nicol'sen*, дали для величин K значения от 0,16 до 0,20. Нетрудно видеть, что, применив к определению периода главных свободных колебаний метод Релея и приняв, что форма главных свободных колебаний судна есть:

$$u(x) + c,$$

где c — некоторая константа, определяемая из условия

$$\int_{-l}^{+l} (u(x) + c) m dx = 0,$$

можно, пренебрегая деформацией сдвигов, получить для λ^2 выражение:

$$\lambda^2 = g E \frac{\int_{-l}^{+l} I \left(\frac{d^2 u}{dx^2} \right)^2 dx}{\int_{-l}^{+l} m u'^2 dx - \left(\int_{-l}^{+l} \frac{m u du}{\Delta} \right)^2 \Delta} \quad (2)$$

Сравнив формулу (1) с формулой (2), можно видеть, что для учета влияния сдвигов по *Cole*'ю следует в формулу (2) ввести вместо фактического модуля Юнга величину на 16—20% большую.

Между тем совершенно ясно, что при действии одних и тех же сил на два стержня, из которых один может испытывать только деформацию изгиба, второй же, кроме того, и деформацию сдвига, деформация второго, если в остальном они будут одинаковы, будет больше. Учет этой дополнительной деформации стержня можно путем уменьшения модуля Юнга, а не увеличения его, как то делал *Cole*.

Поправка на влияние сдвигов введена так же образом *Cole*'м неправильно. Как же следует ее ввести на самом деле?

2. Для решения поставленного вопроса применим метод Релея—Ритца, считая, что в каждый данный момент полные перемещения стержня в каждой его точке:

$$v = f(x) \sin \lambda t \quad (3)$$

складывается из двух перемещений: перемещения от изгиба

$$v_1 = f_1(x) \sin \lambda t \quad (4)$$

и перемещения от сдвигов

$$v_2 = f_2(x) \sin \lambda t \quad (5)$$

так что

$$v = v_1 + v_2 \quad (6)$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x). \quad (7)$$

Будем разбивать неизвестные функции $f(x)$, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в форме рядов:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= \sum_n a_n v_n(x); \\ f_2(x) &= \sum_n b_n v_n(x); \\ f(x) &= \sum_n (a_n + b_n) v_n(x). \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $v_n(x)$ — некоторые фундаментальные функции, удовлетворяющие каждой условию уравненности силы изгиба:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-l}^{+l} m v_n(x) dx &= 0; \\ \int_{-l}^{+l} m x v_n(x) dx &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где интегрирование берется по всей длине корабля. Составив выражения для живой силы T и потенциальной энергии V . Нетрудно видеть, что в рассматриваемой задаче:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2g} \lambda^2 \cos^2 \lambda t \int_{-l}^{+l} m f^2(x) dx = \\ &= \frac{\lambda^2 \cos^2 \lambda t}{2g} \int_{-l}^{+l} m \left(\sum_n (a_n + b_n) v_n(x) \right)^2 dx, \end{aligned} \quad (10)$$

потенциальная же энергия V складается из потенциальной энергии изгиба, определяемой перемещением v_1 :

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_{-l}^{+l} EI \left(\frac{dv_1}{dx} \right)^2 dx \quad (11)$$

и потенциальной энергии сдвига, определяемой перемещением v_2 :

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_{-l}^{+l} G \omega \left(\frac{dv_2}{dx} \right)^2 dx. \quad (12)$$

где I — момент инерции;

ω — площадь сечения эквивалентного бруса;

G — модуль сдвига.

Подставляя в равенства (11) и (12) v_1 и v_2 из условий (4) и (5), нетрудно видеть, что в рассматриваемой задаче полная потенциальная энергия

$$V = V_1 + V_2 = \\ = \frac{\lambda^2 \cos^2 \lambda t}{2} \left\{ \int_{-l}^{+l} EI \left[\sum_n a_n v_n'(x) \right]^2 dx + \int_{-l}^{+l} G \omega \left[\sum_n b_n v_n'(x) \right]^2 dx \right\}. \quad (13)$$

Так как в силу закона сохранения энергии величина $T + V$ от времени зависеть не должна, то, следовательно,

$$\lambda^2 = g \frac{\int_{-l}^{+l} EI \left[\sum_n a_n v_n'(x) \right]^2 dx + \int_{-l}^{+l} G \omega \left[\sum_n b_n v_n'(x) \right]^2 dx}{\int_{-l}^{+l} m \left[\sum_n (a_n + b_n) v_n(x) \right]^2 dx}. \quad (14)$$

Формула (14) позволяет найти угловую частоту каждого из главных свободных колебаний, если только его форма, т. е. совокупность параметров a_n и b_n предварительно определена.

3. Для определения совокупности параметров a_n и b_n , если они неизвестны, может служить известная теорема Релея, в силу которой истинная форма главных свободных колебаний обращает угловые скорости их в относительные *ветвиста*. В силу этой теоремы ни при какой малой вариации формы каждого из главных свободных колебаний угловая скорость его λ меняться не должна. Для этого, однако, необходимо, чтобы производные от λ по каждому из параметров, от которых она зависит, были бы равны нулю, т. е. чтобы удовлетворена была совокупность условий:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \lambda^2}{\partial a_n} &= 0; \\ \frac{\partial \lambda^2}{\partial b_n} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Обозначим через A_{nn} , B_{nn} и C_{nn} величины

$$A_{nn} = \int_{-l}^{+l} EI v_n'(x) v_n'(x) dx;$$

$$B_{nn} = \int_{-l}^{+l} G \omega v_n'(x) v_n'(x) dx;$$

$$C_{nn} = \int_{-l}^{+l} m v_n(x) v_n(x) dx.$$

можно условие (14) представить вид

$$\lambda^2 = g \frac{\sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^m (A_{kn} a_k a_n + B_{kn} b_k b_n)}{\sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^m C_{kn} (a_k + b_k) (a_n + b_n)} \quad (16)$$

что дает возможность переписать уравнения (15) в форме совокупности равенств:

$$\sum_{k=1}^m A_{kn} a_k - \frac{\sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^m (A_{kn} a_k a_n + B_{kn} b_k b_n)}{\sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^m C_{kn} (a_k + b_k) (a_n + b_n)} \sum_{k=1}^m C_{kn} (a_k + b_k) = 0$$

и

$$\sum_{k=1}^m B_{kn} b_k - \frac{\sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^m (A_{kn} a_k a_n + B_{kn} b_k b_n)}{\sum_{k=1}^m \sum_{n=1}^m C_{kn} (a_k + b_k) (a_n + b_n)} \sum_{k=1}^m C_{kn} (a_k + b_k) = 0.$$

Можно, что то же:

$$\sum_{k=1}^m \left[A_{kn} a_k - \frac{\lambda^2}{g} C_{kn} (a_k + b_k) \right] = 0; \quad (17)$$

$$\sum_{k=1}^m \left[B_{kn} b_k - \frac{\lambda^2}{g} C_{kn} (a_k + b_k) \right] = 0. \quad (18)$$

Уравнения вида (17) и (18) можно написать по одному для каждого частного движения n . В своей совокупности они составляют систему такого числа линейных однородных уравнений, сколько различных параметров a_k и b_k требуется определить. Для того чтобы хотя бы некоторые из параметров a_k и b_k были отличны от нуля, определитель системы (17) — (18) должен быть равен нулю. Определитель системы (17) — (18) включает всегда одну или несколько неизвестных λ^2 , которая из него и может быть найдена.

Если оставить в каждом из рядов (8) по m членам, то получим m уравнений вида (17) и столько же уравнений вида (18), всего, следовательно, $2m$ уравнений. Определитель этой системы будет относительно λ^2 уравнением не 2-ой степени, а лишь m -ой степени.

Действительно, нетрудно видеть, что система (17) — (18) эквивалентна системе:

$$\sum_{k=1}^m B_{kn} b_k = \sum_{k=1}^m A_{kn} a_k \quad (19)$$

и

$$\sum_{k=1}^m \left[A_{kn} a_k - \frac{\lambda^2}{g} C_{kn} (a_k + b_k) \right] = 0; \quad (17)$$

m уравнений вида (19) позволяют выразить все b_k через все a_k .

Подстановкой найденных значений b_k в уравнения (17) можно из этих последних все a_k исключить, придать уравнениям (17) вид:

$$\sum_{k=1}^m \left[A_{kn} - \frac{\lambda^2}{g} D_{kn} \right] a_k = 0! \quad (20)$$

Система (20) состоит всего лишь из m уравнений с m неизвестными a_k в каждом. Ее определитель есть уравнение m -ой степени относительно λ^2 и определяет собой m угловых скоростей главных свободных колебаний стержня. Если бы мы, как принято делать, отбросили влияние сдвигов, то должны были бы лишь отбросить уравнение (19) и пропустить в уравнении (17) все b_k , положив их равными нулю. Учет влияния сдвигов усложняет несколько задачу, но сравнительно немного, так как для учета этого влияния с помощью методов Рунге — Рунса нам надлежит совершить следующую дополнительную вычислительную работу: найти все коэффициенты B_{kn} ; составить и решить уравнения (19); привести путем исключения всех b_k уравнения (17) к виду (20).

Работа эта невелика по сравнению с той, которую приходится продолжать для составления и решения системы уравнений (17), положив все b_k равными нулю.

4. Решение задачи упрощается, если ограничиться первым приближением и положить:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x) &= a v(x); \\ f_2(x) &= b v(x); \\ f(x) &= (a + b) v(x). \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где $v(x)$ есть некоторая заданная функция от x , а a и b некоторые известные постоянные параметры.

В этом случае, как нетрудно видеть, равенство (16) обращается в равенство:

$$\lambda^2 = g \frac{a^2 A + b^2 B}{C(a + b)^2} \quad (22)$$

где

$$A = \int_{-l}^{+l} EI [v'(x)]^2 dx;$$

$$B = \int_{-l}^{+l} G \omega [v(x)]^2 dx;$$

$$C = \int_{-l}^{+l} m [v(x)]^2 dx.$$

Уравнения (17) и (18) обращаются в два уравнения:

$$a A - \frac{\lambda^2}{g} (a + b) C = 0;$$

$$b B - \frac{\lambda^2}{g} (a + b) C = 0,$$

откуда следует

$$a A = b B$$

и

$$\lambda^2 = g \frac{AB}{(A+B)C}. \quad (23)$$

Если бы мы ограничивались тем же первым приближением, не учитывая деформации сдвига, то получили бы, очевидно,

$$\lambda^2 = \frac{A}{g}. \quad (24)$$

Сравнение формул (23) и (24) показывает, что в первом приближении влияние деформации сдвига сводится к увеличению угловой частоты главных свободных колебаний стержня в $\sqrt{1 + \frac{A}{B}}$ раз, а не к увеличению его, как то полагают Нислой и Собе, а $\sqrt{1 + K}$ раз.

Если тем не менее Собе для рассмотренных им судов получила довольно хорошие совпадения результатов вычисленного и наблюдаемого из опыта, то это следует приписать, с одной стороны, как правильно указано было Л. Taylor's, тому, что основную величину модуля Юнга Собе в своей работе брал слишком малой,* с другой стороны тому еще, что влияние забортовой воды, которое он учитывал по Silberstein's** было им, вероятно, преувеличено.

* Он полагал, что $E = 11560 \text{ мда}^2 = 1,8 \cdot 10^9 \text{ ама}$.

** См. приложение к цитированному выше докладу Lockwood-Taylor's.

19. ЗАКЛЮЧЕНИЕ ПО ВОПРОСУ О ВЕРОЯТНОЙ ВИБРАЦИИ СУДНА*

Экспертизе были поставлены следующие вопросы:

1. Имеются ли опасения получить в запроектированном судне при нормальном режиме обонх главных двигателей ($n = 430$) столь заметные вибрации, что обеспечение необходимой спокойной обстановки для деловой работы и отдыха на судне станет невозможным.

2. Имеются ли опасения появления заметных вибраций при других режимах работы главных двигателей (при $n = 430$), а также при работе одного главного двигателя (в случае вынужденной остановки другого) и если имеются, то при каких режимах работы двигателей вибрации будут наиболее заметны.

3. Необходимо ли установление при действии двигателей на ходу синхронной их работы.

4. Какие меры будут введены на усилении или ослабление вибрации на ходу работа одного, двух или трех вспомогательных двигателей КПД.

5. Имеются ли опасения получить заметную вибрацию судна на стоянке при работе одного, двух или трех вспомогательных двигателей КПД.

6. Какие изменения необходимо внести в замеченную конструкцию корпуса теплохода и, в частности, фундамента под двигателями, в случае выявления в результате соответствующих расчетов опасности получения заметных вибраций судна.

7. Как будут передаваться возмущения в корпусе колебания надстроек, особенно в носовой ее части, где размещены пассажирские помещения, и что должно быть предпринято для уменьшения степени влияния колебаний корпуса на спокойное состояние пассажирских помещений в надстройках.

Для того чтобы ответить на эти вопросы был сделан подсчет (методом Релея в первом приближении) ожидаемой частоты основного вертикального главного свободного колебания корпуса. Подсчет был выполнен без учета влияния деформаций сдвига, с одной стороны, и без учета участия надстроек в общем изгибе корпуса.

* Повторяется вкратце.

В основу расчета была положена модель инерции отдельных поперечных сечений корабля, вычисленные авторами проекта в первом приближении (без учета выхода из работы отдельных частей), вследствие потери ими устойчивости. Оказалось, что упомянутое главное свободное колебание должно отличаться частотой около 90 об/мин, причем данная цифра по-видимому будет частотой этих колебаний в действительности прикованного.

Результат этот показал, что в рассматриваемом случае при нормальном режиме как вспомогательных, так и главных двигателей можно опасаться резонанса возмущающей силы лишь с собственными колебаниями винных частот, для нахождения которых надежных методов расчета, должным образом проверенных на опыте, не имеется. Это заставляло содержаться от попытки размазать точные значения соответствующих частот и ограничиться привидкой примерной их величины, сделанной в предположении, что периоды главных свободных колебаний проектируемого судна будут близки, вероятно, к частотам соответствующих колебаний приматического бруса той же длины, массы и средней жесткости.

Подсчет показал, что вертикальные колебания различных тонов должны в рассматриваемом случае отличаться частотами, о порядке которых представление дают следующие цифры:

1-е вертикальное колебание	$n_1 = 70$ об/мин.
2-е вертикальное колебание	$n_2 = 194$ об/мин.
3-е вертикальное колебание	$n_3 = 382$ об/мин.
4-е вертикальное колебание	$n_4 = 640$ об/мин.
5-е вертикальное колебание	$n_5 = 940$ об/мин.

Судя по результатам расчета, частота n_5 будет, вероятно, выше, чем показано в приведенной таблице. Утверждать то же с достоверностью относительно частот остальных главных свободных колебаний невозможно. Следует признать, что резонанс основной гармоник возмущающих сил, имеющих как главными, так и вспомогательными двигателями, нельзя считать в рассматриваемом случае исключенным.

В частности, не нормальном режиме главных двигателей колеблется вероятен резонанс их с вертикальными колебаниями третьего тона. Вспомогательные двигатели КПД при нормальном числе оборотов могут по-видимому попасть в резонанс с пятым тоном главных свободных вертикальных колебаний корабля.

Чтобы оценить насколько нужно эти резонансы считать опасными, была определена амплитуда вынужденных колебаний как для случая, когда основная гармоника возмущающих сил главных дизелей входит в резонанс с третьим главным свободным колебанием соответствующего приматического стержня, так и для случая резонанса основной гармоник вспомогательных дизелей с пятым главным свободным колебанием того же приматического

стержня. Относительно этих подсчетов можно сказать следующее.

Согласно полученному от авторов проекта разъяснению насосы главных дизелей имеют конструкцию, позволяющую считать их уравновешенными. Никаких других сведений о данных насосах в распоряжении экспертизы предоставлено не было. При таких условиях вопрос о силах инерции этих насосов пришлось из рассмотрения исключить. Остатлось учесть условия, приложенные к корпусу корабля через посредство машинного фундамента, главными цилиндрами этих дизелей.

Число главных цилиндров и расположение кривошипов дизелей выбрано так, что если бы двигатели можно было бы считать недеформированными твердым телом, то они бы к судну ни сил, ни моментов первого порядка не прилагали. Поэтому в расчете нужно было считать лишь вопрос о том, какого порядка вибрацию может вызвать этот двигатель, если учесть то обстоятельство, что он на протяжении своей длины может гнуться. К сожалению, никаких сведений, дающих количественное представление о степени жесткости двигателя по отношению к изгибу, в распоряжении экспертизы не было. Из чертежа можно было лишь видеть, что двигатель представляет собой довольно массивный блок, жесткость которого вероятно будет велика по сравнению с жесткостью подвешенного под двигатель машинного фундамента. Какую долю может составить жесткость двигателя от общей жесткости судна по его протяжению, судить трудно было нельзя, но, зная лишь о немалом габарите двигателя, с одной стороны, и видящего сечения судна, с другой, можно было предположить, что вероятно жесткость двигателя по отношению к изгибу будет значительно меньше таковой самого судна на его протяжении. В этом предположении и произведен вышеописанный расчет.

Из остальных расчетных предположений необходимо отметить следующее: величина динамического множителя в момент резонанса, как известно, в очень большой мере зависит от сопротивления, встречаемых судном при его вибрации. Сопротивления эти изучены еще очень мало. Поэтому назначить с полной уверенностью величину динамического множителя было нельзя. Пришлось назначить эту величину исходя из тех единственных данных в литературе данных, которые были опубликованы в докладе Доклуд—Тайлора, читанном в Английском Обществе Корабльных Инженеров в 1930 году. На основании этих данных было принято, что в случае резонанса при числе оборотов 430 в минуту динамический множитель будет величиной порядка 55. Благодаря общему и данному судна деревянным надстроек можно ожидать, что на самом деле он будет несколько меньше.

Выполненный в этих предположениях расчет показал, что в случае резонанса при 430 оборотах каждый по главным двигателям может вызвать у корпуса корабля колебания, амплитуда которых в оконечностях корабля будет около 1,3 мм. Этому со-

отвечает наибольшее ускорение порядка 2600 мм/сек², что следует признать недопустимым с точки зрения самочувствия тех лиц, которые на судне окажутся.

Следует признать, что несмотря на то, что силы инерции рассматриваемых дизелей статически вполне уравновешены, тем не менее, благодаря азимуту корпуса корабля на протяжении двигателя, в котором будет участвовать и сам двигатель, они могут в случае резонанса при 430 оборотах вызвать совершенно недопустимую вибрацию корпуса корабля, которая, будет, конечно, передава и его надстройкам.

Будет ли этот резонанс иметь место или нет, до постройки судна и его испытание нельзя ни утверждать с уверенностью, ни отрицать. Надо быть готовым к тому, чтобы в случае обнаружения у корпуса корабля вибрации принять против нее надлежащие меры.

Синхронизирование работы главных дизелей может привести пользу лишь при условии, что будет достигнута абсолютная синхронность их работы, так что поршни двигателя правого борта будут всегда находиться в своих переломных мертвых точках, когда соответствующие поршни левого двигателя будут в своем нижнем положении. Такая абсолютная согласованность работы обоих дизелей может исключать вертикальную вибрацию корпуса судна почти полностью, но она трудно осуществима, отражается на маневренных качествах судна и может вызвать вертикальные колебания корпуса корабля вызвать его круговые колебания. Это средство устранения вибрации не может быть рекомендовано.

Весьма действенным средством для уменьшения вибрации является выход из резонанса. Для уменьшения этой вибрации раз в 20 в рассматриваемом случае нужно уменьшить величину динамического множителя с 55 приблизительно до 2,5. А так как все области непосредственного резонанса динамический коэффициент χ определяется зависимостью

$$\chi = \frac{1}{1 - \lambda^2},$$

то, чтобы достигнуть поставленной цели одним лишь изменением числа оборотов двигателя, нужно изменить это число оборотов в ту или иную сторону примерно процентов на 18. Такое изменение числа оборотов может оказаться несущественным.

Одним из средств борьбы с вибрацией может быть увеличение на протяжении машинного отделения жесткости как самого корабля, так и судового машинного фундамента. Это средство должно уменьшить обобщенные возмущающие силы, вызывающие вибрацию судна, и его можно было бы рекомендовать уже сейчас, так как вреда оно принести не может. Но это средство может быть действительным лишь в том случае, если нам удастся увеличить на протяжении машинного отделения жесткость машинного фундамента

не в сравнении с жесткостью, которой он обладает сейчас, а по сравнению с имеющейся ныне суммарной жесткостью фундамента и стоящей на нем машины вместе. Жесткость же последней превосходит жесткость самого машинного фундамента, как было отмечено выше, во много раз.

Поэтому для того, чтобы чего-либо достигнуть путем увеличения жесткости машинного фундамента, потребуется увеличить ее не столько раз, что практически это будет невозможно. Единственное, что можно в этом отношении предложить, — сделать на протяжении двигателя машинный лок металлическим. Если сделать последний по толщине и по набору стоек приближающимся к конструкции основного корпуса корабля и опереть его ковым дельным образом на поперечные переборки судна, то это в несколько раз увеличит жесткость корабля на протяжении двигателя. Чтобы корпус двигателя на всем протяжении не имел никаких изгибов, кроме тех, которые будут здесь присутствовать ввиду кривизны корпуса корабля, нужно машинный фундамент двигателя связать непосредственно с вышестоящей металлической машиной шахтой, для чего следует поставить возможно чаще достаточно солидные пиллерсы, должным образом скрепленные как с машинным фундаментом или флорамой возле него, так и с машинной шахтой.

Это мероприятие можно предложить и сейчас. Равным образом можно для увеличения жесткости поперечных флор в районе машинного фундамента уменьшить степень их заделки на бортах судна. Последнее может быть достигнуто установкой в районе машинного фундамента на каждом шапалуготе рамных шапалуготов, проектирующихся по высоте, если не до палубы, то хотя бы до бортовой страниры. Рамные шапалуготы следует соединять с флорами созданными кияками. Эту меру можно рекомендовать предпринять также сейчас, хотя (если резонанс при 430 оборотах не получится) без нее, как и без упомянутого усиления машинной шахты, может быть и удастся обойтись.

В качестве запасного выхода из положения может быть предложена установка динамических гасителей вибрации вроде тех, которые описаны в последнем докладе доктора *Inglis'a* в Английском Обществе Коробельных инженеров. Такие гасители могут быть установлены всегда, если при испытании судна будет видно, что какие-то меры против вибрации корпуса надо предпринять. Основы теории этих гасителей изложены в «Курсе уравнений математической физики» академика А. Н. Крылова. Их можно найти и в докладе *Inglis'a* в *T. J. N. A.* за 1933 г.

Переходя к вопросу о том, не следует ли опасаться большой вибрации при каких-либо иных скоростях хода, можно отметить, что такая скоростей может быть две. Между 70 и 100 оборотами возможен резонанс с основным вертикальным свободным колебанием второго тона (трескующим). Амплитуды колебаний должны быть при этих скоростях значительно меньше, чем при резонансе на полном ходу, а именно раз в 20 меньше при первой и только

что указанных скоростей и раз в 5 при второй. Кроме того, от работы на этом числе оборотов всегда казалось бы можно уклониться.

В отношении вспомогательных двигателей КПД должно отметить следующее.

Полученные о них сведения не совсем ясны. Расчет был выполнен в предположении, что силы первого порядка у этих двигателей статически уравновешены. Не совсем понятно было к чему относится сила 1520 кг. Показателем это не равнодействующая искривляющих сил всех трех цилиндров, а сила одного цилиндра, но ее величина не совсем кажется с общепринятыми по двигателю весам.

Возникает сомнения, правомерно ли понятия соответствующие указанию сообщенных по двигателям данным. На это надо обратить особое внимание при оценке всего сказанного выше.

Основными предельными случаями расчета были: а) равнодействующая вертикальных сил первого порядка в двигателях КПД уравновешена палани; б) неравномерный момент сил первого порядка; в) двигатель настолько короток, что изгибом корабля на протяжении двигателя можно пренебречь.

Возмущающей силой, вызывающей вертикальные колебания корабля в этих условиях, должна была быть лишь неравномерная пара, численная величина проекции равной 0,312 т/м.

Расчет на действие данной пары произведен в двух вариантах. В первом из них предположено, что лучность будет у колебаний 5-го тона, с которым возможен резонанс, расположенный как и у призматического бруса, т. е. на миделе. Во втором варианте расчета было принято, что в районе машинного отделения форма упругих колебаний корабля будет мало отличаться от формы соответствующих колебаний, т. е. колебаний 5-го тона призматического стержня, но средняя лучность будет единута у корабля так, что двигатели КПД войдут на ближайший к миделю узел. Оба варианта расчета дали результаты близкие, но, как и следовало ожидать, вариант второй привел к несколько большим амплитудам.

Динамический множитель при резонансе определен по той же формуле (что и в расчете главных дизелей) и принят равным 33.

Расчет, произведенный в этих предположениях, показал, что в случае резонанса каждый из двигателей КПД может вызвать у судна колебания, амплитуда которых будет величиной порядка 0,0665 м, чему соответствует амплитуда ускорений около 52 м/сек². При одновременной работе трех двигателей колебания должны носить характер бивибий, в которых максимальная амплитуда колебаний будет достигать пренебрежимо утроенной величины, т. е. 0,020 м. Ускорение будет достигать, следовательно, 153 м/сек².

В отношении достоверности этой величины колебаний данные литературы расходятся: Локкауд—Тайлор в своем докладе 1930

в Английском обществе Корабельных Инженеров признает колебания, ускорение коих не превосходит 150 м/сек² вполне допустимыми, не ставящими ничего в отношении их частоты. С другой стороны, Райер в своем докладе Столгольмскому Конгрессу по прикладной механике 1930 г. указывает, что при числе колебаний в минуту порядка 900, колебания порядка 0,020 м могут отражаться вредно на людях, испуганным находясь под их действием.

Нужно заметить, что второй из этих авторов является гражданским инженером, не имеет в виду колебаний, имеющих место на судах или в поездах и, по-видимому, ставит единым жестким для сооружений этого рода нормы вибрации. Подтверждением тому являются некоторые данные, собранные за последнее время в Научно-Исследовательском Институте Судостроения. На них заслуживают внимания следующие наблюдения.

На одном из только что исследованных судов плавильных вибрация отмечена при числе оборотов около 280 в минуту. Колебания корабля вызывались силами второго порядка, так что частота зарегистрированных колебаний была в два раза больше, чем скорость оборотов машины.

При работе одного двигателя и числе оборотов 300 отмечены колебания, основные данные о которых приведены ниже:

	Амплитуда, мм	Число колебаний в минуту	Ускорение, м/сек ²
Вертикальные колебания	0,08	600	370
Горизонтальные	0,15	600	590

При работе того же двигателя и 285 оборотах отмечено:

Вертикальные колебания	0,05	570	180
Горизонтальные	0,23	580	353

В обоих случаях наблюдатель, стоявший возле прибора, данного записи, отметил, что он не только чувствовал себя вполне хорошо, но вибрация почти не мешала ему вести записи даже тогда, когда при том же режиме работали сразу две машины и косяк, следовательно, вибрация была примерно в два раза больше. Правда, в таком случае вести записи было труднее и она выходила более искаженной.

Данные эти показывают, что из приведенных выше величин двух иностранных специалистов верить больше следует данным Локкауд—Тайлора. Вибрация, которая в случае резонанса можно ожидать от двигателей КПД, следует признавать вполне допустимой. Если бы мы даже в этом и ошиблись несколько, все, что совершило незначительного изменения числа оборотов двигателей КПД будет вполне достаточно для того, чтобы вести вызванную ими вибрацию в норму.

Надо, таким образом, полагать, что двигатели КПД, даже работая одновременно, вредоусной вибрации корабля вызывать ни на стоянке, ни на ходу не будут.

В отношении того, как будут передаваться вибрации корпуса корабля его надстройкам можно сказать лишь следующее.

Конструкция надстройки, насколько о ней можно судить по представленным чертежам и материалам, будет, вероятно, участвовать в общем изгибе судна как часть одного целого, и все колебания корпуса будут передаваться и ей. Благодаря тому, что все переборки и стенки этих надстроек обшиты с обеих сторон фанерой по достаточно жесткому каркасу, надо полагать, что в целом надстройкам не будут присущи никакие иные колебания, кроме тех, которые присущи основному корпусу корабля. Это не исключает, однако, того, что в отдельных частях отдельных перекрытий на отдельных бортах всегда могут возникать какие-либо местные вибрации, для устранения которых может быть и придется прибегнуть к установке местных дополнительных подкреплений, которые сейчас предвидеть невозможно.

Осуществить конструкцию надстроек так, чтобы они не участвовали в общем изгибе корабля, если не невозможно, то во всяком случае трудно и рискованно. Для смягчения по возможности вибрации в пассажирских надстройках можно рекомендовать лишь обычные меры: установку мягкой мебели, покрытие палуб мягким настилом. Рекомендовать какие-либо иные мероприятия затруднительно, да, по-видимому, в них и нет необходимости.

20. ОБ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЯХ НЕКОТОРЫХ СУДОВЫХ ПЕРЕКРЫТИЙ*

В связи с расчетом перекрытий, подверженных действию дульных газов, до последнего времени привлекает к себе все большее внимание задача о динамическом расчете зазых судовых перекрытий, которые рассматривались до сих пор лишь статически. Настоящая работа имеет целью дать решение этой задачи применительно к некоторым характерным типам судовых перекрытий.

Отдельный параграф ее (§ 1) посвящен в основном весьма элементарному приближенному расчетному приему, в одинаковой мере применимому к расчету упругой системы, но до сих пор точное решение задачи далеко не во всех случаях. Для оценки степени точности результатов, даваемых этим расчетным приемом в § 2, 3 и 4, намечены более точные схемы решения задачи применительно к трем различным типам судовых перекрытий. В § 5 рассмотрены некоторые вопросы, относящиеся к характеру тех погрешностей, которые присущи приближенному приему § 1 по сравнению с более точными решениями § 2, 3 и 4.

Поднятый вопрос имеет в математическом отношении много общего с задачей об устойчивости соответствующих вращений. Поэтому те расчетные приемы, которые разработаны в ряде наших статей применительно к задаче об устойчивости соответствующих упругих систем, могли быть непосредственно распространены и на задачу об упругих колебаниях этих систем. Именно данным путем и получены упомянутые выше более точные решения § 2, 3 и 4.

От использования аппарата интегральных уравнений и теории конечных разностей мы здесь воздержались, так как нашей целью было получить такие расчетные схемы, которые сделали бы решение задачи до числового конца доступным для инженеров с обычной математической подготовкой. Лишь, интересуясь применением в рассматриваемой задаче теории интегральных уравнений, отсылаем к статье М. Г. Крейна и

* Печатается впервые.

§ 1. Приближенное решение задачи о взаимном действии мгновенных сил на колебание плоских упругих перекрытий

Допустим, что на рассматриваемое плоское упругое перекрытие действует какая угодно система нормальных к этому перекрытию сил, которые изменяются во времени по любому закону, но остаются все время друг другу пропорциональными.

Пусть x и y декартовы координаты, позволяющие отличать отдельные точки рассматриваемого перекрытия друг от друга, а ξ_1 и ξ_2 декартовы координаты ξ -й из тех отдельных сосредоточенных сил, которые действуют на систему.

Пусть далее $R_j(t)$ величина ξ -й из взаимодействующих сил, заданная как некоторая определенная функция от времени.

В том частном случае, когда все $R_j(t)$ остаются все время друг другу пропорциональными, наиболее общим выражением для сил $R_j(t)$ должно быть выражение вида

$$R_j(t) = A_j F(t), \quad (1)$$

где $F(t)$ — некоторая заданная функция от времени;

A_j — константы, зависящие только от номера сил ξ .

Если все приложения к перекрытию поперечные силы изменяются во времени и соответственно с равенствами (1), то отклонение перекрытия, соответствующее статическому действию совокупности сил $R_j(t)$, т. е. отклонение, вычисленное без учета влияния сил инерции самого перекрытия, должно иметь вид

$$w = f(x, y) F(t), \quad (2)$$

где $F(t)$ — имеет те же значения, что и в равенствах (1);

w — стрелка прогиба перекрытия в точке x, y ;

$f(x, y)$ — некоторая функция, которую всегда можно разложить, предположив, что все $R_j(t)$ во времени не меняются и определяются равенствами

$$R_j(t) = A_j. \quad (3)$$

где A_j те же константы, что и в равенствах (1).

Для приближенного учета функциональной зависимости нагрузки перекрытия от времени естественно предположить, что форма вынужденных колебаний системы не зависит от вида функции $F(t)$, выражающей функциональную зависимость на-

грузки рассматриваемого перекрытия от времени. Допущение это, как известно из общей теории малых колебаний упругих систем, является безусловно, неверным. Поэтому основанное на нем решение, конечно, не может претендовать на большую точность и может служить лишь для самой грубой ориентировки в вопросе о действии на рассматриваемое перекрытие нагрузки указанного вида сил. Назовем это, заведомо незачисляя, приближенное решение задачи, тривиальным решением ее.

Для получения его нам, очевидно, достаточно принять, что

$$\omega = f(x, y) \varphi, \quad (4)$$

где φ — единственная координата рассматриваемой системы n , отбрасывая влияние всех остальных обобщенных координат, написать для координаты φ уравнение движения системы по схеме Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{\partial V}{\partial \varphi} = Q, \quad (5)$$

предполагая, что:

T — живая сила системы;

V — потенциальная энергия ее массы;

Q — обобщенная сила, соответствующая координате φ .

Пусть $\varphi(x, y)$ есть ее перекрытия в точке x, y , отнесенный к единице площади его.

Тогда в силу

$$T = \frac{1}{2} \iint \frac{r(x, y)}{g} \dot{w}^2 dx dy$$

должно быть

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\varphi}^2, \quad (6)$$

где

$$M = \iint \frac{r(x, y)}{g} f(x, y) dx dy, \quad (7)$$

а через (\cdot) обозначены производные по времени.

Выражением (7) определяется величина, которая была бы обобщенной массой системы, соответствующей координате φ , если бы координата φ принадлежала к числу главных координат последней. Условно эту величину можно назвать обобщенной массой, соответствующей координате φ .

Подставив выражение (4) в общее выражение для потенциальной энергии системы, можно привести последнее к виду

$$V = \frac{1}{2} N \varphi^2, \quad (8)$$

где величина N была бы обобщенной жесткостью системы, соответ-

* М. Крэн и Нонделманна, Sur quelques points de la théorie des vibrations des systèmes de type Timoshenko de l'Université D'Odessa, Mathématique, т. II, 1938, Одесса.

** А. С. Локин, К расчету плоских, ползательных жестких ребрам, Препараты математики в механике, с. II, вып. 2, 1955.

статической координате q , если бы эти координаты принадлежали к числу главных координат рассматриваемой системы.

Величине Q , входящую в равенство (5), можно, как известно, вычислить по формуле

$$Q = \sum_j R_j(t) f(\xi_j, \eta_j),$$

данной в силу (1)

$$Q = Q^* F(t), \quad (9)$$

где Q^* есть константа, определяемая выражением

$$Q^* = \sum_j A_j R_j(t), \quad (10)$$

В частном случае, когда нагрузка перекрытия состоит из отдельных, распределенных по поверхности перекрытия по точкам или в силу заданному закону, формула (10) обращается в формулу

$$Q^* = \iint g(\xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (11)$$

где интегрирование распространяется на всю площадь перекрытия, подверженную действию распределенной нагрузки, а $g(\xi, \eta)$ есть нагрузка, принадлежащая каждой точке ξ, η на единицу площади перекрытия.

Положив интеграл, входящий в формулу (11), в смысле Стилтьеса, можно распространить эту формулу также на тот случай, когда перекрытие загружено, помимо распределенной нагрузки, еще сосредоточенными усилиями, или когда оно загружено одним сосредоточенным усилием.

Вместо коэффициентов M, N и Q^* в формулах (6), (8) и (9) указанным типом способом, можем, разрешая уравнение (5) получить следующее уравнение

$$M \ddot{y} + N \dot{y} = Q^* F(t), \quad (12)$$

из которого y и определяется, как функция от времени, если только $F(t)$ нам известно.

В частном случае, когда в начальный момент времени система находится в покое, можно за исковой интеграл уравнение (12), как известно, принимать

$$y = \frac{Q^*}{Mk} \int_{\alpha=0}^{t-1} F(\alpha) \sin k(t-\alpha) d\alpha, \quad (13)$$

где

$$\lambda^2 = N/M.$$

Определив с помощью равенства (13) величину y , как функцию от времени, можно за приближенное выражение для w принять

данное равенством (4) и, разбив для интересующей нас точки перекрытия напряжения, соответствующие его статическому перемещению под действием совокупности сил $R_j(t) = A_j$, т. е. напряжений, соответствующим перемещению

$$w = f(x, y),$$

разыскать затем максимальную величину этих напряжений в этой точке путем умножения напряжений, соответствующих прогибу $w = f(x, y)$ на максимальное значение величин y , найденное с помощью равенств (13).

Как уже отмечено выше, этот путь решения задачи основан на допущении, что рассматриваемое перекрытие не может иметь неограниченной формы, кроме той, которая статически соответствует его нагрузке. На самом деле, кратковременная нагрузка системы вызывает обычно появление ряда различных главных свободных колебаний, которые, протекая во времени влече по своему закону, достигают своих максимальных отклонений не одновременно. Благодаря разному периоду различных главных свободных колебаний, коэффициенты динамичности нагрузок получаются у различных главных свободных колебаний системы также различными. В силу всего этого рассмотренное тринадцатое решение не может претендовать на большую точность и нуждается для оценок тановой в сравнения с результатами более точных расчетной задачи.

Оно дает точное решение задачи лишь в том случае, если отклонения системы, статически соответствующее рассматриваемой нагрузке перекрытия, в точности совпадает с формой одного из главных свободных колебаний исследуемой системы.

Оно может дать недурное приближение к истине, если статическое отклонение системы, соответствующее рассматриваемой нагрузке перекрытия, близко по виду к форме одного из главных свободных колебаний системы.

Оно может дать, однако, результаты тем больше отличающиеся от истинных, чем реже отличается форма статического отклонения системы, соответствующего рассматриваемой его нагрузке, от формы одного из главных свободных колебаний системы, т. е. чем ближе друг к другу коэффициенты разложения статического отклонения системы в ряд по различным формам главных свободных колебаний.

Если отдельные силы, приложенные к перекрытию, изменятся во времени не все по одному и тому же, а каждая по своему закону, например, начинают действовать, достигают своей максимальной величины и исчезают в различные моменты времени, то понятие о форме статического отклонения системы, соответствующего рассматриваемой нагрузке системы, может совершенно утратить смысл, ибо статическое отклонение системы в различные моменты времени может в этих случаях иметь совершенно разный вид. Поэтому к таким случаям нагрузка рассматриваемое три-

аналитическое решение может оказаться иногда вовсе не применимым. Если это случится, то нам придется обратиться к точному решению задачи уже не только для оценки степени точности вложенного шага транзитного решения, но даже для получения какого бы то ни было решения, ибо вложенным выше приближенным расчетом практически мы не будем в состоянии в таких случаях воспользоваться.

Обратимся к рассмотрению более точного решения задачи применительно к некоторым типичным частным случаям.

§ 2. Перекрытие, состоящее из бесконечно большого числа одинаковых продольных балок, поддерживаемых конечным числом равноудаленных поперечных связей

1. Начнем с рассмотрения перекрытий того типа, устойчивость которых была рассмотрена в нашей статье «О влиянии заделки концов равных балок на устойчивость палубного продольного набора».

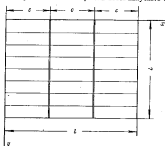


Рис. 1.

ного набора.* На примере этого перекрытия можно рассмотреть весьма общий расчетный прием, использовать который можно и в некоторых других случаях.

Представим себе (рис. 1) перекрытие, состоящее из большого числа равноудаленных одинаковых призматических балок одного

* См. Сборник теоретических работ группы прочности НИИ — НКЦД, 1939 г., Ленинград. Так же см. П. Ф. Панкович, Труды по прочности сварки, Суздаль, 1956.

направления, свободно опертых по концам на жесткие опоры, в промежутках же между последними на ряд одинаковых, равноудаленных призматических поперечных связей, закрепленных на концах как угодно.

Обозначим (рис. 1) через:

- | | |
|--|---|
| L — длину, | } каждой из перекрестных связей; |
| R — вес единицы длины, | |
| J — момент инерции поперечного сечения, | |
| c — расстояние между поперечными связями; | |
| $k = l/c$ — число равноудаленных участков, на которые балка главного направления разбивается балками поперечными; | |
| l — длину каждой продольной балки; | |
| r — вес единицы длины, | } продольных балок, отнесенные к единице ширины перекрытия; |
| i — момент инерции сечения, | |
| $w(x, y)$ — прогиб перекрытия в точке x, y ; | |
| $Y_n(y)$ — совокупность функций от y , в ряд по которым можно разложить всякую функцию от этого аргумента, заданную в пределах | |

$$0 < y < L.$$

Тогда, приняв за обобщенные координаты рассматриваемой стержневой системы коэффициенты A_{mn} в ряду

$$w = \sum_m \sum_n Y_n(y) A_{mn} \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (14)$$

можно будет уравнения движения рассматриваемой системы написать по схеме Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{A}_{mn}} \right) - \frac{\partial T}{\partial A_{mn}} + \frac{\partial V}{\partial A_{mn}} = R_{mn}, \quad (15)$$

где через R_{mn} обозначены обобщенные силы, соответствующие координатам A_{mn} , вычисляемые по схеме, данной равенствами (10) и (11).

При составлении выражений для V и T примем, что поперечные балки являются призматическими стержнями, оба конца которых упрото заделаны на жестких опорах, причем \mathfrak{H}_2 есть коэффициент податливости заделки того конца поперечных балок, где $u = 0$, а \mathfrak{H}_1 коэффициент податливости заделки их противоположного конца.

Тогда потенциальную энергию системы можно будет вычислить, как сумму:

а) потенциальной энергии изгиба продольных балок перекрытия

$$V_1 = \frac{KJ}{2} \int_0^L \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x^2} \right)^2 dx dy; \quad (16)$$

б) потенциальной энергии изгиба перекрестных связей

$$V_2 = \frac{KJ}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial y^2} \right)_{y=ky}^2 dy; \quad (17)$$

в) энергии деформации упругих опор

$$V_3 = \frac{1}{2H_0} \sum_{j=1}^{k-1} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0}^2 + \frac{1}{2H_0} \sum_{j=1}^{k-1} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=L}^2 dy; \quad (18)$$

Подставив в равенства (16), (17) и (18), равенство (14) нетрудно видеть, что

$$V_1 = \frac{KJ}{4} \sum_n \sum_j \sum_r A_{mn} A_{nr} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^4 Q_{m,r}, \quad (19)$$

где через $Q_{m,r}$ обозначим интегралы

$$Q_{m,r} = \int_0^L Y_m(y) Y_r(y) dy. \quad (20)$$

Аналогичные пузы можно легко усмотреть также, что

$$V_2 + V_3 = \frac{KJ}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \left[\frac{1}{2} \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial y^2} \right)^2 dy + \frac{1}{2H_0} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0}^2 + \frac{1}{2H_0} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=L}^2 \right]_{y=ky} = \\ = \frac{KJ}{2} \sum_n \sum_j \sum_r A_{mn} A_{nr} \int_0^L \sum_{j=1}^{k-1} \sin \frac{\pi n j}{k} \sin \frac{\pi r j}{k} dy, \quad (21)$$

где

$$P_{m,r} = \int_0^L Y_m(y) Y_r(y) dy + \frac{1}{2H_0} Y_m(0) Y_r(0) + \frac{1}{2H_0} Y_m(L) Y_r(L). \quad (22)$$

Если мы примем за функции $Y_m(y)$ формы главных свободных колебаний перекрестных балок, то, как известно из теории упругих колебаний, функции $Y_m(y)$ будут удовлетворять условиям

$$\left. \begin{aligned} Q_{m,r} &= 0 \\ P_{m,r} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{когда, если } m \neq r. \quad (23)$$

и, поэтому для простоты письма

$$\left. \begin{aligned} Q_{mn} &= Q_m \\ P_{mn} &= P_m \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

можно будет выписать выражение для потенциальной энергии всего перекрытия так

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{KJ}{4} \sum_n \sum_j A_{mn} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^4 Q_m + \\ + \frac{KJ}{2} \sum_n \sum_j \sum_r A_{mn} A_{nr} P_m \int_0^L \sum_{j=1}^{k-1} \sin \frac{\pi n j}{k} \sin \frac{\pi r j}{k} dy. \quad (25)$$

Обратимся к рассмотрению жидкой среды системы. Она складывается из:

а) жидкой среды продольных балок

$$T_1 = \frac{1}{2} \int_0^L dy \int_0^L \rho^2 \dot{w}^2 dx; \quad (26)$$

б) жидкой среды перекрестных связей

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k-1} \int_0^L \frac{R}{g} (\dot{w}_{y=ky}^2) dy; \quad (27)$$

что по подстановке w из выражения (14) дает

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2} \sum_n \sum_j \sum_r \frac{\rho^2}{2g} A_{mn}^2 Q_m \\ T_2 &= \frac{1}{2} \frac{R}{g} \sum_n \sum_j \sum_r A_{mn} A_{nr} Q_m \int_0^L \sum_{j=1}^{k-1} \sin \frac{\pi n j}{k} \sin \frac{\pi r j}{k} dy \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

и, следовательно,

$$T = T_1 + T_2 = \\ = \frac{\rho^2}{4g} \sum_n \sum_j Q_m A_{mn}^2 + \frac{R}{2g} \sum_n \sum_j \sum_r Q_m A_{mn} A_{nr} \int_0^L \sum_{j=1}^{k-1} \sin \frac{\pi n j}{k} \sin \frac{\pi r j}{k} dy. \quad (29)$$

Равенства (25) и (29) позволяют разбить уравнение Лагранжа (15).

2. Рассмотрим свободные колебания исследуемой системы. В этом случае уравнения движения (15) принимают вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{w}} \right) - \frac{\partial T}{\partial w} + \frac{\partial V}{\partial w} = 0 \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (30)$$

откуда подстановкой T и V из равенств (25) и (29) можно легко получить для $A_{m,n}$ следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{rI}{2\gamma} Q_m \ddot{A}_{m,n} + \frac{R}{\gamma} Q_m \sum_j \ddot{A}_{m,j} \int_{j-k}^{j+k} \sin \frac{\pi \pi j}{k} \sin \frac{\pi \pi j}{k} + \\ + \frac{R I I}{I} \left(\frac{\pi \pi}{I} \right)^k A_{m,n} Q_m + E J P_m \sum_j A_{m,j} \int_{j-k}^{j+k} \sin \frac{\pi \pi j}{k} \sin \frac{\pi \pi j}{k} = 0 \quad (31) \end{aligned}$$

$m = 1, 2, 3, \dots$
 $n = 1, 2, 3, \dots$

Система (31) распадется, очевидно, на бесконечное количество независимых групп, в каждой из которых параметр n имеет свое определенное значение, а m и j проходят через все значения от $n-1$ до $n=\infty$. Принимая во внимание известные свойства сумм

$$\int_{j-k}^{j+k} \sin \frac{\pi \pi j}{k} \sin \frac{\pi \pi j}{k},$$

можно легко видеть, что каждая из этих групп распадется в свою очередь на k подгрупп.

В первую из последних входит только переменная

$$A_{m,1}; A_{m,n-k}; A_{m,n-k+1}; A_{m,n-k+2}; A_{m,n-k+3}; A_{m,n-k+4}; \dots$$

во вторую только неизвестные

$$A_{m,2}; A_{m,n-k+1}; A_{m,n-k+2}; A_{m,n-k+3}; A_{m,n-k+4}; A_{m,n-k+5}; \dots$$

в предпоследнюю [1, 2, ...]

$$A_{m,n-1}; A_{m,n}; A_{m,n+1}; A_{m,n+2}; A_{m,n+3}; A_{m,n+4}; \dots$$

наконец, в последнюю

$$A_{m,k}; A_{m,k+1}; A_{m,k+2}; A_{m,k+3}; A_{m,k+4}; \dots$$

Особенно простую структуру имеет последняя из этих подгрупп. В ней все суммы вида

$$\int_{j-k}^{j+k} \sin \frac{\pi \pi j}{k} \sin \frac{\pi \pi j}{k}$$

равны нулю. Вследствие этого эта подгруппа уравнений состоит из совокупности равенств

$$\left. \begin{aligned} \frac{rI}{2\gamma} \ddot{A}_{m,k} + \frac{R I I}{2} \left(\frac{k \pi}{I} \right)^k A_{m,k} = 0; \\ \frac{rI}{2\gamma} \ddot{A}_{m,k+1} + \frac{R I I}{2} \left(\frac{2k \pi}{I} \right)^k A_{m,k+1} = 0; \\ \frac{rI}{2\gamma} \ddot{A}_{m,k+2} + \frac{R I I}{2} \left(\frac{3k \pi}{I} \right)^k A_{m,k+2} = 0; \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

в которых переменные $A_{m,k}$ раздвинуты.

Из остальных $k-1$ подгрупп уравнений (31) j -я выписывается так

$$\left. \begin{aligned} \frac{rI}{2\gamma} \ddot{A}_{m,j} + \frac{R I I}{2} \left(\frac{j \pi}{I} \right)^k A_{m,j} + \frac{Rk}{2\gamma} \Sigma = 0; \\ \frac{rI}{2\gamma} \ddot{A}_{m,n-k-\beta} + \frac{R I I}{2} \left(\frac{(2k-\beta) \pi}{I} \right)^k A_{m,n-k-\beta} - \frac{Rk}{2\gamma} \Sigma = 0; \\ \frac{rI}{2\gamma} \ddot{A}_{m,n-k+\beta} + \frac{R I I}{2} \left(\frac{(2k+\beta) \pi}{I} \right)^k A_{m,n-k+\beta} + \frac{Rk}{2\gamma} \Sigma = 0; \\ \frac{rI}{2\gamma} \ddot{A}_{m,n-k-\beta} + \frac{R I I}{2} \left(\frac{(4k-\beta) \pi}{I} \right)^k A_{m,n-k-\beta} - \frac{Rk}{2\gamma} \Sigma = 0; \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

где через Σ обозначена величина

$$\Sigma = A_{m,j} - A_{m,n-k-\beta} + A_{m,n-k+\beta} - A_{m,n-k-\beta} + A_{m,n-k+\beta} + \dots + A_{m,n-k-\beta} \dots$$

В подгруппах (33) переменные $A_{m,j}$, $A_{m,n-k-\beta}$, $A_{m,n-k+\beta}$, $A_{m,n-k-\beta}$, ... между собой связаны.

3. Из рассмотрения системы (32) следует, что координатные параметры $A_{m,k}$, $A_{m,k+1}$, $A_{m,k+2}$, $A_{m,k+3}$, ... принадлежат к числу главных координат рассматриваемой системы.

Угловые частоты соответствующих им главных свободных колебаний определяются равенствами

$$2\omega_{m,k} = \frac{R I I}{\gamma} \left(\frac{k \pi}{I} \right)^k \mu = \frac{R I I}{\gamma} \left(\frac{j \pi}{I} \right)^k \mu. \quad (34)$$

Соответствующие им формы главных отклонений системы суть

$$u_{m,k} = Y_m(y) \sin \frac{k \pi x}{l} = Y_m(y) \sin \left(j \frac{\pi x}{l} \right). \quad (35)$$

В колебаниях, которым соответствуют параметры $A_{m,k}$, никаких иных узлов, кроме совпадающих с перекрестными связями, у продольных балок нет. В колебаниях, которым соответствуют параметры $A_{m,k+1}$, имеется по одному дополнительному узлу продольные пролета между каждыми двумя перекрестными связями; параметры $A_{m,k+2}$ соответствуют колебаниям с двумя дополнительными узлами в каждом пролете между перекрестными связями и т. д.

Во всех этих колебаниях перекрестные связи не участвуют, каждая же из продольных балок деформируется, как сказано, независимо от всех остальных продольных балок, как многопролетный призматический стержень, свободно опертый на ряд жестких равноудаленных опор.

Соответствующие формы и частоты главных свободных колебаний продольных балок изображены схематически на рис. 2.

Так как частоты всех этих колебаний от ω не зависят, изменяя же параметр $A_{m,j}$, соответствующий одному и тому же значению β , но различное m можно в этих колебаниях варьировать по произволу амплитуды колебаний всех продольных балок, то следует признать, что в колебаниях, определяемых уравнением (32), каждая из продольных балок колеблется независимо от всех остальных. Происходит это потому, что во всех

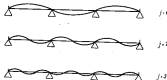


Рис. 2.

таких колебаниях перекрестные связи перекрываются сходясь к узловым точкам для всех продольных балок, как видно из (35).

Внуженные колебания каждой из продольных балок, соответствующие рассматриваемым главным координатам, могут быть найдены в форме равновесия

$$\omega = \sum_{j=1}^n A_j \sin \frac{j\pi x}{e}. \quad (36)$$

где параметры A_j определяются дифференциальными уравнениями

$$M_j \ddot{A}_j + N_j A_j = R_j, \quad (37)$$

в которых:

$$\left. \begin{array}{l} M_j - \text{сб. массенная масса,} \\ N_j - \text{сб. массенная жесткость,} \\ R_j - \text{сб. массенная сила,} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{для } j\text{-го главного свободного} \\ \text{колебания рассматриваемого} \\ \text{горизонтального стержня.} \end{array}$$

Обозначив через a расстояние между каждыми двумя смежными продольными балками, можно принять, что

$$\left. \begin{array}{l} \rho_0 - \text{вес единицы длины,} \\ M_0 - \text{момент инерции,} \end{array} \right\} \text{каждой из продольных балок.}$$

Тогда, считая, что $q(x, t)$ есть интенсивность распределенной нагрузки рассматриваемой балки, будем иметь

$$\left. \begin{array}{l} R_j = \int_0^l q(x, t) \sin \left(\frac{j\pi x}{e} \right) dx; \\ M_j = \frac{\rho_0 a^3}{12} = \frac{1}{2} M_0; \\ N_j = \frac{M_0}{2} j^2 = \frac{M_0}{2} j^2 \frac{R^2 g}{\tau} \left(\frac{\pi}{e} \right)^4, \end{array} \right\} \quad (38)$$

где M_0 — масса всей рассматриваемой продольной балки.

Общий интеграл уравнения (37) был уже рассмотрен в § 1. Поэтому размыкать все те главные колебания любой из продольных балок, в которых перекрестные связи не участвуют, не становится труда.

4. Обратимся теперь к рассмотрению частот и форм тех главных свободных колебаний перекрестия, в которых участвуют перекрестные связи. Колебания эти определяются уравнением (33), в котором переменные $A_{m,j}, A_{m,(n-j)}, A_{m,(n+j)}, A_{m,(n-j)}$ и т. д. не разделены и не могут быть, следовательно, приняты за главные координатные параметры рассматриваемой системы.

Чтобы размыкать их, введем главные координаты $P_{m,j}$ перекрестия подстановкой

$$\left. \begin{array}{l} A_{m,j} = \sum_{i=1}^n \rho_{m,i}^j P_{m,i}; \\ A_{m,(n-j)} = \sum_{i=1}^n \rho_{m,(n-j)}^i P_{m,i}; \\ A_{m,(n+j)} = \sum_{i=1}^n \rho_{m,(n+j)}^i P_{m,i}; \\ \dots \dots \dots \end{array} \right\} \quad (39)$$

Обозначив через $\lambda_{m,j}^2$ узловую частоту того из главных свободных колебаний системы, которому соответствует координата $P_{m,j}$ можно, пользуясь методом частных решений, получить из системы (33) для определения чисел $\lambda_{m,j}^2$ и $\rho_{m,i}^j$ следующую систему алгебраических уравнений

$$\left. \begin{array}{l} \rho_{m,(n-j)}^j = -\rho_{m,j}^j \frac{(\lambda_{m,j}^2)^2 - \rho^2 \lambda_{m,j}^2}{(\lambda_{m,j}^2)^2 - (\lambda_{m,j} - j)^2 \lambda_{m,j}^2}; \\ \rho_{m,(n+j)}^j = \rho_{m,(n+j)}^j \frac{(\lambda_{m,j}^2)^2 - \rho^2 \lambda_{m,j}^2}{(\lambda_{m,j}^2)^2 - (\lambda_{m,j} + j)^2 \lambda_{m,j}^2}; \\ \rho_{m,(n-j)}^{(n-j)} = -\rho_{m,(n-j)}^{(n-j)} \frac{(\lambda_{m,j}^2)^2 - \rho^2 \lambda_{m,j}^2}{\lambda_{m,j}^2 (\lambda_{m,j}^2 - (\lambda_{m,j} - j)^2 \lambda_{m,j}^2)}; \\ \rho_{m,(n+j)}^{(n+j)} = \rho_{m,(n+j)}^{(n+j)} \frac{(\lambda_{m,j}^2)^2 - \rho^2 \lambda_{m,j}^2}{\lambda_{m,j}^2 (\lambda_{m,j}^2 - (\lambda_{m,j} + j)^2 \lambda_{m,j}^2)}; \end{array} \right\} \quad (40)$$

$$(\alpha_{k,j}^0)^2 - j^2 \lambda_k^2 \alpha_{k,j}^0 = -\frac{Rj}{r} (\alpha_{k,j}^0)^2 - \left(\frac{Rjg}{R} \frac{F_{k,j}}{Q_{k,j}} \right) \alpha_{k,j}^0 - \alpha_{k,j}^0 \alpha_{k,j-\beta} + \\ + \alpha_{k,j}^0 \alpha_{k,j+\beta} - \alpha_{k,j}^0 \alpha_{k,j-\beta} + \alpha_{k,j}^0 \alpha_{k,j+\beta} + \alpha_{k,j}^0 \alpha_{k,j-\beta} - \alpha_{k,j}^0 \alpha_{k,j+\beta} \dots$$

Здесь через λ_k^0 обозначена величина

$$\lambda_k^0 = \frac{Rjg}{r} \frac{\alpha}{\mu}. \quad (41)$$

т. е. квадрат частоты основного из главных свободных колебаний продольных балок, вычисленной для этих балок.

Исключив из уравнений (40) все $\alpha_{k,j}^0$, приходим для определения остальных частот главных свободных колебаний перекрытия к уравнению

$$\frac{1}{\alpha_{k,j}^0 - \left(\frac{j}{k}\right)^4} + \frac{1}{\alpha_{k,j}^0 - \left(\frac{2j}{k}\right)^4} + \frac{1}{\alpha_{k,j}^0 - \left(\frac{3j}{k}\right)^4} + \\ + \frac{1}{\alpha_{k,j}^0 - \left(\frac{4k-j}{k}\right)^4} + \frac{1}{\alpha_{k,j}^0 - \left(\frac{4k+j}{k}\right)^4} + \frac{1}{\alpha_{k,j}^0 - \left(\frac{5k-j}{k}\right)^4} + \dots = \\ = -\frac{rj}{Rk} \frac{1}{\alpha_{k,j}^0 - (\mu_{k,j}^0)^2 (Rjg)^2}. \quad (42)$$

Здесь через $\alpha_{k,j}^0$ обозначены величинами отношения

$$\alpha_{k,j}^0 = (\alpha_{k,j}^0)^2 : (Rjg)^2, \quad (43)$$

а через $\mu_{k,j}^0$ величинами

$$\mu_{k,j}^0 = \frac{Rjg}{R} \frac{F_{k,j}}{Q_{k,j}}. \quad (44)$$

т. е. квадраты частот главных свободных колебаний перекрестных связей, вычисленные в предположении, что продольные балки перекрытия с перекрестными связями не скреплены. Вводя обозначения

$$F_{k,j}(\alpha) = \frac{1}{\alpha - \left(\frac{j}{k}\right)^4} + \frac{1}{\alpha - \left(\frac{2j}{k}\right)^4} + \frac{1}{\alpha - \left(\frac{3j}{k}\right)^4} + \\ + \frac{1}{\alpha - \left(\frac{4k-j}{k}\right)^4} + \frac{1}{\alpha - \left(\frac{4k+j}{k}\right)^4} + \frac{1}{\alpha - \left(\frac{5k-j}{k}\right)^4} + \dots \quad (45)$$

а также

$$\beta = \frac{rj}{Rk} \quad (46)$$

и

$$\gamma_k = \mu_{k,j}^0 : (Rjg)^2, \quad (47)$$

можно уравнению (44) придать вид равенства

$$F_{k,j}(\alpha_{k,j}^0) = -\frac{\beta}{\alpha_{k,j}^0 - \gamma_k}. \quad (48)$$

Здесь $F_{k,j}(\alpha)$ — функции, зависящие только от значений k и j и определяемые равенствами (45);

β — число, показывающее какую долю от суммарного веса всех поперечных балок составляет суммарный вес балок продольных;

γ_k — отношение квадрата n -й из собственных частот балок поперечных, вычисленных в предположении, что они с продольными балками не связаны, к квадрату основного из главных свободных колебаний продольных балок, вычисленного в предположении, что продольные балки опираются на балки поперечные, как на жесткие опоры;

$\alpha_{k,j}^0$ — число, показывающее какую долю составляет квадрат искомого главного свободного колебания исследуемого перекрытия от квадрата частоты основного из главных свободных колебаний продольных балок, вычисленного в предположении, что последние опираются на балки перекрестные, как на жесткие опоры.

Вид функций $F_{k,j}(\alpha)$ не зависит от относительного веса и относительной жесткости балок обеих направлений. Функции эти могут быть вычислены и изображены графически.

Относительный вес балок обеих направлений входит в уравнении (48) только через параметр β . Относительная жесткость балок обеих направлений только через параметр γ_k .

Функция $-\frac{\beta}{\alpha - \gamma_k}$ легко табулируется для всякого частного перекрытия и может быть во вычисленном ее значении изображена на тот же чертеж, что и функции $F_{k,j}(\alpha)$.

Пересечениям кривых $F_{k,j}(\alpha)$ с кривой $-\frac{\beta}{\alpha - \gamma_k}$ определяются искомые значения $\alpha_{k,j}^0$, т. е. [см. уравнения (43)] частоты главных свободных колебаний перекрытия.

Разными способами можно определять совокупность параметров $\alpha_{k,j}^0$, соответствующих каждому из главных свободных колебаний перекрытия с помощью равенств (40), чем и определяются формы главного свободного колебания исследуемой системы, соответствующее найденной частоте этого колебания.

Из рассмотренных выражений (14), (39) и (46) видно, что связь между главными координатами перекрытия $\alpha_{k,j}^0$ к ординатами упругой поверхности его w может быть выражена зависимостью

$$w = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{k,j}^0(x, y) \beta_{k,j}, \quad (49)$$

где функции $\alpha_{0,j}^2(x, y)$ определяются равенствами

$$\alpha_{0,j}^2(x, y) = Y_n(y) \left\{ \frac{\sin \frac{j \pi x}{k}}{\alpha_{0,j}^2 - (j/k)^2} - \frac{\sin \frac{(2k-j) \pi x}{k}}{\alpha_{0,j}^2 - \left(\frac{2k-j}{k}\right)^2} + \frac{\sin \frac{(2k+j) \pi x}{k}}{\alpha_{0,j}^2 - \left(\frac{2k+j}{k}\right)^2} - \frac{\sin \frac{(4k-j) \pi x}{k}}{\alpha_{0,j}^2 - \left(\frac{4k-j}{k}\right)^2} + \frac{\sin \frac{(4k+j) \pi x}{k}}{\alpha_{0,j}^2 - \left(\frac{4k+j}{k}\right)^2} \right\} \quad (50)$$

я могут быть приняты за формы главных свободных колебаний рассматриваемого перекрытия, соответствующих координатам $\rho_{0,j}^2$.

При осцилляциях выражений (50) принято, в соответствии с формулами (40)

$$\left. \begin{aligned} \rho_{0,j}^2 &= \frac{1}{\alpha_{0,j}^2 - \left(\frac{j}{k}\right)^2}; \\ \rho_{0,(2k-j)}^2 &= \frac{1}{\alpha_{0,j}^2 - \left(\frac{2k-j}{k}\right)^2}; \\ \rho_{0,(2k+j)}^2 &= \frac{1}{\alpha_{0,j}^2 - \left(\frac{2k+j}{k}\right)^2}; \\ \rho_{0,(4k-j)}^2 &= \frac{1}{\alpha_{0,j}^2 - \left(\frac{4k-j}{k}\right)^2}; \\ \rho_{0,(4k+j)}^2 &= \frac{1}{\alpha_{0,j}^2 - \left(\frac{4k+j}{k}\right)^2}; \\ \rho_{0,(6k-j)}^2 &= \frac{1}{\alpha_{0,j}^2 - \left(\frac{6k-j}{k}\right)^2}; \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

с чем и следует считаться при вычислении обобщенных масс перекрытия, соответствующих координатам $\rho_{0,j}^2$.

Обозначив последние через $M_{0,j}^2$, можно на основании равенств (50), (51) и (51) записать

$$M_{0,j}^2 = Q_n \left[\frac{Y_n^2}{2\pi} \{ (\rho_{0,j}^2)^2 + (\rho_{0,(2k-j)}^2)^2 + (\rho_{0,(2k+j)}^2)^2 + (\rho_{0,(4k-j)}^2)^2 + \dots \} + \frac{R^2}{2\pi} \{ \rho_{0,j}^2 - \rho_{0,(2k-j)}^2 + \rho_{0,(2k+j)}^2 - \rho_{0,(4k-j)}^2 + \rho_{0,(4k+j)}^2 - \rho_{0,(6k-j)}^2 + \dots \}^2 \right] \quad (52)$$

Обобщенные жесткости перекрытия $N_{0,j}^2$ можно вычислить по формулам

$$N_{0,j}^2 = M_{0,j}^2 \rho_{0,j}^2, \quad (53)$$

Обобщенные же силы, соответствующие вынужденным колебаниям системы, по формулам

$$R_{0,j}^2(t) = \int_0^1 \int_0^k dy dx g(x, y, t) \alpha_{0,j}^2(x, y). \quad (54)$$

Разыскав все эти величины, можно для определения каждой из главных координат перекрытия получить по уравнению

$$M_{0,j}^2 \ddot{\rho}_{0,j}^2 + N_{0,j}^2 \rho_{0,j}^2 = R_{0,j}^2(t), \quad (55)$$

общий интеграл которых (см. § 1 формула (13)) нам уже известен.

Разыскав по уравнению (55) величины $\rho_{0,j}^2$, как функции t , т. е. кривки, можно отклонения любой точки системы, а следовательно, и напряжения в ней, разыскать в любой момент времени с помощью зависимости (49).

5. Описанный в предыдущих пунктах прием применим во всех тех случаях, когда число k , т. е. число перекрестных связей перекрытия, является числом конечным.

Если k стремится к бесконечности, а l остается постоянным, то вместе с k стремится к бесконечности и величина $k^2 \lambda_{0,j}^2$, а доля от которой мы искали выше величины $\lambda_{0,j}^2$. Величины $\alpha_{0,j}^2$ и $\mu_{0,j}$ стремятся при этом к нулю. Определение частот главных свободных колебаний с помощью изложенной выше схемы приводит к бесконечно неопределенностям вида $0 \cdot \infty$ и становится, следовательно, затруднительным. Чтобы избежать это затруднение, достаточно обратить внимание на то, и какому виду приходится в случае, когда $k = \infty$, общее выражение для Y и V . Выражения для T дается равенством (29).

В силу означенных выше известных свойств суммы

$$\sum_{j=1}^{k-1} \sin \frac{n \pi j}{k} \sin \frac{l \pi j}{k}$$

это выражение может быть переписано так:

$$T = \sum_n Q_n \left[\frac{Y_n^2}{4\pi} \sum_{j=1}^{k-1} \dot{A}_{0,n}^2 + \frac{R^2 k}{4\pi} \sum_{j=1}^{k-1} \{ \dot{A}_{0,n} - \dot{A}_{0,(2k-j)} + \dot{A}_{0,(2k+j)} - \dot{A}_{0,(4k-j)} + \dots \}^2 \right] \quad (56)$$

Аналогичным путем можно на основании равенства (25) написать для V :

$$V = \sum_n Q_n \left[\frac{E I l}{4} \sum_{j=1}^{k-1} \ddot{A}_{0,n}^2 \left(\frac{n \pi l}{k} \right)^2 + \frac{E I k}{4} \frac{P_n}{Q_n} = \sum_{j=1}^{k-1} \{ \ddot{A}_{0,n} - \ddot{A}_{0,(2k-j)} + \ddot{A}_{0,(2k+j)} - \ddot{A}_{0,(4k-j)} + \dots \}^2 \right] \quad (57)$$

В этих выражениях параметры $A_{m,j}$ соответствующие каждому из главных свободных колебаний системы следует (см. равенства (38) и (40)) считать связанными между собой соотношениями:

$$A_{m,(k-\beta)} : A_{m,j} = \frac{Q_{m,j}^2 \lambda_j^2 - \beta^2 \lambda_j^2}{Q_{m,j}^2 \lambda_j^2 - (\beta k - \beta)^2 \lambda_j^2};$$

$$A_{m,(k+\beta)} : A_{m,j} = \frac{Q_{m,j}^2 \lambda_j^2 - \beta^2 \lambda_j^2}{Q_{m,j}^2 \lambda_j^2 - (\beta k + \beta)^2 \lambda_j^2};$$

показывающих, что при $(\beta k)^2$, β и λ_j^2 конечных, а k^2 бесконечно большим отношения:

$$A_{m,(k-\beta)} : A_{m,j};$$

$$A_{m,(k+\beta)} : A_{m,j}$$

обращаются в нуль.

Это позволяет при $k = \infty$, а $l \neq 0$, опустить в выражениях (56) и (57) все $A_{m,j}$ у которых $m \neq n$. Сделав это, будем иметь, вместо (56) и (57),

$$T = \sum_n \sum_j Q_n \left(\frac{r^2}{4\beta} + \frac{Rk}{4\beta} \right) A_{n,j}^2 \quad (58)$$

и

$$V = \sum_n \sum_j Q_n \left[\left(\frac{r^2}{4} \right)^2 \frac{Rk^2 l}{4} + \frac{Rk^2 l}{4} \frac{P_n}{Q_n} \right] A_{n,j}^2. \quad (59)$$

Из полученных равенств видно, что при $k = \infty$; $l \neq \infty$ все параметры $A_{m,j}$ можно принимать за главные координаты перекрытия. Выписав соответствующие им уравнения Лагранжа, будем в случае свободных колебаний системы иметь

$$Q_n \left(\frac{r^2}{4\beta} + \frac{Rk}{4\beta} \right) \ddot{A}_{n,j} + Q_n \left[\left(\frac{r^2}{4} \right)^2 \frac{Rk^2 l}{4} + \frac{Rk^2 l}{4} \frac{P_n}{Q_n} \right] A_{n,j} = 0. \quad (60)$$

Частоты главных свободных колебаний перекрытия определяются следовательно при $k = \infty$, $l \neq \infty$ зависимостями

$$\lambda_{n,j}^2 = \frac{j^2 \lambda_j^2 + \frac{Rk}{r^2} \lambda_k}{1 + \frac{Rk}{r^2}}, \quad (61)$$

где [см. равенства (41)]

$$j^2 \lambda_j^2 = \frac{Rk^2}{r} \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \quad (62)$$

есть квадрат частоты основного из главных свободных колебаний продольных балок, вычисленных в предположении, что поперечных связей у перекрытия нет, а

$$\lambda_k^2 = \frac{Rk^2}{R} = \frac{Rk^2}{Q_n} \quad (63)$$

и есть квадрат частоты m -го из главных свободных колебаний

226

поперечных балок, вычисленный в предположении, что эти балки с продольными балками не связаны.

Формула (62) показывает, что в случае, когда $k = \infty$; $l \neq \infty$, квадраты частот всех главных свободных колебаний перекрытия могут быть заданы путем линейной интерполяции по отношению к числу балок обоих направлений между квадратами частот соответствующих главных свободных колебаний балок обоих этих направлений.

При рассмотрении вынужденных колебаний перекрытия коэффициенты $A_{m,j}$ в ряду

$$w = \sum_m \sum_j A_{m,j} Y_m(y) \sin \frac{l \pi x}{l}$$

можно в случае $k = \infty$, $l \neq \infty$ определять из уравнений

$$\ddot{A}_{m,j} + \lambda_{m,j}^2 A_{m,j} = \delta_{m,j}(t), \quad (64)$$

где

$$\delta_{m,j}(t) = \frac{1}{Q_n \left(\frac{r^2}{4\beta} + \frac{Rk}{4\beta} \right)} \iint \varphi(x, y, t) Y_m(y) \sin \frac{l \pi x}{l} dx dy. \quad (65)$$

а $\varphi(x, y, t)$ заданная интенсивность возмущающих сил, действующих на перекрытие. Общий интеграл выписанных только что уравнений нам уже известен.

6. Рассмотрим другой предельный случай, а именно случай, когда число поперечных ребер жесткости конечно, жесткость же каждого такого ребра бесконечно велика.

В этом частном случае в уравнении (48) величина γ_m все бесконечно велика и, следовательно, при всяком α конечном функция

$$-\frac{\beta}{\alpha - \gamma_m}$$

бесконечно мала, так что уравнение (48) принимает вид уравнения

$$F_{k,j}(\alpha_k^2) = 0. \quad (66)$$

Располагая графиками, дающими нам функции $F_{k,j}(\alpha_k^2)$ как функции от α , можно легко разыскать все корни полученного только что уравнения, после чего соответствующие формы главных свободных колебаний продольных балок можно разыскать, но так же, как это было сделано выше в п. 4.

Так как корни уравнения

$$F_{k,j}(\alpha) = 0$$

не зависят от величины m , то в силу равенств (60) все формы главных свободных колебаний перекрытия не зависят от параметра m и, следовательно, в случае бесконечно большой жесткости поперечных связей все продольные балки колеблются независимо

друг от друга. В последнем отношении колебания продольных балок, не антисимметричные относительно всех перекрестящихся перекрытия, судим с колебаниями, антисимметричными относительно всех перекрестящихся связей.

В случае, если перекрытие нагружено по всей своей площади более или менее равномерно и подкреплено хотя бы одним, достаточно жестким, исперечным ребром, следует из колебания быть антисимметричными относительно всех ребер жесткости, обращать себе внимание, ибо амплитуда последних колебаний может оказаться в указанных случае значительно большей, чем амплитуда колебаний, симметричных относительно всех поперечных ребер жесткости перекрытия.

7. Во всем вышесказанном мы не касались вопроса о колебаниях пластины, подкрепляемой рассматриваемым перекрытием. Если такая пластина у перекрытия имеется, то влияние она на колебания набора перекрытия может быть в грубом приближении оценено путем отнесения одной части ее веса к весу балок одного направления, другой же — к весу балок другого направления. При решении вопроса о том, какую часть веса пластины следует отнести к весу балок одного направления, какую к весу балок другого направления — можно руководствоваться тем же приближенными приемами, с помощью которых вопрос о том, какая часть статической поперечной нагрузки на пластину должна считаться воспринимаемой балками одного, какой же балками другого направления. Влияние присоединяемого полка обшивки на величину момента инерции балок обоих направлений может быть также учитываемо обычным в строительной механике образом способом.

Помимо всего этого, должны быть учтены колебания самой пластины, как пластины опертых на поддерживающую их балочную сетку. Следует различать колебания пластины, антисимметричные относительно всех опорных краев ее, и колебания пластины не антисимметричные относительно всех ее ребер жесткости.

Первые поддаются точному рассмотрению, ибо за соответствующие им главные координаты системы можно принимать коэффициенты разложения упругих поверхностей пластины в пределах каждого поля между балками набора — в двойные тригонометрические ряды.

Точное решение для колебаний, не антисимметричных по отношению ко всем балкам перекрытия, не может быть найдено в столь простой форме. Поэтому для учета колебаний данного типа приходится довольствоваться расчетами приемом § 1.

Для того чтобы перейти к вопросу о влиянии упругих колебаний пластины на набор судовых перекрестий несколько более подробно, в следующем параграфе будет рассмотрена задача об упругих колебаниях пластины, подкрепленной рядом одинаковых равноудаленных свободно опертых призматических балок.

§ 3. Колебания свободно опертой пластины, подкрепленной рядом параллельных друг другу, свободно опертых призматических балок

1. Допустим (рис. 3), что пластина, длина которой в направлении оси x есть a , а в направлении же оси oy есть b , подкреплена рядом одинаковых равноудаленных ребер жесткости. Пусть

- B — вес единицы длины каждого ребра;
- I — момент инерции каждого на ребер жесткости;
- c — расстояние между ребрами жесткости;
- $k = \frac{a}{c}$ — число полей между ребрами жесткости;
- A — толщина пластины;



Рис. 3.

требуется же определить частоты и формы главных свободных колебаний перекрытия.

Примем за обозначение координатные параметры коэффициенты A_{mn} ряда

$$w = \sum_m \sum_n A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (67)$$

Потенциальная энергия пластины, выражаемая равенством,

$$V_1 = \frac{D}{2} \iint_a^b \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\sigma) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dx dy,$$

выражается в силу (67) через параметры A_{mn} , так

$$V_1 = \frac{Dab}{8} \sum_m \sum_n A_{mn}^2 \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]. \quad (68)$$

Потенциальная энергия упругих ребер жесткости пластины, очевидно, есть

$$V_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \int_0^c EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=c}^2 dy.$$

В системе (74) переменные $A_{m,j}$, $A_{m,2k-j}$, $A_{m,2k+j}$, $A_{m,2k-j}$, $A_{m,2k+j}$... не разделены. Их, следовательно, нельзя признать за главные координаты системы. С соответствующими главными координатами перекрытия $P_{m,j}^0$ переменные $A_{m,j}$, $A_{m,2k-j}$ можно связать равенствами:

$$\left. \begin{aligned} A_{m,j} &= \sum_{\alpha} v_{m,j}^{\alpha} P_{m,j}^{\alpha} \\ A_{m,2k-j} &= \sum_{\alpha} v_{m,2k-j}^{\alpha} P_{m,j}^{\alpha} \\ A_{m,2k+j} &= \sum_{\alpha} v_{m,2k+j}^{\alpha} P_{m,j}^{\alpha} \\ A_{m,2k-j} &= \sum_{\alpha} v_{m,2k-j}^{\alpha} P_{m,j}^{\alpha} \end{aligned} \right\} (78)$$

где $v_{m,j}^{\alpha}$ — константы.

Обозначив угловые частоты главных свободных колебаний системы через $\lambda_{m,j}^{\alpha}$, можно методом частных резонансов вывести из уравнений (74) и (75) для их определения следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} v_{m,2k-j}^{\alpha} &= -v_{m,j}^{\alpha} \frac{\gamma k \alpha b (\lambda_{m,j}^{\alpha})^2 - D \alpha b g \left[\left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{j\pi}{a} \right)^2 \right]}{\gamma k \alpha b (\lambda_{m,j}^{\alpha})^2 - D \alpha b g \left[\left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{(2k-j)\pi}{a} \right)^2 \right]} \\ v_{m,2k+j}^{\alpha} &= +v_{m,j}^{\alpha} \frac{\gamma k \alpha b (\lambda_{m,j}^{\alpha})^2 - D \alpha b g \left[\left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{j\pi}{a} \right)^2 \right]}{\gamma k \alpha b (\lambda_{m,j}^{\alpha})^2 - D \alpha b g \left[\left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{(2k+j)\pi}{a} \right)^2 \right]} \\ v_{m,2k-j}^{\beta} &= -v_{m,j}^{\beta} \frac{\gamma k \alpha b (\lambda_{m,j}^{\beta})^2 - D \alpha b g \left[\left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{j\pi}{a} \right)^2 \right]}{\gamma k \alpha b (\lambda_{m,j}^{\beta})^2 - D \alpha b g \left[\left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{(2k-j)\pi}{a} \right)^2 \right]} \\ v_{m,2k+j}^{\beta} &= +v_{m,j}^{\beta} \frac{\gamma k \alpha b (\lambda_{m,j}^{\beta})^2 - D \alpha b g \left[\left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{j\pi}{a} \right)^2 \right]}{\gamma k \alpha b (\lambda_{m,j}^{\beta})^2 - D \alpha b g \left[\left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{(2k+j)\pi}{a} \right)^2 \right]} \end{aligned} \right\} (79)$$

и

$$\frac{1}{k b k (\lambda_{m,j}^{\alpha})^2 - g D k k \left[\left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 \right]} = \frac{1}{\gamma k \alpha b (\lambda_{m,j}^{\alpha})^2 - D \alpha b g \left[\left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{j\pi}{a} \right)^2 \right]}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\gamma k \alpha b (\lambda_{m,j}^{\alpha})^2 - D \alpha b g \left[\left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{(2k-j)\pi}{a} \right)^2 \right]} + \\ & + \frac{1}{\gamma k \alpha b (\lambda_{m,j}^{\alpha})^2 - D \alpha b g \left[\left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{(2k+j)\pi}{a} \right)^2 \right]} - \\ & - \frac{1}{\gamma k \alpha b (\lambda_{m,j}^{\beta})^2 - D \alpha b g \left[\left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{(2k-j)\pi}{a} \right)^2 \right]} + \\ & + \dots \end{aligned} \quad (80)$$

Выражениями (79) и (78) определяются формы тех главных свободных колебаний перекрытия, в которых участвуют его ребра жесткости. Уравнением (80) определяются угловые частоты этих колебаний.

С помощью обозначений

$$\left. \begin{aligned} \rho_{m,j}^{\alpha} &= \frac{E J g}{D} \left(\frac{m\pi}{b} \right)^2; & \sigma_{m,j}^{\alpha} &= (\lambda_{m,j}^{\alpha})^2 - \lambda_{m,j}^{\alpha} \\ \rho_{m,j}^{\beta} &= \frac{D g}{\gamma k} \left[\left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{j\pi}{a} \right)^2 \right]; & \gamma_{m,j} &= \rho_{m,j}^{\beta} - \lambda_{m,j}^{\beta} \\ \beta &= \frac{\gamma k \alpha b}{D b}; & \gamma_{m,\alpha} &= \left[\left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{j\pi}{a} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} (81)$$

нетрудно прийти уравнению (80) следующей, более простой вид:

$$F_{m,k,j}(\sigma_{m,j}^{\alpha}) = - \frac{\beta}{\sigma_{m,j}^{\alpha} - \gamma_{m,j}} \quad (82)$$

где через $F_{m,k,j}(\alpha)$ обозначена функция

$$\begin{aligned} F_{m,k,j}(\alpha) &= \frac{1}{\alpha - \gamma_{m,j}} - \frac{1}{\alpha - \gamma_{m,2k-j}} + \frac{1}{\alpha - \gamma_{m,2k+j}} - \\ & - \frac{1}{\alpha - \gamma_{m,2k-j}} + \frac{1}{\alpha - \gamma_{m,2k+j}} - \frac{1}{\alpha - \gamma_{m,2k-j}} + \dots \end{aligned} \quad (83)$$

Уравнение (82) легко может быть решено графически, особенно, если для интересующего нас соотношения сторон пластины, прежде для интересующего нас частного значения отклонений $\frac{m\pi}{b}$ функции $F_{m,k,j}(\alpha)$ будут табулированы и представлены графиками. Таблицы и графики функций $F_{m,k,j}(\alpha)$ можно составить раз навсегда.

Если это сделано, то для нахождения величин $\alpha_{m,j}^2$ будет достаточно задать кривую, изображающую функцию $\gamma_{m,j}(\alpha)$ гиперболой $-\frac{E}{\alpha - \gamma_{m,j}}$ и, разыскав значения величины $\alpha_{m,j}^2$, соответствующие точкам пересечения упомянутых кривых, затем вычислить величины $(\lambda_{m,j}^2)^2$ по формуле

$$(\lambda_{m,j}^2)^2 = \alpha_{m,j}^2 \lambda_{m,j}^2, \quad (84)$$

где

$$\lambda_{m,j}^2 = \frac{Dg}{\gamma \Delta} \left[\left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \left(\frac{j\pi}{a} \right)^2 \right] \quad (85)$$

(см. равенство (81)).

Дальнейшее размыкание вынужденных колебаний системы может быть выполнено по схеме, аналогичной схеме предыдущего параграфа.

§ 4. Свободно открытое перекрытие, состоящее из листа, подкрепленного любым числом одинаковых равноудаленных перекрещивающихся упругих ребер

Представим себе теперь перекрытие, отличающееся от рассмотренного в § 2 лишь тем, что:

- 1) оно не имеет свободно открытого;
 - 2) число балок обоях направлений у него конечно;
 - 3) все оно закрыто пластиной, толщина которой есть Δ .
- Примем, в отличие от использованных в § 3, следующие обозначения:

l	— полная длина,	}	каждой из продольных балок
c	— длина каждого пролета,		
$k = \frac{l}{c}$	— число пролетов,		
EI	— жесткость по отношению к изгибу;	}	каждой из поперечных балок
r	— вес единицы длины,		
L	— полная длина,		
b	— длина каждого пролета,	}	пластины
$n = \frac{L}{b}$	— число пролетов,		
EI	— жесткость,		
R	— вес единицы длины;	}	пластины
δ	— толщина,		
D	— цилиндрическая жесткость.		

За обозначения координаты системы примем, как и в § 3, коэффициенты ряда

$$w = \sum \sum A_{m,j} \sin \frac{m\pi y}{L} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (86)$$

в форме которого можно, как известно, представить всякие отклонения свободно открытого перекрытия.

С помощью рассуждений, уже неоднократно использованных выше, нетрудно убедиться в том, что для рассматриваемого перекрытия

$$V = \frac{DIL}{8} \sum \sum A_{m,j}^2 \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right] + \frac{E \Delta L}{4} \sum \sum \sum A_{m,j} A_{m',j'} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{j'\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi j}{k} \sin \frac{m'\pi j'}{k} + \frac{E \Delta l}{4} \sum \sum \sum A_{m,j} A_{m',j'} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{j'\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi j}{n} \sin \frac{m'\pi j'}{n} \quad (87)$$

и

$$T = \frac{\gamma \Delta l L}{2g} \sum \sum A_{m,j}^2 + \frac{R \Delta L}{4g} \sum \sum \sum A_{m,j} A_{m',j'} \left(\frac{j'\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi j}{k} \sin \frac{m'\pi j'}{k} + \frac{r \Delta l}{4g} \sum \sum \sum A_{m,j} A_{m',j'} \left(\frac{j'\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi j}{n} \sin \frac{m'\pi j'}{n} \quad (88)$$

и, следовательно, уравнения свободных колебаний

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial W}{\partial \dot{A}_{m,j}} \right) - \frac{\partial W}{\partial A_{m,j}} + \frac{\partial V}{\partial A_{m,j}} = 0$$

в развернутом виде выписываются для рассматриваемой системы в форме равенств

$$\frac{\gamma \Delta l L}{4g} \ddot{A}_{m,j} + \frac{DIL}{4} A_{m,j} \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right] + \sum \left[\frac{R \Delta L}{2g} \ddot{A}_{m,j} + \frac{E \Delta L}{2} A_{m,j} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 \left(\frac{j'\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{n\pi j}{k} \sin \frac{m'\pi j'}{k} \right] + \sum \left[\frac{r \Delta l}{2g} \ddot{A}_{m,j} + \frac{E \Delta l}{2} A_{m,j} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \left(\frac{j'\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi j}{n} \sin \frac{m'\pi j'}{n} \right] = 0, \quad (89)$$

В данной системе параметры m и n принимают в каждом уравнении свои значения, комбинацией которых все эти уравнения и отличаются друг от друга. Параметры же r и k проходят в каждом уравнении через все значения от 1 до ∞ . В силу известных свойств сумм $\sum \left(\frac{j'\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{n\pi j}{k} \sin \frac{m'\pi j'}{k}$ и $\sum \left(\frac{j'\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi j}{n} \sin \frac{m'\pi j'}{n}$ система (89) распадается на ряд независимых групп.

Рассмотрим отдельные такие группы.

Группа I. Простейшей из всех тех групп, на которые распадается система (89), является группа тех уравнений, в которых m проходит через все значения, кратные от k , n через все значения

ния, кратные от k . В этой группе вторая и третья строки равенства (89) обращаются в нуль, так что уравнения (89) принимают вид:

$$\frac{\gamma L I k}{4g} \ddot{A}_{m,n} + \frac{D I L}{4} A_{m,n} \left(\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) = 0, \quad (90)$$

где

$$\begin{aligned} m &= k; \quad 2k; \quad 3k; \quad 4k; \quad 5k; \dots \\ n &= k; \quad 2k; \quad 3k; \quad 4k; \quad 5k; \dots \end{aligned}$$

Обозначив в этих уравнениях отношение $m : k$ через i , а отношение $n : k$ через j , можно легко видеть, что частоты колебаний системы, соответствующие уравнениям (90), определяются равенствами

$$\lambda_{i,j,k} = \frac{Dg}{\gamma k} \left[\left(\frac{i\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{j\pi}{a} \right)^2 \right] \quad (91)$$

и что отдельным из этих колебаний соответствуют перемещения

$$w = A_{i,j,k} \sin \frac{i\pi x}{b} \sin \frac{j\pi y}{a}. \quad (92)$$

Таким образом, все эти колебания имеют тот самый вид, как и колебания пластины свободно опертой на все ее ребра жесткости, как на жесткой опорной контуре.

Группа 2. Рассмотрим теперь те колебания перекрытия, которыми соответствуют

$$\begin{aligned} m &= k; \quad 2k; \quad 3k; \quad 4k; \dots \\ n &\neq k \neq 2k \neq 3k \neq 4k. \end{aligned}$$

Колебания эти определяются уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{\gamma L I L}{4g} \ddot{A}_{m,n} + \frac{D I L}{4} A_{m,n} \left(\left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right) + \\ + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{B L}{2g} \ddot{A}_{m,j} + \frac{B J L}{2} A_{m,j} \left(\left(\frac{m\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{j\pi}{a} \right)^2 \right) \sin \frac{n\pi j}{k} \sin \frac{n\pi j}{k} \right) = 0, \quad (93) \end{aligned}$$

в которых переменные $A_{i,j,k}$, соответствующие различным i , разделяются.

Нетрудно видеть, что колебания, определяемые этими уравнениями, по существу с колебаниями пластины $ABDC$ (рис. 4) шириной b и длиной l , подкрепленной рядом поперечных упругих ребер жесткости, т. е. колебаниями того самого типа, который рассмотрен в предыдущем параграфе. Формы упругой поверхности пластины, соответствующие колебаниям этого рода, антисимметричны относительно всех продольных ребер жесткости перекрытия. Все упомянутые только что ребра для всех колебаний этого вида остаются неизогнутыми.

Группа 3. К этой группе относятся те колебания перекрытия, которыми соответствует случай, когда

$$\begin{aligned} m \neq k \neq 2k \neq 3k \neq 4k \dots \\ n = k; \quad 2k; \quad 3k; \quad 4k; \quad 5k; \dots \end{aligned}$$

Колебания этого типа отличаются от колебаний, рассмотренных в группе 2, только тем, что при них каждый участок пластины между двумя смежными поперечными ребрами (см., например, участок $EFHG$, рис. 4) колеблется как перекрытие, свободно

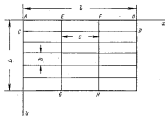


Рис. 4.

опертой по контуру на жесткие опоры и подкрепленное рядом параллельных друг другу упругих ребер. Исследование колебаний каждого такого участка принципиально не отличается ничем от произведенного в предыдущем параграфе. Планируем остановиться на рассмотрении данных колебаний более подробно впоследствии.

Группа 4. К этой группе относятся те уравнения типа (89), которые соответствуют значениям m , не кратным k , и одновременно значениям n , не кратным k . Структура системы этих уравнений отлична от рассмотренной в предыдущем параграфе и заслуживает более подробного рассмотрения.

Вследствие известных свойств сумм $\sum_{j=1}^{n-1} \sin \frac{n\pi j}{k} \sin \frac{n\pi j}{k}$ и $\sum_{j=1}^{n-1} \sin \frac{m\pi j}{k} \sin \frac{m\pi j}{k}$, то уравнение, которое заключает в себе переменную $A_{m,n}$, заключает в себе также лишь все те $A_{m,j}$, у которых либо сумма, либо разность индексов m и j есть число кратное от $2k$, и одновременно либо сумма, либо же разность индексов n и j есть число кратное $2k$.

Благодаря этому, рассматриваемая четвертая группа уравнений (89) распадается на $(n-1)$ независимых подгрупп, каждая из которых состоит, в свою очередь, из $(k-1)$ независимых серий. В первое уравнение первой серии первой группы входит в качестве основной известной величины $A_{k,k}$; в такое же уравнение второй серии $A_{k,k-1}$ и первое уравнение третьей серии $A_{k,k-2}$ и т. д. в первое уравнение последней серии первой группы $A_{k,k-1}$

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	x	x	x	x	x	x	x	x	x
2	x	x	x	x	x	x	x	x	x
3	x	x	x	x	x	x	x	x	x
4	x	x	x	x	x	x	x	x	x
5	x	x	x	x	x	x	x	x	x
6	x	x	x	x	x	x	x	x	x
7	x	x	x	x	x	x	x	x	x
8	x	x	x	x	x	x	x	x	x
9	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Рис. 5.

В первом уравнении первой серии второй группы основной известной является величина $A_{k,k}$; в таком же уравнении второй серии $A_{k,k-1}$ и третьей серии $A_{k,k-2}$ и т. д. Третью группу составляют уравнения, в первой серии которых основной неизвестной является переменная $A_{k,k}$; во второй $A_{k,k-1}$ и третьей $A_{k,k-2}$ и т. д.

В j -й серии i -й группы основной неизвестной являются величина $A_{k,j}$ первого и второй серий $(k-1)$ группы основной неизвестной является $A_{k-i-1,j}$ во второй серии той же группы $A_{k-i-2,j}$ в третьей $A_{k-i-3,j}$ и т. д.

Наконец в $(k-1)$ серии $(k-1)$ группы $A_{k-i-1,k-i-1}$. Каждая из упомянутых основных неизвестных соответствует своей серии уравнений (89). Рассмотрим ту из этих серий, в которой основной неизвестной является величина $A_{k,j}$, где $i < k-1$ и $j < k-1$. В эту подгруппу входит бесконечное множество

уравнений, связывающих неизвестные характеризуемые теми комбинациями параметров m и n , которые указаны в таблице рис. 5.

Чтобы исследовать эту серию уравнений, введем следующие обозначения

$$\beta = \frac{nLk}{\gamma kTL}; \quad \gamma = \frac{rLk}{\gamma kTL} \quad (94)$$

и, кроме того,

$$\left. \begin{aligned} D_{m,n} &= (-) + \frac{Dg}{\gamma k} \left[\left(\frac{m\pi}{L} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 \right]; \\ D_0^0 &= (-) + \frac{EJg}{M} \left(\frac{m\pi}{L} \right)^2; \\ D_0^0 &= (-) + \frac{Kfg}{r} \left(\frac{n\pi}{T} \right)^2. \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

а также

$$\left. \begin{aligned} K_i &= A_{k,i} - A_{k,i-1} + A_{k,i+1} - A_{k,i+2} + A_{k,i+3} - \dots \\ L_j &= A_{k,j} - A_{k-i,j} + A_{k-i+1,j} - A_{k-i+2,j} + \dots \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

Тогда первая серия уравнений, входящих в состав рассматриваемой группы, запишется так:

$$\left. \begin{aligned} D_{k,j} A_{k,j} + \beta D_0^0 K_i + \gamma D_0^0 L_j &= 0; \\ D_{k,i-1} A_{k,i-1} - \beta D_0^0 K_i + \gamma D_{0,i-1}^0 L_{i-1} &= 0; \\ D_{k,i+1} A_{k,i+1} + \beta D_0^0 K_i + \gamma D_{0,i+1}^0 L_{i+1} &= 0; \\ D_{k,i-2} A_{k,i-2} - \beta D_0^0 K_i + \gamma D_{0,i-2}^0 L_{i-2} &= 0; \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (97)$$

вторая будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} D_{k-i-1,j} A_{k-i-1,j} + \beta D_{0,i-1}^0 K_{i-1} - \gamma D_0^0 L_j &= 0; \\ D_{k-i-2,i-1} A_{k-i-2,i-1} - \beta D_{0,i-2}^0 K_{i-2} - \\ &\quad - \gamma D_{0,i-2}^0 L_{i-2} = 0; \\ D_{k-i-1,i+1} A_{k-i-1,i+1} - \beta D_{0,i-1}^0 K_{i-1} - \\ &\quad - \gamma D_{0,i+1}^0 L_{i+1} = 0; \\ D_{k-i-2,i-2} A_{k-i-2,i-2} - \beta D_{0,i-2}^0 K_{i-2} - \\ &\quad - \gamma D_{0,i-2}^0 L_{i-2} = 0; \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

третья может быть представлена равенствами:

$$\left. \begin{aligned} D_{\alpha+0,0} A_{\alpha+0,0} + \beta D_{\alpha+0}^{\beta} K_{\alpha+0} + \gamma D_{\alpha}^{\beta} L_{\alpha} &= 0; \\ D_{\alpha+0,0-\beta} A_{\alpha+0,0-\beta} - \beta D_{\alpha+0}^{\beta} K_{\alpha+0} + \\ &+ \gamma D_{\alpha+0}^{\beta} L_{\alpha+0-\beta} = 0; \\ D_{\alpha+0,0+\beta} A_{\alpha+0,0+\beta} + \beta D_{\alpha+0}^{\beta} K_{\alpha+0} + \\ &+ \gamma D_{\alpha+0}^{\beta} L_{\alpha+0+\beta} = 0; \\ D_{\alpha+0,0-\beta} A_{\alpha+0,0-\beta} - \beta D_{\alpha+0}^{\beta} K_{\alpha+0} + \\ &+ \gamma D_{\alpha+0}^{\beta} L_{\alpha+0-\beta} = 0; \end{aligned} \right\} (98)$$

четвертая же в форме равенств:

$$\left. \begin{aligned} D_{\alpha-0,0} A_{\alpha-0,0} + \beta D_{\alpha-0}^{\beta} K_{\alpha-0} - \gamma D_{\alpha}^{\beta} L_{\alpha} &= 0; \\ D_{\alpha-0,0-\beta} A_{\alpha-0,0-\beta} - \beta D_{\alpha-0}^{\beta} K_{\alpha-0} - \\ &- \gamma D_{\alpha-0}^{\beta} L_{\alpha-0-\beta} = 0; \\ D_{\alpha-0,0+\beta} A_{\alpha-0,0+\beta} + \beta D_{\alpha-0}^{\beta} K_{\alpha-0} - \\ &- \gamma D_{\alpha-0}^{\beta} L_{\alpha-0+\beta} = 0; \\ D_{\alpha-0,0-\beta} A_{\alpha-0,0-\beta} - \beta D_{\alpha-0}^{\beta} K_{\alpha-0} - \\ &- \gamma D_{\alpha-0}^{\beta} L_{\alpha-0-\beta} = 0 \end{aligned} \right\} (100)$$

и т. д.

Решить полученную систему уравнений можно следующим путем.

Сначала из системы (97) находим все $A_{\alpha n}$, входящие в выражение (96) для K_{α} . После этого K_{α} выражается через все L_{α} . Затем из системы (98) таким же путем определяется $K_{\alpha+0}$ как линейная функция от всех L_{α} ; из системы (99) находим $K_{\alpha+0}$, из системы же (100) $K_{\alpha-0}$ и т. д.

Представив таким образом все $K_{\alpha n}$ как линейные функции от всех $L_{\alpha n}$, можно из первых уравнений группы (97), (98), (99), (100) и т. д. аналогично развязать L_{α} как линейную функцию от всех K_{α} ; из которых уравнений тех же групп $L_{\alpha+0}$ как функцию от тех же величин, из третьих — развязать $L_{\alpha-0}$ и т. д.

Когда это будет сделано, можно будет все найденные L_{α} подставить в правую часть равенств, выражающих все K_{α} через L_{α} . Это позволяет выразить все K_{α} как линейные функции самих K_{α} , и из условия совместности полученной системы уравнений получить характеристическое уравнение, которым и определятся все частоты тех колебаний исследуемого перекрытия, в которых участвуют обе системы балок, его подкрепляющих.

Разыскав таким путем частоты главных свободных колебаний перекрытия, можно формы данных колебаний определить из уравнений (94)–(100) и затем составить уравнения вынужденных колебаний перекрытия обычным способом.

Как видно из вышеизложенного, точное решение системы уравнений, составивших группу 4, требует довольно громоздких вычислений. Решения эта задача значительно упрощается в том случае, когда число балок одного из направлений настолько велико, что вес и жесткость балок можно считать равномерно распределенными по длине или ширине перекрытия. В этом случае уравнения (88) принимают вид, близкий к уравнениям (74) предыдущего параграфа.

Действительно, допустим, что балок, параллельных оси oz у перекрытия имеется бесконечно много и

$$\left. \begin{aligned} i & - \text{момент инерции,} \\ r & - \text{вес их,} \end{aligned} \right\} \text{относящиеся к единице ширины} \\ \left. \begin{aligned} & \\ & \end{aligned} \right\} \text{перекрытия,}$$

Тогда в выражении (87) последнюю строку нужно будет заменить величиной

$$+ \frac{E i L}{4} \sum_n \sum_m A_{nm} \left(\frac{n\pi}{l} \right)^4;$$

в выражении же (88) вместо последней строки нужно будет записать

$$\frac{r i L}{k_0} \sum_n \sum_m \dot{A}_{nm}$$

Уравнения (89) принимают вследствие этого вид:

$$\left(\frac{\gamma i L}{4r} + \frac{r i L}{4r} \right) \ddot{A}_{nm} + \left[\frac{D i L}{4} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 + \frac{(n\pi)^2}{L^2} \right] + \frac{E i L}{4} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 \right] A_{nm} + \frac{r i L}{2} \left[\frac{r L}{2r} \ddot{A}_{nm} + \frac{E i L}{2} A_{nm} \left(\frac{n\pi}{L} \right)^4 \right] \left(\frac{r L}{2r} \right) \sin \frac{n\pi z}{k} \sin \frac{m\pi y}{k} = 0. \quad (89')$$

Уравнение это по своей структуре, если не говорить о нескольких значениях некоторых его коэффициентов, тождественно с уравнением (74) § 3 и может быть решено с помощью той самой, относительно весьма простой, вычислительной схемы, которая рассмотрена подробно в § 3.

Если число продольных балок у перекрытия хотя и конечно, но достаточно велико, то периоды главных свободных колебаний поперечных балок, вычисленные и предположении, что эти балки нагружены рядом одинаковых масс, сосредоточенных в узловых точках балок, мало отличаются от периодов свободных колебаний, найденных для тех же балок в предположении, что масса балок равномерно распределена вдоль всего пролета балки. В этих случаях можно уравнение (89) заменить значительно более просто решаемым уравнением (88'), однако лишь до тех пор, пока вопрос идет о нахождении главных колебаний набора перекрытия, и не о колебаниях отдельных перекрытия, на протяжении каждого отдельного ее поля. Для разыскания упругих колебаний пластины в проемежках между отдельными балками ее набора требуется решение не упрощенных уравнений (89'), а значительно более сложной системы (89).

§ 5. Некоторые замечания
о погрешности приближенного решения, изложенного в § 1

Те расчетные схемы, которые были рассмотрены в трех предыдущих параграфах, позволяют оценить в ряде частных случаев степень точности приближенной схемы § 1. Для получения такой оценки требуется каждый раз сопоставление численных результатов расчета, выполненного по схеме § 1, с результатами расчета по соответствующей более точной схеме. Не имея возможности останавливаться на этом вопросе более подробно, рассмотрим в общих чертах отдельные принципы неточности решения § 1 и характер их влияния на результат.

Допустим, что P_k главные координаты исследуемой упругой системы, λ_k истинные значения угловых частот его главных свободных колебаний M_k , а $P_k(t)$ обобщенные силы, соответствующие каждой из главных координат.

Тогда будет:

$$T = \frac{1}{2} \sum_k M_k \dot{P}_k^2; \quad V = \frac{1}{2} \sum_k \lambda_k^2 M_k P_k^2, \quad (101)$$

и каждая из главных координат должна меняться по закону

$$M_k \ddot{P}_k + \lambda_k^2 M_k P_k = P_k(t). \quad (102)$$

В том частном случае, если все $P_k(t)$ остаются во все время движения пропорциональными друг другу, должно быть

$$P_k(t) = P_1^0 P(t), \quad (103)$$

и уравнения (102) обращаются в уравнение

$$M_k \ddot{P}_k + \lambda_k^2 M_k P_k = P_1^0 P(t). \quad (104)$$

Статическое отклонение системы, соответствующее нагрузке ее в данный момент времени, определяется равенством

$$P_k = \frac{P_1^0}{\lambda_k^2 M_k}. \quad (105)$$

Допустим поэтому, как мы то делали в § 1, что во время всего движения форма отклоненной системы остается неизменной и соответствует статической нагрузке системы, будем вместо точного решения уравнения (102)

$$P_k = \frac{P_1^0}{\lambda_k^2 M_k} \left[\int_{t=0}^{t=t} P(\xi) \sin \lambda_k (t - \xi) d\xi \right] + P_k^0 \cos \lambda_k t + \frac{1}{\lambda_k} \dot{P}_k^0 \sin \lambda_k t, \quad (106)$$

где P_k^0 и \dot{P}_k^0 — начальные значения P_k и \dot{P}_k .

иметь

$$P_k = \frac{P_1^0}{\lambda_k^2 M_k} q(t), \quad (107)$$

где $q(t)$ определяется уравнением

$$M \ddot{q} + N q = Q(t), \quad (108)$$

где M определяется равенством

$$M = \sum_k M_k \left(\frac{P_1^0}{\lambda_k^2 M_k} \right)^2 \quad (109)$$

N — равенством

$$N = \sum_k \lambda_k^2 M_k \left(\frac{P_1^0}{\lambda_k^2 M_k} \right)^2 \quad (110)$$

Q , наконец, $Q_k(t)$ равенством

$$Q_k(t) = \sum_k P_1^0 P(t) \frac{P_1^0}{\lambda_k^2 M_k} = \sum_k \frac{P_1^0 P}{\lambda_k^2 M_k} P(t). \quad (111)$$

Подставив все это в уравнение (108), будем иметь, следовательно, для определения q уравнение

$$\left[\sum_k \frac{P_1^0 P}{\lambda_k^2 M_k} M_k \right] \ddot{q} + \sum_k \frac{P_1^0 P}{\lambda_k^2 M_k} q = \sum_k \frac{P_1^0}{\lambda_k^2 M_k} P(t),$$

чему можно с помощью обозначения

$$\lambda^2 = \frac{\sum_k \frac{P_1^0 P}{\lambda_k^2 M_k}}{\sum_k \frac{P_1^0 P}{\lambda_k^2 M_k}} \quad (112)$$

принять вид

$$\ddot{q} + \lambda^2 q = \lambda^2 P(t). \quad (113)$$

Определив из этого уравнения q , получим

$$q = \lambda \int_{t=0}^{t=t} P(\xi) \sin \lambda (t - \xi) d\xi + q^0 \cos \lambda t + \frac{\dot{q}^0}{\lambda} \sin \lambda t, \quad (114)$$

где q^0 и \dot{q}^0 начальные значения q и \dot{q} .

Подставив q из (114) в (107), будем иметь

$$P_k = \frac{P_1^0}{\lambda_k^2 M_k} \left[\int_{t=0}^{t=t} P(\xi) \sin \lambda (t - \xi) d\xi \right] + q^0 \cos \lambda t + \frac{\dot{q}^0}{\lambda} \sin \lambda t \quad (115)$$

имеют точного решения, данного равенствами (106).

Рассмотрим к чему сводится отличие обоих полученных решений в частном случае, когда исходным положением системы является покой в естественном состоянии.

В этом частном случае в равенствах (106) и (114) следует положить

$$P_k^* = P_k^* = \varphi^* = \varphi^* = 0$$

и, следовательно, согласно точному решению (106), все P_k определяются равенством

$$P_k = \frac{P_k^*}{\lambda_k^2 M_k} \int_0^{t-\tau} F(\xi) \sin \lambda_k (t - \xi) d(\lambda_k \xi). \quad (116)$$

Согласно же приближенному решению (115)

$$P_k = \frac{P_k^*}{\lambda_k^2 M_k} \int_0^{t-\tau} F(\xi) \sin \lambda (t - \xi) d(\lambda \xi), \quad (117)$$

где λ определяется формулой (112).

Сравнивая решения (116) и (117) между собой, видим, что они отличаются друг от друга тем, что решение (116) при вычислении интегралов

$$\int_0^{t-\tau} F(\xi) \sin \lambda_k (t - \xi) d(\lambda_k \xi)$$

учитывает истинные значения собственных частот каждого из отдельных главных колебаний системы, в то время как решение (117) при вычислении этого интеграла заменяет истинные значения всех λ_k какой-то средней из всех λ_k , притом средней, вычисленной по формуле (112).

Рассмотрим какое влияние может оказать такая замена на результат расчета.

Первым последствием от такого сгущения частот отдельных главных свободных колебаний является то, что в то время как за самым делом все главные координаты системы достигают своих максимальных значений в различные моменты времени, мы считаем их в приближенном решении (117) достигающими максимума и минимума, а также средним колежания одновременно. Влияние этого обстоятельства на результат раз на раз не приходится.

Если все P_k имеют на расчетное напряжение в конструкции влияние одно и того же знака, то приближенное решение (117) может, благодаря упомянутой только что своей неточности, лишь преувеличивать, но никак не преуменьшать расчетных напряжений в конструкции. В этом случае рассматриваемое приближенное решение дает ошибку в сторону увеличения запаса прочности конструкции.

Но в тех местах, где различные главные координаты оказывают на расчетное напряжение в конструкции влияние различного знака. В данном случае преувеличение расчетных значений одних главных координат и преуменьшение других может

привести к преуменьшению расчетных напряжений в конструкции, и следовательно, дать ошибку в опасную сторону.

Другая причина погрешности приближенного решения (117) лежит в том, что это решение преувеличивает значение собственных частот всех колебаний, более медленных, чем средняя частота, соответствующая формуле (112), и преуменьшает расчетные значения всех остальных частот, притом в значительной мере. Знак погрешности может быть в различных случаях различным.

Действительно, пусть рассматриваемая нагрузка системы приближается по своему характеру к нагрузке, нарастающей до своей максимальной величины равномерно в течение времени T_0 и затем сохраняющей свою величину неопределенно долго. В этом случае истинное значение коэффициента динамичности для различных главных координат будет определяться формулой

$$\chi_k = 1 + \frac{\sin \frac{\lambda_k T_0}{2}}{\frac{\lambda_k T_0}{2}}. \quad (118)$$

в то время как, согласно приближенному решению (117), все χ_k должны быть равны одной и той же величине

$$\chi = 1 + \frac{\sin 0,5 \lambda T_0}{0,5 \lambda T_0}; \quad (119)$$

функция χ , определяемая равенством (119) с увеличением χ вообще падает. Поэтому преувеличение расчетного значения частот главных свободных колебаний, характерное для решения (117), должно приводить к преуменьшению коэффициентов динамичности для всех колебаний, более медленных, чем среднее колебание, соответствующее формуле (112), и к преувеличению его для всех главных колебаний, отличающихся большей частотой, чем определяемая формулой (112).

Обычно наиболее ясно выявляются колебания более медленные. Поэтому по рассматриваемой причине приближенное решение (117) должно давать некоторую ошибку в опасную сторону.

Несколько иначе обстоит дело, если рассматриваемая нагрузка системы приближается по своему характеру к кратковременному импульсу, длительность действия которого сопоставима с полупериодом свободных колебаний системы.

Коэффициент динамичности кратковременных импульсов пропорционален, как известно, величине $2 \sin \frac{\lambda_k T_0}{2}$, но лишь до тех пор, пока $\frac{1}{2} \lambda_k T_0$ не превышает $0,5 \pi$, будучи близок к двум при $\frac{\lambda_k T_0}{2} > 0,5 \pi$.

Преувеличенная значение величины λ_k для наиболее медленных колебаний системы, мы при таких условиях несколько преуменьшаем расчетные значения коэффициента динамичности

именно для этих медленных колебаний и преумножаем его значение для главных координат, которым соответствуют собственные колебания большей частот.

Поэтому, если в исследуемой движении рассматриваемой системы преобладающее влияние имеют колебания наиболее близких частот, то коэффициент динамичности может оказаться в случае действия кратковременных импульсов типа, изображенного на рис. 6, при использовании равенства (117) несколько завышенным,



Рис. 6.

именно для тех главных колебаний системы, которые всего больше влияют на результат.

Если длительность действия кратковременного импульса типа, представленного на рис. 6, превышает период основного из главных свободных колебаний системы, то коэффициенты динамичности оказываются для всех главных свободных колебаний равными двум. Ошибка, приближенного вычисления сводится лишь к slight от предположения, что все главные координаты системы достигают своего максимума одновременно, в то время как в общем случае они достигают своих максимальных значений не одновременно. Но даже для того, чтобы иметь ли это место рассмотрим конкретном случае, необходимо знать частоту основного из главных свободных колебаний системы, найти которую можно с помощью рассуждений, аналогичных рассуждениям § 2—4, а не с помощью одного лишь приближенного решения § 1.

Вопрос о том, в какую сторону направлена погрешность приближенного решения § 1, требует, таким образом, для своего полного освещения выполнения параллельных выкладок для ряда частных случаев как до приближенной схеме § 1, так и по более точным схемам § 2—4. Решения § 2 и 3 относительно не сложны. Для общей ориентировки в вопросе о том, сколь велика и в какую сторону обычно направлена ошибка приближенного решения § 1, следовало бы в первую очередь провести ряд численных расчетов в отношении к тем упругим системам, для которых схема точного решения наведена в § 2 и 3.

21. О СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПЕРЕКРЫТИЙ, СОСТОЯЩИХ ИЗ БОЛЬШОГО ЧИСЛА ОДИНАКОВЫХ БАЛОК ГЛАВНОГО НАПРАВЛЕНИЯ И ОДНОЙ ИЛИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕКРЕСТНЫХ СВЯЗЕЙ*

В одной из предшествовавших моих работ вопрос об упругих колебаниях некоторых судовых перекрытий был решен методом разложения некоей функции в двойные ряды. Настоящая заметка имеет в виду рассмотреть колебания некоторых таких перекрытий, разрабатывая форм и частот главных свободных колебаний которых может быть приведено к исследованию колебаний балки, лежащей на сплошном упругом основании. Попытка использовать этот расчетный прием была сделана в работе Н. Г. Велькобитского и Н. Н. Бабалева, которые, однако, не использовали всех данных им возможностей и ограничились получением приближенных решений, в то время как он может дать решения строго в той мере, в которой могут быть заданы строгие решения возможных задач, относящихся к колебаниям различного рода стержней.

1. Рассмотрим свободные колебания призматического стержня, лежащего на сплошном упругом основании постоянной жесткости

Пусть EI — жесткость стержня,

M — масса его;

L — длина его;

k — жесткость его упругого основания;

v — ордината упругой линии;

z — координата, измеренная вдоль оси стержня.

Дифференциальное уравнение его свободных колебаний дается, очевидно, равенством

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} = - \frac{M}{L} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - kv, \quad (1)$$

для решения которого положим

$$w = \sum_k v_k(z) R_k(t), \quad (2)$$

* Печатается впервые.

где $v_0(z)$ — формы главных свободных колебаний рассматриваемого стержня;

$\mu_0(z)$ — главные координаты его.

Пользуясь методом частных решений, пробуем удовлетворить уравнение (1), полагая

$$v_0(z) = \cos \mu_0 z \quad (3)$$

Подстановка (3) в (1) показывает, что формы свободных колебаний стержня $v_0(z)$ должны удовлетворять уравнению

$$EI v_0''(z) = \left(\frac{M \mu_0^2}{L} - k \right) v_0(z), \quad (4)$$

или, что то же, уравнению

$$EI v_0''(z) = \frac{M}{L} \lambda_0^2 v_0(z), \quad (5)$$

где

$$\frac{M \lambda_0^2}{L} = \frac{M \mu_0^2}{L} - k. \quad (6)$$

Уравнению (5) удовлетворяют, как известно, формы главных свободных колебаний призматического стержня, не имеющего упругого основания. Входящая в уравнение величина λ_0^2 есть угловая частота соответствующих упругих колебаний призматического стержня, не имеющего упругого основания, в остальном же тождественного с рассматриваемым стержнем.

Если в граничные условия для форм упругих колебаний стержня, лежащего на сплошном упругом основании, величина μ и k входят не иначе, как через величину

$$\frac{M \mu^2}{L} - k,$$

то жесткость сплошного упругого основания не должна оказывать на формы упругих колебаний стержня никакого влияния и единственным влиянием последнего должно быть изменение частоты этих колебаний. Частота k -го из последних определяется, как видно из формулы (6), при наличии упругих колебаний равенством

$$\mu_k^2 = \lambda_k^2 + \frac{L}{M} k. \quad (7)$$

В этом равенстве величина $\frac{L}{M} k$ есть ничто иное, как квадрат частоты собственных колебаний рассматриваемого стержня, вычисленной в предположении, что стержень, будучи освобожден от опор, колеблется под влиянием реакции упругого основания как твердое тело. Поэтому равенство (7) позволяет формулировать следующие положения. В тех случаях, когда μ и k входят в граничные условия для $v_0(z)$ только через $\frac{M}{L} \mu^2 - k$, можно

вычислить квадраты частот главных свободных колебаний призматического стержня, лежащего на сплошном упругом основании, как сумму квадратов частот его вычисленных 1) в предположении, что у стержня упругого основания нет и 2) в предположении, что он, поддерживаясь только своим упругим основанием, колеблется как твердое тело.

Итак, видно, что в граничных условиях, которым должны удовлетворять функции $v_0(z)$, жесткость упругого основания входит только через величину $\frac{M}{L} \mu^2 - k$ во всех тех случаях, если k к одной точке стержня не приложено нигде никаких дополнительных масс.

Действительно, обозначив величину $\frac{1}{EI} \left(\frac{M}{L} \mu^2 - k \right)$ через $\left(\frac{\lambda_0}{L} \right)^2$, можем переписать уравнение (4) так

$$v_0''(z) = \left(\frac{\lambda_0}{L} \right)^2 v_0(z), \quad (8)$$

откуда видно, что общий интеграл для $v_0(z)$ дается равенством

$$v_0(z) = A_0 \operatorname{ch} \left(\frac{\lambda_0}{L} z \right) + B_0 \operatorname{sh} \left(\frac{\lambda_0}{L} z \right) + C_0 \cos \left(\frac{\lambda_0}{L} z \right) + D_0 \sin \left(\frac{\lambda_0}{L} z \right), \quad (9)$$

где A_0, B_0, C_0 и D_0 постоянны.

Если на границах тех отдельных участков стержня, где к нему приложено уравнение (1), к стержню не прикреплено никаких дополнительных грузов, то в граничных условиях на концах этого стержня функция $v_0(z)$ входит только через свои производные по z . Соответствующие граничные условия для функции $v_0(z)$, а следовательно, и в коэффициенты уравнений для определения постоянных A_0, B_0, C_0 и D_0 , входящих в равенство (9), involve μ_0 входят лишь через параметр μ_0 , т. е. как и в случае, когда у стержня упругого основания нет.

Условие совместности упомянутых уравнений является в этих случаях уравнением относительно одной неизвестной μ_0 . Значение последней, в зависимости от величины λ_0^2 , оказывается, таким образом, не зависящим от жесткости упругого основания k во всех тех случаях, когда к рассматриваемому призматическому стержню никаких дополнительных масс не приложено.

Если хотя бы в одной точке стержня к нему присоединялась какая-либо дополнительная масса, то в этой точке в соответствующие граничные условия для v_0 должны войти соответствующие частные значения производной $\frac{\partial v_0}{\partial z}$. Если к стержню прикреплено в какой-либо точке твердое тело конечных размеров, то в соответствующие граничные условия должна войти еще производная $\frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2}$. В этих случаях коэффициенты уравнений, которыми

определяются константы A_n , B_n , C_n и D_n в выражении (9), а следовательно, в условиях их совместности должны зависеть не только от μ , но и от μ_0^2 . Поэтому сформулированная выше теорема о независимости значений величин μ_0 от k должна считаться отпадающей, и в равенстве (7) величина $\sum_{n=1}^N \mu_n^2$ нельзя считать частотами главных свободных колебаний того стержня, что и рассматриваемый, но не имеющего свободного упругого основания.

Подводя итог сказанному, можно сформулировать следующие две теоремы:

I. Если к пространственному стержню, лежащему на сплошном упругом основании постоянной жесткости, никаких дополнительных масс не прикреплено, то жесткость упомянутого основания не имеет никакого влияния на формы его главных свободных колебаний.

II. Квадраты частот всех главных свободных колебаний стержня можно в этих случаях вычислять как суммы квадратов частот его колебаний соответствующих случаев а) когда у стержня упругого основания нет и б) когда стержень колеблется на своем упругом основании как твердое целое.

Отражаясь во всем дальнейшем рассмотрении тех случаев, когда положены, только что сформулированные, имеют место.

2. Выше был рассмотрен случай, когда коэффициент k жесткости упругого основания, на котором лежит исследуемый стержень, не зависит от частоты его колебаний. Если упругое основание стержня нельзя считать жестким, величина k сама является функцией от частоты колебаний рассматриваемого стержня. Зависимость (7) возрастает быть простым алгебраическим выражением для μ_n , обратившись в некоторое уравнение для этой величины, обычно в уравнение трансцендентное. Это имеет место, в частности, и когда упругим основанием рассматриваемого стержня является система поддерживающих его балок много направления.

Рассмотрим простейший случай, когда этих балок много и все они расположены на столь малом расстоянии друг от друга, что их реакции можно считать распределенными вдоль исследуемого стержня практически равномерно.

Пусть

$\varphi_n(x)$ — формы главных свободных колебаний упомянутых только что балок, которые будем называть балками главного направления;

λ_n — угловые частоты их главных свободных колебаний;

m_n — обобщенные массы, соответствующие каждой из главных координат;

$P_n(t)$ — главные координаты;

R — мгновенное значение реакции балки перекрестной, приложенной в сечении, где $x = a$.

Тогда для ординат упругой линии балок главного направления можно написать

$$v = \sum_n a_n(x) P_n(t), \quad (10)$$

где $P_n(t)$ определяются уравнением

$$m_n (\ddot{P}_n + \lambda_n^2 P_n) = R \varphi_n(a), \quad (11)$$

входящим в данный случай развернутым видом уравнений Лагранжа.

Если рассматриваемое перекрытие совершает свободные колебания с частотой μ , реакция R должна быть гармонической функцией от t вида

$$R = R^0 \cos \mu t, \quad (12)$$

и уравнение (11) в случае установившихся колебаний дает:

$$P_n = \frac{R^0 \varphi_n(a)}{(\lambda_n^2 - \mu^2) m_n} \cos \mu t, \quad (13)$$

что по подстановке в (10) позволяет привести

$$v = \sum_n \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(a)}{m_n (\lambda_n^2 - \mu^2)} R^0 \cos \mu t \quad (14)$$

и, в частности, для точки, где на балку действует сила R :

$$v(a) = \sum_n \frac{\varphi_n^2(a)}{m_n (\lambda_n^2 - \mu^2)} R^0 \cos \mu t. \quad (15)$$

Сравняя формулу (15) с формулой (12), видим, что в случае установившихся колебаний, имеющих частоту μ , между R и $v(a)$ существует зависимость

$$R = \frac{1}{F(\mu)} v(a), \quad (16)$$

где

$$F(\mu) = \sum_n \frac{\varphi_n^2(a)}{m_n (\lambda_n^2 - \mu^2)}. \quad (17)$$

Если расстояние между балками главного направления есть a , интенсивность реакционного воздействия их на балку перекрестную можно при достаточно малых по сравнению с длиной перекрестной связи, принимать равной величине

$$r = \frac{R}{a}, \quad (18)$$

что совместно с формулами (16) и (17) позволяет при колебаниях перекрытия с частотой μ полагать в формуле (1)

$$k = \frac{1}{a F(\mu)}. \quad (19)$$

Подстановка найденное k в равенство (7), получим

$$\mu^2 = \lambda_0^2 + \frac{L}{M} \frac{1}{\alpha F(\mu)}. \quad (20)$$

Таким образом, все те частоты главных свободных колебаний перекрестки с одной перекресткой связью могут быть найдены как корни уравнений, которые можно написать по одному, для

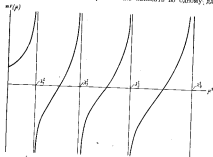


Рис. 1.

каждого частного значения k , т. е. всякой формы главных свободных колебаний перекресткой связи

$$\frac{M\alpha}{L} F(\mu) = -\frac{1}{(\lambda_0^2 + \mu^2)}. \quad (21)$$

Подставив в полученное равенство значение $F(\mu)$ из равенства (17), приходим окончательно к уравнению

$$\sum_{n=1}^m \frac{\alpha_n}{\alpha_n} \frac{\alpha_n^2(\epsilon)}{\lambda_n^2 - \mu^2} = \frac{L\alpha}{\mu^2 - (\lambda_0^2)}. \quad (22)$$

где α_n — фактическая масса каждой из балок главного направления.

Уравнением (22) определяются частоты различных главных свободных колебаний перекрестки, состоящего из большого числа одинаковых равноудаленных балок главного направления и одной перекресткой связи.

Входящая в левую часть уравнений функция

$$\alpha F(\mu) = \sum_{n=1}^m \frac{\alpha_n \alpha_n^2(\epsilon)}{\alpha_n (\lambda_n^2 - \mu^2)} \quad (23)$$

определяется устройством балок главного направления и претерпевает разрывы непрерывности с переходом через бесконечность при всех тех μ , когда μ становится равным частоте одного из

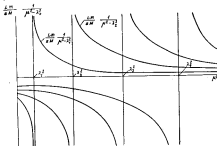


Рис. 2.

главных свободных колебаний балок главного направления (см. рис. 1).

В правой части уравнений (22) входят функции, которые графически могут быть представлены гиперболами вида, изображенного на рис. 2, каковых кривых можно построить по одной для каждого частного значения k .

Пересечением каждой из гипербол, соответствующих определенному частному значению λ_0^2 , определяется серия тех значений μ , которые удовлетворяют уравнению (23) и соответствуют различным главным свободным колебаниям перекрестки (рис. 3). Все эти значения μ будем обозначать через $\mu_{10}, \mu_{20}, \mu_{30}, \dots$ и т. д., очевидно, в промежутке между числами $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ и числом λ_0^2 , причем в частном случае, если какое-либо из частот главных свободных колебаний балок главного направления, вычисленные без учета взаимодействия этих балок с балкой перекресткой, совпадает с одной из собственных частот балки перекресткой, вычисленной в предположении, что балки перекрестки свободны от

взаимодействию с балками главного направления, т. е. если одно из чисел λ_n совпадает с каким-либо из чисел λ_n^0 , то одно из значений μ_n обязательно совпадает с этим значением величин λ_n и λ_n^0 . В соответствующем главном свободном колебании перекрытия балок главного направления колеблются в такт с балкою пере-

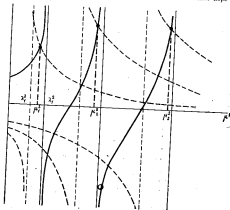


Рис. 2.

кресткой без возникновения между этими балками каких-либо реакций взаимодействия.

Вообще не все частоты μ_n главных свободных колебаний перекрытия могут быть найдены путем разыскания точки пересечения размещенных гипербол вида рис. 2 с кривою $\pi F(\mu)$, изображенной на рис. 1.

Разыскать какое-либо из чисел μ_n , можно форму соответствующего главного свободного колебания перекрытия рассмотреть в виде

$$u_n(x, z) = u_{n,1}(x) v_n(z). \quad (24)$$

где $u_n(x)$ — форма того из главных свободных колебаний балки перекрытия, частота которых λ_n^0

$v_n(z)$ — функция, определяемая [см. равенство (14)] равенством

$$v_n(z) = \sum_{\alpha} \frac{u_{n\alpha}(z) u_{n\alpha}(z)}{m_{n\alpha} (\lambda_n^0 - i\lambda_n^{\alpha})}. \quad (25)$$

Особенным является случай, когда балка перекрытия совпадает с одной из балок главного направления; балки главного направления в соответствующем своем главном колебании колеблются независимо как от балок перекрытия, так и друг от друга. Все колебания перекрытия этого особого вида можно представить разложением в ряд по функциям $u_n(x)$, $v_n(z)$, где n номера тех главных колебаний балок главного направления, узлы которых расположены на перекрестной связи.

3. Выше мы искали функцию $F(\mu)$ для балок главного направления с помощью метода Лагранжа, разлагая искомую функцию в ряд по формам главных свободных колебаний балок главного направления.

Само собой разумеется, что разыскать данную функцию именно этим путем нет никакой необходимости. Ее можно искать и сразу в замкнутом виде, как коэффициент пропорциональности в формуле

$$v = F(\mu) R,$$

когда R меняется по закону

$$R = R^0 \cos \mu t.$$

Иногда это бывает даже удобнее. Подробно разбирать здесь каким образом можно найти $F(\mu)$ сразу в замкнутом виде нет необходимости, так как это достаточно хорошо известно.

Полезно также иметь в виду упрощения, даваемые симметрией сооружения.

Если рассматриваемое перекрытие симметрично относительно прямой, проходящей через середины всех его балок главного направления, и подкреплено двумя симметричными перекрестными связями, то колебания его, симметричные относительно этой прямой и антисимметричные, можно искать независимо друг от друга. Разыскание колебаний, симметричных относительно этой прямой, и колебаний, антисимметричных относительно нее, можно свести к решению задачи о колебании некоторого перекрытия с одной перекрестной связью, т. е. к решению задачи, рассмотренной выше.

Очевидно также, что рассмотренный метод решения задачи применим не только в тех случаях, когда балки главного направления являются призматическими, но и тогда, когда они являются балками непрямоугольными. В последнем случае общая схема решения задачи не меняется, усложняется лишь функция, обозначающей выше через $\pi F(\mu)$.

Очевидным является, наконец, и то, что рассмотренная выше схема применима к решению задачи не только в тех случаях, когда балка перекрестная является балкой однопролетной, но и тогда, когда она является балкой многопролетной, но на всем своем протяжении имеет одно и то же сечение. Балки главного направления должны быть на всем протяжении балки перекрестной устроены одинаково. Все же остальные опоры балки перекрестной должны быть устроены так, чтобы с весом соответствующих опорных конструкций при решении задачи можно было не считаться.

4. Несколько сложнее решается вопрос, если перекрытие подкреплено больше чем двумя перекрестными связями или подкреплено двумя перекрестными связями, но не является симметричным относительно своей продольной оси.

В этом случае решение задачи надо, как и статический расчет перекрытий, подкрепленных перекрестными связями и большим числом одинаковых балок главного направления, начинать с определения прогиба балок главного направления под действием приложенных к этим балкам реакций балок перекрестных. Только в отличие от соответствующей статической задачи надо в рассматриваемой динамической задаче прогиб балок главного направления определять динамически.

Пусть для примера рассматриваемое перекрытие состоит из множества балок главного направления и двух неодинаковых балок перекрестных, пересекающих одно из балок главного направления при $x = c_1$, другая же при $x = c_2$.

Пусть далее

$$R_1 = R_1^0 \cos \mu t$$

есть приложенная к балкам главного направления реакция первой перекрестной связи, а

$$R_2 = R_2^0 \cos \mu t$$

реакция на них второй перекрестной связи.

Обозначив через $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ прогиб первой и второй перекрестных связей, можно принять аналогично сказанному выше

$$v^{(1)} = R_1 \sum_n \frac{u_n^2(c_1)}{m_n(\lambda_n^2 - \mu^2)} + R_2 \sum_n \frac{u_n(c_1) u_n(c_2)}{m_n(\lambda_n^2 - \mu^2)};$$

$$v^{(2)} = R_2 \sum_n \frac{u_n^2(c_2)}{m_n(\lambda_n^2 - \mu^2)} + R_1 \sum_n \frac{u_n(c_2) u_n(c_1)}{m_n(\lambda_n^2 - \mu^2)}.$$

или, что то же

$$\left. \begin{aligned} v^{(1)} &= [R_1^0 F_{1,1}(\mu) + R_2^0 F_{1,2}(\mu)] \cos \mu t; \\ v^{(2)} &= [R_2^0 F_{2,1}(\mu) + R_1^0 F_{2,2}(\mu)] \cos \mu t. \end{aligned} \right\} (26)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_{1,1}(\mu) &= \sum_n \frac{u_n^2(c_1)}{m_n(\lambda_n^2 - \mu^2)}; \\ F_{1,2}(\mu) &= F_{2,1}(\mu) = \sum_n \frac{u_n(c_1) u_n(c_2)}{m_n(\lambda_n^2 - \mu^2)}; \\ F_{2,2}(\mu) &= \sum_n \frac{u_n^2(c_2)}{m_n(\lambda_n^2 - \mu^2)}. \end{aligned} \right\} (27)$$

Соответствующие прогибы балок перекрестных должны удовлетворять уравнениям

$$\left. \begin{aligned} EI_1 \frac{\partial^4 v_1^{(1)}}{\partial x^4} &= -\frac{M_1}{L} \frac{\partial^2 v_1^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{R_1}{a}; \\ EI_2 \frac{\partial^4 v_2^{(2)}}{\partial x^4} &= -\frac{M_2}{L} \frac{\partial^2 v_2^{(2)}}{\partial x^2} - \frac{R_2}{a}; \end{aligned} \right\} (28)$$

и при

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= R_1^0 \cos \mu t; \\ R_2 &= R_2^0 \cos \mu t. \end{aligned} \right\} (29)$$

могут быть колебаниями вида

$$\left. \begin{aligned} v_1^{(1)} &= A v_1(x) \cos \mu t; \\ v_2^{(2)} &= B v_2(x) \cos \mu t; \end{aligned} \right\} (30)$$

где A и B — некоторые константы, если 1) концы балок перекрестных устроены так, что при отсутствии у обеих балок упругого основания формы этих балок тождественны; 2) величины μ , A и B удовлетворяют системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} A v_1(x) &= R_1^0 F_{1,1}(x) + R_2^0 F_{1,2}(x); \\ B v_2(x) &= R_2^0 F_{2,1}(x) + R_1^0 F_{2,2}(x); \end{aligned} \right\} (31)$$

$$\left. \begin{aligned} A EI_1 v_1''(x) &= A \frac{M_1}{L} \mu^2 v_1(x) - \frac{R_1^0}{a}; \\ B EI_2 v_2''(x) &= B \frac{M_2}{L} \mu^2 v_2(x) - \frac{R_2^0}{a}; \end{aligned} \right\} (32)$$

где $v_1(x)$ — формы свободных колебаний обеих перекрестных связей.

Обозначив через

- λ_1^0 — частоты главных свободных колебаний первой перекрестной связи;
- λ_2^0 — частоты соответствующих колебаний второй перекрестной связи.

вычисленные без учета взаимодвижения этих балок с балками главного направления, т. е. величинами

$$\left. \begin{aligned} (\rho_1^{(2)})^2 &= \frac{E I_1}{M_1} L; \\ (\rho_2^{(2)})^2 &= \frac{E I_2}{M_2} L \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

можно из уравнений (32) получить

$$\left. \begin{aligned} \frac{L}{\alpha M_1} A_1^2 &= [(\rho_1^{(2)})^2 - \mu^2] A v_1(x); \\ \frac{L}{\alpha M_2} A_2^2 &= [(\rho_2^{(2)})^2 - \mu^2] B v_2(x), \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

что по подстановке в равенство (31) дает

$$\frac{\alpha L}{\alpha M_1} A = A [(\rho_1^{(2)})^2 - \mu^2] \alpha F_{1,1}(\mu) + B [(\rho_2^{(2)})^2 - \mu^2] \alpha F_{1,2}(\mu)$$

и

$$\frac{\alpha L}{\alpha M_2} B = A [(\rho_1^{(2)})^2 - \mu^2] \alpha F_{2,1}(\mu) + B [(\rho_2^{(2)})^2 - \mu^2] \alpha F_{2,2}(\mu),$$

т. е. что то же

$$\left. \begin{aligned} A \left\{ [(\rho_1^{(2)})^2 - \mu^2] \alpha F_{1,1}(\mu) - \frac{L \alpha}{\alpha M_1} \right\} + \\ + B \{ [(\rho_2^{(2)})^2 - \mu^2] \alpha F_{1,2}(\mu) \} = 0; \\ A \{ [(\rho_1^{(2)})^2 - \mu^2] \alpha F_{2,1}(\mu) \} + \\ + B \left\{ [(\rho_2^{(2)})^2 - \mu^2] \alpha F_{2,2}(\mu) - \frac{\alpha L}{\alpha M_2} \right\} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Уравнения совместны только в двух случаях:

- 1) если A и B равны нулю, что возможно, если при частоте колебаний μ перекрестные связи окажутся расположенными в узлах точек балок главного направления, либо же если
- 2) будет удовлетворено одно из уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} [(\rho_1^{(2)})^2 - \mu^2] \alpha F_{1,1}(\mu) - \frac{L \alpha}{\alpha M_1}; & \quad [(\rho_2^{(2)})^2 - \mu^2] \alpha F_{1,2}(\mu) \\ [(\rho_1^{(2)})^2 - \mu^2] \alpha F_{2,1}(\mu); & \quad \left[[(\rho_2^{(2)})^2 - \mu^2] \alpha F_{2,2}(\mu) - \frac{L \alpha}{\alpha M_2} \right] \end{aligned} \right\} = 0. \quad (36)$$

Уравнениями (36) и определяются частоты всех тех главных свободных колебаний перекрытия, в которых участвуют его перекрестные связи.

В развернутом виде уравнение (36) имеет вид

$$\left\{ \alpha F_{1,1}(\mu) - \frac{\alpha L}{M_1 \alpha} \frac{1}{(\rho_1^{(2)})^2 - \mu^2} \right\} \alpha F_{1,2}(\mu) - \frac{\alpha L}{M_2 \alpha} \frac{1}{(\rho_2^{(2)})^2 - \mu^2} \left\{ \alpha F_{2,1}(\mu) - \alpha^2 F_{2,2}(\mu) \right\} = 0 \quad (37)$$

и допускает решения его графически.

Случай, когда элементы какой-либо строки определителя (36) обращаются одновременно в нуль, требует при замене уравнения (36) уравнением (37) особого рассмотрения.

Так же, как и при решении соответствующей задачи для перекрытия с одной перекрестной связью, нет необходимости искать функцию $\alpha F(\mu)$ обязательно в форме рядов, ее можно искать и в замкнутом виде, если последнее в рассматриваемом случае произойдет.

Если перекрытие симметрично относительно своей продольной оси, число же перекрестных связей равно трем или четырем, а число балок главного направления велико, то разыскание частот главных свободных колебаний перекрытия требует при всяком μ решения двух различных уравнений вида (36).

Разыскание корней определителя (36) требует значительно большее количество сложных вычислений, чем решение уравнений (22) в задаче о колебаниях перекрытия с одной перекрестной связью. Поэтому приближенные методы разыскания частот и форм главных свободных колебаний перекрытия могут представлять большой интерес в связи с расчетом перекрытий с несколькими перекрестными связями, чем при наличии у перекрытия всего одной лишь перекрестной связи.

РАЗДЕЛ III

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АМОРТИЗАЦИИ
И СТАБИЛИЗАЦИИ**

22. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВИБРОГРАФА В ПРИМЕНЕНИИ К РАСШИФРОВКЕ ЗАПИСИ СВОБОДНЫХ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ*

1. Теория вибрографа разработана в настоящее время главным образом применительно к вопросу о расшифровке записей установившихся вынужденных колебаний исследуемой конструкции. Вопрос о том, какая зависимость между движением точки подвеса прибора и движением его пишущей точки имеется при исследовании затухающих свободных колебаний типа тех, с которыми мы встречались при исследовании вибрации корабля после выстрела из установленных на нем орудий, исследовать, насколько известно, мало. Настоящая заметка имеет целью осветить данный вопрос в общем виде.

Чтобы достигнуть этой цели, рассмотрим следующую задачу.

К некоторой достаточно большой массе M , общий интеграл собственных (свободных) колебаний которой

$$y = ae^{-\lambda t} \cos \mu t + be^{-\lambda t} \sin \mu t,$$

прикреплен виброграф настолько легкий, что его влиянием на движение массы M можно пренебречь. На массу M действует при $t = 0$ мгновенный импульс J , сообщивший массе начальную скорость

$$v_0 = C = \frac{J}{M}. \quad (1)$$

После этого масса M совершает колебания, будучи предоставлена самой себе.

Спрашивается, что должен записать прикрепленный к массе M виброграф (см. рисунок).

2. Для большей определенности предположим, что речь идет о записи горизонтальных перемещений массы M , в соответствии с чем виброграф можно считать состоящим из прикрепленного к точке M вертикального маятника, массу которого обозначим через m .



* Печатается впервые.

- Пусть $K = m g l^2$ — момент инерции маятника вибрографа относительно его точки подвеса;
 l — расстояние з. т. маятника от его точки подвеса;
 θ — угла отклонения маятника;
 y — горизонтальное перемещение точки подвеса маятника;
 N — коэффициент пропорциональности между отклонением маятника θ и величиной действующей на него восстанавливающей пары;
 $2H$ — коэффициент пропорциональности между угловой скоростью маятника $\dot{\theta}$ и моментом сил сопротивления на него действующим.

В этих обозначениях дифференциальное уравнение колебаний вибрографа имеет, как известно, вид

$$K\ddot{\theta} + 2H\dot{\theta} + N\theta = -mly\ddot{y}. \quad (2)$$

Его общий интеграл можно составить, прибавив к любому частному решению уравнения (2) общий интеграл соответствующего однородного уравнения.

Обозначив первое знаком θ_1 , общий же интеграл уравнения

$$K\ddot{\theta} + 2H\dot{\theta} + N\theta = 0$$

знаком θ_2 можно принимать

$$\theta = \theta_1 + \theta_2. \quad (3)$$

При этом за θ_1 можно принять

$$\theta_1 = A e^{-\alpha t} \cos \omega t + B e^{-\alpha t} \sin \omega t, \quad (4)$$

где

$$\alpha = \frac{H}{K}; \quad \omega^2 + \alpha^2 = \frac{N}{K}. \quad (5)$$

3. Чтобы составить с помощью выведенных зависимостей выражения для угла отклонения маятника, нужно знать величину y , входящую в правую часть уравнения (2), т. е. перемещение исследуемой точки M .

Предположим, что на эту точку при $t = 0$, когда

$$y = 0; \quad \dot{y} = 0,$$

внезапно начинает действовать сила

$$F = \frac{J}{\Delta t},$$

сохраняющая свою величину вплоть до момента

$$t = \Delta t,$$

после чего сила равна все время нулю.

В движении массы M при этих условиях надо различать две стадии: первую от $t = 0$ до $t = \Delta t$ и вторую при $t > \Delta t$.

Во время первой стадии движения оно определяется в силу сделанного в п. 1 дифференциальным уравнением

$$M(y'' + 2k y' + (n^2 + N^2) y) = F = \frac{J}{\Delta t} \quad (6)$$

и начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} y &= 0 \\ y' &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } t = 0. \quad (7)$$

Так как нас интересует действие импульса мгновенного, то можно считать Δt бесконечно малым.

При этих условиях в уравнении (6) членами, заключенными в y' и y , можно по сравнению с y'' пренебречь. Это позволяет заменить уравнение (6) уравнением:

$$y'' = \frac{J}{M \Delta t} = \text{const.}$$

Интеграл этого уравнения, удовлетворяющий начальным условиям (7), есть

$$\left. \begin{aligned} y' &= \frac{J}{M} \frac{t}{\Delta t} = C \frac{t}{\Delta t}; \\ y &= \frac{J}{M} \frac{t^2}{2\Delta t} = \frac{1}{2} C \frac{t^2}{\Delta t}. \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Для момента $t = \Delta t$, когда кончается первая стадия движения, решение это дает

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= \frac{J}{M} = C; \\ y_2 &= \frac{J \Delta t}{2M} = \frac{1}{2} C \Delta t. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Последние выражения при Δt достаточно малом (в этот случай только и рассматриваем) практически эквивалентно условию

$$y_2 = 0. \quad (10)$$

Во время второй стадии движения точка M определяется дифференциальным уравнением

$$y'' + 2ky' + (n^2 + N^2)y = 0$$

и начальными условиями

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= C; \\ y_2 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Поэтому во время этой стадии движения

$$y = C e^{-\alpha t} \frac{1}{\pi} \sin \pi t, \quad (11)$$

Выражениями (8) и (11) искомого перемещение точки подвеса вибрографа вполне определяется.

4. Зная y , можно обратиться к разложению угла отклонения вибрографа.

Во время первой стадии движения [см. выражение (8)]

$$y'' = C \frac{1}{\Delta t}$$

и дифференциальное уравнение для θ есть

$$\theta'' + 2\alpha\theta' + (\alpha^2 + \omega^2)\theta = -\frac{mI}{m\alpha^2} y'' = -\frac{C}{L} \frac{1}{\Delta t}, \quad (12)$$

где знаком L обозначена величина

$$L = \frac{I'}{I}, \quad (13)$$

т. е. отношение от точки подвеса маятника вибрографа до так называемого центра качения его.

При Δt достаточно малом уравнение (12) можно заменить уравнением

$$\theta'' = -\frac{C}{L} \frac{1}{\Delta t} = \text{const.}$$

Если в момент начала действия исследуемого импульса

$$\theta = \dot{\theta} = 0,$$

то в силу только что выписанного дифференциального уравнения должно быть

$$\theta = -\frac{C}{L} \frac{t^2}{2\pi^2}.$$

Выражение это дает для конца первой стадии движения

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= -\frac{C}{L}; \\ \theta_0 &= -\frac{C}{L} \frac{\Delta t^2}{2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Выражения (14) можно принять за начальные условия движения для второй его стадии.

5. Составим для угла отклонения вибрографа общий интеграл, соответствующий второй стадии движения.

Для этого займемся частным решением уравнения (2), предполагая, что y задано равенством (11).

Подставим (11) в (2), видим, что за искомого частного решение можно принять $\theta_1 = \theta^1$, где θ^1 — любое частное решение уравнения

$$\theta'' + 2\alpha\theta' + (\alpha^2 + \omega^2)\theta = -\frac{1}{L} y = -\frac{C}{L} e^{-\alpha t} \frac{1}{\pi} \sin \pi t.$$

Последнее можно переписать так:

$$\theta'' + 2\alpha\theta' + (\alpha^2 + \omega^2)\theta = -\frac{C}{L\pi} \frac{1}{2i} (e^{i\pi t} - e^{-i\pi t}), \quad (15)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= -\lambda + i\pi; \\ \alpha_2 &= -\lambda - i\pi, \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

λ — знак мнимости.

Искомое частное решение уравнения (15) может быть найдено в форме

$$\theta = a_1 e^{\alpha_1 t} + a_2 e^{\alpha_2 t},$$

причем очевидно

$$a_1 = -\frac{C}{L\pi} \frac{1}{2i} \frac{1}{[\alpha + 2\alpha_1 + \alpha^2 + \omega^2]},$$

$$a_2 = +\frac{C}{L\pi} \frac{1}{2i} \frac{1}{[\alpha + 2\alpha_2 + \alpha^2 + \omega^2]}.$$

Мы видим, таким образом, что

$$\theta = -\frac{C}{L\pi} \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{\alpha_1 t}}{[\alpha + 2\alpha_1 + \alpha^2 + \omega^2]} - \frac{e^{\alpha_2 t}}{[\alpha + 2\alpha_2 + \alpha^2 + \omega^2]} \right],$$

или что то же

$$\theta = -\frac{C}{L\pi} \frac{1}{2i} \frac{(\alpha + 2\alpha_1 + \alpha^2 + \omega^2) e^{\alpha_1 t} - (\alpha + 2\alpha_2 + \alpha^2 + \omega^2) e^{\alpha_2 t}}{[\alpha + 2\alpha_1 + \alpha^2 + \omega^2][\alpha + 2\alpha_2 + \alpha^2 + \omega^2]}.$$

Принимая во внимание (16), нетрудно заключить, что

$$\alpha_1^2 + 2\alpha\alpha_1 + \alpha^2 + \omega^2 = \alpha^2 - \pi^2 + (\lambda - \alpha)^2 + 2\pi(\alpha - \lambda)i;$$

$$\alpha_2^2 + 2\alpha\alpha_2 + \alpha^2 + \omega^2 = \alpha^2 - \pi^2 + (\lambda - \alpha)^2 - 2\pi(\alpha - \lambda)i.$$

и, следовательно,

$$\theta = -\frac{C}{\pi L} \frac{e^{-\alpha t}}{i\pi} \{ (\alpha^2 - \pi^2 + (\lambda - \alpha)^2) \sin \pi t - 2\pi(\alpha - \lambda) \cos \pi t \},$$

где знаком L^2 обозначена величина

$$L^2 = \{ (\alpha^2 - \pi^2 + (\lambda - \alpha)^2)^2 + 4\pi^2(\alpha - \lambda)^2 \}. \quad (17)$$

Обозначив знаком ε угол, определенный уравнением

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2n(\alpha - \delta)}{\omega^2 - \alpha^2 + (k - \alpha)^2} \quad (18)$$

можно переписать найденное только что для θ выражение так

$$\theta = -\frac{C}{L\alpha} \frac{e^{-nt}}{R} \sin(n\ell - \varepsilon).$$

Подставив его в выражение

$$\delta_1 = \theta'',$$

нетрудно видеть, что искомое частное решение для θ есть

$$\theta_1 = -\frac{C}{L\alpha} \frac{e^{-nt}}{R} [(k^2 - \alpha^2) \sin(n\ell - \varepsilon) - 2k\alpha \cos(n\ell - \varepsilon)],$$

или что то же

$$\theta_1 = -\frac{C}{L} \frac{\sqrt{(k^2 - \alpha^2)^2 + 4k\alpha}}{\alpha R} \sin(n\ell - \varepsilon - \delta),$$

где

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2k\alpha}{k^2 - \alpha^2}. \quad (19)$$

Принимая во внимание (17) и вводя обозначение

$$X = \frac{\sqrt{(k^2 - \alpha^2)^2 + 4k\alpha}}{\sqrt{(\alpha^2 - \omega^2 + (k - \alpha)^2 + 4n^2(\alpha - k)^2)}, \quad (20)$$

можно найденному частному решению для θ_1 придать вид

$$\theta_1 = -\frac{C}{L} X \frac{e^{-nt}}{\alpha} \sin(n\ell - \varepsilon - \delta), \quad (21)$$

каковым и воспользуемся.

6. Зная θ_1 , займемся общим интегралом для θ и подчиним его условиям (14) при $t = 0$.

Ищем в силу (3), (4) и (21):

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = -\frac{C}{L} X \frac{e^{-nt}}{\alpha} \sin(n\ell - \varepsilon - \delta) + A e^{-nt} \cos \omega t + B e^{-nt} \sin \omega t. \quad (22)$$

Из начального условия

$$\theta = 0 \quad \text{при} \quad t = 0$$

заключим

$$A = -\frac{C}{L} X \frac{1}{\alpha} \sin(\varepsilon + \delta). \quad (23)$$

Из условия

$$\theta' = -\frac{C}{L} \quad \text{при} \quad t = 0$$

следует

$$-\frac{C}{L} X \frac{1}{\alpha} [A \sin(\varepsilon + \delta) + n \cos(\varepsilon + \delta)] + \frac{n}{\alpha} \frac{C}{L} X \sin(\varepsilon + \delta) + B \alpha = -\frac{C}{L},$$

откуда

$$B = \frac{1}{\alpha} \frac{C}{L} \left[X \cos(\varepsilon + \delta) - 1 + X \frac{k - \alpha}{n} \sin(\varepsilon + \delta) \right]. \quad (24)$$

Разыскав с помощью (23) и (24) величины A и B , можно найти сумму двух последних членов равенства (22) с помощью зависимости

$$\theta_2 = A e^{-nt} \cos \omega t + B e^{-nt} \sin \omega t = \sqrt{A^2 + B^2} e^{-nt} \sin(\omega t + \eta), \quad (25)$$

где

$$\operatorname{tg} \eta = \frac{A}{B}. \quad (26)$$

Равенство (25) позволяет выражению (22) придать вид

$$\theta = -\frac{C}{L} X \frac{e^{-nt}}{\alpha} \sin(n\ell - \varepsilon - \delta) + \sqrt{A^2 + B^2} e^{-nt} \sin(\omega t + \eta). \quad (27)$$

Таким образом, колебание маятника складывается из двух затухающих колебаний, одного из которых тот же период и декремент, что и колебание точки подвеса вибрографа, и второго, период которого, а также скорость затухания соответствуют собственным колебаниям маятника.

Выше условились первое из этих колебаний

$$\theta_1 = -\frac{C}{L} X \frac{e^{-nt}}{\alpha} \sin(n\ell - \varepsilon - \delta) \quad (21)$$

называть вынужденным колебанием вибрографа, второе же

$$\theta_2 = \sqrt{A^2 + B^2} e^{-nt} \sin(\omega t + \eta) \quad (28)$$

его свободным колебанием.

7. Исследуем вынужденное колебание вибрографа.

Сравним его с колебанием

$$y = -\frac{C}{n} e^{-nt} \sin n t, \quad (11)$$

которое виброграф должен зарегистрировать, видим, что оба

она отличается одинаковым периодом и одинаковой скоростью затухания.

Вынужденное колебание габрографа отстает по фазе от записываемого на угол $\epsilon + \delta$, где ϵ и δ углы, определяемые формулами (18) и (19).

Между амплитудой «вынужденного» колебания прибора и амплитудой записываемого габрографом колебания во всякий данный момент существует зависимость

$$\frac{\text{амплитуда } y}{\text{амплитуда } x} = \frac{1}{L\chi}$$

Если α отстояние от оси маятника габрографа до точки, в которой к нему прикреплен рычажок регистрирующего механизма, а k увеличение самого регистрирующего механизма, то между амплитудой записи вынужденного колебания и амплитудой колебаний точки M существует зависимость

$$\frac{\text{амплитуда записи}}{\text{амплитуда колебаний массы } M} = k \frac{\alpha}{L} \chi = K \chi, \quad (29)$$

$$K = k \frac{\alpha}{L} \quad (30)$$

некоторая постоянная, зависящая только от устройства прибора, а χ зависит от соотношения между частотой и декрементом вынужденных и собственных колебаний прибора.

Величину K можно назвать номинальным увеличением прибора. Величину же χ его, динамическим увеличением.

Как показывает формула (30), номинальное увеличение прибора может быть получено умножением увеличения k , данного регистрирующим механизмом, на отношение α/L , где α — отстояние от оси подвеса маятника до принимающей точки пишущего механизма.

$L = \int_0^{\alpha} \dots$ — отстояние от оси подвеса до центра инерции маятника.

Динамический множитель χ , как сказано, определяется формулой (20). В случае, когда сопротивления отсутствуют, т. е. при $\alpha = \delta = 0$, формула (20) обращается в формулу

$$\chi = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (20)$$

обычно приводимую в теории габрографов, движущихся без сопротивления.

При $\delta = 0$, $\alpha \neq 0$ формула (20) обращается в

$$\chi = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\omega^2 + \alpha^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2 \omega^2}} \quad (20)$$

в которой нетрудно узнать известное выражение динамического множителя системы, движущейся под влиянием периодической возмущающей силы, при наличии в системе сопротивлений, пропорциональных скорости.

Формула (20) заключает, таким образом, в себе оба результата, как частные случаи, и является их обобщением.

8. Как показывает формула (27), угол отклонения маятника прибора, помимо рассмотренных вынужденных колебаний, совершает колебания свободные, определяемые зависимостями (23), (24) и (25).

Если сопротивления достаточно малы, так что углы δ и ϵ можно принять в первом приближении равными нулю, то

$$A = 0;$$

$$B = \frac{1}{\omega} \frac{C}{L} (\alpha - 1),$$

и, благодаря рассматриваемому свободному колебанию прибора к получаемой на габрограме записи колебания исследуемой точки будет прибавлено некоторое дополнительное колебание, тем большей амплитуды, чем больше отличается динамическая поправка прибора χ от единицы.

Для того чтобы амплитуда записанного свободного колебания маятника прибора

$$a_2 = ka\theta_2$$

была равна нулю, необходимо, чтобы α , ω и L были пренебрежимо малы по сравнению с ω .

Если эти условия не соблюдены, полное перемещение пишущей точки прибора

$$a = ka\theta \quad (31)$$

должно складываться из перемещения

$$a_1 = ka\theta_1 = -K \chi \frac{C}{\omega} e^{-Nt} \sin(\omega t - \epsilon - \delta), \quad (32)$$

соответствующего колебаниям точки M и собственных колебаний прибора

$$a_2 = ka \sqrt{A^2 + B^2} e^{-\mu t} \sin(\omega t + \varphi), \quad (33)$$

так что ординаты записей приборами габрографов равны всегда сумме ординат, соответствующих обоим колебаниям:

$$a = a_1 + a_2 \quad (34)$$

Интересно отметить, что в начальный момент второй стадии движения, как показывают формулы (31) и (14),

$$a_2^0 = Ka \frac{C}{L} = KC, \quad (35)$$

т. е. начальная скорость перемещения плавучей точки прибора равна увеличенной в K раз (K — номинальное увеличение прибора) начальной скорости точки M .

9. Если на основании сказанного общей характер виброграммы, которую можно получить от прибора, заметить путь для расшифровки данных приборов виброграмм, т. е. для нахождения из этих виброграмм амплитуды, периода и скорости затухания колебаний исследуемой точки конструкции.

Метод этот предполагает, что частота и декремент свободных колебаний маятника прибора найдены из предварительного соответствующего опыта и что собственные колебания маятника прибора затухают быстрее, чем колебания, которые предполагается записать. Если данные условия соблюдены, то начать расшифровку виброграммы можно с определения частоты и коэффициента затухания λ записываемого колебания.

Для этого достаточно проанализировать конец виброграммы, т. е. ту часть ее, где записаны лишь вынужденные колебания маятника (колебания свободные предполагаются затухающими более быстро; поэтому такая часть от виброграммы всегда должна быть).

Период вынужденного колебания можно определить непосредственным подсчетом числа зубцов конца виброграммы, укладываемых на определенном отрезке времени. Коэффициент затухания в первом приближении можно найти, сопоставив амплитуду начального размаха записи прибора с амплитудой одного из зубцов исследуемого конца виброграммы, соответствующего той стадии движения пера, когда прибор совершает только вынужденные колебания.

Зная величины α , μ , η и λ , можно по формуле (20) определить динамическую поправку прибора, а по формулам (18) и (19) искажение фаз вынужденности колебания.

Приняв величину C равной единице, можно подсчитать по формуле

$$m_2 = -k \chi \frac{C}{\alpha} \sin(\omega t - \varepsilon - \delta)$$

предполагаемую запись вынужденного колебания, соответствующую случаю, когда начальная скорость массы M равна единице. Обратившись к формулам (23), (24), (26) и

$$m_1 = k L \sqrt{A^2 + B^2} \frac{C}{\alpha} e^{-\mu t} \cos(\omega t + \varphi),$$

можно легко найти и соответствующие случаю $C = 1$ колебания масс m_1 и m_2 , а путем сложения найденных m_1 и m_2 всю теоретическую виброграмму, соответствующую случаю $C = 1$, которая должна от истины отличаться (если λ и η найдены верно) только масштабом.

Проверив, что записанная прибором виброграмма по объему действительно близка к теоретической, соответствующей случаю $C = 1$, можно сравнением масштабов их найти и соответствующую последнюю неизвестную, т. е. C по начальной скорости исследуемой массы M .

Последнюю можно получить путем непосредственного определения величины начальной скорости плавучей точки прибора. Согласно формуле (35) между C и ω_0 должна существовать зависимость:

$$C = \frac{\omega_0}{K}$$

где K — номинальное увеличение прибора, определяемое зависимостью (30).

Очень важно иметь во время опыта возможность наблюдать непосредственно начальную скорость плавучей точки прибора ω_0 или начальную угловую скорость маятника, между которой и C существует зависимость $\omega_0 = -\frac{C}{K}$.

Этого всегда можно достигнуть, установив в точке M параллельно с вибрографом нормальную конструкцию электромагнитной виброграф, записывающий не углы отклонений его маятника, а скорость их изменения $\dot{\varphi}$.

10. Резюме.

Подводя итоги сказанному, можно сформулировать следующие условия, соблюдение которых необходимо для возможности расшифровки виброграммы свободных затухающих колебаний, порождаемых мгновенным импульсом.

1. Скорость затухания собственных колебаний маятника вибрографа должна быть примерно в два раза больше скорости затухания записываемого колебания, чтобы конец виброграммы давал достаточно отчетливо записанное колебание точки подвеса прибора.

2. Чтобы уменьшить до минимума налагающиеся на запись прибора собственные колебания, его надо уменьшить до возможного минимума отклонения α и ω , т. е. сделать частоту свободных колебаний прибора ω_0 а равно и коэффициент их затухания λ возможно меньшим по сравнению с частотой ω колебания, которое предполагается записать.

3. Если эти условия соблюдены, то путем анализа конца виброграммы, соответствующего тем моментам времени, когда свободное колебание прибора уже затухло, можно найти коэффициент затухания и частоту записываемого колебания. Если из предварительного опыта соответствующие характеристики самого прибора, можно построить по формулам, приведенным выше, и способом, изложенным подробно в п. 9, теоретическую виброграмму, которую должен дать прибор в случае, когда начальная скорость исследуемой точки системы равна единице.

4. Путем сравнения масштаба виброграмм теоретической и фактически полученной можно определить и начальную скорость движения исследуемой точки, а путем сравнения общего вида виброграмм оценить степень надежности произведенной расшифровки показаний прибора.

5. Для контроля оценок полезно иметь в своем распоряжении прибор надлежащей чувствительности, который позволял бы находить непосредственно начальную угловую скорость виброграммы, а по ней и величину начальной скорости исследуемой системы.

23. О РАЦИОНАЛЬНОЙ МЕТОДИКЕ ВИБРАЦИОННЫХ ИСПЫТАНИЙ КОРАБЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ, УСТАНОВОК И ПОСТОВ *

Предисловие

В настоящую работу включены вопросы, касающиеся теоретического определения коэффициента амортизации для тех установок, упругие колебания которых могут быть рассматриваемы как колебания материальной точки, упруго скрепленной с анфирующим корпусом корабля и для тех установок, поступательные колебания центра тяжести которых неотделимы от соответствующих угловых колебаний установки.

Автор работы счел необходимым подробно остановиться на последнем вопросе потому, что по его мнению данному вопросу до сих пор не уделялось должного внимания ни при проектировании амортизационных подвесов, ни при виброразытаниях соответствующих установок. Используемый при рассмотрении этого вопроса классический метод Лагранжа позволил заметить простую схему построения кривых резонанса для упругих систем упомянутого типа. Схема подробно развита в настоящей работе применительно к системам, которые приходится трактовать как системы всего лишь с двумя степенями свободы. В случае необходимости она легко может быть распространена на значительно более общий случай колебания амортизированных тел. В данной работе автор не след возможным остановиться на последнем вопросе, так как это отвлекло бы его от основной цели. Используемый метод применим к исследованию упругих колебаний всяких систем, устройству которых позволяет путем линейного преобразования переменных разделить переменные в уравнениях Лагранжа. Полученные в § 13 результаты могут быть, в частности, непосредственно распространены на решение задачи о вынужденных колебаниях примыщенного корабля в свете тезисов капитана А. Н. Крылова.

В связи с разбором рациональной методики испытания корабельной аппаратуры на вибростойкость при мощных местных сотрясениях корпуса корабля, неизбежных в условиях современного боя, возникает вопрос о построении соответствующих вибростанций. Так как постройка станций может встретиться воз-

* Печатается впервые.

ражения не только с точки зрения затруднительности надежного выполнения их основных элементов, но даже и с точки зрения экономичности можно ли обеспечить этим способом требуемые вибрационные характеристики, автор стал необходимым отдельный параграф работы посвятить рассмотрению методики назначения размеров основных элементов стенов — их упругой плиты и доказательству осуществимости тех требований, которые к плите предложено предъявлять в работе.

Вторым основным вопросом, возникающим в связи с проектированием стенов, является вопрос о назначении основных элементов их корпусов и об возможности такого метода сообщения упругой плите стенов ударов ковра, который гарантировал бы, что испытываемые приборы не будут в процессе сообщения им начальной скорости движения испытывать значительные большие ускорения, чем во все время последующих упругих колебаний плиты. Этот вопрос также подробно рассмотрен в настоящей работе. А именно этому посвящены §§ 8 и 9, в первом из которых вопрос об определении основных элементов ковра рассмотрен в предположении, что удар ковра передается вибростенду через посредство пружины, во второй же — через пружину, имеющую начальное поджатие, во втором же — через пружину, имеющую настолько значительное начальное поджатие, что разжимание пружины усилие можно во все время полета ковра считать практически одинаковым. Подбор основных элементов ковра оказался в последнем случае особенно простым. Поэтому в первую очередь, по мнению автора, следует рекомендовать к практическому осуществлению ковра именно этого типа.

Благодаря всему сказанному настоящая работа представляет собой краткое руководство по проектированию амортизационных подвесов, защищающих корабельные установки от повреждений при мощных сотрясениях корпуса корабля в условиях современного боя, и по проведению соответствующих их испытаний.

Вступаемые

Как показывает опыт Отечественной войны и как то, впрочем было ясно и до ее начала, вопрос об обеспечении корабельной точной аппаратуры, постам и устройствам должной вибростойкости является вопросом актуальным. Настоящая заметка имеет своей целью популяризировать основные из тех выводов, к которым автор ее пришел в отношении рациональной методики испытаний корабельной точной аппаратуры на вибростойкость еще до начала Отечественной войны. Вкратце в ней будут затронуты и некоторые вопросы, касающиеся рациональной методики испытаний тех корабельных постов и устройств, которые в целях защиты их от влияния корабельной ходовой вибрации приходится крепить к корпусу корабля не непосредственно, а с помощью специальных амортизационных подвесов.

§ 1. Ходовая вибрация корабля и ее основные характеристики. Рациональные нормы вибростойкости при ходовой вибрации

Для того чтобы заметить рациональную методику испытаний корабельной электротехники на вибростойкость, необходимо прежде всего установить, каков же упругим колебаниям может подвергаться аппарат в эксплуатационных условиях. В этом отношении можно исходить из следующих соображений.

У всякого корабля могут быть упругие колебания двух родов.

1. Ходовая вибрация, возникающая при всех ходовых режимах, но проявляющаяся особенно активно лишь при некоторых определенных ходах корабля, а именно при всех тех его ходах, при которых возмущающие силы приходят в резонанс с одним из главных свободных колебаний корабля. Этого рода упругим колебаниям корпус корабля и все установленные на нем приборы подвергаются постоянно. Все точные приборы, устанавливаемые на кораблях, должны быть устроены так, чтобы даже длительное пребывание их в условиях наиболее неблагоприятного режима ходовой вибрации не только не приводило к повреждению этих приборов, но не вызвало бы у них даже временного расстройств их действия или хотя бы временного искажения их показаний.

2. Мощные механические сотрясения корпуса корабля в бою. Причиной этого рода упругих колебаний корпуса корабля являются: удары собственной артиллерии, удары неприятельских снарядов о броневые перекрытия корабля, а также ударные воздействия парашных волн от действия фугасных снарядов, торпед, мины, авиабомб и глубинных бомб, как попадающих в корабль, так и разрывающихся в непосредственной близости от него.

На быстроходных катерах к этому прибавляются периодические удары корпуса корабля о встречную волну, которые всегда сопровождаются динамичекие быстроходных катеров по плавильному морю.

На подводных лодках ходовая вибрация является обычно весьма умеренной. Поэтому у данного рода кораблей главное внимание должно быть уделено защите их аппаратуры и устройств от действия глубинных бомб и авиабомб, разрывающихся в непосредственной близости к корпусу лодки.

Рационально требовать, чтобы аппаратура, установленная на кораблях не выходила из строя при всех тех сотрясениях корпуса корабля, при которых корпус его еще остается целым и не гибнет.

В соответствии с этим всю аппаратуру, устанавливаемую на кораблях, необходимо протереть:

1) на исправность действия при всех тех режимах ходовой вибрации корабля, которая может наблюдаться у современных кораблей;

2) на вибростойкость при длительном действии наиболее неблагоприятной ходовой вибрации корабля;

3) на вибростойкость при мощных механических сотрясениях, которым корпус корабля подвергается в боевой обстановке случайно или ограниченное число раз.

Сотрясения корпусов быстроходных катеров, являющиеся результатом их ударов о водную поверхность воды должны быть сравнимы в отношении их влияния на соответствующую аппаратуру и тем, которым корпус корабля подвергается не случайно, а постоянно.

В настоящее время мы располагаем довольно подробными сведениями об амплитудах и частотах ходовой вибрации современных кораблей с турбинными двигателями. У кораблей этого типа наблюдаются за ходом колебания двух родов:

1. Вибрация первого порядка, вызываемая неуравновешенностью гребных валов и винтов. Вибрация эта характеризуется тем, что соответствующее ей число колебаний корабля в единицу времени равно числу оборотов гребных винтов за тот же промежуток времени. Так как число оборотов гребных валов у современных турбинных кораблей колеблется от 100 при самом малом ходе до 500 при максимальной скорости наиболее быстроходных кораблей, то возможный диапазон частот, соответствующих упругим колебаниям корабля, можно считать ограниченным именно этим, только что указанным диапазоном.

2. Вибрация, вызываемая неравномерностью подтекания воды к гребным винтам. Опыт показывает, что воле волнового потока в районе гребных винтов, как бы мы ни стремились достигнуть его равномерности, никогда не может быть сделана равномерной. Поэтому и главный вектор и главный момент упорного давления винтов являются в каждый момент времени функцией от того, какое положение занимают по отношению к корпусу корабля лопасти гребных винтов.

Так как, однако, картина их относительного по отношению к корпусу корабля расположения меняется за один оборот вала столько раз, сколько лопастей имеет гребной винт, то частота упругих колебаний корабля, вызываемая этими факторами, равна частоте оборотов гребных валов корабля, умноженному на число лопастей его винтов.

Винты турбинных кораблей делаются обычно трехлопастными. Частота тех вибраций корабля, которая вызывается пульсацией упорного давления его винтов, равно как и вообще пульсацией давления воды на наружную обшивку и выступающие части корабля в районе гребных винтов, равна обычно утроенной частоте оборотов гребных валов. Вибрация этого рода принято называть вибрацией третьего порядка. В исключительных случаях, когда винты корабля делаются четырехлопастными, вибрация эта может иметь частоту, равную учетверенной частоте гребных валов корабля. В данных исключительных случаях у корабля может наблюдаться вибрация не третьего, а четвертого порядка. У кораблей наиболее быстро-

ходных, число оборотов винтов которых приближается к 500 в минуту, винты почти всегда не бывают четырехлопастными. Можно поэтому считать, что диапазон возможной частоты упругих колебаний третьего и четвертого порядков ограничен пределами 300—1500 колебаний в минуту. В целом же весь диапазон частот вынужденных колебаний корабля ограничен у современных турбинных кораблей таким образом: 100—1500 колебаний в минуту.

Примерно в тех же пределах колеблется и частота ходовой вибрации подводных лодок. На подводных лодках число оборотов винтов превосходит 500 оборотов в минуту, достигая цифры 500—600. Так как благодаря небольшому относительному моменту этих кораблей вибрация третьего порядка у них сравнительно невелика, то при установлении верхнего предела тех частот упругих колебаний, которые современная точная корабельная аппаратура должна выдерживать без заметного искажения исправности ее деталей, можно ограничиться частотой не 1800, а 1500 колебаний в минуту.

Что касается амплитуд упругих колебаний корабля, то при исправном состоянии гребных валов и винтов, амплитуда упругих колебаний корабля, как показала ряд сделанных за последние годы наблюдений не превосходит при нормальнейшем равномерном движении корабля на переднем ходе у осевого корпуса корабля величины порядка 0,8 мм. Амплитуда ускорений соответствующих точек корабля ограничена, как показывают те же опыты, у осевого корпуса корабля при переднем равномерном ходе цифрой 0,5—0,6 г, где г — ускорение силы тяжести.

На заднем ходе вибрации корабля всегда увеличиваются. Несколько именно — пока в точности установить трудно, так как соответствующие данные еще плохо систематизированы. Судя по всему, однако, не более чем вчетверо.

Увеличивается задняя вибрация корабля и при циркуляции, насколько именно, пока точно неизвестно.

Далее необходимо отметить с тем, что ходовая вибрация аппаратуры, которая для защиты ее от сотрясений в бою устанавливается на специальные амортизаторы, эти амортизаторы всегда несколько увеличиваются. Теория показывает (см. ниже § 5), что если жесткость амортизаторов будет подобрана так, чтобы частота собственных свободных колебаний корпусов амортизируемых приборов превосходила максимальную частоту упругих колебаний корабля не менее, чем вдвое, то амортизационные подвесы не будут увеличивать ходовой вибрации корабля более, чем на 33%.

Вибрация корпуса корабля может, кроме того, всегда увеличиться в несколько раз вследствие неисправности гребных винтов корабля при выходе на попятный. Такие случаи не редкость. Необходимо также отметить с тем, что ходовая вибрация корабля всегда может увеличиться при случайных поврежденных гребных

винтов корабля, как в результате ударов винтов о твердые предметы, плавающие в лаборной воде, например, о льдины, так и в результате повреждения лопастей гребного винта корабля в бою. Этого рода повреждения влияют на амплитуду колебаний первого лица порядка, соответствующие которым ускорения относительно невелики.

Так, например, амплитуде колебаний около 0,8 мм в частоте 500 колебаний в минуту (что соответствует максимально допустимой у современных исправных кораблей вибрация первого порядка), соответствует амплитуда ускорений

$$\delta = 0,8 \left(\frac{2\pi \cdot 100}{60} \right)^2 \approx 0,8 \cdot 2500 = 2000 \text{ мм/сек}^2,$$

т. е. всего лишь около 0,2 от ускорения силы тяжести. Поэтому, если вы даже допустим, что вследствие внезапного повреждения одной из лопастей гребного винта корабль может получить вибрацию раз в шесть большую, чем соответствующая исправному состоянию его палубного, и притом получить такое повреждение лопастей на максимальном ходу, то даже в этих условиях амплитуда ускорений соответствующих упругих колебаний первого порядка будет ограничена величиной порядка 1,2—1,5 g. Амплитуда самих упругих колебаний будет достигнута величинами порядка 5 мм. Надо отметить, что длительное поддерживать такой режим хода корабль не будет, а как только он уменьшит ход, хотя бы на 30%, так амплитуда его упругих колебаний упадет, притом значительно больше, чем пропорционально квадрату числа оборотов, ибо вибрация порядка 0,8 мм допускается лишь при некоторых наиболее неблагоприятных ходах корабля, а именно тех, при которых частота возмущающей силы близка к резонансу с одной из главных свободных колебаний корабля.

При уменьшении числа оборотов корабля амплитуда сил инерции неуравновешенных вращающихся масс уменьшается пропорционально квадрату числа оборотов, выход же возмущающей силы из резонанса имеет своим последствием дальнейшее заметное снижение амплитуды вибрации.

Следует отметить, что амплитуда ускорений от вибрации первого порядка может достигнуть у современных турбинных кораблей величины порядка 1,5 g лишь случайно, притом ненадолго, амплитуда же этих колебаний не может превосходить длительно 5 мм. У дизельных кораблей в случае попадания неуравновешенных сил инерции первого порядка в резонанс с основной из главных свободных колебаний корабля иногда наблюдаются колебания, амплитуда которых достигает 12—15 мм при частоте около 100 колебаний в минуту.

Благодаря относительно медленности данных колебаний амплитуда соответствующих им ускорений может достигнута лишь величинами порядка

$$\delta = 15 \cdot 10^3 = 1500 \text{ мм/сек}^2 = 0,15 \text{ g.}$$

Благодаря относительной малости указанных ускорений колебания этого порядка никаких повреждений корабельной аппаратуры практически вызвать не могут. Поэтому при установлении норм для испытания современной корабельной аппаратуры на вибростойкость можно вовсе не связываться с колебаниями порядка 10—15 мм, имея частоты всего лишь 100—150 колебаний в минуту.

Амплитуда колебаний третьего порядка при задних ходах и при переключе руля, судя по всему, никогда не увеличивается более чем в 3—4 раза по сравнению с максимальной ее величиной при прямом ходе прямым курсом с постоянной скоростью. Если мы увеличим ее расчетную величину еще на 33% для учета неблагоприятного влияния вращающихся, поглощающих кинетическое сопротивление корабля в бою, то придется признать, что амплитуда вибраций третьего порядка может быть у современных турбинных судов ограничена величиной, превосходящей амплитуду ее при прямом равномерном ходе корабля не более чем в $3 \cdot 1,33 = 4 \cdot 1,33$, т. е. в 4—5,33 раза.

Можно, следовательно, полагать, что при испытании корабельной аппаратуры на вибростойкость амплитуду ускорений третьего порядка можно ограничить величиной

$$\delta = 5 \cdot 0,5 \text{ g} = 3 \text{ g.}$$

т. е. ускорением, соответствующим утроенному ускорению силы тяжести.

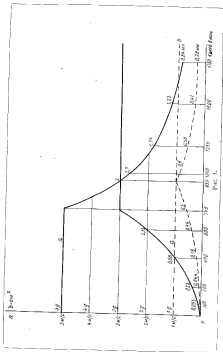
Подведя итог сказанному, можно констатировать, что:

1. При испытании всей корабельной аппаратуры на исправность действия при ходовой вибрации корабля можно в отношении аппаратуры, лучшей на современные подводные и надводные дизельные и турбинные корабли, ограничиться проверкой этой аппаратуры на исправность действия в диапазоне частот от 100 до 1800 колебаний в минуту.

Во всем этом диапазоне у современной корабельной аппаратуры не должно встречаться таких резонансных режимов, при которых исправность действия аппаратуры может заметно, хотя бы временно (только из время соответствующих колебаний корпуса прибора), быть нарушена при вибрации, амплитуда которой не превосходит 1 мм, ускорение же колебаний 1,0 g.

2. При испытании данной аппаратуры и приборов на вибростойкость амплитуду соответствующих колебаний ее корпуса можно ограничить величиной порядка 5 мм, амплитуду же ускорения величиной 3,0 g.

На рис. 1 в функции от числа колебаний в минуту, отложено по оси абсцисс, изображены пунктирной линией амплитуды колебаний, соответствующие проверке аппаратуры на исправность действия согласно нормам, указанным в п. 1; сплошной же линией — амплитуды колебаний, соответствующие проверке на вибростойкость при ходовой вибрации согласно нормам п. 2.



Для иллюстрации величинам тех ускорений, которым подвергается прибор при вибрационных режимах, соответствующих рис. 1, на том же рисунке ускорения указаны в пунктирной кривой соответствующего колебания.

Пунктирная кривая также соответствует испытанию на исправность действия, сплошная линия — испытанию на вибростойкость при ходовой вибрации.

§ 2. Испытание корабельной аппаратуры на исправность действия при ходовой вибрации

Испытанием на вибрацию, соответствующую рис. 1, вся корабельная аппаратура должна подвергаться на вибротрассе попеременно в направлении всех трех главных координатных осей, т. е. в направлении вперед-назад, вверх-вниз и справа-налево.

Для ускорения производства испытания может быть допущено и испытание ее сразу в двух или трех главных направлениях, т. е. по отношению к лицевой стороне прибора вперед-назад и одновременно вверх-вниз, или справа и влево.

Испытания, соответствующие п. 1, § 1, должны состоять в плавном увеличении числа оборотов при соответствующем уменьшении амплитуды колебаний. При этом нет необходимости длительно задерживаться на каждом отдельном числе оборотов. Достаточно плавно поднять число оборотов до 1800 и опустить его затем до 100, два два или три, каждый раз в течение 3—5 мин., наблюдая лишь за исправностью показаний испытуемой аппаратуры. Для ускорения испытаний и упрощения устройства соответствующих вибротрасс можно разрешить испытывать при всех числах оборотов проводить с амплитудой колебаний в 1 мм, уменьшая последнюю только в том случае, если в процессе испытаний обнаруживается, что прибор, действуя исправно при колебаниях, соответствующих пунктирной кривой рис. 1, перестал действовать исправно при больших колебаниях.

Основной целью испытания должно быть обнаружение всех тех чисел оборотов, при которых исправность действия испытуемого прибора может нарушаться, хотя бы из-за того, пока прибор колеблется с соответствующей скоростью, благодаря попаданию его отдельных деталей в резонанс со свободными колебаниями его продольных частей.

В случае обнаружения таких резонансных режимов должно производиться детальное обследование причин нарушения исправности работы прибора. При этом в отношении головных приборов нового типа следует добиваться такого переконструирования соответствующих деталей прибора, которое либо полностью устраняло бы отмеченный резонанс, либо же вводило соответствующие вынужденные колебания соответствующей детали прибора в такие рамки, чтобы прибор работал исправно при всех амплитудах и частотах колебаний, соответствующих пунктирной кривой рис. 1.

В случае обнаружения у приборов, следующих за головными, заметных отличий от ранее испытанного головного прибора, надлежит высказать те дефекты сборки прибора, благодаря которым прибор оказался не в состоянии работать исправно во всем диапазоне тех частот в амплитуд колебаний, в котором головной прибор работал исправно. Все такие дефекты серийных приборов должны быть устранены с последующей проверкой их установки соответствующим новым испытанием на вибростойкости. Таким образом испытание приборов на исправность действия при ходовой вибрации должно одновременно быть: у головного образца испытанием на правильность конструкции, у всех же дальнейших серийных образцов — испытанием на правильность сборки и соответствие рассматриваемого серийного образца ранее испытанному головному образцу.

В случае, если бы при испытании головного образца данной серии приборов выяснилось, что какая-либо деталь не может быть легко переконструирована для достижения полной исправности работы при всех режимах вибрации, соответствующих рис. 1, но прибор может исправно работать при несколько меньших амплитудах, вопрос о том, не могут ли для данного типа приборов нормы вибрации при испытании на исправность действия быть соответствующим образом снижены, должен решаться в порядке просмотра технического проекта данного прибора, исходя из специфических особенностей установки его на корабль. Допускает такое снижение можно только в том случае, если прибор будет устанавливаться лишь в таких кораблях и в таких местах кака, где нельзя ожидать появления такой ходовой вибрации, которая может нарушить хотя бы временно исправность действия прибора.

Соответствующие наднадзорные нормы для испытаний на исправность действия при ходовой вибрации должны быть оговорены особо в технических условиях по приемке последней партии приборов рассматриваемого типа.

§ 3. Испытания на вибростойкость при ходовой вибрации

Испытание на вибростойкость при ходовой вибрации нет необходимости производить при всех режимах, соответствующих сложной кривой рис. 1. Достаточно подвергнуть прибор в каждом из упомянутых выше трех основных взаимно перпендикулярных направлениях колебаниям в течение двух часов при одном из режимов, соответствующих этой кривой. За таковой должен приниматься наиболее неблагоприятный из резонансных режимов, если таковые при испытании на исправность действия обнаружены, считая за наиболее неблагоприятный резонансный режим тот из режимов, при котором испытываемый прибор работает наименее исправно. Поэтому одной из целей испытания прибора на исправность действия должно являться установление тех частот колебаний,

которые соответствуют наиболее неблагоприятному режиму колебания отдельно для каждого из трех основных направлений вибрации.

Если при испытании прибора в каком-либо направлении наиболее неблагоприятных режимов обнаружить не удастся, то прибор должен подвергаться в соответствующем направлении испытанием с частотой в 1500 колебаний в минуту.

Число оборотов, при котором должно проводиться испытание на вибростойкость, устанавливаемое в процессе испытания головного образца, фиксируется в формуляре прибора и технических условиях на производство испытания на вибростойкость. В дальнейшем при испытании первых образцов каждой серии следует выяснить, в каких пределах может колебаться у каждого отдельного прибора разброс наиболее неблагоприятных режимов вибрации для каждого из трех взаимно перпендикулярных основных направлений вибрации, и нужно ли для всех остальных образцов данной серии определить наиболее неблагоприятный режим при испытании на вибростойкость, или же таковой может быть установлен общим для всех приборов данного типа и серии.

В случае, если при испытании головного прибора на вибростойкость обнаруживается, что указанный выше режим испытания на вибростойкость является для него слишком обременительным и не может быть выдержан без соответствующего переконструирования прибора, — вопрос о возможности установления для приборов этой серии иных, более облегченных условий испытания на вибростойкость при ходовой вибрации, решается в порядке просмотра технического проекта прибора, исходя из его назначения, типа кораблей, для которых прибор предназначен и ожидаемой максимальной величины вибрации в местах установки приборов. Как правило, облегченные условия испытания на вибростойкость при ходовой вибрации должны допускаться лишь в отношении приборов, устанавливаемых в местах, где нельзя ни при каких условиях ожидать вибрации большей чем та, которой соответствует рассматриваемый облегченный режим испытания на вибростойкость при ходовой вибрации.

Крайне желательно при испытании головных приборов каждой серии определять, не могут ли приборы этого типа и серии быть подвергнуты испытанию на вибростойкость при ходовой вибрации по нормам, более жестким, чем рекомендательные выше, и не целесообразно ли в случае наличия такой возможности несколько уменьшить соответствующего вибрационного режима, и какое именно? При решении этого вопроса, как и при решении вопроса о необходимости облегчения соответствующего вибрационного режима, надлежит иметь в виду, что испытания на вибростойкость при ходовой вибрации не должны отражаться неблагоприятно на дальнейшей стойкости и надежности прибора, прошедшего испытание на вибростойкость. Для достижения этой цели желательно все серийные образцы испытывать при вибра-

шюном режиме в полтора раза более легком, чем тот, который выдержан голымым образом без всякого вреда для его действия, и без обнаружения у него заметного износа в результате выдержанных испытаний.

§ 4. Особенности вибрации быстрозодных катеров

Приведенные выше нормы, нацеленные рис. 1, могут со сделанными выше оговорками быть распространены на приборы, предназначенные к установке у всех кораблей, кроме быстрозодных катеров.

У быстрозодных катеров число оборотов валов может достигать 1900—1600 и даже 2000 в минуту, а следовательно с чем частоты, амплитуды и ускорения соответствующей ходовой вибрации могут не иметь явного общего с теми их характеристиками, которые даны выше. Ходовая вибрация у быстрозодных катеров не пришла до сих пор большого внимания, но, во-видимому, требования, предъявляемые ею к вибростойкости соответствующей аппаратуре покрываются теми дополнительными требованиями, которые вытекают из того факта, что быстрозодные катера подвергаются при ходе по взволнованной поверхности моря значительным гидравлическим ударам, во много раз превосходящим ускорения, соответствующие приведенным выше нормам.

В отношении силы последних ударов мы не располагаем в настоящее время исчерпывающими данными. Наибольшее количество наблюдений, сделанных в 1939 г., показало, что при силе моря около 6 баллов корпуса этих катеров систематически (2—3 раза в минуту) подвергаются ударам, сопровождающим их ускорения, превосходящие ускорение сами тяжести в пять раз.

Поскольку вопрос о силе этих ударов еще очень мало изучен, катера же эти в процессе своей эволюции могут оказаться подверженными ускорениям значительно большей величины, чем ускорения, у них же зарегистрированные, целесообразно требовать, чтобы все приборы, устанавливаемые на таких катерах, не выходили из строя при колебаниях, ускорения которых доходят до 10 g. Голые образцы их в соответствии с этим подвергались испытанию на вибростойкость при ускорениях до 15 g.

Период колебаний, которым должны подвергаться при испытаниях на вибростойкость приборы, предназначенные для установки на быстрозодные катера, следовательно бы согласовать с имеющимися экспериментальными данными о характере движения силы соответствующих гидравлических ударов во времени. Судя по упомянутым уже опытам, быстрозодные катера, движущиеся по взволнованной поверхности моря, подвергаются действию ускорений, уменьшающихся во времени приблизительно так, как то показано на рис. 2.

Воспроизвести такой колебательный процесс на виброплатформе затруднительно. Наставать на его точное воспроизведе-

дения нет никаких особых оснований. Можно ограничиться длительными испытаниями приборов на виброплатформе, совершающей гармонические колебания, амплитуда ускорений которых достигнет 10 g, при периоде t равном удвоенной длительности t нарастания ускорения, изображенных на рис. 2, от нуля до максимума. Период на основании опытов t близким к 0,25 сек.

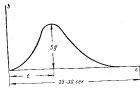


Рис. 2.

будем иметь для соответствующих колебаний виброплатформы

$$v = 0,5 \text{ сек};$$

$$\omega = \frac{2\pi}{v} = 12,5 \text{ 1/сек};$$

так что при амплитуде ускорений

$$b = 10 g = 100\,000 \text{ мм/сек}^2$$

амплитуда колебаний платформы должна быть

$$a = \frac{b}{\omega^2} = \frac{100\,000}{12,5^2} = 640 \text{ мм}.$$

Надо полагать, что при таком амплитудном режиме явных резонансов ни у одной части прибора быть не может. Поэтому для ускорения производства испытаний и уменьшения амплитуды движения виброплатформы можно значительно увеличить и частоту ее колебаний.

Остановившись на частоте 1500 колебаний в минуту, чему соответствует

$$\omega \approx 157 \text{ 1/сек},$$

получаем для необходимой амплитуды колебаний виброплатформы

$$a = \frac{10g}{\omega^2} = \frac{100\,000}{157^2} = 4,0 \text{ мм}.$$

Двухчасовое испытание прибора при данном режиме равносильно испытанию в море во время волнения в течение

$$2 \frac{1000}{g} = 1000 \text{ часов,}$$

чего более чем достаточно для проверки вибростойкости прибора по отношению к рассматриваемым гидравлическим ударам.

Ударом рассмотренного только что типа корпуса прибора подвешивается лишь в вертикальном направлении. Поэтому описанному только что двухчасовому испытанию на виброплатформе соответствующие приборы необходимо подвергать лишь в направлении вверх-вниз.

Систематизированными данными в отношении сил, соответствующих горизонтальным ударам, мы пока не располагаем. Судя по всему, амплитуда соответствующих горизонтальных колебаний может быть снижена по сравнению с колебаниями вертикальными примерно вчетверо, т. е. с 4,0 до 1,0 мк.

Колебания соответствующей лодочной вибрации катеров имеют значительно меньшую амплитуду. Поэтому подвергать приборы, выдерживающие испытание на вибростойкость при действии гидравлических ударов при вибрационном режиме описанного выше типа, еще дополнительным испытаниям на вибростойкость при лодочной вибрации нет, казалось бы, никаких оснований.

§ 5. Теория амортизации резких местных сотрясений корпуса корабля. Выбор рациональной жесткости амортизаторов и определение ожидаемого эффекта их действия

Переходим к рассмотрению колебаний, которые должны подвергаться приборы, устанавливаемые на кораблях для защиты их от повреждений в результате тех мощных сотрясений корпуса корабля, которые могут у него наблюдаться.

Ускорения эти, как показывают пока еще немногочисленные наблюдения, велики и достигают нескольких сотен и даже тысяч земных ускорений. Частота их относительно велика. Амплитуда же, наоборот, мала. Малость амплитуды этих колебаний при большой относительно частоте позволяет осуществить эффективную защиту всей корабельной аппаратуры, которая в такой защите нуждается, от повреждений при сотрясениях, получаемых корпусом корабля в бою.

Для этого достаточно подвесить данную аппаратуру к корпусу корабля настолько эластично, чтобы период собственных колебаний, соответствующий ее относительным по отношению к корпусу корабля перемещениям, был относительно велик по сравнению с периодом упругих колебаний корабля, наблюдаемых в месте установки аппаратуры. Это видно из следующих элементарных соображений.

Пусть M — масса прибора, колебания которого предполагаются амортизировать;

x — абсолютное перемещение массы, т. е. перемещение по отношению к неподвижному пространству;

z — такое же перемещение корабля в точке установки рассматриваемого прибора;

N — коэффициент жесткости пружины, связывающей массу M с той точкой корабля, перемещение которой есть z ;

H — коэффициент внутреннего сопротивления гиротой связи между массой M и упомянутой только что точкой корабля.

Тогда дифференциальное уравнение упругих колебаний массы M , вызванных перемещением корабля, можно будет написать в форме

$$M \ddot{u} + H(\dot{u} - \dot{z}) + N(u - z) = 0, \quad (1)$$

так что в случае, когда корабль в точке установки рассматриваемого прибора совершает гармонические колебания по закону

$$z = a_0 \cos \omega t, \quad (2)$$

движение массы M должно определяться уравнением

$$M \ddot{u} + H \dot{u} + N u = N x + H \dot{x} = N a_0 \cos(\omega t + \epsilon), \quad (3)$$

где

$$a_0 = a_1 \sqrt{1 + \frac{H^2}{N^2} \omega^2}, \quad (4)$$

и

$$\epsilon = \arctg \left(\frac{H}{N} \omega \right). \quad (5)$$

Общий интеграл уравнения (3) дается выражением

$$u = e^{-\mu t} (A \cos \mu t + B \sin \mu t) + a \cos(\omega t + \nu), \quad (6)$$

где A и B — постоянные интегрирования, зависящие от начальных условий движения;

μ — круговая частота собственных затухающих колебаний массы M , связанный с коэффициентами уравнения (3) посредством равенств

$$\left. \begin{aligned} \mu^2 &= \lambda^2 - \alpha^2 \\ \lambda^2 &= \frac{N}{M}; \\ \alpha &= \frac{H}{2M}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

а постоянные a и φ определяются уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right) a \cos \varphi - \frac{H \omega}{N} a \sin \varphi &= a_0 \\ \frac{H \omega}{N} a \cos \varphi + \left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right) a \sin \varphi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

из коих следует

$$\left. \begin{aligned} a \cos \varphi &= a_0 \frac{1 - \frac{\omega^2}{k^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \left(\frac{H \omega}{N}\right)^2} \\ a \sin \varphi &= a_0 \frac{-\frac{H \omega}{N}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \left(\frac{H \omega}{N}\right)^2} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

так что

$$a = \frac{a_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \left(\frac{H \omega}{N}\right)^2}} \quad (10)$$

Принимая во внимание (4), можно из равенства (10) видеть, что

$$\frac{a}{a_0} = \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{H \omega}{N}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \left(\frac{H \omega}{N}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{k^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{k^2}}} \quad (11)$$

где через γ обозначена величина

$$\gamma = \frac{H \lambda}{N} = \frac{H}{M N} \quad (12)$$

Отношение

$$Z = \frac{a}{a_0} \quad (13)$$

показывает, какую долю от амплитуд колебаний прибора в точке подвеса прибора составляет амплитуда вынужденных колебаний последнего. Отношение это может быть названо коэффициентом амортизации рассматриваемого прибора.

Величиной γ характеризуется относительное сопротивление рассматриваемого упругого подвеса. С величиной логарифмиче-

ского декремента затухания свободных колебаний системы, т. е. величиной

$$\delta = \frac{H}{2M} \tau, \quad (14)$$

где

$$\tau = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (15)$$

есть период свободных колебаний прибора, величина γ связана равенством

$$\delta = \frac{H}{2M} \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi H}{\sqrt{M N}} = \pi \gamma. \quad (16)$$

Таким образом, величину γ можно определять для всякого заданного подвеса путем наблюдения затухания свободных колебаний этого подвеса.

Пусть k есть отношение двух положительных максимальных отклонений массы M в одну и ту же сторону от положения ее равновесия.

Тогда согласно равенству (6) и определению величины δ можно написать

$$k = e^{\delta} \quad (17)$$

и, следовательно,

$$\delta = \ln k, \quad (18)$$

так что

$$\gamma = \frac{1}{\pi} \ln k. \quad (19)$$

Для резонансных амортизационных подвесов, как показали опыты, величина γ весьма мала, чем 0,1. А так как с увеличением величины γ коэффициент амортизации прибора ухудшается, то при определении его величины для проектируемого прибора можно принимать в запас прочности прибора

$$\gamma = 0,1.$$

При этом значении γ формула

$$Z = \frac{a}{a_0} = \sqrt{\frac{1 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{k^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{k^2}}} \quad (20)$$

непосредственно следующая из равенств (11) и (13), дает

$$\chi = \sqrt{\frac{1 + 0,01 \left(\frac{\omega}{\lambda}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda^2}\right) + 0,01 \frac{\omega^2}{\lambda^2}}} \quad (21)$$

Ряд значений величины χ , соответствующих согласно формуле (21) различным значениям отношения $\frac{\omega}{\lambda}$, т. е. различным значениям отношения круговой частоты вынужденных колебаний прибора к круговой частоте его свободных колебаний, вычисленной без учета сопротивления подвеса, собран в табл. 1.

Соответствующая функциональная зависимость между χ и $\omega:\lambda$ иллюстрируется графиком рис. 3.

На этом рисунке значения χ , представленные сплошной линией, отложены по оси ординат в масштабе 1 см = 1,00; пунктирной же линией соответствует значениям величины χ , отложенные по той же оси в масштабе 1 см = 0,01, т. е. в сто раз больше.

Как видно из табл. 1, рис. 3 и формулы (21), с помощью которой эта таблица и рисунок получены, видно, что при значениях $\omega:\lambda$ меньше чем 1,41, коэффициент амортизации χ больше единицы. Это показывает, что при этих значениях отношения $\omega:\lambda$ упругий подвес прибора является не только не полезным, но прямо вредным. При этих значениях отношения $\omega:\lambda$ увеличение относительного сопротивления амортизатора уменьшает коэффициент χ . Таким образом во всей той области значений отношения $\frac{\omega}{\lambda}$, в

Таблица 1

Числовые значения коэффициента амортизации χ , соответствующие частному значению относительного сопротивления $\gamma = 0,1$

$\frac{\omega}{\lambda}$	χ	$\frac{\omega}{\lambda}$	χ
0,00	1,00	3,00	0,131
0,20	1,04	4,00	0,072
0,40	1,10	5,00	0,047
0,60	1,20	6,00	0,033
0,80	1,32	7,00	0,026
1,00	1,45	8,00	0,021
1,20	1,58	9,00	0,017
1,40	1,74	10,00	0,014
1,60	1,91	12,00	0,011
1,80	2,10	15,00	0,0083
2,00	2,31	20,00	0,0056

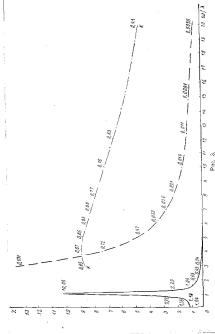


Рис. 3

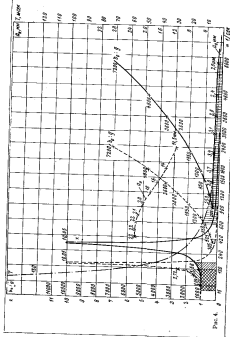


Рис. 4.

которой амортизатор рассматриваемого устройства приносит на пользу, в вред. Вред, приносимый амортизационными подвесами уменьшается при увеличении и увеличивается при уменьшении относительности сопротивления γ .

Во всей области тех значений величин отношения, где

$$\omega : \lambda = \sqrt{2},$$

коэффициент амортизации χ меньше единицы и уменьшается с увеличением отношения $\omega : \lambda$.

Таким образом, амортизационные подвесы рассматриваемого типа приносят пользу в отношении защиты корабельных приборов от упругих колебаний корпуса корабля только в том случае, если частота колебаний корпуса превышает частоту собственных колебаний прибора по отношению к кораблю, по крайней мере в $\sqrt{2}$ раз.

Во всей этой области увеличение коэффициента γ увеличивает, т. е. ухудшает коэффициент амортизации χ . Таким образом, увеличение относительного сопротивления γ уменьшает вред, приносимый упругостью подвеса прибора к корпусу корабля, когда упругость приносит не пользу, а вред и уменьшает полезное действие прибора, когда амортизационный подвес действительно защищает подвешенный на нем прибор от вредного влияния на него упругих колебаний корабля.

При $\gamma = 0,1$ и значениях $\omega : \lambda$ близких тем 3, т. е. в области всех тех значений $\omega : \lambda$, при которых приносимая амортизационным подвесом польза ощутима, можно, как видно из самой формулы, пользоваться для вычисления коэффициента амортизации не формулой (21), а приближенной зависимостью

$$\chi = \frac{\sqrt{1 + \gamma^2 \left(\frac{\omega}{\lambda}\right)^2}}{\frac{\omega^2}{2\lambda^2} - 1} \quad (22)$$

даною при $\omega : \lambda = 3$ и $\gamma = 0,1$ приблизительно те же значения для χ , что и формула (21).

При значениях $\omega : \lambda$ меньших чем 0,5, при которых вред, приносимый упругостью подвеса, относительно невелик, можно при определенном значении относительного сопротивления γ , пользоваться вместо формулы (21) приближенной зависимостью

$$\chi \approx \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\lambda}\right)^2} \quad (23)$$

даною при $\gamma = 0,1$ и $\omega : \lambda = 0,5$ практически те же результаты, что и более точная формула (21).

Только очень немногие корабельные приборы, также как дальномеры, компасы и т. п. приходится защищать от действия на них

объемной ходовой вибрации корабля. Эти немалочисленные приборы приходится по необходимости подвешивать к корпусу корабля столь жестко, чтобы частота их свободных упругих колебаний по отношению к корпусу корабля была мала не только по сравнению с частотой мощных местных колебаний, которые могут наблюдаться у точек подвеса приборов к кораблю в боевых условиях, но и по сравнению с частотой ходовой вибрации корабля.

Большинство корабельных приборов не требует защиты их от действия ходовой вибрации корабля. Все такие приборы можно крепить к корпусу корабля настолько жестко, чтобы местные упругие колебания большой частоты, но малой амплитуды, характерные для местных сотрясений корпуса корабля в боевых условиях, не передавались прибору, и в то же время по возможности так жестко, чтобы также выжили, как ускорение от качки корабля не вызывали больших смещений приборов по отношению к корпусу корабля. Большинство корабельных приборов приходится крепить к корпусу корабля так, чтобы частота их собственных упругих колебаний по отношению к кораблю была мала по сравнению с частотой тех местных сотрясений большой частоты, которые могут наблюдаться у точек их крепления к корпусу корабля в боевых условиях, будут одновременно несколько большей, чем частота ходовой вибрации корабля.

Условно во всем дальнейшем обозначать через ω_0 максимальную частоту ходовой вибрации корабля, и через ω без вычета частоту тех местных сотрясений корпуса корабля, от которых соответствующий прибор собственно и приходится защищать с помощью амортизационного подвеса. Тогда для большинства корабельных приборов амортизационные подвесы придется выбирать так, чтобы частота λ собственных колебаний прибора по отношению к корпусу корабля удовлетворяла условию

$$\omega_0 \ll \lambda \ll \omega. \quad (24)$$

При этих условиях яред, приносимый амортизационным подвесом в смысле увеличения влияния на рассматриваемый прибор ходовой вибрации корабля, можно определять, по сказанному выше, с помощью приближенной зависимости

$$\chi \approx \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\lambda}\right)^2}. \quad (25)$$

Вользу же, приносимую амортизационным подвесом в деле защиты прибора от местных сотрясений корпуса корабля в боевых условиях, с помощью приближенной зависимости (21) и соответствующей ей сплошной кривой рис. 3.

Формула (25) дает

$$\chi = 1,33 \text{ при } \omega : \lambda = 0,5 \quad (26)$$

$$\chi = 2,00 \text{ при } \omega : \lambda = 0,7 \quad (27)$$

Поэтому для того, чтобы ходовая вибрация корабля передавалась прибору, подвешиваемому к кораблю с помощью рассматриваемого амортизационного подвеса, увеличенной не больше, чем на 33%, следует делать

$$\omega_0 : \lambda = 0,5.$$

т. е. делать

$$\lambda = 2 \omega_0. \quad (28)$$

Если можно пойти на двукратное увеличение действия ходовой вибрации амортизационным подвесом, то можно считать λ до значеный, удовлетворяющих неравенству

$$\lambda = 1,4 \omega_0. \quad (29)$$

У современных быстроходных кораблей, амплитуда ходовой вибрации которых может на полном ходу достигать величин порядка 0,8 мм, частота же доходит до 1500 колебаний в минуту, полезно делать λ не меньшим чем $2 \omega_0$, т. е. подвешивать приборы к корпусу корабля так, чтобы было

$$\lambda = 300 \text{ 1/сек.} \quad (30)$$

У броненосных кораблей, число оборотов гребных винтов которых в минуту не превышает 300, амплитуда же ходовой вибрации меньше указанных выше норм, можно по-видимому доходить до значеный

$$\lambda = 1,4 \omega_0.$$

т. е. делать

$$\lambda = 1,41 \cdot 90 = 125 \text{ 1/сек.} \quad (31)$$

Тогда

Именно коэффициентам амортизации, соответствующим различным частотам местных упругих колебаний корабля в боевых условиях

n	λ	χ	При λ = 300 1/сек.			При λ = 125 1/сек.		
			ω ₀ 1/сек.	ω ₀ кол/мин.	γ, мм.	ω ₀ 1/сек.	ω ₀ кол/мин.	γ, мм.
3	0,131	7,5	900	9000	6,7	375	3750	16
4	0,07	14	1200	12000	5,0	500	5000	12
5	0,047	21	1500	15000	4,0	625	6250	9,8
6	0,033	33	1800	18000	3,3	750	7500	8,0
8	0,026	38	2400	24000	2,6	1000	10000	6,7
10	0,017	59	3000	30000	2,0	1250	12500	4,8
12	0,014	90	3600	36000	1,67	1500	15000	4,0
15	0,008	120	4500	45000	1,33	1875	18750	3,2
20	0,0056	175	6000	60000	1,00	3000	30000	2,0

Таблица 3

Численные значения коэффициента μ в формуле (35), соответствующие случаю, когда $\gamma = 0,1$

$\frac{\omega}{\lambda}$	μ	$\frac{\omega}{\lambda}$	μ
3	0,85	8	0,70
4	0,87	10	0,63
5	0,86	12	0,55
6	0,80	15	0,45
7	0,77	20	

Таблица 4

Значения величин a_0 , соответствующие случаю $b = 40 \text{ г}$; $\lambda = 300 \text{ 1/сек}$.

$\frac{\omega}{\lambda}$	a_0 , мм	T , сек	b_0 , г
3	3,8	6,7	335
4	3,9	5,0	550
5	3,8	4,0	850
6	3,7	3,3	1200
8	3,5	2,5	1950
10	3,1	2,0	2800
12	2,8	1,67	3600
15	2,4	1,33	4800
20	2,0	1,00	7200

Таблица 5

Значения величин a_0 , соответствующие случаю $b = \text{г}$; $\lambda = 125 \text{ 1/сек}$.

$\frac{\omega}{\lambda}$	a_0 , мм	T , сек	b_0 , г
3	22	16	305
4	22	12	550
5	22	9,6	850
6	21	8,0	1200
8	20	6,7	1950
10	18	4,8	2800
12	16	4,0	3600
15	14	3,2	4800
20	11,5	2,0	7200

При этих двух настройках амортизационного подвеса можно ожидать в зависимости от частоты тех местных колебаний корпуса корабля, которые могут иметь место, достигшие коэффициентов амортизации, указанных в табл. 2.

В таблице через δ обозначены те числа колебаний в минуту, которые соответствует рассматриваемое значение коэффициента амортизации, через T соответствующие этим δ периоды колебаний, измеренные в миллисекундах.

Амплитуда тех колебаний, которые может выдержать амортизированный прибор, зависит как от его массы по отношению к вибрациям рассматриваемой частоты, так и от частоты вынужденных колебаний его.

Пусть b есть амплитуда ускорений тех колебаний, которые может выдержать прибор, не будучи амортизированным. Тогда допустимая амплитуда точек установки амортизированного прибора будет определяться величиной

$$b_0 = \frac{1}{\chi} b,$$

амплитуда же самих этих колебаний величиной

$$a_0 = \frac{b}{\chi \omega^2}. \quad (32)$$

или, поставляя χ из приближенной зависимости (22),

$$a_0 = \frac{b \left(\frac{\omega^2}{\lambda^2} - 1 \right)}{\omega^2 \sqrt{1 + \gamma^2 \left(\frac{\omega}{\lambda} \right)^4}} = \frac{b}{\lambda^2} \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^2}{\sqrt{1 + \gamma^2 \left(\frac{\omega}{\lambda} \right)^4}}. \quad (33)$$

Обозначив для простоты через κ величину

$$\kappa = \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{\omega} \right)^2}{\sqrt{1 + \gamma^2 \left(\frac{\omega}{\lambda} \right)^4}}, \quad (34)$$

можно переписать формулу (33) в форме равенства

$$a_0 = \frac{b}{\lambda^2} \kappa. \quad (35)$$

Входящая в эту формулу величина κ является функцией только от отношения $\omega : \lambda$ и от γ . Значения ее, соответствующие случаю, когда $\gamma = 0,1$, собраны в табл. 3.

Опыт показывает, что различные корабельные приборы способны выдержать ограниченное число раз колебания, амплитуда ускорений коих достигает 30—50 г и более.

В табл. 4 собраны значения величин a_0 , соответствующие случаю, когда $b = 40 \text{ г}$; $\lambda = 300 \text{ 1/сек}$.

В табл. 5 — соответствующие случаю, когда

$$\delta = 40 \text{ г}; \lambda = 125 \text{ 1/сек.}$$

В этих таблицах параллельно со значениями амплитуды a_0 колебаний корпуса в месте установки прибора приведем соответствующие этим колебаниям ускорения b_0 , выраженные в долях от g , а также периоды соответствующих колебаний в миллисекундах, за исключением табл. 3. Полученные результаты иллюстрируются кривыми рис. 4, на котором по оси абсцисс отложены значения ω , на ось же ординат значения χ и a_0 , а также b_0 ; g , причем пунктирные кривые соответствуют значению $\lambda = 125 \text{ 1/сек.}$; сплошные — значению $\lambda = 300 \text{ 1/сек.}$

Точными сведениями об ускорениях и периодах тех местных колебаний, которые могут наблюдаться у отдельных корабельных конструкций в боевых условиях, мы пока не располагаем. Небольшое количество наблюдений, сделанных для установления соответствующих цифр, показывает, что величина b_0 может превышать в сотнях и даже тысячах g , при периоде колебаний T от 0,8 до 10 м/сек, т. е. достигает величин того самого порядка, что и приведенные в табл. 4 и 5.

Как видно из таблиц, возникшие частоты настройки амортизатора с $\lambda = 300 \text{ 1/сек}$ до $\lambda = 125 \text{ 1/сек}$ позволяет почти вдвое увеличить период тех колебаний, которые могут быть безопасно для амортизированного прибора допущены в местах крепления приборов к корпусу корабля. Однако при вибростойкости прибора, соответствующей значению $b = 40 \text{ г}$ и настройке амортизаторного подвеса на частоту $\lambda = 125 \text{ 1/сек}$ амплитуда a_0 соответствующих местных колебаний корабля получаются настолько большими, что при такой настройке подвеса величину допустимых местных колебаний корабля, безопасно выдерживаемых амортизированным прибором, следует считать практически ограниченной не вибростойкостью приборов, подлежащих амортизации, а величиной максимально осуществимого свободного хода амортизированного прибора. Наоборот, при настройке амортизаторных подвесов на частоту $\lambda = 300 \text{ 1/сек}$ амплитуды a_0 местных колебаний, которые могут быть допущены в местах крепления амортизированных приборов к корпусу корабля, получаются при $\delta = 40 \text{ г}$ настолько умеренными, что величина их должна считаться практически ограниченной не максимальной достижимой величиной свободного хода прибора, а вибростойкостью b прибора, подлежащего амортизации.

Поэтому вибростойкость корабельных приборов, измеряемая ускорением b тех колебаний, которые можно безопасно передать прибору при сотрясениях корпуса корабля, характерных для боевых условий, должна быть отнесена к числу основных характеристик всей корабельной аппаратуры и определяется для каждого типа приборов при их испытаниях.

Особенно это относится к приборам, устанавливаемым на кораблях, на которых амортизаторные подвесы нельзя konstruirовать из частоты меньше чем $\lambda = 300 \text{ 1/сек}$. Но и при $\lambda = 125 \text{ 1/сек}$ далеко не безразлично, будет ли рассматриваемый прибор способен выдерживать в результате местных сотрясений корпуса корабля колебания порядка 40 g или порядка 10 g .

Если в первом случае, т. е. при настройке на $\lambda = 125 \text{ 1/сек.}$, допустимую величину местных сотрясений корпуса корабля в месте установки амортизированного прибора еще и можно считать практически ограниченной не столько вибростойкостью прибора, сколько свободным ходом амортизатора, то во втором случае, т. е. при настройке на $\lambda = 300 \text{ 1/сек.}$, величина этих сотрясений будет ограничена именно вибростойкостью рассматриваемого прибора, ибо свободный ход амортизатора можно сделать большим, чем величина тех колебаний, которые могут быть допущены у корабля в месте установки прибора даже при вибростойкости прибора порядка $b = 40 \text{ г}$.

§ 6. Методика испытания корабельной аппаратуры на вибростойкость при сотрясениях корпуса корабля

При испытании корабельных приборов на вибростойкость в отношении тех сотрясений, которые могут быть в боевых условиях, целесообразно подвергать приборы сотрясениям по возможности того самого характера, какого можно ожидать у них в боевой обстановке. Общий же характер последних можно охарактеризовать так: место установки прибора получает в результате воздействия на соответствующую конструкцию какого-то кратковременного импульса некоторую начальную скорость, под влиянием которой и совершает в течение некоторого времени свободные колебания, пока последние не затухают под действием имеющихся в конструкции внутренних сопротивлений. Этого рода колебания на одна корабельная конструкция, не попадающая в сферу действия дудных газов собственной артиллерии, не может, судя по всему, подвергаться в бою больше, чем 10—20 раз. Поэтому подвергать такого рода вибрационным ударным нагрузкам испытываемые приборы следует не больше чем 30 раз. Исключение может быть сделано в этом отношении лишь для головных приборов каждой серии, для которых число нагрузок целесообразно поднять до 50, чтобы иметь уверенность в надлежащем запасе вибростойкости приборов данного типа.

Осуществить соответствующую вибрационную установку можно следующим образом.

Испытуемый прибор закрепляется жестко (без установки на какие-либо амортизаторы), (см. рис. 5), к металлическому листу, жесткость которого подбирается таким образом, чтобы период свободных упругих колебаний прибора, к нему закрепленного, лежал в пределах от 1 до 5 м/сек. Главные размеры листа подбираются при

этом так, чтобы он мог выдерживать колебания, амплитуда ускорений которых достигает около 100 g.

По тыльной стороне листа маятниковым копром производится удар такой силы, чтобы закрепленный к листу прибор получил под действием удара колебания, амплитуда ускорений которых достигает требуемой величины. Для этого сила ударов копра соответствующим образом предварительно тарируется.

Так как амплитуда колебаний, получаемых прибором под действием удара определенной силы, зависит при заданной конструкции листа не столько от конструкции прибора, сколько от его общего веса, то упомянутая предварительная тарировка силы ударов копра производится путем ударов по листу, к которому прикреплен не сам испытуемый прибор, а всего лишь болванка, весом равная весу испытуемого прибора. При этом высота падения болвы копра постепенно увеличивается, причем каждый раз с повышением соответствующих регистрирующих приспособлений записываются упругие колебания болванки, заменяющей собой прибор, подлежащий испытанию.

В результате предварительных опытов установка получает паспорт, в котором приводятся кривые, дающие для приборов различного веса функциональную зависимость амплитуды ускорений собственных их колебаний от высоты падения болвы копра.

Паспортизации производится заводом-строителем приборов совместно с какой-либо достаточно квалифицированной научно-исследовательской организацией и периодически, примерно в шесть месяцев раз, повторяется в целях проверки неизменности соответствующих ее характеристик.

Испытание головных образцов приборов каждого типа состоит в определении величины тех ускорений, которые могут выдержать приборы данного типа в условиях описанных выше упругих колебаний на копрном стенде. Для этого листу, с закрепленным на нем прибором, копром сообщаются несколько раз подряд одинаковые удары, сообщаемые прибору колебания с ускорением около 5 g; затем 10 g; 15g; 20 g и т. д. После каждой серии таких ударов прибор тщательно осматривают, причем при первых признаках повреждения его деталей поднимается вопрос о том, можно ли в дальнейшем путем переоборудования соответствующей детали прибора поднять его вибростойкость, или же получаемую ею вибростойкость увеличить более нельзя. Все получаемые прибором повреждения каждый раз при этом устраняются.

Когда предельная вибростойкость для приборов данного типа установлена, устанавливаются какой силой ударом можно подвигать серийные приборы без риска их повредить в результате опыта. Как правило, подвигать серийные приборы следует раз 20 подряд ударам в 1,5 раза меньшей силы, чем максимальный удар, выдерживаемый головным образцом данной серии. Соответствующее ударом ускорение колебаний прибором δ и принимается за характеристику вибростойкости приборов соответствующего типа и серии и кладется в основу всех подсчетов, связанных с разработкой для данного типа приборов амортизационных подвесов.

§ 7. Определение основных элементов упругих плит копрных стендов

Произведем ориентировочный подсчет основных элементов того устройства, которое может служить для производства испытаний описанного в предыдущем параграфе типа.

- Пусть P — максимальный вес прибора, подлежащего испытанию на данной установке;
 T — период собственных колебаний, которые он должен иметь, будучи прикреплен к рассчитываемой металлической доске;
 λ — крутизна частота этих колебаний;
 δ — максимальное значение амплитуды ускорений соответствующего колебательного движения;
 a — амплитуда тех колебаний, при которых получается это ускорение;
 g — ускорение силы тяжести;
 L — пролет доски, к которой крепится прибор;
 B — ширина доски, к которой крепится прибор;
 A — толщина доски, к которой крепится прибор;
 EJ — жесткость ее сечения по отношению к изгибу;
 W — момент сопротивления этого сечения;
 $Q = \frac{\delta P}{g}$ — максимальная нагрузка на доску стенда максимума впадины прибора;
 σ — соответствующее этой нагрузке напряжение в плите.

Допустим, что если рассматриваемой доске свободно открыты на несмещающиеся опоры, прибор же прикреплен к доске в середине ее пролета, можно легко видеть, что:

1) λ связано с T зависимостью

$$\lambda = \frac{2\pi}{T}; \quad (1)$$

2) В связи с а равенством

$$b = a \lambda^2,$$

так что

$$a = \frac{b}{\lambda^2}; \quad (2)$$

3) максимальный прогиб доски а связан с максимальной на нее нагрузкой Q равенством

$$a = \frac{1}{48} \frac{Q L^3}{E J}; \quad (3)$$

4) соответствующим этому прогибу напряжению суть

$$\sigma = \frac{1}{8} \frac{Q L}{W}; \quad (4)$$

5) величины J и W выражаются через толщину и ширину поперечного сечения доски равенствами

$$J = \frac{1}{12} b^3 B; \quad (5)$$

$$W = \frac{1}{6} b^2 B; \quad (6)$$

Поделив равенства (3) и (4) почленно друг из друга, можно видеть, что

$$\frac{a}{\sigma} = \frac{1}{6} \frac{L^2 W}{E J}; \quad (7)$$

так что а ввиду (5) и (6)

$$3 \frac{E}{\sigma} a b = L^2. \quad (8)$$

С другой стороны из формул (4) и (6) следует, что

$$\sigma = \frac{8}{3} \frac{b}{B} \frac{P L}{W B} \quad (9)$$

или, что то же

$$L = \frac{8}{3} \frac{B}{b} \frac{\sigma}{P} B M, \quad (10)$$

так что, исключив L из (8) с помощью (10), получим

$$\left(\frac{8}{3} \frac{B}{b} \right)^2 \left(\frac{\sigma}{P} \right)^2 M^2 B^2 = 3 \frac{E}{\sigma} a b, \quad (11)$$

или, что то же

$$B^2 = 3 \frac{E}{\sigma} \frac{a}{M} \left(\frac{0,75 b}{P} \right)^2 \left(\frac{P}{\sigma} \right)^2. \quad (12)$$

т. е.

$$B = \sqrt{3 \frac{E a}{\sigma} \frac{0,75 b}{P} \frac{P}{\sigma} \frac{P}{E b}}. \quad (13)$$

Определив λ с помощью равенств (1), а по нему а с помощью (2), можно, задавшись какой-либо допустимой напряженностью σ, и рядом частных значений толщины доски b, определить по заданным b и P значения B, соответствующие каждому частному значению λ и, остановившись на подходящей комбинации величин B и λ, определить по формуле (8) величину L.

Пусть для примера

$$\begin{aligned} P &= 30 \text{ кг;} \\ \sigma &= 1000 \text{ атм;} \\ P &= 5 \cdot 10^{-4} \text{ сек;} \\ b &= 100 \text{ г.} \end{aligned}$$

Тогда по формуле (1)

$$\lambda = \frac{2\pi}{b} 10^3 = 1250 \sqrt{\text{сек.}}; \quad (14)$$

по формуле (2):

$$a = \frac{100 \text{ г}}{\lambda^2} = \frac{100 \cdot 10^6}{(1,25)^2 10^8} = 0,64 \text{ мм}; \quad (15)$$

по формуле же (13):

$$B = \sqrt{3 \frac{E \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot a}{10^6} \frac{0,75 \cdot 100 \text{ г}}{\text{г}} \frac{30}{1000 \text{ г}}}. \quad (16)$$

где b под радикалом должно быть выражено в тех же мерах, что и a, а вне радикала в см, если B желательнее получить также в см.

Так как формула (16) равносильна зависимости

$$B = \sqrt{6000} \sqrt{\frac{a}{b}} = 75 \frac{30}{1000} \frac{1}{b} = 174 \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{1}{\text{г}}. \quad (17)$$

то задавшись для b значениями 5; 10; 15; 20 и 25 мм будем иметь для B значения, собранные в табл. 6.

Примем b = 15 мм, тогда по формуле (17) будет

$$B = 24 \text{ см.}$$

По формуле же (8)

$$L^2 = 3 \frac{2 \cdot 10^6}{1000} 0,064 \cdot 1,5 = 575 \text{ см}^2$$

и, следовательно,

$$L = 24 \text{ см.}$$

Таким образом, основные размеры доски для крепления измерительного прибора могут быть ориентировочно замечены так:

$$\text{ширина } B = 24 \text{ см,}$$

$$\text{длина } L = 24 \text{ см,}$$

$$\text{толщина } A = 1,5 \text{ см.}$$

Если бы мы задались для σ значением

$$\sigma = 500 \text{ атм,}$$

то при той же ширине доски

$$B = 24 \text{ см}$$

формула (16) дала бы для k

$$k = 3,0 \text{ см,}$$

формула же (8) для L

$$L = \sqrt{2500} = 48 \text{ см.}$$

На полученные цифры надо смотреть как на грубо ориентировочные, ибо исходные допущения всего расчета, а именно допущение о том, что концы плиты будут свободно оперты на жесткие опоры, а прибор укреплен к середине плиты, являются грубо

Таблица 6

$A, \text{ мм}$	$\sqrt{a \cdot k}$	$174 \sqrt{a \cdot k}$	$B, \text{ см}$
5	$\frac{1}{2,4}$	6,9	124
10	$\frac{1}{3,95}$	4,5	45
15	$\frac{1}{4,85}$	3,6	24
20	$\frac{1}{5,60}$	3,1	15,5
25	$\frac{1}{6,25}$	2,8	12,2

ориентировочными. К тому же мы пренебрегли еще собственным весом плиты. Влияние его можно приблизительно учесть путем прибавления к формуле (9) к весу прибора P половинку собственного веса доски. Размеры плиты, даваемые приведенным выше расчетом, необходимо уточнить в процессе испытания опытного образца стэнда. Порядок полученных цифр свидетельствует

о полной осуществимости того задания на постройку измерительного стэнда, которое мы себе поставили.

Чтобы заметить все основные размеры этого стэнда остается заметить ориентировочную массу копра M_1 и высоту падения его бойки. К рассмотрению данного вопроса мы обратимся.

§ 8. Определение основных элементов копра, передающих плите стэнда свой удар через пружины, на высоте начального поджатия

Если мы будем ударять копром непосредственно в упругую плиту измерительного стэнда, то в момент непосредственного удара копра сообщенные прибору ускорения могут оказаться значительно превышающими их расчетную величину b . Для смягчения удара копра желательно передавать плите стэнда, на которую повешен измерительный прибор, удар копра не непосредственно, а через посредство пружины, надлежащим образом подобранной жесткостью.

Если установить между массой копра M_1 и массой прибора M такую пружину, то во все время соприкосновения копра с пружиной, рассматриваемое устройство будет колебаться как упругая система (рис. 6), т. е. как движущаяся две упруго соединенные между собой массы, из коих одна, а именно масса M , прикреплена упруго к внешнему неподвижному пространству и в начальный момент находится в покое, вторая же, т. е. масса M_1 , к верхней среде не прикреплена и в начальный момент движется по направлению к массе M со скоростью v . Упругая связь между массами M и M_1 предполагается неупругивающей, так что взаимодействие обеих масс имеет место лишь до тех пор, пока пружина, соединяющая их, сжата. Начиная с того момента времени, когда усилие, сжимающее эту пружину первый раз обращается в нуль, взаимодействие обеих масс прекращается.

Масса M , т. е. масса испытываемого прибора совершает после этого упругие колебания под влиянием одной лишь своей связи с внешней неподвижной средой, масса же M_1 , т. е. масса копра, подлетает в обратном направлении на некоторую высоту, подхватывается соответствующими захватами, удерживающими ее от дальнейшего нового удара по стэнду до тех пор, пока колебания испытываемого прибора не затухнут до нуля.

Для того, чтобы определить величину тех ускорений, которые испытывает прикрепленный к стэнду прибор в момент сообщения ему начальной скорости движения, составим дифференциальные уравнения движения механической системы, изображенной на рис. 6.



Рис. 6.

Пусть x — перемещение массы M по направлению вправо от положения ее нейтрального равновесия;
 x_1 — такое же перемещение массы M_1 , отсчитываемое от того положения этой массы, которое соответствует первому приближению ее с пружиной, через которую масса выедает свой удар стену;
 N — жесткость упругой связи, соединяющей массу M с внешней средой;
 N_1 — жесткость упругой связи между массами M и M_1 .

Тогда уравнение движения массы M_1 пишется в форме

$$M_1 \ddot{x}_1 = N_1 (x - x_1), \quad (1)$$

уравнение же движения массы M будет иметь вид

$$M \ddot{x} = N_1 (x_1 - x) - N x. \quad (2)$$

Начальные условия движения системы будут при этом заданы так:

$$\left. \begin{aligned} x = 0; \quad \dot{x} = 0; \\ x_1 = 0; \quad \dot{x}_1 = v. \end{aligned} \right\} \text{ при } t = 0. \quad (3)$$

Для разыскания решения уравнения (1), (2), удовлетворяющего начальным условиям (3), введем в рассмотрение главные координаты p_k последующей системы подстановки:

$$\left. \begin{aligned} x = p_1 + p_2; \\ x_1 = v_1 p_1 + v_2 p_2. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

для разыскания коэффициентов v_k которой воспользуемся методом частных решений, чтобы равенство:

$$\left. \begin{aligned} x = A_k \cos(\lambda_k t + \epsilon_k) \\ x_1 = v_k A_k \cos(\lambda_k t + \epsilon_k) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

давали одно из таких решений, λ_k и v_k должны быть определенными из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (N_1 - M_1 \lambda_k^2) v_k - N_1 = 0; \\ -N_1 v_k + (N + N_1 - M \lambda_k^2) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Последние совместны лишь в том случае, если λ_k^2 есть один из корней уравнения

$$(N + N_1 - M \lambda_k^2)(N_1 - M_1 \lambda_k^2) - N_1^2 = 0. \quad (7)$$

которому с помощью обозначений

$$\left. \begin{aligned} \eta_1^2 &= \frac{N + N_1}{M}, \\ \eta_2^2 &= \frac{N_1}{M_1}, \\ \eta &= \frac{N_1}{N + N_1} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

легко придать вид $N + N_1$

$$(\eta_1^2 - \lambda_k^2)(\eta_2^2 - \lambda_k^2) - \eta \eta_1^2 \eta_2^2. \quad (9)$$

Частоты λ_k главных свободных колебаний системы определяются в рассматриваемом случае равенствами

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1^2 - \frac{\eta_1^2 + \eta_2^2}{2} + \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{2} (1 + 2\alpha) &= \eta_1^2 + \alpha (\eta_1^2 - \eta_2^2); \\ \lambda_2^2 - \frac{\eta_1^2 + \eta_2^2}{2} - \frac{\eta_1^2 - \eta_2^2}{2} (1 + 2\alpha) &= \eta_2^2 - \alpha (\eta_1^2 - \eta_2^2). \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где через α для простоты обозначена величина, определяемая равенством

$$1 + 2\alpha = \sqrt{1 + \eta \frac{4\eta_1^2 \eta_2^2}{(\eta_1^2 - \eta_2^2)^2}}, \quad (11)$$

или, что то же, величина

$$\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \eta \frac{4\eta_1^2 \eta_2^2}{(\eta_1^2 - \eta_2^2)^2}} - \frac{1}{2}. \quad (12)$$

Для коэффициентов v_k первое из равенств (6) дает

$$v_k = \frac{\eta_1^2}{\eta_1^2 - \lambda_k^2}, \quad (13)$$

откуда совместно с равенствами (10) следует

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{\eta_1^2}{\eta_1^2 - \eta_1^2 - \alpha (\eta_1^2 - \eta_2^2)} = -\frac{\eta_1^2}{|\eta_1^2 - \eta_2^2| (1 + \alpha)}; \\ v_2 &= \frac{\eta_2^2}{\alpha (\eta_1^2 - \eta_2^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Но, как видно из (11)

$$(1 + 2\alpha)^2 = 1 + \eta \frac{4\eta_1^2 \eta_2^2}{(\eta_1^2 - \eta_2^2)^2},$$

или, что то же

$$\frac{\eta_1^2}{\eta_1^2 - \eta_1^2} = \pm \frac{\eta_2}{\eta_1} \sqrt{\frac{(1 + 2\alpha)^2 - 1}{4\eta}} = \pm \frac{\eta_2}{\eta_1} \sqrt{\frac{(1 + \alpha)\alpha}{\eta}}. \quad (15)$$

где в правой части удерживается знак +, если $\pi_1^0 > \pi_1^*$ и знак -, если $\pi_1^0 < \pi_1^*$.

Приравняв это во внимание, видим, что если

$$\pi_1^0 > \pi_1^*, \quad (16)$$

то

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= -\frac{n_1}{n_1(1+\alpha)} \sqrt{\frac{(1+\alpha)\alpha}{\eta}} \\ v_2 &= \frac{n_2}{n_2\alpha} \sqrt{\frac{(1+\alpha)\alpha}{\eta}} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

и

если же

$$\pi_1^0 < \pi_1^*, \quad (18)$$

то

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= +\frac{n_1}{n_1(1+\alpha)} \sqrt{\frac{(1+\alpha)\alpha}{\eta}} \\ v_2 &= -\frac{n_2}{n_2\alpha} \sqrt{\frac{(1+\alpha)\alpha}{\eta}} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Если

$$\pi_1^0 > \pi_1^*$$

то, как видно из равенства (10),

$$\lambda_1^0 < \lambda_1^*$$

и более медленному из главных свободных колебаний системы соответствует, как видно из (17), положительное v_1 .

Если же

$$\pi_1^0 < \pi_1^*,$$

то согласно равенству (10),

$$\lambda_1^0 > \lambda_1^*$$

и, как видно из равенства (19), положительное v_2 соответствует опять-таки более медленному из обоих главных колебаний системы.

Таким образом, в обоих случаях, а более медленном из обоих главных колебаний рассматриваемой упругой системы массы M и M_1 движутся в одну сторону, в более же быстром — в противоположные стороны.

Надо полагать, что для смягчения удара копра полезно делать частоту π_2 меньшей, чем π_1 .

Поэтому ограничимся здесь рассмотрением только того частного случая, когда

$$\pi_1^0 > \pi_1^*$$

и тогда, следовательно,

$$\lambda_1^0 > \lambda_1^*,$$

а числа v_1 и v_2 определяются равенствами (17), а не (19).

В этом случае основным из главных свободных колебаний рассматриваемой упругой системы является колебание, соответствующее координате P_1 .

Для определения его, а также обертона, соответствующего координате P_2 , начальные условия (3) дают совместно с равенствами (4)

$$\left. \begin{aligned} P_1^0 + P_2^0 &= 0; \\ v_1 P_1^0 + v_2 P_2^0 &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\left. \begin{aligned} P_1^0 + P_2^0 &= 0; \\ v_1 P_1^0 + v_2 P_2^0 &= \kappa. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Из равенств (20) следует

$$P_1^0 = P_2^0 = 0; \quad (22)$$

из равенств же (21)

$$\left. \begin{aligned} P_1^0 &= \frac{\kappa}{v_2 - v_1}; \\ P_2^0 &= -\frac{\kappa}{v_2 - v_1}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где по сказанному выше

$$v_2 - v_1 = \frac{n_2}{n_1} \frac{1}{\eta} \left(\sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}} \right). \quad (24)$$

так что вместо (23) можно также написать

$$\left. \begin{aligned} P_1^0 &= \frac{n_1}{n_2} \kappa \sqrt{\eta} \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}}}; \\ P_2^0 &= -\frac{n_1}{n_2} \kappa \sqrt{\eta} \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}}}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Но по определению величин n_1 , n_2 и η [см. равенства (8)]

$$\frac{n_1}{n_2} \sqrt{\eta} = \sqrt{\frac{N_1 + N}{M} \frac{M_1}{N_1} \frac{N_2}{N_1 + N}} = \sqrt{\frac{M_1}{M}} \quad (26)$$

и, следовательно, равенства (25) равносильны зависимости

$$-P_1^0 = P_2^0 = \kappa \frac{\sqrt{\frac{M_1}{M}}}{\sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}} + \sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}}}. \quad (27)$$

Определяя главные координаты P_0 из начальных условий (22) и (27), получим

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= v \frac{\sqrt{\frac{M_1}{M}}}{\sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} \cdot \frac{\sin \lambda_2 t}{\lambda_2}; \\ P_2 &= -v \frac{\sqrt{\frac{M_1}{M}}}{\sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}}} \cdot \frac{\sin \lambda_1 t}{\lambda_1} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

и, следовательно, и силу (4)

$$\left. \begin{aligned} x &= \dot{p}^0 \left(\frac{\sin \lambda_2 t}{\lambda_2} - \frac{\sin \lambda_1 t}{\lambda_1} \right); \\ \dot{x}_1 &= \dot{p}^0 \left(\nu_2 \frac{\sin \lambda_2 t}{\lambda_2} - \nu_1 \frac{\sin \lambda_1 t}{\lambda_1} \right), \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

где λ_1 и λ_2 определяются равенствами (10), а ν_1 , ν_2 , P_0 по выражениям (17), (26), (28)

$$\left. \begin{aligned} \nu_2 &= \sqrt{\frac{M}{M_1}} \sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}}; \\ \nu_1 &= \sqrt{\frac{M}{M_1}} \sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}}; \\ \dot{p}^0 &= v \frac{\sqrt{\frac{M_1}{M}}}{\sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Равенствами (29), (30), (31) и (12) движение рассматриваемой системы определяется до тех пор, пока величина

$$x_1 - x = \dot{p}^0 \left[(\nu_2 - 1) \frac{\sin \lambda_2 t}{\lambda_2} - (\nu_1 - 1) \frac{\sin \lambda_1 t}{\lambda_1} \right] \quad (32)$$

остается больше нуля. Начиная с того момента времени $t = t_0$, когда первый раз при t больше, чем нуль, удовлетворяется равенство

$$\dot{x}_1 - \dot{x} = \dot{p}^0 \left[(\nu_2 - 1) \frac{\sin \lambda_2 t_0}{\lambda_2} - (\nu_1 - 1) \frac{\sin \lambda_1 t_0}{\lambda_1} \right] = 0, \quad (33)$$

движение обеих масс разделяется, и масса M продолжает свое движение уже по закону

$$x = \alpha^0 \cos \omega_1 (t - t_0) + \dot{x}^0 \frac{\sin \omega_1 (t - t_0)}{\omega_1}, \quad (34)$$

где α^0 — перемещение, а \dot{x}^0 — скорость, приобретенные массой M к моменту, когда первый раз удовлетворяется равенство

$$\frac{\nu_2 - 1}{\lambda_2} \sin \lambda_2 t_0 - \frac{\nu_1 - 1}{\lambda_1} \sin \lambda_1 t_0 = 0 \quad (35)$$

прям, как видно из (29).

$$\left. \begin{aligned} x^0 &= \dot{p}^0 \left(\frac{\sin \lambda_2 t_0}{\lambda_2} - \frac{\sin \lambda_1 t_0}{\lambda_1} \right); \\ \dot{x}^0 &= \dot{p}^0 (\nu_2 \lambda_2 t_0 - \nu_1 \lambda_1 t_0). \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Чтобы амплитуда колебаний массы M в эту вторую стадию движения ее была заданной величиной, скажем α , необходимо определить начальную скорость копра из уравнения

$$\dot{p}^0 \left[\left(\frac{\sin \lambda_2 t_0}{\lambda_2} - \frac{\sin \lambda_1 t_0}{\lambda_1} \right)^2 + \left(\frac{\cos \lambda_2 t_0}{\nu_2} - \frac{\cos \lambda_1 t_0}{\nu_1} \right)^2 \right] = \alpha. \quad (37)$$

т. е. положить скорость V равной величине, определяемой равенством

$$v = \alpha \frac{\sqrt{\frac{M}{M_1}} \left[\sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}} + \sqrt{\frac{\alpha}{1+\alpha}} \right]}{1}, \quad (38)$$

где через α обозначена величина, определяемая равенством

$$\alpha = \frac{1}{\left[\left(\frac{\sin \lambda_2 t_0}{\lambda_2} - \frac{\sin \lambda_1 t_0}{\lambda_1} \right)^2 + \left(\frac{\cos \lambda_2 t_0}{\nu_2} - \frac{\cos \lambda_1 t_0}{\nu_1} \right)^2 \right]}. \quad (39)$$

Как видно из полученных зависимостей, требуемая скорость удара копра зависит при заданных значениях массы испытываемого прибора M и жесткости испытательного сленда N не только от массы копра M_1 , но еще и от жесткости N_1 той пружины, через которую копир передает свой удар испытательному сленду. Этими двумя параметрами следует распорядиться так, чтобы максимальное ускорение массы во время сообщения ей копром начальной скорости движения, т. е. максимальное значение величины

$$\ddot{x} = \dot{p}^0 (\lambda_2 \cos \lambda_2 t - \lambda_1 \cos \lambda_1 t), \quad (40)$$

соответствующее различным значениям t , меньше чем λ_2 , не превосходило по возможности величины

$$\bar{b} = \alpha \omega_1^2 \quad (41)$$

амплитуды ускорения тех колебаний, которые масса M должна совершить после окончания ее взаимодействия с копром.

Так как жесткость сленда N , а равно и приведенная масса испытываемого прибора не могут быть определены точно, то на зависимости настоящего параграфа нельзя смотреть как на такие,

которые позволяют установить начальную скорость копра с такой точностью, чтобы подняв копер перед ударом, на высоту

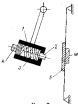
$$H = \frac{v^2}{2g},$$

можно было быть уверенным, что после окончания удара испытуемый прибор будет совершать колебания той самой амплитуды, которую желательно дать прибору.

Поэтому использование при проектировании копра зависимостей, приведенных выше, не освобождает от необходимости экспериментального определения амплитуды и частоты колебаний, полученных прибором в результате удара копра и доски стенда. Зависимости эти полезны лишь в том отношении, что они позволяют при проектировании копра правильно наметить как наименьшую массу копра, так и жесткость M_1 пружины, передающей удар копра на испытательный стенд, а также ориентировочную высоту необходимого подъема копра, т. е. запроектировать копер так, чтобы он был способен оказывать на испытуемый прибор требуемое действие. Прогрдуировать же высоту подъема копра необходимо после его постройки экспериментально.

§ 8. Определение основных элементов копров с начальной натяжением пружины

В предыдущем параграфе рассмотрен случай, когда пружина, через которую доска стенда получает удар копра, не имеет начального поджатия. Рассмотрим теперь другую, вернее прямо противоположный предельный случай, когда начальное поджатие настолько велико, что удар копра передается доске стенда практически при постоянном поджатии пружины. Осуществить такую передачу удара копра испытуемому стенду можно, например, с помощью устройства, изображенного на рис. 7.



Баба копра 1 выполняется пустотелой. В передней ее стенке, обращенной к доске стенда 5, делается отверстие, в которое заводится боек 2, прижимный пружинкой 3 к внутренней стенке бабы копра. Для сообщения пружине начальной поджатия служат пробка 4, надетая на конец в заднюю часть бабы. Пружина делается настолько эластичной и ей сообщается столь большое начальное поджатие, чтобы при тех сдвиганиях бойка к бабу, которых можно ожидать во время работы копра, натяжение

этой пружины не зависело от того, насколько сдвигается боек в бабу.

Устройство этого типа рационально в том отношении, что им обеспечивается независимость давления R копра на доску испытательного стенда во все время передачи последней удара копра. Независимость же этого давления позволяет сообщить массе M испытуемого прибора требуемую начальную скорость движения при минимальном значении давления R .

Последнее, очевидно, целесообразно подбирать так, чтобы ускорение массы M во все время удара, сообщаемое ей копром, не превосходило амплитуды b ускорения ее во время дальнейшего колебательного движения стенда.

К тому же и теория удара копра получается, как то сейчас мы увидим, при данном устройстве его значительно более простой, чем теория, рассмотренная в предыдущем параграфе.

Пусть, как и в § 6:

M — масса испытуемого прибора;

M_1 — масса бабы копра;

x — перемещение массы M } отсчитываемые так же,

x_1 — перемещение массы M_1 } как и в § 8;

v — начальная скорость бабы в момент соприкосновения копра с доской стенда;

a — амплитуда колебаний, которые копер должен вызвать у массы M ;

b — амплитуда ускорений, соответствующих этим колебаниям массы M ;

N — жесткость испытательного стенда.

Пусть далее,

n — круговая частота собственных свободных колебаний корпуса испытуемого прибора, вызванных ударом копра;

T — период этих колебаний;

R — давление копра на доску стенда;

v_0 — начальная скорость обратного движения бабы копра.

Величины b , a , n и T связаны между собой зависимостями

$$b = an^2 \quad (1)$$

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad (2)$$

так, что зная амплитуду b ускорений, а также период T того колебательного движения, которое необходимо вызвать у массы M , можно круговую частоту и колебательного движения определить по формуле (2), после чего амплитуда a движения определяется, как и в § 7 и 8, из формулы (1).

Чтобы во время передачи массы M удара копра ее ускорение не превосходило величины b , отрегулируем пружины копра так, чтобы было

$$E = M b. \quad (3)$$

Так как усилие это в данном случае от перемещений x и x_1 не зависит, то во время передачи копром своего удара стенду, перемещения x и x_1 будут определяться уравнениями

$$M \ddot{x} + N x = E, \quad (4)$$

$$M_1 \ddot{x}_1 = -E, \quad (5)$$

где E — константа, определенная равенством (3).

Интегрируя уравнения (4) и (5), получаем

$$x = \frac{E}{N} (1 - \cos nt) = \frac{b}{n^2} (1 - \cos nt), \quad (6)$$

где

$$n^2 = \frac{N}{M} \quad (7)$$

и

$$x_1 = vt - \frac{E}{M_1} t. \quad (8)$$

что дает для обжатия пружины копра

$$x_1 - x = vt - \frac{E}{M_1} t - \frac{b}{n^2} (1 - \cos nt). \quad (9)$$

Выражением (9) обжатие пружины определяется вплоть до того момента, пока не нарушится неравенство

$$x_1 > x. \quad (10)$$

Поэтому тот момент времени, когда копр, сообразив удар стенду отделяется от последнего (пусть в этот момент времени $t = t_0$), может быть определен из уравнения

$$vt_0 - \frac{M}{M_1} \frac{b}{2} - a (1 - \cos nt_0) = 0. \quad (11)$$

Желая, чтобы в этот момент времени бега копра обладали скоростью обратного движения v_0 , мы должны, очевидно, подобрать размеры копра так, чтобы было

$$x_1 = -v_0 \quad \text{при} \quad t = t_0 \quad (12)$$

т. е., чтобы было

$$v - \frac{M}{M_1} b t_0 = -v_0. \quad (13)$$

Для этого должно быть

$$M_1 = M \frac{b t_0}{v + v_0}. \quad (14)$$

Что касается t_0 , то оно должно быть подобрано так, чтобы после отделения копра от стенды масса M совершала колебания, амплитуда яких есть a . Так как, однако, к началу этой стадии движения массы M согласно равенству (6)

$$\left. \begin{aligned} x &= a (1 - \cos n t_0), \\ \dot{x} &= na \sin n t_0, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

то во вторую стадию движения этой массы

$$x = a (1 - \cos n t_0) \cos n (t - t_0) + a \sin n t_0 \sin n (t - t_0). \quad (16)$$

Амплитуда колебания, определяемого равенством (16), определяется радикалом

$$\sqrt{a^2 (1 - \cos n t_0)^2 + a^2 \sin^2 n t_0}$$

Чтобы этот радикал был равен требуемому значению амплитуды колебаний массы M , т. е. величине a , следует положить

$$a \sqrt{1 - 2 \cos n t_0 + \cos^2 n t_0 + \sin^2 n t_0} = a, \quad (17)$$

или, что то же

$$2 - 2 \cos n t_0 = 1, \quad (18)$$

т. е.

$$\cos n t_0 = \frac{1}{2}. \quad (19)$$

Из равенства (19) следует

$$n t_0 = \frac{2\pi}{6}, \quad (20)$$

т. е.

$$t_0 = \frac{2\pi}{6n} = \frac{T}{6}. \quad (21)$$

что по подстановке в равенство (14) дает

$$M_1 = M \frac{b T}{v (v + v_0)}. \quad (22)$$

Равенство (22) позволяет определить массу копра M_1 по заданным M , b , T , v и v_0 .

Величина v не может быть выбрана произвольной. Ее нужно подобрать так, чтобы при M_1 , определенном равенством (22),

$f_0 = \frac{T}{6}$ удовлетворяло уравнению (11). Для этого необходимо сделать

$$v = v_1 + \frac{a}{(2\pi)^2} b T v_1 + 0,15 b T. \quad (23)$$

Определив v из равенства (23), можно найти M_2 из (22).

Величины M , b , T и v_1 можно выбрать по желанию.

Таким образом в этом случае все элементы копра определяются действительно весьма просто, и во всяком случае значительно проще, чем в случае, рассмотренном в предыдущем параграфе.

Копер, спроектированный по приведенным выше зависимостям, нужно все же протарировать экспериментально, чтобы проверить основные предположения этого сделанного расчета.

§ 10. Резюме

Подводя итог сказанному, следует признать, что все корабельную аппаратуру рационально подвергать трясочного рода вибрационным испытаниям.

1. Испытания на исправность действия при ходовой вибрации. Испытание это должно производиться на вибрационных машинах, как описано в § 2.

2. Испытания на вибростойкость при ходовой вибрации. Это испытание должно также выполняться на вибрационных машинах и должно производиться при одном из режимов, соответствующих сплошной кривой рис. 1, как описано в § 3.

3. Испытания на вибростойкость при боевых сотрясениях корабля. Это испытание следует производить ударными копрами на вибростендах, описанных в § 6. Определять основные элементы этих вибростендов можно с помощью зависимостей § 7—9.

Соответствующие вибростенды и вибромашины должны быть на каждом заводе-производителе соответствующей корабельной аппаратуры.

Проверка конструкции амортизаторов, с помощью которых вся эта аппаратура крепится к корпусу корабля, должна производиться на вибростенде, по типу, описанному в § 6, но несколько прочнее и снабженная столь мощным копром, чтобы на этом вибростенде можно было воспроизводить те мощные сотрясения, которые может иметь корпус корабля в боевых условиях. Материальные копры для этой цели, как показали подсчеты, не годятся, так как их мощность недостаточна. Поэтому колебания вибростенда, предназначенного для проверки конструкции корабельных виброамортизаторов, приходится вызывать с помощью ударов по нему сваривом, выбрасываемых пневматической пушкой.

Этого рода испытаниям достаточно подвергать лишь типовые экземпляры виброамортизаторов для приборов каждого отдель-

ного типа и серии. Целью их должны быть, помимо проверки правильности выбора основных элементов соответствующего амортизатора (т. е. практически его жесткости), еще определение ускорений тех колебаний, которые может выдержать в боевых условиях амортизируемый прибор. Благодаря этому, а также относительной сложности устройства этого рода копров, заводить такие копры на каждом заводе-производителе корабельной аппаратуры нет необходимости. Такой копрер достаточно иметь в одном из центральных учреждений, занимающихся изучением корабельной вибрации и показывать мер борьбы с ней.

Нормальная конструкция корабельных виброамортизаторов должна быть такой, чтобы частота собственных главных свободных колебаний прибора, установленного на амортизаторе, была в направлении, перпендикулярном к плоскости, к которой крепится прибор, близка к 300 колебаний в минуту, т. е. чтобы период этих колебаний был близок к

$$\frac{60}{300} = \frac{1}{50} \text{ сек} = 20 \text{ мсек.}$$

Приборы, предназначенные для установки только на броненосных кораблях, у которых сотрясения могут быть в более-особенно резком, числе же оборотов гребных валов, как правило, не превосходят 300 в минуту, желательно крепить к корпусу корабля несколько мягче. Период собственных колебаний амортизируемого прибора в этом случае не следует делать больше 40 мсек. Наиболее близко следует подходить к последней цифре зависит от вибростойкости рассматриваемого прибора в отношении восприятия больших сотрясаний корабля, характеризующей ускорением, обозначенным в § 6 через b .

В направлении, параллельном той плоскости, к которой крепится прибор при установке его на корабль, амортизаторы могут обладать несколько большей жесткостью подвеса, ибо сотрясения корпуса корабля в этих направлениях являются всегда несколько более или менее резкими, чем в направлении, перпендикулярном к упомянутой плоскости.

Уменьшать соответствующие периоды колебаний больше, чем до 12 и 15 мсек на легких бронированных и небронированных кораблях и соответственно более, чем до 25—30 мсек на тяжелых кораблях с числом оборотов не свыше 300 в минуту, по-видимому, все же не следует.

§ 11. Рациональные методы испытания виброамортизаторов

Проверка на вибростенде правильности конструкции головного амортизатора для каждого отдельного типа приборов, следует зафиксировать в порядке утверждения технических проектов соответствующей аппаратуры технические условия на приемку виброамортизаторов для прибора этого типа и серии.

В технических условиях на приемку достаточно указать периоды главных свободных колебаний прибора во всех трех основных взаимно перпендикулярных направлениях, или, что практически то же, ту статическую жесткость, которой должен обладать виброамортизатор данного прибора при приложении к корпусу прибора статических нагрузок во всех трех главных направлениях.

При приеме сериальных образцов виброамортизаторов можно довольствоваться проверкой именно их статической жесткости в трех главных направлениях, а равно и величины свободного хода установленного на амортизатор прибора до встречи последнего с жесткими частями конструкции, т. е. до выхода амортизатора из действия.

Величина свободного хода является для всякого виброамортизатора не менее важной характеристикой, чем величина статической жесткости в соответствующем направлении. Она должна фиксироваться в порядке утверждения технических проектов на соответствующие приборы и проверяться при испытаниях виброамортизаторов. Проверка должна отнесаться к актам на приемку амортизаторов. Можно заменить приемку виброамортизаторов по статической жесткости и свободному ходу приемкой по периодам соответствующих свободных колебаний и свободному ходу, но эти испытания сложнее.

При приеме по статической жесткости и свободному ходу можно вместо прибора устанавливать на испытательные виброамортизаторы болванки того же веса с таким же расположением центра тяжести, что и у амортизируемого прибора. Во втором случае, т. е. при приеме по свободному ходу и периодам свободных колебаний прибора при испытаниях виброамортизаторов можно заменить болванками того же веса с тем же расположением центра тяжести и того же момента инерции, что и испытываемый прибор, соответствующий же испытательный стенд надо оборудовать устройством для записи периода свободных колебаний исследуемой конструкции, а не простыми лишь устройствами для замера статических перемещений прибора под нагрузкой.

§ 12. Различные типы колебаний твердых тел, установленных на амортизационных подвесах. Определение коэффициентов жесткости подвесов для различных перемещений тела

До сих пор мы рассматривали амортизируемый прибор, как материальную точку, упруго подвешенную к кораблю. В большинстве случаев при определении жесткости амортизаторов жесткими штифами амортизируемого прибора действительно можно пренебрегать. Могут все же представляться такие случаи, когда вращательные движения прибора окажутся не пренебрежимо малыми, и тогда, следовательно, их влиянием на частоту

свободных колебаний амортизируемого тела пренебречь будет нельзя.

Целесообразно поэтому, хотя бы вкратце, рассмотреть вопрос о том, как следует назначать жесткость амортизаторов и как проверить правильность ее выбора в данном случае. Вопрос этот может встретиться главным образом при исследовании тех колебаний амортизируемого тела, которые параллельны плоскости его крепления к корпусу корабля, т. е. при исследовании колебаний вдоль осей ox и oy (рис. 8), ибо такие колебания в большей степени удалены от соответствующих вращательных перемещений амортизируемого тела, чем колебания, направленные по нормали к упомянутой только что плоскости.

Мы же будем рассматривать колебания амортизируемого тела в самом общем случае, а ограничимся лишь тем случаем, когда на трех главных центральных осях инерции амортизируемого тела одна нормальна к плоскости крепления прибора к корпусу корабля, две же другие параллельны этой плоскости. Оси ox , oy и oz будем предполагать совмещенными с упомянутыми только что тремя главными осями инерции амортизируемого тела.

Пусть

X_1, Y_1, Z_1 — декартовы составляющие реакции i -й упругой опоры амортизируемого тела;

x_i, y_i, z_i — декартовы координаты точки приложения этой реакции к данному телу;

u_i, v_i, w_i — декартовы составляющие перемещения i -й точки;

c_1^x, c_1^y, c_1^z — коэффициенты линейной жесткости i -й опоры амортизируемого тела, т. е. коэффициенты пропорциональности в формулах:

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= c_1^x u_i \\ Y_1 &= c_1^y v_i \\ Z_1 &= c_1^z w_i \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

α, β, γ — углы поворота вокруг осей ox, oy и oz , соответственно, координатные, когда ось oz переходит кратчайшим путем в положение, занимаемое осью oy ; ось oy — в положение, занимаемое осью oz , ось же ox — в положение, занимаемое осью ox .

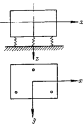


Рис. 8

$\alpha_i^0, \beta_i^0, \gamma_i^0$ — соответствующие этим вращениям, приведенные к точке x_i, y_i, z_i реактивные моменты i -й упругой опоры, противодействующие вращениям α, β и γ соответственно;

M_i^0, M_i^1, M_i^2 — соответствующие этим моментам коэффициенты жесткости i -й опоры, т. е. коэффициенты пропорциональности в формулах:

$$\left. \begin{aligned} M_i^0 &= k_i^0 \alpha_i; \\ M_i^1 &= k_i^1 \beta_i; \\ M_i^2 &= k_i^2 \gamma_i. \end{aligned} \right\} (2)$$

x, y, z — декартовы перемещения центра тяжести импортизируемого тела.

Условно можно считать реакции X_i, Y_i и Z_i положительными, когда они направлены в сторону, противоположную перемещениям u_i, v_i и w_i , можно уравнения движения рассматриваемого тела написать так:

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{u} &= - \sum X_i; \\ M \ddot{v} &= - \sum Y_i; \\ M \ddot{w} &= - \sum Z_i; \end{aligned} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{aligned} K_x \ddot{\alpha} &= - \sum \alpha_i^0 - \sum y_i Z_i + \sum z_i Y_i; \\ K_y \ddot{\beta} &= - \sum \beta_i^0 - \sum z_i X_i + \sum x_i Z_i; \\ K_z \ddot{\gamma} &= - \sum \gamma_i^0 - \sum x_i Y_i + \sum y_i X_i. \end{aligned} \right\} (4)$$

где M — масса рассматриваемого тела;
 K_x, K_y, K_z — главные центральные моменты инерции его массы, соответствующие осям ox, oy и oz .

Исключив с помощью зависимостей (1) и (2) усилия $X_i, Y_i, Z_i, \alpha_i^0, \beta_i^0, \gamma_i^0$ и M_i^0, M_i^1, M_i^2 из уравнений (3) и (4), будем иметь вместо равенств (3) и (4)

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{u} &= - \sum \varphi_i^0 u_i; \\ M \ddot{v} &= - \sum \varphi_i^1 v_i; \\ M \ddot{w} &= - \sum \varphi_i^2 w_i \end{aligned} \right\} (5)$$

$$\left. \begin{aligned} K_x \ddot{\alpha} &= - \sum M_i^0 \alpha - \sum \varphi_i^3 u_i y_i + \sum \varphi_i^4 v_i z_i; \\ K_y \ddot{\beta} &= - \sum M_i^1 \beta - \sum \varphi_i^5 v_i z_i + \sum \varphi_i^6 w_i x_i; \\ K_z \ddot{\gamma} &= - \sum M_i^2 \gamma - \sum \varphi_i^7 w_i x_i + \sum \varphi_i^8 u_i y_i. \end{aligned} \right\} (6)$$

Входящие сюда перемещения u_i, v_i и w_i связаны с u, v и w зависимостями

$$\left. \begin{aligned} u_i &= u - y_i \gamma + z_i \beta; \\ v_i &= v - z_i \alpha + x_i \gamma; \\ w_i &= w - x_i \beta + y_i \alpha. \end{aligned} \right\} (7)$$

что по подстановке в равенства (5) позволяет написать

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{u} &= - \alpha \sum \varphi_i^0 + \gamma \sum \varphi_i^1 y_i - \beta \sum \varphi_i^2 z_i; \\ M \ddot{v} &= - \alpha \sum \varphi_i^1 + \alpha \sum \varphi_i^2 x_i - \gamma \sum \varphi_i^3 w_i; \\ M \ddot{w} &= - \alpha \sum \varphi_i^2 + \beta \sum \varphi_i^4 x_i - \alpha \sum \varphi_i^5 y_i. \end{aligned} \right\} (8)$$

по подстановке же в уравнения (6) дает

$$\left. \begin{aligned} K_x \ddot{\alpha} &= - \alpha \sum M_i^0 - \sum \varphi_i^3 (w - x_i \beta + y_i \alpha) y_i + \\ &+ \sum \varphi_i^4 (v - z_i \alpha + x_i \gamma) z_i; \\ K_y \ddot{\beta} &= - \beta \sum M_i^1 - \sum \varphi_i^5 (u - y_i \gamma + z_i \beta) z_i + \\ &+ \sum \varphi_i^6 (w - x_i \beta + y_i \alpha) x_i; \\ K_z \ddot{\gamma} &= - \gamma \sum M_i^2 - \sum \varphi_i^7 (v - z_i \alpha + x_i \gamma) x_i + \\ &+ \sum \varphi_i^8 (u - y_i \gamma + z_i \beta) y_i. \end{aligned} \right\} (9)$$

т. е., что то же

$$\left. \begin{aligned} K_x \ddot{\alpha} &= - \alpha \sum (M_i^0 + \varphi_i^3 y_i^2 + \varphi_i^4 z_i^2) + \beta \sum \varphi_i^3 x_i y_i + \\ &+ \gamma \sum \varphi_i^4 x_i z_i - \alpha \sum \varphi_i^5 y_i + \alpha \sum \varphi_i^6 z_i; \\ K_y \ddot{\beta} &= - \beta \sum (M_i^1 + \varphi_i^5 z_i^2 + \varphi_i^6 x_i^2) + \gamma \sum \varphi_i^5 y_i z_i + \\ &+ \alpha \sum \varphi_i^6 x_i y_i - \alpha \sum \varphi_i^7 z_i + \alpha \sum \varphi_i^8 x_i; \\ K_z \ddot{\gamma} &= - \gamma \sum (M_i^2 + \varphi_i^7 x_i^2 + \varphi_i^8 y_i^2) + \alpha \sum \varphi_i^7 x_i z_i + \\ &+ \beta \sum \varphi_i^8 y_i z_i - \alpha \sum \varphi_i^3 x_i + \alpha \sum \varphi_i^4 y_i. \end{aligned} \right\} (10)$$

$$\left. \begin{aligned} C_x &= \sum \phi_i^2; \\ C_y &= \sum \psi_i^2; \\ C_z &= \sum \phi_i^2; \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} U_y &= \sum \phi_i^2 y_i; & V_x &= \sum \psi_i^2 x_i; & W_z &= \sum \phi_i^2 z_i; \\ V_x &= \sum \psi_i^2 x_i; & W_y &= \sum \psi_i^2 y_i; & U_z &= \sum \phi_i^2 z_i; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{xx} &= \sum (\delta_i^2 + \phi_i^2 x_i^2 + \psi_i^2 y_i^2); \\ C_{yy} &= \sum (\delta_i^2 + \phi_i^2 x_i^2 + \psi_i^2 y_i^2); \\ C_{zz} &= \sum (\delta_i^2 + \phi_i^2 x_i^2 + \psi_i^2 y_i^2); \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\left. \begin{aligned} C_{xy} &= \sum \phi_i^2 x_i y_i; \\ C_{yz} &= \sum \psi_i^2 y_i z_i; \\ C_{zx} &= \sum \phi_i^2 z_i x_i. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

можно записать полученные уравнения движения так:

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{u} &= -C_x u + \gamma U_y - \beta U_z; \\ M \ddot{v} &= -C_y v + \alpha V_x - \gamma V_z; \\ M \ddot{w} &= -C_z w + \beta W_x - \alpha W_y; \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} K_x \delta &= -\alpha W_y + \beta V_x - \alpha C_{xx} + \beta C_{xy} + \gamma C_{xz}; \\ K_y \beta &= -\alpha U_z + \alpha W_x - \beta C_{yy} + \gamma C_{yz} + \alpha C_{zy}; \\ K_z \gamma &= -\alpha V_x + \alpha U_y - \gamma C_{zz} + \alpha C_{zx} + \beta C_{zy}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

В общем случае, когда коэффициенты жесткости

$$C_x, C_y, C_z, C_{xx}, C_{yy}, \dots, C_{zz}, U_y, V_x, W_z, \dots, W_y,$$

все не равны нулю, все шесть перемещений амортизируемого тела оказываются в уравнениях его движения связанными и их приходится определять по общей системе уравнений (15) и (16).

Если центр жесткости подвеса рассматриваемого тела совпадает с его центром инерции, то в уравнениях (15) и (16) коэффициенты U_y, U_z, V_x, W_x и W_y обращаются в нуль, и уравнения (15) и (16) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{u} &= -C_x u; \\ M \ddot{v} &= -C_y v; \\ M \ddot{w} &= -C_z w; \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} K_x \delta &= -C_{xx} \alpha + C_{xy} \beta + C_{xz} \gamma; \\ K_y \beta &= -C_{yy} \beta + C_{yz} \gamma + C_{yx} \alpha; \\ K_z \gamma &= -C_{zz} \gamma + C_{zx} \alpha + C_{zy} \beta. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

В этом случае, следовательно, поступательные перемещения тела отделяются от его вращательных движений.

Если главные центральные оси инерции тела совпадают с главными, но не центральными осями жесткости его подвеса, то в уравнениях (16) обращаются в нуль коэффициенты C_{xy}, C_{yz} и C_{zx} , а система уравнений (15), (16) принимает вид:

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{u} &= -C_x u + \gamma U_y - \beta U_z; \\ M \ddot{v} &= -C_y v + \alpha V_x - \gamma V_z; \\ M \ddot{w} &= -C_z w + \beta W_x - \alpha W_y; \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$$\left. \begin{aligned} K_x \delta &= -\alpha W_y + \beta V_x - \alpha C_{xx}; \\ K_y \beta &= -\alpha U_z + \alpha W_x - \beta C_{yy}; \\ K_z \gamma &= -\alpha V_x + \alpha U_y - \gamma C_{zz}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Если главные центральные оси инерции тела совпадают с главными центральными осями жесткости подвеса, то в нуль обращаются, помимо коэффициентов C_{xy}, C_{yz} и C_{zx} , еще и коэффициенты U_y, U_z, V_x, V_z, W_x и W_y . В этом случае система уравнений (15), (16) принимает наиболее простой вид распадаясь на шесть независимых уравнений:

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{u} &= -C_x u; \\ M \ddot{v} &= -C_y v; \\ M \ddot{w} &= -C_z w; \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\left. \begin{aligned} K_x \delta &= -C_{xx} \alpha; \\ K_y \beta &= -C_{yy} \beta; \\ K_z \gamma &= -C_{zz} \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

в которых все шесть неизвестных перемещений упругого тела полностью разделены.

При конструировании амортизатора следует стремиться к тому, чтобы неизвестные $\alpha, \beta, \alpha, \beta$ и γ были в системе уравнений, их определяющих, во возможности разделены. Этого, однако, нельзя осуществлять полностью, когда амортизируемое тело прикрепляется как на рис. 10 к своим упругим подвесам одной лишь своей плоскостью, нормальной к оси oz . Максимально в этом случае можно добиться того, чтобы:

а) при перемещении тела вдоль оси oz у него не было тенденции вращаться вокруг осей ox и oy ; для этого надо сделать

$$W_y = W_x = 0, \quad (23)$$

б) при вкореоте тела вокруг одной из главных осей инерции удерживать подвес его не создавая у него стремление вращаться вокруг какой-либо другой из осей; для этого должно быть

$$C_{xy} = C_{yz} = C_{zx} = 0; \quad (24)$$

в) при перемещениях вдоль осей ox или oy у амортизируемого тела не было стремления вращаться вокруг оси oz ; для этого надо жесткость отдельных амортизаторов его подобрать так, чтобы было;

$$V_x = U_y = 0. \quad (25)$$

Подставив амортизируемое тело так, чтобы равенства (25), (24) и (25) были удовлетворены, будем вместо системы (15), (16), иметь следующую систему основных дифференциальных уравнений движения амортизируемого тела

$$\begin{cases} M \ddot{u} = -C_x u - \beta U_x; \\ K_y \ddot{v} = -u U_y - \beta C_{xy}; \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} M \ddot{w} = -C_z w + \alpha V_z; \\ K_x \ddot{z} = +v V_z - \alpha C_{xz}; \end{cases} \quad (27)$$

$$\begin{cases} M \ddot{\psi} = -C_\psi \psi; \\ K_\gamma \ddot{\gamma} = -C_\psi \gamma. \end{cases} \quad (28)$$

В этом случае, следовательно, перемещение амортизируемого тела вдоль оси oz независимо от вращения вокруг оси oz ; перемещение вдоль оси oy — от вращения вокруг оси oz . Поступательное перемещение вдоль оси ox и вращение вокруг этой оси оказываются не связанными ни с какими иными перемещениями тела.

Так как добиться такого подвеса амортизируемого тела относительно затрудно, то с ним очень часто можно встретиться на практике. Решение уравнений (26), (27), (28) заслуживает особого подробного рассмотрения.

Допустим, что амортизируемое тело подвешено к кораблю так, что уравнения его движения могут быть выписаны в форме равенств (26)–(28).

В этом случае период свободных колебаний, соответствующих поступательному перемещению амортизируемого тела вдоль оси ox , определяется равенством

$$\lambda_1^2 = \frac{C_x}{M}. \quad (29)$$

Период же вращательных колебаний вокруг оси oz зависимость

$$\lambda_2^2 = \frac{C_\psi}{K_\psi}. \quad (30)$$

Период главных свободных колебаний, соответствующих остальным четырем перемещениям амортизируемого тела, опре-

деляются не столь просто. Для выяснения периодов тех двух главных свободных колебаний, которые соответствуют поступательному перемещению тела вдоль оси ox и одновременно вращению вокруг оси oy достаточно положить

$$\begin{cases} u = P_1 + P_2; \\ v = v_1 P_1 + v_2 P_2, \end{cases} \quad (31)$$

где P_1 и P_2 — соответствующие главные координаты рассматриваемой системы, v_1 и v_2 — постоянные, зависящие от ее устройства.

В случае свободных колебаний системы вкаждой из ее главных координат может независимо от всех остальных изменяться во времени по закону

$$P_k = A_k \cos(\lambda_k t + \epsilon_k). \quad (32)$$

Поэтому, если P_1 и P_2 суть главные координаты рассматриваемой системы, то равенствами

$$\begin{cases} u = A_1 \cos(\lambda_1 t + \epsilon_1); \\ v = v_1 A_1 \cos(\lambda_1 t + \epsilon_1), \end{cases} \quad (33)$$

где $k = 3$ или 4 , должно даваться одно из решений системы (26). Для этого v_k должно быть подобрано так, чтобы было

$$\begin{cases} (C_x - M \lambda_k^2 - U_x v_k) A_k \cos(\lambda_k t + \epsilon_k) = 0; \\ [(C_{xy} - K_y \lambda_k^2) v_k - U_x] A_k \cos(\lambda_k t + \epsilon_k) = 0, \end{cases} \quad (34)$$

что дает для A_k решение, отличное от нуля лишь в том случае, если одновременно удовлетворяются равенства

$$\begin{cases} C_x - M \lambda_k^2 - U_x v_k = 0; \\ (C_{xy} - K_y \lambda_k^2) v_k - U_x = 0, \end{cases} \quad (35)$$

и для этого λ_k^2 должно быть одним из корней уравнения

$$(C_x - M \lambda_k^2)(C_{xy} - K_y \lambda_k^2) - U_x^2 = 0. \quad (36)$$

С помощью обозначений

$$\begin{cases} \eta_1^2 = \frac{C_x}{M}; \\ \eta_2^2 = \frac{C_{xy}}{K_y}; \end{cases} \quad (37)$$

и

$$\gamma = \frac{U_x}{C_x C_{xy}} \quad (38)$$

можно привести уравнение (36) к виду

$$(\lambda_1^2 - \eta_1^2)(\lambda_2^2 - \eta_2^2) - \gamma \eta_1^2 \eta_2^2 = 0, \quad (39)$$

очевидно тождественному с уравнением (9), § 8. Все сказанное в § 8 относительно корней уравнения (9) § 8 относится, следовательно, и к уравнению (39).

В частности, можно утверждать, что один из корней уравнения (39) больше большего из чисел n_1 и n_2 , другой меньше меньшего из них.

Попробуем представить, насколько могут отличаться корни уравнения (39) друг от друга и с помощью каких мероприятий можно сделать эти корни возможно более близкими друг к другу.

Последнее, очевидно, желательно для того, чтобы область резонансных частот была для амортизированного тела возможно более узкой.

Чтобы разобраться в данном вопросе представим себе, что рассматриваемое тело можно с достаточной точностью уподобить прямоугольной коробке равной толщины l , основными размерами которой (см. рис. 9) в направлениях осей ox , oy и oz суть соответственно $2a$, $2b$ и $2c$. Пусть измеренное вдоль оси oz расстояние между точками закрепления этой коробки к амортизационным подвесам есть $2d$, жесткость же подвесов одинакова.

Для такой коробки можно, очевидно, положить:

$$M = 2\rho l (2a 2b + 2b 2c + 2c 2a) \\ K_x = 2\rho l \left\{ 4a b \left(\frac{a^2}{3} + c^2 \right) + 4b c \left(\frac{c^2}{3} + a^2 \right) + 4a c \left(\frac{a^2}{3} + \frac{c^2}{3} \right) \right\} \quad (40)$$

или, что то же

$$M = 8\rho l (ab + bc + ac), \\ K_x = \frac{8}{3} \rho l \{ a^2 (b + c) + c^2 (a + b) + 3abc (a + c) \}, \quad (41)$$

где ρ — плотность материала коробки. Что касается коэффициентов жесткости C_x , C_{yy} и U_z , то согласно формулам (12), (13) и (14) можно в этом случае принимать

$$\left. \begin{aligned} C_x &= n c_x; \\ C_{yy} &= n (K_y + c_2 e^2 + c_3 d^2); \\ U_z &= n c_x c. \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

где n — число отдельных амортизаторов поддерживающих рас-

сматриваемую коробку, а c_x и c_2 — жесткости каждого из них, так что согласно равенству (38):

$$\eta = \frac{(n c_x d^2)}{n c_x n (K_y + c_2 e^2 + c_3 d^2)}, \quad (43)$$

или, пренебрегая величиной K_y по сравнению с $c_2 e^2 + c_3 d^2$

$$\eta \approx \frac{e^2}{e^2 + d^2 \frac{c_3}{c_2}}. \quad (44)$$

Таким образом, величина η всегда меньше единицы, причем тем меньше таковой, чем меньше полувысота рассматриваемой коробки e по сравнению с измеренным вдоль оси oz расстоянием d между амортизаторами, которыми коробка эта крепится к кораблю.

Что касается величин n_1^2 и n_2^2 , то согласно формулам (37), (41) и (42)

$$\left. \begin{aligned} n_1^2 &= \frac{n c_x}{K_x + (a^2 b + b^2 c + c^2 a)}; \\ n_2^2 &\approx \frac{3n (c_2 e^2 + c_3 d^2)}{K_x l (a^2 (b + c) + c^2 (a + b) + 3abc (a + c))} \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

и, следовательно,

$$\frac{n_1^2}{n_2^2} = \frac{c_x}{c_2 e^2 + c_3 d^2} \frac{3abc (a + c) + a^2 (b + c) + c^2 (a + b)}{2(a^2 b + b^2 c + c^2 a)}. \quad (46)$$

Для амортизаторов, у которых $c_2 : c_3 \approx 0,5$ формула (46) обращается в формулу

$$\frac{n_1^2}{n_2^2} = \frac{1}{e^2 + 0,5 d^2} \frac{3abc (a + c) + a^2 (b + c) + c^2 (a + b)}{2(a^2 b + b^2 c + c^2 a)}. \quad (47)$$

Для коробки, все три главные размеры которой одинаковы, $\frac{3abc (a + b) + a^2 (b + c) + c^2 (a + b)}{2(a^2 b + b^2 c + c^2 a)} = \frac{10}{9} \frac{e^2}{e^2}$.

Следовательно, для такой коробки по формуле (47) выходит $\frac{n_1^2}{n_2^2} = \frac{1}{1 + 0,5 \left(\frac{d^2}{e^2} \right)} \frac{10}{9}$,

что при $d : e = 1,2$ даст $\frac{n_1^2}{n_2^2} = \frac{1}{1 + 0,72} \frac{10}{9} \approx 1$.

Для коробки, у которой

$$a = b = 2c,$$

$$\frac{2a \delta \varepsilon (a + c) + a^2 (b + c) + c (a + b)}{2(a \delta + b \varepsilon + a c)} = \frac{26c^2 + 24c^2 + 4c^2}{2(4 + 2 + 2)c^2} = \frac{8}{3} c^2, \quad (51)$$

так что согласно формуле (42)

$$\frac{n_1^2}{n_2^2} = \frac{8}{3} \frac{1}{1 + 0,5 \left(\frac{d}{c}\right)^2},$$

что при $d = 1,72c$ дает

$$\frac{n_1^2}{n_2^2} = \frac{8}{3} \frac{1}{1 + 1,48} = \frac{8}{5,48} = 1,07, \quad (52)$$

Для коробок, высота которых по сравнению с остальными двумя размерами бесконечно мала, формула (47) дает

$$\frac{n_1^2}{n_2^2} = \frac{1}{0,5 \left(\frac{d}{a}\right)^2} \frac{1}{2} = \frac{2a^2}{8d^2}, \quad (53)$$

так что

$$\frac{n_1^2}{n_2^2} = \frac{2}{8} \quad \text{при} \quad \frac{d}{a} = 1 \quad (54)$$

и

$$\frac{n_1^2}{n_2^2} = \frac{2}{3} \frac{1}{1,44} \approx 0,5 \quad \text{при} \quad \frac{d}{a} = 1,2. \quad (55)$$

Вообще отношение $n_1^2 : n_2^2$, по-видимому, редко выходит из пределов

$$0,5 < n_1^2 : n_2^2 < 1,5, \quad (56)$$

так что, обозначая через n_1^2 большую из величин n_1^2 и n_2^2 , а через n_2^2 меньшую из них, можно принять, что

$$1 < n_1^2 : n_2^2 < 2. \quad (57)$$

Принимая во внимание неравенство (57), а также приближенную зависимость

$$\eta \approx \frac{1}{1 + 0,5 \left(\frac{d}{c}\right)^2}, \quad (58)$$

соответствующую случаю, когда

$$c_2 = 0,5 c_1, \quad (59)$$

обратимся к рассмотрению отношения корней уравнения (39).

Очевидно, один из этих корней λ_2 определяется равенством

$$\lambda_2^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2}\right)^2 + \eta n_1^2 n_2^2}, \quad (60)$$

другой же — равенством

$$\lambda_1^2 = \frac{n_1^2 + n_2^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{n_1^2 - n_2^2}{2}\right)^2 + \eta n_1^2 n_2^2}, \quad (61)$$

так что

$$\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} = \frac{n_1^2 + n_2^2 + \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4\eta n_1^2 n_2^2}}{n_1^2 + n_2^2 - \sqrt{(n_1^2 - n_2^2)^2 + 4\eta n_1^2 n_2^2}}, \quad (62)$$

что дает

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 = \frac{2 - \sqrt{1 + 8\eta}}{2 - \sqrt{1 + 8\eta}} \quad \text{при} \quad n_1^2 = 2n_2^2; \quad (63)$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 = \frac{2 + 2\sqrt{\eta}}{2 - 2\sqrt{\eta}} = \frac{1 + \sqrt{\eta}}{1 - \sqrt{\eta}} \quad \text{при} \quad n_1^2 = n_2^2. \quad (64)$$

Если принять, что у нормально сконструированного прибора $d > c$,

то согласно приближенной зависимости (58) можно принять

$$\eta \approx \frac{1}{1,5} \quad (66)$$

и, следовательно, придется признать, что у нормально сконструированного прибора

$$\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} = \frac{1 + 0,8}{1 - 0,8} = 9,$$

т. е.

$$\lambda_1 : \lambda_2 = 3. \quad (67)$$

Таким образом, частоты обеих главных свободных колебаний, соответствующих перемещению коробки в направлении оси oz и вращению ее вокруг оси oy , могут превосходить одна другую, как правило, не более, чем втрое.

Однако с возможностью того, что отношение частот может оказаться близким к трем, необходимо считаться, как при определении резонансной зоны амортизаторного подвеса, так и при определении коэффициента амортизации для него.

Если бы оказалось, что у прибора подвешенного, как показано на рис. 8, частоты обеих главных свободных колебаний прибора слишком разнятся друг от друга, и, что это приводит либо к недопустимо большому расширению резонансной зоны, либо к нежелательному ухудшению коэффициента амортизации, то всегда

можно сузить резонансную зону и добиться лучшего разделения обоих главных свободных колебаний прибора. Этого можно достигнуть как подъемом прибора на уровне его центра тяжести (см. рис. 10), так и с помощью введения в дополнение к ряду вертикальных пружин, закрепленных к нижней доске прибора, еще одной или нескольких горизонтальных пружин (см. рис. 11), прикрепленных к его корпусу выше центра тяжести прибора. Надлежащим подбором жесткости последней пружины или нескольких пружин можно вполне добиться того, что коэффициент U_x станет настолько близким к нулю, что поступательное перемещение прибора в направлении оси ox и вращательное его пере-

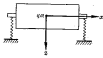


Рис. 10.

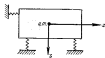


Рис. 11.

мещение вокруг оси oy станут независимыми друг от друга и с вращательным перемещением прибора можно будет не считаться по малости тех вращательных колебаний, которыми обычно отличается вибрация корабля.

Если специальных мер к отделению вращательного колебания прибора вокруг оси oy от поступательного колебания его в направлении от o не принято, то при определении частот главных свободных колебаний прибора, как и при определении коэффициента амортизации рассматриваемого подвеса, необходимо обращать внимание на оба его главных свободных колебания. В частности, при экспериментальном определении частот собственных свободных колебаний амортизируемого подвеса надо определять обе эти частоты, при построении же кривой резонанса и вычислениях для подвеса коэффициента динамичности учитывать влияние обоих тех главных свободных колебаний амортизируемого тела, в которых его поступательное перемещение вдоль ox является связанным с вращением вокруг оси oy .

Все сказанное относится, очевидно, в равной мере и к двум главным свободным колебаниям прибора в плоскости yoz , определяемым уравнениями (28).

Принимая это во внимание, рассмотрим в § 13 вопрос о том, каким образом можно вычислить для прибора, подвешенного согласно рис. 10, коэффициент амортизации колебаний, направленных вдоль оси ox , в § же 14 — каким образом можно исследовать соответствующие колебания прибора экспериментально.

§ 13. Теоретическое определение кривой резонанса для тел, у которых вращательные перемещения вокруг одной оси происходят от поступательных перемещений в направлении оси, ей перпендикулярной

При исследовании вынужденных колебаний прибора вращением, как и в § 5, что корабль в зените, где к нему подвешен прибор, совершает колебания, определяемые зависимостью:

$$x = a_0 \cos \omega t, \quad (1)$$

угловых же колебаний не имеет.

Через ω обозначим абсолютное перемещение центра тяжести прибора в направлении оси ox ; через β — угол поворота вокруг оси oy . Ограничимся рассмотрением частного случая, когда свободные колебания амортизируемого тела могут быть при отсутствии сопротивлений описаны уравнениями (26), § 12, дополнив эти уравнения членами, учитывающими влияние внутреннего сопротивления упругого подвеса, с одной стороны, и перемещения ω точки подвеса прибора к кораблю — с другой. Приняв, что сопротивления упругого подвеса пропорциональны скоростям относительного перемещения амортизируемого тела, коэффициенты же пропорциональности сопротивлений относительным скоростям пропорциональны соответствующим упругим постоянным амортизатора, можно выписать уравнения вынужденных колебаний амортизированного тела в форме

$$\begin{cases} M\ddot{\omega} = -C_x(\omega - x) - kC_x(\dot{\omega} - \dot{x}) - U_x(\beta + k\dot{\beta}); \\ K_y\ddot{\beta} = -U_x(\omega - x) - kU_x(\dot{\omega} - \dot{x}) - C_{yy}(\beta + k\dot{\beta}), \end{cases} \quad (2)$$

или, что то же, в виде

$$\begin{cases} M\ddot{\omega} + kC_x\dot{\omega} + C_x\omega + U_x(\beta + k\dot{\beta}) - C_x(x + k\dot{x}); \\ U_x(\omega + k\dot{\omega}) + K_y\ddot{\beta} + kC_{yy}\dot{\beta} + C_{yy}\beta = U_x(x + k\dot{x}), \end{cases} \quad (3)$$

где коэффициент k характеризует величину сопротивления амортизаторов, все же остальные обозначения те же, что и в § 12. Величину коэффициента k условимся, как и в § 5 характеризовать отвлеченным числом

$$\gamma = \frac{kC_x}{\sqrt{M C_x}} \quad (4)$$

и примем, согласно опыту

$$\gamma \approx 0,1. \quad (5)$$

В системе (3) переменные разделяются той самой подстановкой, с помощью которой это разделение переменных было достигнуто в соответствующих уравнениях § 8. Действительно, обозначив через T гиную силу рассматриваемой системы

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\omega}^2 + \frac{1}{2} K_y \dot{\beta}^2, \quad (6)$$

через V потенциальную энергию ее деформации

$$V = \frac{1}{2} C_x u^2 + \frac{1}{2} C_{yy} \beta + U_2 u \beta \quad (7)$$

и через Φ функцию рассеяния

$$\Phi = \frac{k}{2} C_x u^2 + \frac{k}{2} C_{yy} \beta^2 + k U_2 u \beta, \quad (8)$$

является видно, что уравнения (3) могут быть записаны в форме

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial u} &= C_x (x + k \delta); \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \beta} + \frac{\partial V}{\partial \beta} &= U_2 (x + k \delta) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

и, что, следовательно, введя новые переменные p_k с помощью подстановки

$$\left. \begin{aligned} u &= p_1 + p_2; \\ \beta &= v_1 p_1 + v_2 p_2, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где v_1 и v_2 — некоторые константы, можно переписать уравнения (9) также в форме

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial p_k} + \frac{\partial V}{\partial p_k} = (C_x + v_k U_2) (x + k \delta), \quad (11)$$

очевидно эквивалентной уравнениям (9) в силу того, что, как то видно из (10)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial p_1} = \frac{\partial u}{\partial p_2} = \frac{\partial \beta}{\partial p_1} = 1; \\ \frac{\partial \beta}{\partial p_1} = \frac{\partial \beta}{\partial p_2} = \frac{\partial \beta}{\partial p_1} = v_k \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Подобрав константы v_1 и v_2 так, чтобы было

$$\left. \begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M_1 \dot{p}_1^2 + \frac{1}{2} M_2 \dot{p}_2^2; \\ V &= \frac{1}{2} N_1 p_1^2 + \frac{1}{2} N_2 p_2^2. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

мы очевидно будем иметь одновременно:

$$\Phi = \frac{k}{2} N_1 p_1^2 + \frac{k}{2} N_2 p_2^2. \quad (14)$$

так что в развернутом виде уравнения (11) запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} M_1 \ddot{p}_1 + k N_1 \dot{p}_1 + N_1 p_1 &= (C_x + v_1 U_2) (x + k \delta); \\ M_2 \ddot{p}_2 + k N_2 \dot{p}_2 + N_2 p_2 &= (C_x + v_2 U_2) (x + k \delta). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Уравнения (15), по смыслу их вывода, равносильны уравнениям (3) независимо от того, какие значения имеют в них постоянные k , C_x и C_{yy} . Они должны быть эквивалентны этим уравнениям и в том частном случае, когда

$$k = x = 0, \quad (16)$$

Но в этом частном случае уравнения (3) обращаются в уравнения

$$\left. \begin{aligned} M \ddot{u} + C_x u + U_2 \beta &= 0; \\ U_2 u + K_y \beta + C_{yy} \beta &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

уравнения же (15) — в уравнения

$$\left. \begin{aligned} M_1 \ddot{p}_1 + N_1 p_1 &= 0; \\ M_2 \ddot{p}_2 + N_2 p_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Последние допускают частные решения вида

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= A_1 \cos(R_1 t + \epsilon_1); \\ p_2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

где

$$\lambda_1^2 = \frac{N_1}{M_1}, \quad (20)$$

и

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= 0; \\ p_2 &= A_2 \cos(R_2 t + \epsilon_2), \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где

$$\lambda_2^2 = \frac{N_2}{M_2}. \quad (22)$$

и A_1, A_2, ϵ_1 и ϵ_2 — постоянные произвольные.

Из того, что решения (19), (20), а также (21), (22) должны удовлетворять уравнениям (17) следует:

$$v_k = \frac{C_x - \lambda_k^2 M}{-U_2} = -\frac{U_2}{C_{yy} - \lambda_k^2 M}. \quad (23)$$

а для этого λ_k^2 должны быть корнями уравнения

$$(C_x - \lambda_k^2 M)(C_{yy} - K_y \lambda_k^2) - U_2^2 = 0, \quad (24)$$

т. е. корнями (26), § 12.

Корни уравнения (24) определяются очевидно равенствами

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1^2 &= \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right)^2 + \eta \alpha_1^2 \alpha_2^2}; \\ \lambda_2^2 &= \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right)^2 + \eta \alpha_1^2 \alpha_2^2}. \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где, как и в § 12,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{C_x}{M}; \\ \sigma_2^2 &= \frac{C_{yy}}{K_y}; \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

$$\nu = \frac{U_2^2}{C_x C_{yy}}. \quad (27)$$

Вычислив λ_1^2 и λ_2^2 с помощью (25), ν_1 и ν_2 можно определить с помощью равенств (3), величины же M_2 и M_3 с помощью зависимостей

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= M + \nu_1^2 K_y; \\ M_2 &= M + \nu_2^2 K_y. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

непосредственно следующих из равенств (6), (10) и (13).

Положим после этого

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{C_x + \nu_1 U_2}{M_1} = \frac{C_x + \nu_1 U_2}{M + K_y \nu_1^2}; \\ \sigma_2^2 &= \frac{C_x + \nu_2 U_2}{M_2} = \frac{C_x + \nu_2 U_2}{M + K_y \nu_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

и приняв во внимание, что в интересующем нас случае, когда x определяется равенством

$$x + k\dot{x} = a_1 \cos(\omega t + \varepsilon), \quad (30)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= a_0 \sqrt{1 + k^2 \omega^2}; \\ \varepsilon &= \arctg(k\omega), \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

уравнение (15) можно переписать так:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{p}_1 + k\lambda_1^2 \dot{p}_1 + \lambda_1^2 p_1 &= \sigma_1^2 a_1 \cos(\omega t + \varepsilon); \\ \ddot{p}_2 + k\lambda_2^2 \dot{p}_2 + \lambda_2^2 p_2 &= \sigma_2^2 a_1 \cos(\omega t + \varepsilon). \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Интеграл вынужденных колебаний дается для уравнений (32) равенствами

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{\sigma_1^2}{\sqrt{(\lambda_1^2 - \omega^2)^2 + k^2 \lambda_1^2 \omega^2}} a_1 \cos(\omega t + \varepsilon + \nu_{1k}); \\ p_2 &= \frac{\sigma_2^2}{\sqrt{(\lambda_2^2 - \omega^2)^2 + k^2 \lambda_2^2 \omega^2}} a_1 \cos(\omega t + \varepsilon + \nu_{2k}). \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \nu_{1k} &= \arctg \frac{k\lambda_1^2 \omega}{\lambda_1^2 - \omega^2}; \\ \nu_{2k} &= \arctg \frac{k\lambda_2^2 \omega}{\lambda_2^2 - \omega^2}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

что в силу (31), (4) и (26) равносильно зависимостям

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{\sigma_1^2}{\lambda_1^2} \frac{\sqrt{1 + \nu_1^2 \frac{\omega^2}{\lambda_1^2}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda_1^2}\right)^2 + \nu_1^2 \left(\frac{\omega}{\lambda_1}\right)^2}} a_1 \cos(\omega t + \varepsilon + \nu_{1k}); \\ p_2 &= \frac{\sigma_2^2}{\lambda_2^2} \frac{\sqrt{1 + \nu_2^2 \frac{\omega^2}{\lambda_2^2}}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda_2^2}\right)^2 + \nu_2^2 \left(\frac{\omega}{\lambda_2}\right)^2}} a_1 \cos(\omega t + \varepsilon + \nu_{2k}). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \nu_{1k} &= \arctg \frac{\gamma \frac{\omega}{\lambda_1}}{1 - \left(\frac{\omega}{\lambda_1}\right)^2}; \\ \nu_{2k} &= \arctg \frac{\gamma \frac{\omega}{\lambda_2}}{1 - \left(\frac{\omega}{\lambda_2}\right)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Величина λ_1^2 всегда больше, чем λ_2^2 , величина же λ_2^2 всегда меньше, чем λ_1^2 . Но, как показано было в предыдущем параграфе, все эти три величины, являются величинами одного порядка. Поэтому, если

$$\omega : \lambda_1 > 2,$$

то

$$\left. \begin{aligned} \nu_{1k} &< \gamma \frac{2}{3}; \\ \nu_{2k} &< \gamma \frac{2}{3}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

а так как мы условились считать, что $\gamma = 0,1$,

то оба ν_{ik} удовлетворяют неравенствам:

$$\left. \begin{aligned} \nu_{1k} &< 0,07; \\ \nu_{2k} &< 0,07. \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

Потому с небольшой ошибкой в отношении вычисления максимальных отклонений системы можно при $\omega > 2\lambda_1$ положить оба γ_0 равными полусумме их истинных значений, данных равенствами (36).

Положим

$$\gamma_0 \approx \gamma_0 \approx \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma_0^*}{1 - \left(\frac{\omega}{\lambda_1}\right)^2} + \frac{\gamma_0^*}{1 - \left(\frac{\omega}{\lambda_2}\right)^2} \right] \quad (39)$$

и прикинь во внимание, что по малости γ^2 величина $\gamma^2 \frac{\omega^2}{\lambda_1^2}$ весьма мала по сравнению с $\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda_1^2}\right)^2$ и $\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda_2^2}\right)^2$ уже при

$$\omega = 1,41 \lambda_1^2 \quad (40)$$

можно при значимых α , удовлетворяющих неравенству

$$\omega = 2\lambda_1 \quad (41)$$

пользоваться известными зависимостями (35) приближенными равенствами

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{\sigma_1^2}{\lambda_1^2} \frac{\sqrt{1 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{\lambda_1^2}}}{\frac{\omega^2}{\lambda_1^2} - 1} a_0 \cos(\omega t + \varepsilon + \gamma_0) \\ P_2 &= \frac{\sigma_2^2}{\lambda_2^2} \frac{\sqrt{1 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{\lambda_2^2}}}{\frac{\omega^2}{\lambda_2^2} - 1} a_0 \cos(\omega t + \varepsilon + \gamma_0) \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

и, следовательно, на основании (10) принимать

$$w = \left(\frac{\sigma_1^2}{\lambda_1^2} \frac{\sqrt{1 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{\lambda_1^2}}}{\frac{\omega^2}{\lambda_1^2} - 1} + \frac{\sigma_2^2}{\lambda_2^2} \frac{\sqrt{1 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{\lambda_2^2}}}{\frac{\omega^2}{\lambda_2^2} - 1} \right) a_0 \cos(\omega t + \varepsilon + \gamma_0) \quad (43)$$

$$w \approx \left(\sigma_1 \frac{\sigma_1^2}{\lambda_1^2} \frac{\sqrt{1 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{\lambda_1^2}}}{\frac{\omega^2}{\lambda_1^2} - 1} + \sigma_2 \frac{\sigma_2^2}{\lambda_2^2} \frac{\sqrt{1 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{\lambda_2^2}}}{\frac{\omega^2}{\lambda_2^2} - 1} \right) a_0 \cos(\omega t + \varepsilon + \gamma_0) \quad (44)$$

тем и можно пользоваться для приближенного определения

амплитуд вынужденных колебаний прибора, если только γ есть величина порядка 0,1, а $\omega = 2\lambda_1$.

С помощью обозначений

$$a = a_0 \chi \quad (45)$$

$$\chi = \sigma_1^2 \frac{\sqrt{1 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{\lambda_1^2}}}{\frac{\omega^2}{\lambda_1^2} - 1} + \sigma_2^2 \frac{\sqrt{1 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{\lambda_2^2}}}{\frac{\omega^2}{\lambda_2^2} - 1} \quad (46)$$

равенству (43) можно придать вид

$$w = a \cos(\omega t + \varepsilon + \gamma) \quad (47)$$

и, условившись называть коэффициентом амортизации, как и в § 5, отношение

$$\frac{a}{a_0} = \chi \quad (48)$$

пользоваться для вычисления этого коэффициента равенством (46).

Подходя этот сказанному, можно заметить, следовательно, такой общий порядок вычисления коэффициента амортизации для приборов, подвешенных рассматриваемым образом.

1. С помощью равенств (26) и (27) вычисляют величины

$$\lambda_1^2, \lambda_2^2 \text{ и } \gamma.$$

2. С помощью (25) находят квадраты частот главных свободных колебаний амортизированного тела λ_1^2 и λ_2^2 .

3. По найденным λ_1^2 и λ_2^2 находят с помощью равенств (25) величины v_1 и v_2 , характеризующие формы главных свободных колебаний его.

4. С помощью равенств (29) находят величины σ_1^2 и σ_2^2 .

5. После этого с помощью зависимости (46) вычисляют χ для ряда частных значений ω .

6. По полученным точкам строят график для коэффициента амортизации χ , как функция от ω .

Если бы благодаря неравенству величин λ_1^2 и λ_2^2 резонансная область оказалась для рассмотренного способа подвеса прибора слишком сильно раздвинутой, то следует уменьшать значение коэффициента γ , для чего, как отмечено выше, следует приблизить центр жесткости подвеса к центру тяжести амортизированного тела. Это всегда может быть достигнуто с помощью введения подвеса, изображенного на рис. 10, либо с помощью введения дополнительных горизонтальных амортизаторов надлежащей жесткости, установленных, как показано на рис. 11.

§ 14. Экспериментальное определение основных характеристик установки, требующаяся для экспериментально-теоретического построения резонансной кривой § 13

Теперь, когда вопрос об определении периода обих главных колебаний амортизируемого тела и построении для него кривой резонанса, учитывающей оба его главных движения, подробно рассмотрен, обратимся к рассмотрению равнозначной методики экспериментального определения периода обих колебаний, а равно и экспериментального определения кривой резонанса для амортизируемого прибора.

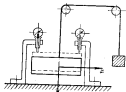


Рис. 12.

Экспериментальное определение периодов свободных колебаний, соответствующих тем поступательным перемещениям прибора, при которых он не имеет тенденции вращаться вокруг той или иной оси, элементарно просто. Необходимо тем или иным способом

сообщить прибору соответствующее начальное отклонение от положения равновесия и, предоставив ему затем возможность свободно перемещаться, записать на соответствующем барабане, вращающемся вокруг оси, параллельной направлению колебаний прибора, совершаемые им свободные колебания. Если диаметр барабана и угловая скорость его вращения, можно легко определить число свободных колебаний, совершаемых прибором в единицу времени, если же запись колебаний произведена в достаточно большом масштабе, то и деформат колебаний, а по нему и пропорциональное деформату относительное сопротивление подвеса, обозначенное выше через γ .

Так, например, если упругий опоры прибора, изображенного на рис. 8, устроены так, что у прибора при перемещении вдоль оси oz нет тенденции вращаться ни вокруг оси oz , ни вокруг оси oy , то для записи свободных колебаний его, соответствующих перемещениям вдоль оси oz , достаточно оттянуть с помощью нити, к концу которой привешен достаточно тяжелый грузик, исследуемый прибор в положение, показанное на рис. 12 пунктиром, а затем, образив нить, дать прибору возможность совершать свои колебания.

При этом нужно лишь проследить за тем, чтобы нить была закреплена к корпусу прибора так, чтобы он получал

под влиянием ее натяжения одно лишь поступательное перемещение вдоль оси oz . Проверить это можно хотя бы с помощью трех микрометрических индикаторов, расположенных не на одной прямой.

Данный метод создания начального отклонения прибора имеет то преимущество, что он позволяет посутой определить коэффициент жесткости исследуемого упругого подвеса, а в случае постоянного увеличения веса подвешиваемого к концу нити грузика, определить связь между величиной поступательного перемещения прибора и величиной усилия.

Если в движении прибора, вызванном начальным строго поступательным перемещением его вдоль оси oz , не обнаружится

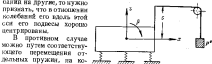


Рис. 13.

колебаний на другие, то можно прийти, что в отклонении колебаний его вдоль этой оси его подвес хорошо центрированы. В противном случае можно путем соответствующего перемещения отдельных пружинок, на которых прибор установлен, привести центр жесткости подвеса на вертикальную ось, проходящую через центр тяжести, и тем отделить колебания прибора в направлении оси oz от всех иных его колебаний.

Сложнее определение периодов тех свободных колебаний прибора, при которых его поступательные перемещения вдоль той или иной оси органически связаны вращательными его перемещениями вокруг другой какой-либо оси. Однако и в этом случае можно добиться того, что прибор после освобождения его от нити, отклонившей его от положения равновесия, будет совершать практически одно лишь из своих главных свободных колебаний, а не оба сразу.

Пусть, например, упругий подвес прибора, изображенного на рис. 12, устроен так, что колебания его вдоль оси oz являются органически связанными лишь с вращением вокруг оси oy , и путем воздействия на прибор усилия, параллельного оси oz , ему невозможно придать такое начальное отклонение, чтобы, будучи освобожден от усилия, отклонившего его от положения равновесия, исследуемый прибор совершал одно из тех двух своих главных свободных колебаний, которые состоят из перемещения центра тяжести прибора вдоль этой оси и одновременно из вращения вокруг оси oy . Посмотрим (рис. 13), на какой высоте z над осью oz надо прикрепить для этого к прибору оттягивающую его нить.

Допустим, что связь между соответствующими главными координатами прибора P_1 и P_2 и его перемещениями α и β дается равенствами:

$$\alpha = P_1 + P_2; \quad \beta = v_1 P_1 + v_2 P_2. \quad (1)$$

где v_1 и v_2 — некоторые коэффициенты, размерность которых очевидно должна вписываться в формулу первой степени.

Представим себе, что прибор совершает то из главных свободных колебаний своих, при котором

$$P_1 \neq 0, \text{ а } P_2 = 0. \quad (2)$$

Тогда во все время движения будет

$$\alpha = P_1; \quad \beta = v_1 P_1. \quad (3)$$

Это главное движение прибора характеризуется, следовательно, тем, что

$$\beta = v_1 \alpha. \quad (4)$$

Точки прибора, лежащие на высоте a над осью oz , колеблются при этом главным колебания прибора по закону

$$(w)_{\alpha-\alpha} = (1 + v_1 a) P_1 \quad (5)$$

в та точка, для которой

$$a = -\frac{1}{v_1} = a_1. \quad (6)$$

никаких колебаний вдоль оси oz не имеет. Следовательно, в своем главном движении прибор качается вокруг точки, для которой

$$z = a_1. \quad (7)$$

где

$$a_1 = -\frac{1}{v_1}. \quad (8)$$

Если v_1 положительно, то эта точка лежит на отрицательном направлении оси oz .

Когда прибор совершает колебания, соответствующие второй его главной координате

$$P_1 = 0, \text{ а } P_2 \neq 0. \quad (9)$$

В этом случае

$$\alpha = P_2; \quad \beta = v_2 P_2. \quad (10)$$

и, следовательно, точка, лежащая на высоте a над осью oz , совершает в этом движении амортизируемого тела колебания

$$(w)_{\beta-\alpha} = (1 + v_2 a) P_2. \quad (11)$$

В точке находится точка, для которой

$$z = a_2. \quad (12)$$

где

$$a_2 = -\frac{1}{v_2}. \quad (13)$$

Так как согласно сказанному в § 8 одна из величин v_1 и v_2 положительна, а другая отрицательна, то центр качания амортизируемого прибора, соответствующий колебаниям, определенным одной из главных координат, лежит по одну сторону плоскости oz , соответствующий же второму из главных колебаний — по другую сторону этой плоскости.

Посмотрим теперь, какое отклонение получает амортизируемое тело под действием силы P , приложенной к нему на высоте $z = a$ и направленной вдоль оси oz .

В этом случае уравнения (3), § 13, заменяются уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{\alpha} + kC_1\dot{\alpha} + C_2\alpha + U_1(\beta + k\dot{\beta}) &= P^0; \\ U_2(\alpha + k\dot{\alpha}) + K_1\dot{\beta} + kC_{22}\dot{\beta} + C_{22}\beta &= P^0\alpha; \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

и так как уравнения (15), § 13, получаются из уравнений (3) путем приближения к первому из уравнений (3) второго, предварительно умноженного на v_1 , то уравнения, которыми определяются главные координаты, должны иметь в данном случае вид:

$$\left. \begin{aligned} M_1^* \ddot{P}_1 + kN_1 \dot{P}_1 + N_1 P_1 &= P^0 (1 + v_1 a); \\ M_2^* \ddot{P}_2 + kN_2 \dot{P}_2 + N_2 P_2 &= P^0 (1 + v_2 a). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

В частном случае, когда рассматриваемая система находится в покое под действием силы P^0 , во времена не меняющейся, должно, следовательно, быть

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{P^0}{N_1} (1 + v_1 a) \\ P_2 &= \frac{P^0}{N_2} (1 + v_2 a) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Поэтому, если мы подберем величину a так, чтобы было

$$a = -\frac{1}{v_1} = a_1, \quad (17)$$

т. е. приложим к рассматриваемому телу натяжение нити P^0 на высоте центра качания, соответствующего второму из главных колебаний тела, то под действием силы P^0 система получит отклонение

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \frac{P^0}{N_1} (1 - \frac{a_1}{a_1}); \\ P_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Если же мы приложим к этому телу силу F^* на такой высоте a , чтобы было

$$a = -\frac{1}{\alpha_1} = a_1, \quad (19)$$

т. е. на высоте центра качания, соответствующего первому из главных колебаний, то будет

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= 0; \\ P_2 &= \frac{F^*}{N_2} \left(1 - \frac{2a_2}{\alpha_2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

В обоих случаях после внезапного прекращения силы амортизируемое тело будет совершать не оба своих главных колебания сразу, а только одно из них.

Поэтому прикладывая силу F^* последовательно к различным точкам тела, и затем внезапно освобождая последнее от действия данной силы, можно попутно с определением частот обоих главных свободных колебаний исследуемого тела нащупать экспериментально, на какой высоте лежат центры качания, соответствующие обоим главным колебаниям амортизируемого тела.

Если бы вертикальная координата центра тяжести прибора была бы нам известна, то мы могли бы, следовательно, определить непосредственно из опыта как величину a_1 , так и величину a_2 , чем определялись бы и коэффициенты v_1 и v_2 выражения (1), ибо согласно (8) и (13):

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= -\frac{1}{\alpha_1}; \\ v_2 &= -\frac{1}{\alpha_2}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Если, как обычно, положение центра тяжести прибора не является в точности известным, то определить величины a_1 и a_2 можно следующим образом.

Допустим, что мы определили экспериментально частоты обоих главных колебаний

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1^2 &= \frac{N_1}{M_1} = \frac{N_1}{M + v_1^2 K_y} = \frac{N_1}{M + \frac{1}{\alpha_1^2} K_y} \\ \lambda_2^2 &= \frac{N_2}{M_2} = \frac{N_2}{M + v_2^2 K_y} = \frac{N_2}{M + \frac{1}{\alpha_2^2} K_y} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

и попутно нашли центры качания прибора обоих этих колебаний

Тогда величины

$$a_1 - a_2$$

будет нам известна, как расстояние между обоими центрами качания.

Допустим, что, приложив силу F^* к центру качания, соответствующему изменности координаты p_2 , мы измерили перемещение тела на уровне обоих центров качания, т. е. измерили величины

$$\left. \begin{aligned} (u)_{h=a_1} &= (1 + v_1 \alpha_1) p_1 \\ (u)_{h=a_2} &= (1 + v_2 \alpha_2) p_2. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Второй из них должен быть равен нулю в силу равенства (13), первый же должен быть в силу (23) связан с F^* зависимостью

$$(u)_{h=a_2} = (1 + v_2 \alpha_2) p_2. \quad (24)$$

Таким образом, измерив величину $(u)_{h=a_2}$, соответствующую рассматриваемой нагрузке тела, определим тем самым величину

$$\frac{(1 + v_2 \alpha_2)^2}{N_2} F^* = A_2 F^*. \quad (25)$$

Приложим теперь силу F^* к телу на уровне центра качания, соответствующего изменности координаты p_1 .

Тогда будет

$$\left. \begin{aligned} (u)_{h=a_1} &= (1 + v_1 \alpha_1) p_1 = 0; \\ (u)_{h=a_2} &= (1 + v_2 \alpha_2) p_2. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

так что измерив $(u)_{h=a_2}$, получим величину

$$\frac{(1 + v_1 \alpha_1)^2}{N_1} F^* = A_1 F^*. \quad (27)$$

Определив экспериментально величины A_1 и A_2 , мы будем, следовательно, знать отношения

$$\frac{(1 + v_1 \alpha_1)^2}{N_1} = A_1; \quad \frac{(1 + v_2 \alpha_2)^2}{N_2} = A_2. \quad (28)$$

или, что то же, отношения

$$\left. \begin{aligned} \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{N_1 \alpha_1^2} &= A_1; \\ \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)^2}{N_2 \alpha_2^2} &= A_2. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Но $a_1 - a_2$, как уже отмечено, нами предварительно найдено. Можно поэтому считать известными величины

$$\left. \begin{aligned} N_1 a_1^2 &= \frac{A_1}{(\omega_1 - \omega_0)^2} \\ N_2 a_2^2 &= \frac{A_2}{(\omega_2 - \omega_0)^2} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Теперь обратимся к равенствам (22). Из них следует, что

$$\left. \begin{aligned} M a_1^2 + K_x &= \frac{N_1 a_1^2}{\lambda_1^2} = \frac{A_1}{\lambda_1^2 (\omega_1 - \omega_0)^2} \\ M a_2^2 + K_y &= \frac{N_2 a_2^2}{\lambda_2^2} = \frac{A_2}{\lambda_2^2 (\omega_2 - \omega_0)^2} \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

откуда

$$M(a_1^2 - a_2^2) = \frac{A_1}{\lambda_1^2 (\omega_1 - \omega_0)^2} - \frac{A_2}{\lambda_2^2 (\omega_2 - \omega_0)^2} \quad (32)$$

и, следовательно,

$$a_1 + a_2 = \frac{1}{M(\omega_1 - \omega_0)^2} \left(\frac{A_1}{\lambda_1^2} - \frac{A_2}{\lambda_2^2} \right) \quad (33)$$

Так как все величины, входящие в правую часть равенства (33), нам известны, то с помощью зависимости (33) можно определить величину

$$a_1 + a_2$$

а так как величина

$$a_1 - a_2$$

нами уже найдена, то можно вычислить как a_1 и a_2 , так и v_1 и v_2 .

После этого можно K_x найти как из первого, так для проверки и из второго из уравнений (31), а затем раскрыть M_1 и M_2 с помощью зависимостей:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= M + \frac{1}{a_1^2} K_{y_1} \\ M_2 &= M + \frac{1}{a_2^2} K_{y_2} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

а N_1 и N_2 с помощью равенств

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= \lambda_1^2 M_1 \\ N_2 &= \lambda_2^2 M_2 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Таким образом, с помощью описанных нами опытов можно определить экспериментально, как было отмечено вступительной частью, соответствующих обобщенных главных колебаний, так и положение центра

тяжести амортизируемого тела, равно как и обобщенные жесткости N_1 и N_2 и обобщенные массы M_1 и M_2 для обеих главных колебаний системы, т. е. полностью определить все характеристики обеих главных колебаний системы.

§ 13. Экспериментально-теоретическое построение кривой резонанса

По полученным экспериментальным данным можно построить теоретическую кривую для коэффициента амортизации

$$X = \left(\frac{\sigma_1^2}{\omega^2 - 1} + \frac{\sigma_2^2}{\omega^2 - 1} \right) \sqrt{1 + \gamma^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \quad (1)$$

(см. формулу (46), § 13). Для этого нужно лишь раскрыть предварительно (см. равенства § 13) величины

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1^2 &= \frac{C_x + v_1 U_x}{M_1} \\ \sigma_2^2 &= \frac{C_x + v_2 U_x}{M_2} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и

$$\sigma_0^2 = \frac{C_x}{M} \quad (3)$$

Величины M_1 и M_2 , а также v_1 и v_2 , входящие в равенство (2), будем предполагать найденным способом, указанным в предыдущем параграфе.

Для определения остальных величин, входящих в равенство (1), нам остается, следовательно, раскрыть лишь C_x и U_x .

Для определения коэффициента C_x достаточно надувать экспериментально ту высоту, на которой нужно приложить к амортизируемому телу силу P^* , чтобы тело переместилось под действием данной силы только вынужденно вдоль оси ox , без вращения вокруг оси oy , и измерить вынужденное перемещение w_0 этого тела вдоль упомянутой оси, вызываемое действием силы P^* . Зная w_0 и P^* , можно C_x определить как коэффициент пропорциональности в формуле

$$C_x w_0 = P^* \quad (4)$$

т. е. определить C_x как отношение

$$C_x = \frac{P^*}{w_0} \quad (5)$$

Для определения величины U_x достаточно приложить силу F^0 к рассматриваемому телу на высоте

$$z = a_0$$

Тогда будет $p_0 = 0$ и, следовательно,

$$\begin{cases} u_0 = p_0; \\ \beta = v_1 p_0 \end{cases} \quad (6)$$

и, измерив соответствующее напряжение тела перемещению прибора на уровне его центра тяжести, получим

$$\beta = v_1 u_0 \quad (7)$$

Что по подстановке в первое из уравнений (15), § 13, даст

$$(C_x + v_1 U_x) u_1 = F^0 \quad (8)$$

и, следовательно,

$$(C_x + v_1 U_x) = \frac{F^0}{u_1} \quad (9)$$

Аналогичным образом можно величину $C_x + v_1 U_x$ определить по формуле

$$C_x + v_1 U_x = \frac{F^0}{u_2} \quad (10)$$

где u_2 — перемещение вдоль оси oz , измеренное на уровне центра тяжести прибора, когда он загружен силой F^0 на уровне

$$z = a_1 \quad (11)$$

т. е. на уровне центра качания, соответствующего изменению координаты P_0 .

Зная величину C_x ; $(C_x + v_1 U_x)$ и $(C_x + v_2 U_x)$, можно от u_1^0 и u_2^0 определить по формулам (2) и (3) и, зная из опыта от затухания свободных колебаний, соответствующих поступательному движению прибора вдоль оси oz , и вычисляя x для ряда частных значений ω , больших, чем $\omega_{\text{крит}}^0$, построить по полученным точкам кривую, зависящую x , как функцию от ω .

§ 16. Рациональная методика чисто экспериментального определения кривых резонанса для амортизированных тел поступательных колебания центра тяжести коих несомненно от соответствующих вращательных колебаний вокруг этого центра

В предыдущем параграфе был изложен способ полупромышленного, полутеоретического построения кривой, связывающей коэффициент амортизации x с частотой возмущающей силы для случая, когда колебание прибора вызывается действием

поступательных колебаний основания прибора вдоль оси oz .

Способ этот интересен в том отношении, что не требует для построения упомянутой кривой наличия в распоряжении экспериментатора точной измерительной аппаратуры, позволяющей с большой степенью точности фиксировать малые колебания большой частоты. Измерительная аппаратура, требующаяся для проведения опытов, описанных в предыдущем параграфе, должна работать не при всех частотах вынужденных колебаний амортизируемого тела, а лишь при свободных колебаниях его, частота которых для достижения хороших коэффициентов амортизации должна быть в несколько раз меньше частоты амортизируемых колебаний. Кроме того, от аппаратуры, требующейся для проведения опытов, описанных в предыдущих двух пунктах, же требуется точной градуировки в смысле записи амплитуд соответствующих колебаний, ибо точного измерения амплитуд в этих опытах вообще не требуется: описанные в § 14 и 15 исследования требуют лишь фиксирования частот свободных колебаний амортизируемого тела, амплитуды же их нет необходимости записывать в каком-либо определенном масштабе. Максимум, что от этой аппаратуры и от этих опытов требуется, чтобы по записи наблюдаемых колебаний можно было видеть, является ли рассматриваемое колебание простым затухающим колебанием, или же оно состоит из двух таких колебаний, друг на друга наложенных.

Если в распоряжении экспериментатора имеется аппаратура, позволяющая фиксировать с достаточной точностью амплитуды тех весьма быстрых и малых колебаний, которые должны оставаться у амортизируемого тела в корабельных условиях, то можно кривую, связывающую x и ω , построить и чисто экспериментальным путем. Для этого необходимо либо осознать соответствующие колебания основанием амортизатора (с помощью вибратора, если речь идет об изучении поведения амортизатора в условиях корабельной вибрации, или вращающегося стержня, если речь идет об изучении поведения прибора при частотах, характерных для местных сотрясаний корпуса корабля в бою), фиксировать, какая доля колебаний передается амортизатором амортизируемому прибору при различных частотах его вынужденных колебаний; либо же прикладывать тем или иным способом к амортизируемому телу, установленному на неподвижном фундаменте, усилия, равные тем усилиям, которые действовали бы на амортизируемое тело, если бы его перемещение в неподвижном пространстве было в точности равно соответствующим колебаниям корабля в месте крепления основания амортизатора.

Второй из этих способов применим, по-видимому, лишь при изучении действия амортизаторов, предназначенных для гашения ходовой вибрации корабля, ибо невозможно искусственно приложить к испытываемым объектам усилия столь большой величины и столь большой частоты, как те усилия, действия которых

эти объекты должны подвергаться при испытаниях на выносливость в условиях боя.

При съемке на краевых резонансах, относящихся к гашению ходовой вибрации корабля, особенно при изучении влияния ходовой вибрации на объекты искусственного громадного, второй же упомянутым выше способом возбуждения нужных колебаний амортизированного тела может представлять большие преимущества перед первым. Чем больше масса амортизированного тела, тем труднее построить для его испытания достаточно жесткую виброплатформу, совершающую большое число колебаний в единицу времени. Приведенной жесткости виброплатформы, колебания установленной на ней испытываемого объекта могут быть весьма заметно искажены деформациями виброплатформы, так что величина и даже характер наблюдаемых колебаний могут оказаться зависящими не столько от устройства испытываемого объекта, сколько от устройства той виброплатформы, на которой объект установлен.

Автор настоящей статьи имел возможность наблюдать колебания дальнометров, установленных на двух различных, впрочем, несколько кустарного типа, виброплатформах. В обоих случаях у испытываемых объектов при некоторых членах колебаний в минусу наблюдались столь значительные иррегулярные колебания труб дальнометров, что вести при этих частотах колебаний отчетливые измерения было невозможно. Было чрезвычайно затруднительно установить, что является причиной наблюдаемых угловых колебаний дальнометра: деформация ли самой дальнометровой установки или же деформация той платформы, на которой дальномер испытывался. При этих условиях нельзя в сущности иметь даже уверенность, что резонансные режимы, фиксируемые во время опыта, присущи самим испытываемым объектам, а не тем платформам, на которых объекты подвергаются испытанию.

Автор настоящей статьи предлагает ограничить область применения виброплатформ для снятия краевых резонансов испытательными лишь приборами столь малого веса, чтобы для их испытания можно было изготовить недеформируемые платформы. При испытании же установок, весных несколько сот килограммов, а тем более тысяч, вес которых может измеряться тоннами, лучше устанавливать испытываемые объекты не на подвижных виброплатформах и вибростендах, совершающих колебания заданной частоты и амплитуды, а на неподвижном, возможно более недеформируемом основании, настолько жестком и массивном, чтобы колебания этого основания были пренебрежимо малы по сравнению с колебаниями испытываемой установки, и прикладывать к испытываемому объекту искусственно те усилия, которые на него могут действовать в условиях корабельной вибрации.

Чтобы пояснить на простейшем примере, о каком собственно вложенении опыта идет речь, рассмотрим колебания материальной точки M , соединенной пружиной, коэффициент жест-

кости которой N , с колеблющейся точкой, совершающей гармонические колебания по закону

$$z = a_0 \cos \omega t \quad (1)$$

Мы видели выше, в § 5, что при наличии в упругом подвесе сопротивления, пропорционального скорости относительного перемещения массы M по отношению к точке закрепления упругого подвеса к внешней вибрирующей конструкции, совершающей колебание по закону (1), перемещение x массы M по отношению к неподвижному пространству определяется дифференциальным уравнением

$$M \ddot{x} + H \dot{x} + Nx = Nz + H \dot{z} = N a_0 \cos(\omega t + \epsilon), \quad (2)$$

где

$$a_1 = a_0 \sqrt{1 + \frac{H^2}{2N^2}} \quad (3)$$

Совершенно такие же колебания будет совершать масса M , если она, прикрепив другой конец пружины, на которой эта масса подвешена, не к точке, совершающей колебания по закону (1), а к неподвижной среде, заставим действовать на массу M (см. рис. 14) внешнюю гармоническую силу P , меняющуюся во времени по закону

$$P = P^0 \cos(\omega t + \alpha), \quad (4)$$

где

$$P^0 = N a_1, \quad (5)$$

и a_1 определяется зависимостью (3).

Осуществить такой опыт можно различными способами. Можно, например, прикрепить к массе M (см. рис. 15), висевшей на пружине жесткости N , один конец настолько эластичной пружины жесткости K , чтобы натяжение последней не могло изменяться от тех перемещений, которые может совершать масса во время предстоящего опыта.

Прикрепив другой конец второй пружины к ползуну, совершающему гармонические колебания по закону

$$y = b \cos(\omega t + \alpha), \quad (6)$$

и подобрав величину b из условия

$$Kb = P^0 = N a_1, \quad (7)$$



Рис. 14.

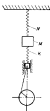


Рис. 15.

мы устанавливаем вторую пружину жесткости K прикладываем к массе M усилие, меняющееся во времени по закону (4), т. е. по тому самому закону, по которому является соответствующая фиктивная внешняя сила, действующая на массу M в условиях корабельной вибрации, определяемой законом (3).

Проведения такого рода опыт в условиях заводской лаборатории над установкой значительного веса неизмеримо проще, чем построить для испытания исследуемого упругого подвеса соответствующую виброплатформу, вес которой будет всегда во много раз больше веса того криволинейного механизма, который заставляет колебаться натяжение пружины, прикладываемой к массе M усилие, меняющееся по закону (4). Мало того, располагая изображенной на рис. 15 сравнительно простой, легкой и дешевой установкой для создания этих усилий, мы, проведя соответствующий опыт в заводской обстановке, скажем над трубой дальномера, тубы которого закреплена к практически неподвижному бетонному массиву, можем повторить тот же опыт на корабле, немедленно после установки дальномера на последний, и, следовательно, избежать, не исказившись ли колебания массы M корабельным фундаментом, еще задолго до выхода корабля в море на ходовые испытания.

Таким образом, изображенная на рис. 15 относительно весьма простая установка для воспроизведения усилий, меняющихся во времени по гармоническому закону, позволяет не только проводить испытание амортизационных подвесов дальномеров в цеховых условиях, а притом производить их так, чтобы результаты опыта не искажались деформациями виброплатформы, трещущей основание дальномера, но и повторять такие же опыты на корабле, проверяя корабельный фундамент дальномера в процессе постройки корабля, а не тогда, когда корабль построен и вышел в море на ходовые испытания и когда переделки фундамента неизмеримо сложнее переделок, производимых в процессе постройки корабля.

Если сказано только что справедливо в отношении испытания амортизированных тел, колебания которых можно с достаточной точностью уподобить колебаниям материальной точки, то тем более справедливо оно в отношении таких устройств, при колебаниях которых поступательные движения центра тяжести вдоль одной какой-либо оси неотделимы от вращательных движений вокруг других осей.

Примером такого рода устройств могут служить амортизированные тубы дальномеров. Хотя такие тубы и снабжаются в дополнение к поддерживающим их пружинам (см. рис. 16) еще особыми параллелограммами для устранения соответствующих вращательных движений амортизированного тела, но, сколько бы мы ни стремились уменьшить жесткость параллелограммов, они не могут быть сделаны абсолютно недеформируемыми, и при некоторых частотах колебаний возмущающей силы конструкция, име направляемая, может попасть в резонанс с упругими коле-

баниями, соответствующими деформации упомянутых параллелограммов. Необходимо иметь уверенность либо в том, что частота соответствующих свободных колебаний тубы значительно превосходит все частоты ходовой вибрации корабля, либо же в том, что параллелограммы, направляющие тубы, настолько жестки, что даже в случае попадания ходовой вибрации в резонанс с вращательными колебаниями тубы, ее угловые колебания не выйдут за определенных пределов.

Изображенное на рис. 15 устройство позволяет прикладывать к амортизированной тубе соответствующие возмущающие силы как в цеху при установке основания тубы на практически неподвижный фундамент, так и на корабле, в процессе постройки последнего. Проведение соответствующих испытаний необходимо в цеху завод-строителя туб для определения жесткости параллелограммов устройства тубы, на корабле же — для проверки жесткости того корабельного фундамента, на который дальномер ставится.

При прекращении движения неподвижного основания, за которым он был испытан в цеху завода-строителя, на корабельный, всегда по необходимости более упругий фундамент, частота угловых колебаний амортизированной тубы может сильно снизиться в результате того, что в упругим переоснащенном тубы, соответствующим деформациям своих направляющих параллелограммов (см. рис. 17), на корабле могут всегда прибавиться изображен-



Рис. 16.

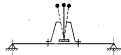


Рис. 17.



Рис. 18.

ные на рис. 18 упругие колебания той части установки, которая была при испытании в цеху неподвижной. Если бы поэтому после установки дальномера на корабль оказалось, что у него можно ожидать под действием ходовой вибрации корабля непустые угловые колебания, то, располагая данными о частотах и формах главных колебаний тубы дальномера, монтированной как на неподвижном бетонном фундаменте завода-строителя, так и на корабле, можно разобраться, какими средствами можно

устранить колебание: перемещая ли направляющих параллелограммов тубы диаметром, или же подкреплением соответствующего корабельного фундамента диаметром и клин именно подкреплением его.

То же, но и еще большей мере относится и к испытанию корабельных постов и амортизированных от шидовой вибрации платформ. Те параллелограммы (см. рис. 19), которыми осаживаются эти посты и платформы приходятся слабыми для устранения угловых колебаний постов или платформ, не могут быть сделаны абсолютно жесткими. Деформироваться же они могут, как и

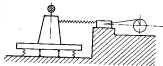


Рис. 19.

результате недостаточной жесткости самих параллелограммных тиг, так и в результате кособоки тех балок поста, к которым они крепятся и равно, наконец, в результате полной неподвижности тех точек корабельного основания поста, которые должны быть абсолютно неподвижными, чтобы абсолютно жесткий параллелограмм мог полностью устранить угловые колебания основания платформы.

Параллельная фиксация форм и периодов главных свободных колебаний исследуемого поста или тубы в заводской обстановке при монтаже испытуемого объекта на практически неподвижном основании, и затем на корабле может всегда дать совершенно объективный материал для суждения о том, следует ли для устранения обнаруженных угловых колебаний поста увеличивать жесткость самого параллелограмма, или каких-либо иных частей амортизируемой установки, как же для этого надо в первую очередь увеличивать жесткость тех корабельных конструкций, к которым крепятся основания направляющих исследуемый объект параллелограммов.

Всюкую болезнь можно уверенно лечить, зная ее сущность и происхождение. Поэтому, чем сложнее болезнь, тем более внимательного анализа требует она.

Так обстоит дело и со всеми корабельными вибрирующими установками. Чем установка более громоздка и чем она сложнее, тем большее количество разнообразных причин может привести к появлению у этой установки недопустимой вибрации и тем

более внимательный анализ требуется для установления истинных причин этой вибрации, а следовательно, и для того, чтобы наметить комплекс мероприятий, способных устранить именно то место недопустимую вибрацию установки.

Рассматриваемые кружные вибрации позволяют прикладывать гармонические возмущающие силы к разнообразным частям установки и, имитируя те условия, которые могут действовать на эти части установки в условиях корабельной вибрации, дают возможность заблаговременно обнаруживать слабые звенья испытуемых установок и заблаговременно их укреплять и исправлять.

24. ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ВЕЛИЧИНЕ ВНУТРЕННЕГО СОПРОТИВЛЕНИЯ АМОРТИЗАЦИОННЫХ ПОДВЕСОВ*

1. Для того чтобы упругие колебания корпуса корабля не передавались различным корабельным приборам, последние подвешиваются к корпусу корабля с помощью подвесов, столь легко деформируемых, что подвешиваемый к корпусу корабля прибор остается практически в состоянии покоя, когда у корабля наблюдаются заметные вибрации. Теория действия подобного рода устройств показывает, что вынужденные колебания усомниваемой детали получатся тем меньшими, чем больше период собственных свободных колебаний подвешенного тела по отношению к периоду возмущающих сил, т. е. к периоду вибрации корабля в точке крепления подвеса.

Опыт показывает, что при достаточной эластичности подвеса правильные гармонические колебания корабля могут быть амортизированы с помощью упругих подвесов.

Обычно «естественная» вибрация, которая единственно лишь и наблюдается у корпусов современных кораблей с хорошо собранными уравновешенными машинами, никогда не носит характера правильных гармонических колебаний. Корпус корабля совершает довольно беспорядочные колебания, причем эта беспорядочность заставляет все время вновь и вновь появляться свободные колебания амортизируемого тела.

Если в конструкции амортизируемого подвеса никаких сопротивлений не введено, то увеличивая только что постоянно увеличивающиеся свободные колебания амортизируемого тела могут достигнуть весьма заметной величины. Опыт показывает, что амплитуда этих колебаний иногда в несколько раз превосходит амплитуду тех вынужденных колебаний, которые совершила бы подвешиваемое к корпусу корабля тело, если бы конструкция его подвесов была жесткой.

Если при этих условиях прибор, подвешиваемый к корпусу корабля на эластичных подвесах, ведет себя в отношении его действия лучше, чем прибор, прикрепляемый к корпусу корабля жест-

ко, то объясняется это обычно лишь понижением частоты тех колебаний, которые у него в случае упругого подвеса наблюдаются. В случае жесткого крепления к корпусу частота колебаний прибора равна частоте колебаний корпуса корабля и относительно велика. В случае же упругого подвеса частота колебаний прибора становится равной частоте собственных колебаний подвеса и относительно мала.

Таким образом, упругие подвесы, в конструкцию которых не введено сопротивление, уменьшают практически до амплитуду колебаний амортизируемого тела, а лишь амплитуду ускорений этих колебаний.

Надо помнить, что введение в амортизационный подвес специально подобранного сопротивления сможет повысить интенсивность затухания увеличенных выносов, все вновь и вновь возникающих свободных колебаний амортизируемого тела. Однако, сделав величину этого сопротивления чрезмерно большой, можно превратить упругий подвес в систему почти не деформируемую. Должно, следовательно, существовать такое сопротивление, величина которого является оптимальной. Эту величину его и постараемся найти, для чего рассмотрим сначала, какое влияние оказывает сопротивление, вводимое в амортизатор, на интенсивность затухания свободных колебаний амортизируемого тела, а затем, каково его влияние на величину правильных гармонических вынужденных колебаний прибора. Для простоты будем вести все рассуждения приваженно к случаю, когда внутреннее сопротивление, введенное в прибор, есть сопротивление, пропорциональное скорости относительного перемещения прибора по отношению к кораблю.

2. Допустим, что

- M — масса амортизируемого тела;
- N — коэффициент восстанавливающей силы;
- $2H$ — коэффициент сопротивления, введенного в подвес;
- x — относительное перемещение массы M по отношению к кораблю;
- z — перемещение корабля в точке подвеса амортизатора.

Допустим, что масса M может совершать по отношению к корпусу корабля лишь поступательные перемещения, характеризующиеся величиной x , можем принять за основу дифференциальное уравнение колебаний массы M ,

$$M(x'' + x''') + 2Hx' + Nx = 0,$$

или, что то же

$$Mx'' + 2Hx' + Nx = -Mz''.$$
 (1)

Это уравнение и подлежит исследованию, чтобы решить задачу, сформулированную выше.

* Печатается впервые.

3. Допустим сначала, что $x = 0$ и последуют свободные колебания амортизированного тела. Положим в (1) $x = 0$, получим для u уравнение

$$M u'' + 2H u' + N u = 0, \quad (2)$$

или, введя обозначения

$$\left. \begin{aligned} \lambda^2 &= \frac{N}{M}; \\ 2\lambda &= \frac{2H}{M}; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$u'' + 2\lambda u' + \lambda^2 u = 0. \quad (4)$$

Общим интегралом этого уравнения является выражение

$$u = e^{-\lambda t} (A \cos \mu t + \sin \mu t), \quad (5)$$

где

$$\mu^2 = \lambda^2 - \lambda^2. \quad (6)$$

Из (5) и (6) видно, что если

$$\lambda > \lambda,$$

то движение массы M носит характер затухающих колебательных движений. При этом в каждую единицу времени амплитуда колебания массы M затухает в

$$k = e^{\lambda} \quad (7)$$

раз.

Условимся обозначать величину k в формулах (5) и (7) интенсивностью затухания колебаний массы M . Как видно из (6) и (7), движение массы M имеет характер затухающих колебаний только до тех пор, пока

$$\lambda < \lambda. \quad (8)$$

Если неравенство (8) не имеет места, то μ , определяемое формулой (6), становится мнимым и формула (5) обращается в

$$u = A e^{-(\lambda - i\mu)t} + B e^{-(\lambda + i\mu)t}. \quad (9)$$

Можно показать, что если μ определяется зависимостью (9) и $\sqrt{\lambda^2 - \lambda^2}$ реально, то, чем больше λ , тем медленнее убывает раз создающее отклонение массы M .

Действительно, пусть при $t = 0$

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0; \\ u' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Определив в (9) постоянные A и B из начальных условий (10), получим

$$A + B = 0;$$

$$A(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \lambda^2}) + B(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \lambda^2}) = 0.$$

Отсюда следует

$$A = \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \lambda^2}}{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \lambda^2}} B;$$

$$B = u_0 \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \lambda^2}}{2\sqrt{\lambda^2 - \lambda^2}};$$

$$A = u_0 \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \lambda^2}}{2\sqrt{\lambda^2 - \lambda^2}}.$$

Таким образом подставив μ , определяемое равенством (9), в начальных условиях (10), мы должны иметь

$$u = u_0 \left[\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \lambda^2}}{2\sqrt{\lambda^2 - \lambda^2}} e^{-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \lambda^2})t} + \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \lambda^2}}{2\sqrt{\lambda^2 - \lambda^2}} e^{-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \lambda^2})t} \right], \quad (11)$$

если

$$\lambda > \lambda \quad (12)$$

и

$$u = u_0 e^{-\lambda t}, \quad (13)$$

если

$$\lambda = \lambda. \quad (14)$$

Чтобы выяснить, каким образом зависит μ от t при λ большем, чем λ , коэффициенты выражения (11) были подсчитаны для ряда частных значений отношения $\lambda : \lambda$, больше чем единица. Оказалось, что если

$$\sqrt{\lambda^2 - \lambda^2} = 0,1\lambda, \text{ т. е. если } \lambda = 1,0005\lambda, \text{ то}$$

$$u = [5,525 e^{-0,9995\lambda t} - 4,525 e^{-1,0005\lambda t}] u_0.$$

Если $\sqrt{\lambda^2 - \lambda^2} = 0,3\lambda$, т. е. если $\lambda = 1,045\lambda$, то

$$u = [2,24 e^{-0,755\lambda t} - 1,24 e^{-1,345\lambda t}] u_0.$$

Если $\sqrt{\lambda^2 - \lambda^2} = 0,5\lambda$, т. е. если $\lambda = 1,165\lambda$, то

$$u = [1,47 e^{-0,665\lambda t} - 0,47 e^{-1,835\lambda t}] u_0.$$

и, наконец, если $\sqrt{\lambda^2 - \lambda^2} = \lambda$, т. е. если

$$\lambda = 1,41\lambda, \text{ то}$$

$$u = [1,205 e^{-0,41\lambda t} - 0,205 e^{-2,41\lambda t}] u_0.$$

Выражения эти показывают, что при $\lambda > \lambda_0$ положительная часть в общем выражении для u убывает при увеличении отношения $\lambda : \lambda_0$ во времени все медленнее и медленнее, уменьшающаяся же отрицательная часть — все быстрее и быстрее. При всяком заданном λ величина λ_0 должна в этих условиях уменьшаться тем медленнее, чем больше отношение $\lambda : \lambda_0$. Таким образом с точки зрения быстроты затухания свободных колебаний массы M увеличивать величину λ сверх того значения λ_0 , когда $\lambda = \lambda_0$, невыгодно, а так как при λ величине, чем λ_0 , интенсивность затухания свободных колебаний увеличивается с увеличением величины λ , то следует признать, что с точки зрения быстроты затухания свободных колебаний системы, оптимальным значением величины λ является при всяком заданном λ_0 значение

$$\lambda = \lambda_0.$$

4. Обратимся к рассмотрению вынужденных колебаний массы M , вызываемых действием правильной гармонической вибрации корабля. Допустим, что точка подвеса амортизатора к кораблю совершает колебания, определяемые законом:

$$x = a \cos \omega t \quad (15)$$

и разъем сначала относительные перемещения массы M по отношению к кораблю u , а затем и абсолютные перемещения этой массы точки $x + z$.

Подставив (15) в (3), будем иметь для каждой точки m :

$$m'' + 2 \delta m' + \lambda^2 u = a \omega^2 \cos \omega t. \quad (16)$$

Уравнение это допускает частное решение вида

$$u = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad (17)$$

которым и определяются интересующие нас вынужденные колебания массы M .

Константы A и B , входящие в (17), должны удовлетворять в силу (16) уравнению

$$[A(\lambda^2 - \omega^2) + 2\delta \omega B] \cos \omega t + [B(\lambda^2 - \omega^2) - 2\delta \omega A] \sin \omega t = a \omega^2 \cos \omega t,$$

что будет иметь место, если

$$\begin{aligned} A(\lambda^2 - \omega^2) + 2\delta \omega B &= a \omega^2, \\ -2\delta \omega A + (\lambda^2 - \omega^2) B &= 0. \end{aligned}$$

Из этих двух уравнений следует

$$\begin{aligned} A &= a \omega^2 \frac{\lambda^2 - \omega^2}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}; \\ B &= a \omega^2 \frac{2\delta \omega}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}. \end{aligned}$$

что во подстановке в (17) дает

$$u = a \omega^2 \left[\frac{\lambda^2 - \omega^2}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2} \cos \omega t + \frac{2\delta \omega}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2} \sin \omega t \right]$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} u + x &= a \left[\left(1 + \frac{\omega^2 (\lambda^2 - \omega^2)}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2} \right) \cos \omega t + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\delta \omega}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2} \sin \omega t \right]. \end{aligned}$$

или, что то же

$$u + x = a \left[\frac{\lambda^2 (\lambda^2 - \omega^2) + 4\delta^2 \omega^2}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2} \cos \omega t + \frac{2\delta \omega}{(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2} \sin \omega t \right].$$

Выражению этому можно придать вид

$$u + x = c \sin(\omega t + \epsilon), \quad (18)$$

положив

$$c^2 = a^2 \frac{[\lambda^2 (\lambda^2 - \omega^2) + 4\delta^2 \omega^2]^2 + 4\delta^2 \omega^4}{[(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2]^2} \quad (19)$$

и

$$\operatorname{tg} \epsilon = \frac{\lambda^2 (\lambda^2 - \omega^2) + 4\delta^2 \omega^2}{4\delta \omega}. \quad (20)$$

Равенством (19) и определяется искомая амплитуда вынужденных колебаний точки M .

5. Отношение $c : a$, определяемое зависимостью

$$c : a = \sqrt{\frac{[\lambda^2 (\lambda^2 - \omega^2) + 4\delta^2 \omega^2]^2 + 4\delta^2 \omega^4}{[(\lambda^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2]^2}}, \quad (21)$$

показывает, какую долю от амплитуды колебаний корабля в точке подвеса массы M составляет амплитуда вынужденных колебаний массы. Величину эту можно, следовательно, принять за характеристику того, во сколько раз уменьшается упругость подвеса точки M и вынужденные колебания.

Условием назвать эту характеристику действия амортизатора отношением амортизации вынужденных колебаний используемого тела и поставимся выяснить, каково численное влияние на эту величину отношений $\lambda : \lambda_0$ и $\omega : \lambda_0$. Ограничимся рассмотрением тех лишь случаев, когда $\lambda : \lambda_0$ лежит в пределах

$$0 < \lambda : \lambda_0 < 1,$$

ибо при больших значениях этого отношения, как то было показано выше, свободные колебания массы затухают менее интенсивно, чем когда $\lambda = \lambda_0$.

Если $\lambda = 0$, то согласно (21)

$$c : a = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - \omega^2} \quad (22)$$

и при $\omega : \lambda$ достаточно большим

$$c : a = \frac{\lambda^2}{\omega^2} \quad (23)$$

Если $\lambda = \lambda$, то согласно (21)

$$c : a = \frac{\sqrt{(\lambda^2 + 2\omega^2 \lambda^2) + 4\lambda^2 \omega^2}}{2(\lambda^2 + \omega^2)} \quad (24)$$

и при $\omega : \lambda$ достаточно большим

$$c : a = \frac{2\lambda}{\omega} \quad (25)$$

При промежуточных значениях отношений $\lambda : \lambda$ и $\omega : \lambda$ квадрат степени амортизации $c^2 : a^2$ принимает значения, собранные в таблице.

6. Можно составить приближенную формулу, дающую примерно тот же результат, что и таблица, приведенная ниже.

Для вывода этой формулы введем обозначения

$$\begin{cases} \eta = \omega : \lambda; \\ \nu = \lambda : \lambda. \end{cases} \quad (26)$$

Тогда формула (21) примет вид

$$c : a = \sqrt{\frac{\eta^2(4\nu^2 - 1) + 1}{(\eta^2 - 1)^2 + 4\nu^2 \eta^2}} \quad (27)$$

Так как отношения η необходимо делать большими единицы и с точки зрения амортизации вынужденных колебаний, и с точки зрения гишине свободных колебаний, то знаменатель подрадикальной величины выражения (27) можно при достаточно больших η (больших чем 10), принять близким к η^2 .

В числителе формулы (27) член $4\nu^2 \eta^2$ при значениях η сколь угодно отличных от нуля значительно превышает величину члена $[\eta^2(4\nu^2 - 1) + 1]^2$. Последнюю можно вычислить с относительно малой точностью.

Приглашая во внимание, что последний член дает более заметную поправку к величине $c : a$ лишь при η достаточно малых, когда $\eta^2(4\nu^2 - 1)$ есть величина порядка η^2 , можно принять $\eta^2(4\nu^2 - 1) + 1$ за $\eta^2(4\nu^2 - 1)$ или даже просто за η^2 .

Положив в числителе формулы (27),

$$[\eta^2(4\nu^2 - 1) + 1]^2 \approx \eta^2,$$

получим

$$c : a \approx \frac{1}{\eta} + \frac{4\nu^2}{\eta^2} \quad (28)$$

Формула (28) дает для крайних значений величины η :

$$c : a = \frac{1}{\eta^2} = \frac{\lambda^2}{\omega^2} \quad \text{при} \quad \eta = 0; \quad (29)$$

$$c : a = \frac{2}{\eta} = \frac{2\lambda}{\omega} \quad \text{при} \quad \eta = 1; \quad (30)$$

т. е. результаты, которые получены были выше [см. формулы (23) и (25)]. Можно поэтому выражение (28) или, что то же

$$c : a = \sqrt{\frac{4\nu^2 \eta^2 + 1}{\eta^2}} \quad (31)$$

принять при η , достаточно больших, за приближенное выражение для степени амортизации вынужденных колебаний.

Чем больше η , тем точнее формула (31).

Если $\eta^2 = 10$, то согласно формуле (31) получается:

$$c : a = 0,10 \quad \text{при} \quad \lambda : \lambda = 0;$$

$$c : a = 0,33 \quad \text{при} \quad \lambda : \lambda = 0,5;$$

$$c : a = 0,64 \quad \text{при} \quad \lambda : \lambda = 1,0.$$

Для того же значения $\eta^2 = \omega^2 : \lambda^2 = 10$ (см. таблицу)

$$c : a = 0,11 \quad \text{при} \quad \lambda : \lambda = 0;$$

$$c : a = 0,35 \quad \text{при} \quad \lambda : \lambda = 0,5;$$

$$c : a = 0,58 \quad \text{при} \quad \lambda : \lambda = 1,0.$$

Таким образом, даже при столь умеренном значении величины η^2 , как 10, формула (31) дает величину отношений $c : a$ погреш-

$\frac{\omega^2 : \lambda^2}{\lambda : \lambda}$	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
2	1,000	1,080	1,160	1,240	1,320	1,400	1,480	1,560	1,640	1,720	1,800
5	0,065	0,118	0,167	0,210	0,256	0,306	0,357	0,408	0,464	0,520	0,584
10	0,012	0,036	0,068	0,101	0,134	0,167	0,200	0,233	0,266	0,300	0,338
15	0,005	0,016	0,032	0,048	0,064	0,080	0,096	0,112	0,128	0,144	0,162
20	0,003	0,010	0,019	0,027	0,035	0,043	0,051	0,059	0,067	0,075	0,084
25	0,002	0,006	0,012	0,017	0,023	0,028	0,033	0,038	0,043	0,048	0,054
30	0,001	0,004	0,008	0,012	0,016	0,020	0,024	0,028	0,032	0,036	0,040

ностью, не превышающей 10%. С увеличением величины ω^2 точность формулы (31) возрастает.

Подставив в (31) η и τ из (26), вместо (31), получим

$$\epsilon: a = \sqrt{\frac{4kA^2}{\omega^2} + \frac{\lambda^2}{\omega^2}}. \quad (32)$$

Что и можно принять за приближенное значение для величины $\epsilon: a$ при $\omega^2: \lambda^2$ не меньше чем 10.

7. Формула (32) показывает, что всякое увеличение как величины $\lambda: a$, так и величины $\lambda: \omega$ увеличивает отношение $\epsilon: a$ и, следовательно, ухудшает степень амортизации вынужденных колебаний. Поэтому увеличивать ни одну из этих величин без нужды не следует.

Увеличение величины λ полезно для повышения интенсивности затухания свободных колебаний, но лишь до тех пор, пока λ остается меньше чем λ .

Повышение величины λ полезно для уменьшения статических отклонений прибора под действием собственного веса при арте, а также под действием сил инерции от качки корабля.

Если величины $\frac{\lambda}{a}$ и $\frac{\lambda}{\omega}$ являются величинами малыми по сравнению с единицей, притом малыми одного и того же порядка, то увеличение величины $\lambda: a$ влечет за собой ухудшение степени амортизации вынужденных колебаний прибора, относительно меньше, чем увеличение отношения $\lambda: a$.

Например, при $\omega^2: \lambda^2 = 10$ [согласно формуле (32)]

$$\epsilon: a = \sqrt{0,40 + 0,01 \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2},$$

так, что

$$\epsilon: a = 0,64 \quad \text{при} \quad \lambda: a = 0;$$

$$\epsilon: a = 0,75 \quad \text{при} \quad \lambda: a = 20.$$

При $\omega^2: \lambda^2 = 0$ [согласно формуле (32)]

$$\epsilon: a = \sqrt{0,10 + \frac{0,01}{16} \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2}$$

и в любом отношении $\lambda: a$ еще менее заметно, ибо

$$\epsilon: a = 0,32 \quad \text{при} \quad \lambda: a = 0;$$

$$\epsilon: a = 0,33 \quad \text{при} \quad \lambda: a = 2.$$

Если принять уменьшение амплитуд вынужденных колебаний прибором достаточным, то можно остановиться на отношениях:

$$\lambda: a = \sqrt{\frac{1}{40}} = 0,16;$$

$$\lambda: \omega = 0,32,$$

как обеспечивающих относительно неплохое снижение колебаний вынужденных и одновременно неплохое затухание свободных колебаний, при сравнительно достаточной относительной жесткости прибора.

$$\text{При} \quad \omega = 20 \frac{1}{сек};$$

$$\lambda = 3,2 \frac{1}{сек};$$

$$\lambda = 6,4 \frac{1}{сек}.$$

Статическое отклонение прибора под действием собственного веса должно быть близким к 250 мк, степень потяжки вынужденных колебаний $\epsilon: a$ близкой к 1/3, уменьшение же амплитуд свободных колебаний в каждую секунду близким к девятикратному.

Если бы вместо того чтобы сделать отношение $\lambda: a$ равным 0,16, мы сделали его близким к нулю, т. е. отказались от потяжки свободных колебаний прибора путем введения в прибор сопротивления, то при выбранном отношении $\lambda: \omega = 0,32$, мы получили бы для степени потяжки колебаний вынужденных $\epsilon: a = 0,10$, вместо полученной выше цифры 0,33, т. е. уменьшили бы амплитуду вынужденных колебаний прибора больше, чем втрое.

Пример этот показывает, что гасить свободные колебания путем введения в прибор сопротивления хотя и возможно, но относительно невыгодно. Это сопряжено со значительным ухудшением действия прибора, притом тем большим ухудшением, чем большей величиной отношения $\omega: \lambda$ можно в рассматриваемом частном случае достигнуть.

Нижеследующие цифры, полученные с помощью формулы (32), иллюстрируют последние замечания.

Пусть, как и выше

$$\lambda^2: \omega^2 = \frac{1}{40},$$

а $\omega^2: \lambda^2$ изменяется со значения

$$\omega^2: \lambda^2 = 10$$

до

$$\omega^2: \lambda^2 = 100.$$

Тогда формула (32) дает

$$\text{при} \quad \omega^2: \lambda^2 = 10 \quad \epsilon: a = \sqrt{0,16} = 0,33;$$

$$\text{при} \quad \omega^2: \lambda^2 = 100 \quad \epsilon: a = 0,32,$$

а то время как при $\lambda = 0$ мы имели бы

$$\text{при} \quad \omega^2: \lambda^2 = 10 \quad \epsilon: a = 0,10;$$

$$\text{при} \quad \omega^2: \lambda^2 = 100 \quad \epsilon: a = 0,01.$$

Таким образом, при $\omega^2 : \Delta^2 = 100$ переход от $\lambda = 0$ к $\lambda = 0,16$ ω увеличивает σ : σ в 32 раза.

Вообще, если величина $\Delta^2 : \omega^2$ так мала, что ею можно по сравнению с $\frac{\Delta^2}{\omega^2}$ пренебречь, то, как видно из (32),

$$\sigma : \sigma_0 \approx \frac{\omega_0}{\omega} \quad (33)$$

Таким образом при λ : ω достаточно малых, трение в приборе ухудшает гашение вынужденных колебаний во столько же раз, во сколько им увеличивается λ , т. е. инертность затухания свободных колебаний.

При необходимости добиться одновременно и хорошего гашения свободных колебаний и большой амортизации вынужденных колебаний, введение в прибор для гашения свободных колебаний трения может быть рекомендовано тем в меньшей мере, чем большей амортизации вынужденных колебаний нужно добиться.

В случае, когда необходимо добиться особенно больших степеней амортизации вынужденных колебаний, следует бороться со свободными колебаниями системы не путем введения в систему трения, а какими-то новыми путями. Заслуживает в этом отношении внимания такое устройство восстанавливающего механизма подвеса, когда движены им восстанавливающие силы не являются пропорциональными отклонению амортизируемого тела, а возрастают при увеличении этих отклонений значительно быстрее последних.

Устройства этого рода было бы желательно изготовить и испытать в корабельных условиях.

25. ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ

УНИЧТОЖЕНИЯ ВЫНУЖДЕННОЙ ВИБРАЦИИ КОРАБЛЯ*

Настоящий доклад является развитием работы, представленной мной в свое время Кораблестроительному отделению Петроградского политехнического института для получения звания морского инженера. Он касается вопроса об уменьшении судовой вибрации посредством прибора, действующего по принципу фремовских шестер для гашения качки. В этой работе я ставил себе целью найти условия, при которых размеры прибора могут быть уменьшены до минимума, и установить зависимость между массой усложнителя и влиянием его на вибрацию судна.

Мне не удалось прийти к окончательным заключениям, так как в моем распоряжении не оказалось прибора, получить которые можно только произведя надлежащие опыты. Нижеследующее исследование не исчерпывает поэтому вопроса полностью, но, полагаю, что оно замечает направление, в котором надлежит искать решение поставленной задачи. Возможно также, что полученные мной результаты представят некоторый интерес и для лиц, занятых задачей о гашении боковой качки по способу Фрама. Эта задача имеет с разбираемой мной много общего.

§ 1. Назв устройства прибора

Предположим, что к судну в некотором его месте подвешивается на пружине масса m , соединенная также со штоком поршня гидравлического катаракта. Под влиянием возмущающей силы судно получает вибрацию, фаза которой отличается от фазы возмущающей силы на некоторую величину θ . Колебания массы m , в свою очередь, отличаются по фазе от колебаний точки ее подвеса. Если последнюю фазу обозначить θ_1 , то в зависимости от численного значения суммы $\theta + \theta_1$ натяжение пружины усложнителя будет действовать либо в ту же сторону, что и возмущающая сила, либо в обратную. В первом случае прибор увеличивает амплитуду колебаний корабля, во втором — уменьшает.

* Доклад, читанный 19 июня 1917 г.

Нетрудно видеть, что первый случай имеет место тогда, когда сумма $\theta + \theta_1$ близка к 0 или 2π , для чего в каждом периоде должны быть близки к 0 или π , а это, как известно, возможно лишь тогда, когда период возмущающей силы достаточно удален от периода свободных колебаний той системы, на которую эта сила действует. Выбрав в данных условиях получается значительная. Можно утверждать, что рассматриваемая масса m увеличивает амплитуду вибрации корабля лишь тогда, когда последние невелика.

Наоборот, при синхронизме возмущающей силы с одним из свободных колебаний судна, колебание последнего обычно становится значительными, а разность фаз θ приближается к $\frac{\pi}{2}$. Делая раз-

ность θ_1 также равной $\frac{\pi}{2}$, т. е. настроив массу m в унисон с возмущающей силой, можно сумму $\theta + \theta_1$ сделать равной π и добиться искусственного уменьшения вибрации корабля. Мы видим, следовательно, что масса m позволяет уменьшать колебания корабля именно тогда, когда последние достигают наибольшей величины.

Эти два свойства позволяют массу m называть успокоителем. Как велика польза от установки такого успокоителя и как получить от прибора заданной массы наилучшие результаты — осветить указанные вопросы и является нашей целью.

§ 2. Предположения и допущения

В соответствии с нашей целью мы должны подробно рассмотреть задачу, не ограничиваясь случаем чистого синхронизма, рассмотренным в § 16 курса А. Н. Крылова, «в некоторых уравнениях математической физики, имеющих применение в технических вопросах».

Будем стараться учесть точнее влияние успокоителя на так называемый главный тон вибрации корабля. Влияние его на вибрации иных тонов будем учитывать приблизительно, так как получение более точных выражений слишком затрудняет выкладки и не является необходимым.

Мы будем заниматься только так называемыми вынужденными колебаниями, не касаясь колебаний свободных, затухающих в течение промежутка времени, весьма короткого по сравнению с тем, во время которого возмущающие корабль силы сохраняют неизменными свою амплитуду и частоту.

Массу успокоителя мы будем считать малой по сравнению с массой корабля M , и для упрощения выкладок в некоторых случаях будем пренебрегать величинами порядка m/M по сравнению с единицей.

Сделаем также еще одно допущение: чтобы освободиться от частных производных в основном дифференциальном уравнении

вибрации посредством введения переменных f , определяющей время, и z , определяющей сечение корабля, предположим, что сопротивление, встречаемое кораблем при вибрации, пропорционально первой степени скорости движения соответствующего сечения корабля; коэффициент же этой пропорциональности будем считать функцией одного только аргумента z , и притом функцией не произвольной, а пропорциональной функции, определяющей распределение масс корабля по его длине. Это допущение, конечно, произвольно, но обычно взаимное сопротивление при излучении или вибрации корабля пренебрегают. Только что высказанное предположение представляется поэтому вполне допустимым.

Сопротивление в катаракте прибора будем считать функцией от скорости перемещения массы m относительно судна и притом функцией, обращающейся в нуль, когда скорость массы m равна нулю. Произведенное исследование показало, что если сила, вынуждающая колебания корабля, определяется простой гармонической функцией от времени, то влияние такого сопротивления на вибрацию корабля может быть с точностью до малых высшего порядка замечено действием сопротивления, пропорционального первой степени скорости. Если же сопротивление катаракты пропорционально первой степени скорости, то дифференциальные уравнения задачи линейны, и колебания, вынуждаемые совместным действием нескольких сил различных частот, могут быть складываемы по закону наложения. Ограничимся поэтому рассмотрением случая, когда сила, вынуждающая колебания корабля, является простой гармонической функцией времени, так как распространить вышесказанные ниже выводы на случай, когда возмущающая сила задана суммой нескольких гармонических функций, не представляет затруднений.

Таковы основные допущения, позволяющие в основу исследования. Прочие оговорены будут там, где они придется пользоваться.

§ 3. Вывод основных уравнений движения

Предположим, что на судне, вибрирующем как упругий стержень, установлен описанный выше успокоитель, состоящий из рычага, закрепленного в точке A , имеющего в точке B пружинный подвес и соединяемый в той же точке B со вторым торцом гидравлического катаракта, на свободном же своем конце несущего массу m .

Обозначим (см. рисунок):

l — длина рычага успокоителя;

$Z(x)$ — вертикальное перемещение того места судна, абсцисса которого x ;

$Z(y)$ — перемещение точки подвеса рычага;

y — абсцисса этой точки;



- σ — угол в том же месте касательной к упругой линии по отношению к горизонту (предполагается, что при отсутствии вибрации упругая линия есть горизонтальная прямая);
- L — длина подкасательной к упругой линии (ясно, что $L\sigma = Z(a)$);
- λ — расстояние между точками A и B ;
- φ — угловое перемещение рычага относительно судна (этот угол будем отсчитывать от нейтральной оси корабля, считая, что в состоянии покоя рычаг параллелен оси);
- z — вертикальное перемещение массы усложнителя относительно судна (очевидно, $z = \varphi l$).

При этих обозначениях абсолютное угловое перемещение прибора есть $\varphi + \sigma$, а абсолютное линейное перемещение массы усложнителя $\varphi l + \sigma l + Z(a)$.

Предположим, для простоты выкладки, что λ и l малы по сравнению с L настолько, что

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{\lambda}{L}\right) Z(a) &= Z(a + \lambda) \\ \left(1 + \frac{l}{L}\right) Z(a) &= Z(a + l) \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Это дает возможность перемещение массы усложнителя считать равным

$$z + Z(a + l).$$

Допустим, что от увеличения длины пружины, поддерживающей рычаг, на единицу длины ее натяжение увеличивается на p весовых единиц. Будем, кроме того, предполагать, что сопротивление катаракта выражается в тех же единицах некоторой функцией $\Phi(x)$, согласно сказанному в § 2, от одной лишь пере-

менной x .
Одно из основных уравнений нашей задачи получим, приняв нулю момент (относительно точки A) всех сил, действующих на рычаг усложнителя.

Уравнение это

$$-m(x' + Z'(a + l)) - p\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \frac{1}{2}\Phi(x) = 0. \quad (2)$$

Вторым основным уравнением нашей задачи является уравнение вибрации судна, рассматриваемого как упругий непряматический стержень:

$$\beta(x) \frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} + M(x) \frac{\partial Z}{\partial t} + \sigma(x) \left[\alpha(x) \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} \right] = p(x, t). \quad (3)$$

В уравнении $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $M(x)$ суть функции, зависящие от абсциссы x :

- $\alpha(x)$ — жесткость EJ поперечных сечений судна;
- $\beta(x)$ — массу единицы его длины;
- $M(x)$ — коэффициент сопротивления среды, приходящийся на единицу длины судна.

Согласно сказанному в § 2 будем считать $M(x) = H\beta(x)$. Функция $p(x, t)$ определяет собой действующее на корабль внешние силы, а также их распределение по его длине. В нашем случае она включает в себя следующие четыре силы:

- 1) реакцию катаракта — $\Phi(x')$, сосредоточенную в сечении, определяемом абсциссой $x = a + l$;
- 2) реакцию пружины $p \frac{x}{l}$, сосредоточенную в том же сечении;
- 3) реактивное воздействие цапфы рычага, сосредоточенное в сечении $x = a$ и равное $R = -m[x' + Z'(a + l)] + \Phi(x') - p \frac{x}{l}$;
- 4) внешнюю возмущающую силу; будем считать, что эта сила сосредоточена в сечении, определяемом абсциссой $x = a$, величина же ее есть функция времени t . На основании сказанного в параграфе втором мы ограничимся рассмотрением случая, когда эта величина $R(t)$ есть простая гармоническая функция от времени:

$$R(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (4)$$

Величину ω , входящую в это выражение, будем называть частотой возмущающей силы.

Чтобы ввести эти четыре силы в основные уравнения задачи ясно, освободимся в уравнении (3) от частных производных. Как известно, это можно произвести подстановкой

$$Z = \sum_{k=1}^{\infty} X_k T_k, \quad (5)$$

где X_k — функции одного только x , а T_k — одного только t ,

если величина $\frac{\beta(x, t)}{\beta(x)}$ сама может быть разложена в такой же ряд. Предположим, что это разложение возможно, и, что

$$\frac{\beta(x, t)}{\beta(x)} = \sum_{k=1}^{k=\infty} X_k N_k(t), \quad (6)$$

где $N_k(t)$ суть, пока еще неизвестные функции одного только аргумента t .

Подставим выражения (5) и (6) в уравнение (3) и получим по разделению переменных систему бесконечного числа уравнений, половина которых имеет вид

$$\omega_k^2 X_k - \frac{1}{\beta(x)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\alpha(x) \frac{\partial X_k}{\partial x} \right] = 0 \quad (7)$$

и заключает в себе только x и функции от него; вторая же половина имеет вид:

$$T_k'' + H T_k' - N_k(t) + \omega_k^2 T_k = 0 \quad (8)$$

и заключает только аргумент t , функции этого аргумента и производные их по нему.

Параметры ω_k , входящие в уравнения, суть не что иное, как частоты главных свободных колебаний судна. Будем величину ω_k в дальнейшем называть частотой свободного колебания k -го тона. Зная граничные условия, можно вычислить все ω_k и найти соответствующую каждой из этих величин функцию X_k . Предположим, что мы определили для всех тонов частоту их свободных колебаний ω_k и вид узловой линии X_k , соответствующей этому колебанию. Нам остается решить лишь уравнение (8). Это не представляет труда, так как функции $N_k(t)$ могут быть найдены на основании известного свойства функции X_k

обращать при всяком k , не равном n , интеграл $\int_0^L \beta(x) X_k X_n dx$ в нуль (здесь L есть полная длина корабля). Пользуясь этим свойством, легко видеть, что функции $N_k(t)$ имеют выражение:

$$N_k(t) = \frac{\int_0^L X_k \beta(x, t) dx}{\int_0^L \beta(x) X_k^2 dx} \quad (9)$$

Приняв во внимание сказанное относительно функции $\beta(x, t)$, можно, после некоторых преобразований, видеть, что

$$\int_0^L X_k \beta(x, t) dx = X_k(t) B(t) = X_k(\alpha + \beta) \approx [Z'' + Z'(\alpha + \beta)],$$

Интеграл же, входящий в знаменатель выражения * , пропорционален массе корабля $M = \int_0^L \beta(x) dx$ и квадрату наибольшего значения функции X_k . Пусть $X_k(\mu)$ есть это значение (μ — абсцисса того сечения, где X_k , т. е. vibrating к-го тона, всего больше заметна) и пусть γ_k есть коэффициент этой пропорциональности для призматического стержня $\gamma_k = 0,25$ независимо от значения индекса k . Тогда

$$\int_0^L X_k^2 \beta(x) dx = \gamma_k M X_k^2(\mu),$$

и, следовательно,

$$N_k(t) = \frac{X_k(t) B(t) - X_k(\alpha + \beta) \alpha [Z'' + Z'(\alpha + \beta)]}{\gamma_k M X_k^2(\mu)}$$

Подставим это выражение в уравнение (8) и введем для простоты обозначения:

$$\left. \begin{aligned} Z_k^*(\mu) &= X_k(\mu) T_k; \\ Z_k'(\mu) &= X_k'(\mu) T_k; \\ Z_k''(\mu) &= X_k''(\mu) T_k, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

что даст возможность для каждого тона выписать уравнение, аналогичное нижеприведенному, выписанному для k -го тона:

$$\gamma_k M [Z_k''(\mu) + H Z_k'(\mu) + \omega_k^2 Z_k(\mu)] = \frac{X_k(\beta)}{X_k(\alpha)} B(\beta) - \frac{X_k(\alpha + \beta)}{X_k(\alpha)} \alpha [Z'' + Z'(\alpha + \beta)]. \quad (10)$$

Совокупностью бесконечного числа этих уравнений (10) можно заменить второе основное уравнение нашей задачи (3). Необходимо лишь помнить, что величина $Z''(\alpha + \beta)$, входящая в правую часть уравнения (10), может быть через $Z_k''(\mu)$ выражена бесконечным рядом:

$$Z''(\alpha + \beta) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{X_k(\alpha + \beta)}{X_k(\mu)} Z_k''(\mu). \quad (11)$$

Уравнение (2) вместе с уравнением (11) и бесконечным рядом уравнений (10) составляют ту совокупность уравнений, которые и надлежит решить.

§ 4. Замена сопротивления в катаракте сопротивлением, пропорциональным первой степени скорости

Чтобы упростить систему уравнений (2), (10), (11), заметим прежде всего, что величина $\frac{1}{\gamma} \Phi(Z'')$, входящая в уравнение (2), есть единственная величина, нарушающая линейность системы. Благодаря присутствию в выражении для $\Phi(Z'')$ члена, пропор-

циональных вышних степенях скорости (x'), некие величины z и $Z_0(\mu)$ следует при $R(t)$, определяемом равенством (4), искать в виде рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [N_n \cos(n\omega t) + P_n \sin(n\omega t)],$$

где n есть числа целые.

Сделанное нами подробное исследование показало, что прибор функционировать успешно лишь при небольших значимых величинах сопротивления в катаракте, при которых всема N_n и P_n (индекс n более единицы) можно пренебрегать. Это позволяет считать z и $Z_0(\mu)$ простыми гармоническими функциями от времени той же частоты, что и возмущающая сила и заменить функцию $\frac{1}{T} \Phi(x')$, входящую в уравнение (2), первым членом ее разложения в ряд Фурье.

Чтобы выводить это разложение, допустим, что начальный момент, от которого исчисляется время, выбран так, что z имеет выражение:

$$z = a \cos(\omega t);$$

тогда

$$z' = -a\omega \sin(\omega t),$$

и функция $\frac{1}{T} \Phi(x')$ разлагается в ряд Фурье следующим образом:

$$\frac{1}{T} \Phi(x') = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \Phi[-a\omega \sin(\omega t)] \sin(n\omega t) d(\omega t)}{\int_0^{2\pi} \sin^2(n\omega t) d(\omega t)} \sin(n\omega t).$$

Отбрасывая в этом разложении все члены, кроме первого, имеем для $\frac{1}{T} \Phi(x')$ приближенное равенство:

$$\frac{1}{T} \Phi(x') \approx \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \Phi[-a\omega \sin(\omega t)] \sin(\omega t) d(\omega t)}{\int_0^{2\pi} \sin^2(\omega t) d(\omega t)} \frac{x'}{a\omega}.$$

Пользуясь данным выражением, можно заменять сопротивление в катаракте, пропорциональное любой степени скорости x' , эквивалентным ему сопротивлением $-k_0 x'$, пропорциональным

первой степени скорости. В частности, сопротивление, выражаемое многочленом:

$$\frac{1}{T} \Phi(x') = -k_0 x' \pm k_1(x')^2 - k_2(x')^3 \pm k_3(x')^4 - k_4(x')^5 \pm \dots$$

может быть заменено сопротивлением, выражаемым одночленом $\frac{1}{T} \Phi(x') = -k_0 x'$, причем легко видеть, что

$$k_0 = k_2 + 0,85 k_4 + 0,75 k_6 + 0,68 k_8 + 0,62 k_{10} + \dots$$

В дальнейшем будем предполагать, что величина сопротивления, пропорционального первой степени скорости, эквивалентная сопротивлению, имеющему место в катаракте, нами определена. Это эквивалентное сопротивление и будем разумеать в уравнении (2) под знаком $\frac{1}{T} \Phi(x')$, нападк словами исходу в дальнейшем уравнение (2) будем считать замененным эквивалентным ему уравнением:

$$m(x'' + Z'(a + b) + p\left(\frac{x'}{T}\right)^2) + k_0 x' = 0. \quad (12)$$

Система уравнений (10), (11) и (12) есть система уравнений линейных. Считая возмущающую силу заданной выражением (4), можно искать все искомые функции: z , $Z_0(\mu)$ и $Z(a + b)$ в виде таких же простых гармонических функций от времени и той же частоты ω , что и возмущающая сила. Это позволяет во всех уравнениях сделать подстановку:

$$z' = -a\omega z,$$

$$Z'(a + b) = -a\omega Z(a + b),$$

и

$$Z_0'(\mu) = -a\omega Z_0(\mu).$$

От этой системы уравнений (10), (11) и (12) примет вид:

$$\begin{aligned} \mu_k M[(a\omega^2 - a\omega^2) Z_0(\mu) + H Z_0'(\mu)] &= \frac{X_0(\mu)}{X_0(\mu)} M(t) + \\ &+ m a \omega \frac{X_0(a + b)}{X_0(\mu)} [z + Z(a + b)]; \end{aligned} \quad (10')$$

$$Z(a + b) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_0(a + b)}{X_0(\mu)} Z_0(\mu); \quad (11')$$

$$\left[p\left(\frac{x'}{T}\right)^2 - m\omega^2 \right] z + k_0 x' = m a \omega^2 Z(a + b). \quad (12')$$

§ 5. Выражение для амплитуды вынужденных колебаний

Член $H Z_0'(\mu)$ играет, как известно, существенную роль в уравнении (10') лишь в том случае, когда величины ω_k и ω близки между собой. Назовем главным тоном колебаний корабля n -ый, частота которого ω_n всего ближе к частоте возмущающей

силы ω , и оставим член $H Z_0''(\mu)$ только в том из уравнений (10'), которое относится к i -му тону. Во всех же остальных уравнениях опустим данный член. Совокупность уравнений (10') обращается тогда в одно уравнение:

$$\nu M \left[(\omega^2 - \omega^2) Z_0(\mu) + H Z_0''(\mu) \right] = \frac{X_0(\mu)}{X_0(\mu)} R(t) + m \omega^2 \frac{X_0(\alpha + \beta)}{X_0(\mu)} [z + Z(\alpha + \beta)] \quad (13)$$

и бесконечный ряд равенств вида

$$Z_0(\mu) = \frac{X_0(\mu) R(t) + \frac{X_0(\alpha + \beta)}{X_0(\mu)} m \omega^2 [z + Z(\alpha + \beta)]}{\nu M (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (14)$$

относящихся ко всем значениям κ , кроме $\kappa = \epsilon$.

Решая уравнение (11') совместно с уравнением (14) относительно $Z(\alpha + \beta)$ получаем

$$Z(\alpha + \beta) = \frac{X_0(\alpha + \beta)}{X_0(\mu)} \frac{Z_0(\mu)}{1 - \epsilon_1} + \frac{\epsilon_2}{1 - \epsilon_1} \frac{R(t)}{\nu M \omega^2} + \frac{\epsilon_1}{1 - \epsilon_1} z, \quad (15)$$

где для простоты введем обозначения

$$\epsilon_1 = \sum_{\nu \neq \epsilon} \left[\frac{\nu M \omega^2}{\nu M (\omega_0^2 - \omega^2)} \frac{X_0^2(\alpha + \beta)}{X_0^2(\mu)} \right]; \quad (16)$$

$$\epsilon_2 = \sum_{\nu \neq \epsilon} \left[\frac{\nu M \omega^2}{\nu M (\omega_0^2 - \omega^2)} \frac{X_0(\alpha + \beta)}{X_0(\mu)} \frac{X_0(\mu)}{X_0(\mu)} \right].$$

Подставляя $Z(\alpha + \beta)$, данное уравнением (15), в уравнение (12'), и (13), можно придать им такой вид:

$$\left[p \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 (1 - \epsilon_1) - m \omega^2 \right] z + k_0 (1 - \epsilon_1) z' = \epsilon_2 R(t) + m \omega^2 \frac{X_0(\alpha + \beta)}{X_0(\mu)} Z_0(\mu); \quad (17)$$

$$\nu M \left[\omega^2 - \omega^2 (1 + \alpha) Z_0(\mu) + H Z_0''(\mu) \right] - \frac{m \omega^2}{(1 - \epsilon_1)} \frac{X_0(\alpha + \beta)}{X_0(\mu)} z = \left[\frac{X_0(\mu)}{X_0(\mu)} + \frac{\epsilon_1}{1 - \epsilon_1} \frac{X_0(\alpha + \beta)}{X_0(\mu)} \right] R(t). \quad (18)$$

где

$$\alpha = \frac{m}{\nu M} \frac{X_0^2(\alpha + \beta)}{X_0^2(\mu)} \frac{1}{1 - \epsilon_1}.$$

Третье уравнение (15), (17) и (18) может быть заменено системой бесконечного числа уравнений (10'), (11') и (12'). Чтобы выйти из этих трех уравнений неизвестные $Z_0(\mu)$ и $Z(\alpha + \beta)$, исключим прежде всего член $\epsilon_2 R(t)$ из уравнения (17), введя новую переменную $Y_0(\mu)$, связанную с $Z_0(\mu)$ равенством

$$Z_0(\mu) = Y_0(\mu) - \frac{\epsilon_2}{m \omega^2} \frac{X_0(\mu)}{X_0(\mu)} R(t).$$

От этого уравнения (17) примет вид

$$\left[p \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 (1 - \epsilon_1) - m \omega^2 \right] z + k_0 (1 - \epsilon_1) z' = m \omega^2 \frac{X_0(\alpha + \beta)}{X_0(\mu)} Y_0(\mu); \quad (17')$$

равенство (15) обратится в

$$Z(\alpha + \beta) = \frac{X_0(\alpha + \beta)}{X_0(\mu)} \frac{Y_0(\mu)}{1 - \epsilon_1} + \frac{\epsilon_2}{1 - \epsilon_1} z, \quad (15')$$

а уравнение (18) в

$$\nu M \left[\omega^2 - \omega^2 (1 + \alpha) Y_0(\mu) + H Y_0''(\mu) \right] - \frac{m \omega^2}{1 - \epsilon_1} \frac{X_0(\alpha + \beta)}{X_0(\mu)} z = \frac{X_0(\mu)}{X_0(\mu)} \left\{ A \left[1 + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{H \omega} \epsilon_3 \right] + B \epsilon_3 \right\} \cos \omega t + \left\{ B \left[1 + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{H \omega} \epsilon_3 \right] - A \epsilon_3 \right\} \sin \omega t, \quad (18')$$

где знаком ϵ_3 обозначена величина

$$\epsilon_3 = \sum_{\nu \neq \epsilon} \left[\frac{\nu M \omega^2}{\nu M (\omega_0^2 - \omega^2)} \frac{X_0(\mu)}{X_0(\mu)} \frac{X_0(\alpha + \beta)}{X_0(\mu)} \frac{X_0(\mu)}{X_0(\mu)} \frac{X_0(\mu)}{X_0(\mu)} \right]. \quad (19)$$

Нисколько не нарушая общности исследования, можно выбрать момент, начиная с которого производится отсчет времени, так, что удовлетворится равенство

$$\frac{A}{H \omega} = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{H \omega} + \frac{1}{\epsilon_3},$$

и $\sin(\omega t)$ в правую часть уравнения (18') входить не будет, следовательно это уравнение можно переписать в следующем виде

$$\nu M \left\{ \left[\omega^2 - \omega^2 (1 + \alpha) \right] Y_0(\mu) + H Y_0''(\mu) \right\} - \frac{m \omega^2}{1 - \epsilon_1} \frac{X_0(\alpha + \beta)}{X_0(\mu)} z = - \frac{X_0(\mu)}{X_0(\mu)} \sqrt{A^2 + B^2} \sqrt{\left(1 + \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{H \omega} \epsilon_3 \right)^2 + \epsilon_3^2} \cos(\omega t). \quad (20)$$

Уравнения (17') и (20) можно решить совместно подстановкой:

$$Y_0(\mu) = N \cos(\omega t) + P \sin(\omega t);$$

$$z = \pi \cos \omega t + \tau \sin \omega t$$

и определением величин N , P , π и τ по способу неопределенных коэффициентов, после чего, пользуясь равенством (15'), можно определить и $Z(\alpha + \beta)$.

Продолжая все это и вводя обозначения:

$$Q = \sqrt{N^2 + P^2} = |Y_0(\mu)|_{\max}; \quad (21)$$

$$g = \sqrt{\pi^2 + \tau^2} = |z|_{\max}; \quad (22)$$

$$\alpha = \frac{\pi}{\pi M} \frac{X_1^2(\alpha + \beta)}{X_1^2(\alpha)} \frac{1}{1 - \epsilon_1}; \quad (23)$$

$$\alpha_0 = \frac{\lambda}{l} \sqrt{\frac{p}{\sigma}} (1 - \epsilon_1); \quad (24)$$

$$\beta = \frac{h_0 \alpha_0}{m \alpha_0^2} (1 - \epsilon_1); \quad (25)$$

$$\delta = \frac{H}{\alpha_0}; \quad (26)$$

$$\gamma = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\alpha_0^2}; \quad (27)$$

$$\gamma_0 = \frac{\omega^2(1 + \alpha) + \omega_0^2}{\alpha_0^2}; \quad (28)$$

получим:

$$Q = \frac{X_1(\alpha)}{X_1(\alpha)} \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\pi M \alpha_0^2} \sqrt{\left(1 + \frac{\omega^2}{H \omega} \frac{\omega^2 + \epsilon_1}{1 - \epsilon_1}\right) + \epsilon_1^2} \times \\ \times \sqrt{\frac{\gamma^2 + \delta^2(1 + \gamma)}{(\alpha(1 + \gamma)^2 - \gamma \gamma_0 + \delta^2(1 + \gamma))^2 + (\delta \gamma_0 + \delta \gamma)^2(1 + \gamma)}}; \quad (29)$$

$$q = \frac{X_1(\alpha + \beta)}{X_1(\alpha + \beta)} \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{m \alpha_0^2} \sqrt{\left(1 + \frac{\omega^2}{H \omega} \frac{\omega^2 + \epsilon_1}{1 - \epsilon_1}\right) + \epsilon_1^2} \times \\ \times \sqrt{\frac{\alpha(1 + \gamma)(1 - \epsilon_1)}{(\alpha(1 + \gamma)^2 - \gamma \gamma_0 + \delta^2(1 + \gamma))^2 + (\delta \gamma_0 + \delta \gamma)^2(1 + \gamma)}}; \quad (30)$$

$$Z(\alpha + \beta) = \frac{X_1(\alpha + \beta)}{X_1(\alpha)} \frac{Q}{(1 - \epsilon_1)} + \frac{\epsilon_1}{(1 - \epsilon_1)} q. \quad (31)$$

Три последних равенства дают выражения для амплитуд колебаний усилителя и амплитуды vibrations прибора.

§ 6. Исследование выражений, полученных в предыдущем параграфе. Выражение для степени полезного действия усилителя

Обратим прежде всего внимание на физический смысл величин, входящих в выражения (29), (30) и (31).

$\sqrt{A^2 + B^2}$ есть не что иное, как амплитуда возмущающей силы. В формулы (29) и (30) входит отношение $\frac{X_1(\alpha)}{X_1(\alpha)}$ и $\frac{X_1(\alpha + \beta)}{X_1(\alpha)}$ в виде множителя. Система получит тем большую вибрацию, чем ближе расположена возмущающая сила к той точке, в которой прибор преобладающего i -го тона достигает своей наибольшей величины.

Величина α может быть названа относительной массой прибора. Она пропорциональна квадрату отношения $X_1(\alpha + \beta) : X_1(\alpha)$, а это показывает, что действие усилителя заданной массы не получается тем известнее, чем ближе он будет расположен к тому месту судна, в котором vibration судна преобладающего тона

достигает своего максимума. Это позволяет сделать заключение: для рационального использования усилителя необходимо устанавливать в том месте судна, где vibration последнего всего больше.

Величину α_0 можно считать очень небольшой по сравнению с единицей отвлеченной величины: отношение $\alpha : M$ больше 0,05%—0,1% делать неудобно; ω есть обычно около 0,25; отношение $X_1(\alpha + \beta) : X_1(\alpha)$ $(\mu = 1,00)$; а величина $1 - \epsilon_1$, как видно из формулы (16), близка к единице, так что α есть величина, не превосходящая

$$0,2-0,4\%$$

Величину α_0 можно назвать частотой свободных колебаний усилителя. По величине параметра γ можно судить, насколько близка к этой частоте частота возмущающей силы. Подробное исследование показывает, что параметр γ должен быть весьма мал, если только желательно, чтобы прибор производил сколь угодно значительное действие. Вследствие этого при анализе формул (29), (30) и (31) всюду можно принимать множитель $1 + \gamma$ за единицу.

Величина β характеризует собой отношение сопротивлений в контакте к массе прибора. Эту величину будем называть в дальнейшем относительным сопротивлением в приборе, а иногда для краткости сопротивлением прибора. Мы увидим в дальнейшем, что для успешности действия прибора величина эта должна лежать в известных пределах, причем высший предел есть величина порядка $\sqrt{\alpha}$.

Величину γ_0 будем называть относительным сопротивлением корабля. На основании паласерим, собранных профессором Гембелем², а также внесенных в справочник *Loebow*, можно сказать, что γ_0 лежит, по крайней мере в трех низших тонах судовой vibration, в пределах от 0,02 до 0,06.

Параметром γ_0 характеризуется соотношение частоты возмущающей силы и частоты преобладающего тона судовой vibration. Параметр обращается в нуль, когда частоты друг другу равны, т. е. когда имеет место синхронизм возмущающей силы и i -го (преобладающего) тона колебаний корабля.

Если $\gamma_0 = \gamma$, то $\omega = \omega_0 \sqrt{1 + \alpha}$ и прибор настроен в унисон с возмущающей силой. Так как мы условились считать колебания корабля i -го тона преобладающим, то мы должны различить $\omega^2 - \omega_0^2$, а значение и величину γ_0 считать величинами малыми.

Величину α_0 , как видно из формулы (19), можно также считать малой, если только отнесем $X_1(\alpha) : X_1(\mu)$ или отношение $X_1(\alpha + \beta) : X_1(\mu)$ не равным близки к нулю. Оба случая несомненно, не могут интересовать: случай $X_1(\alpha + \beta) : X_1(\mu) = 0$ возможен, как мы видели лишь тогда, когда прибор расположен

² Jahrbuch des Schiffstechnischen Gewerkschaft [90].

на корабль совершенно независимо; в случае же, когда $X_1(\epsilon) : X_2(\epsilon) = 0$ возмущающая сила, приложенная к секциям и определяемая абсциссой ϵ , вообще не может вызвать вибраций i -го тона, которые мы считаем доминирующими, в этом случае усилитель же нужен; исследовать его действие в таких условиях нет необходимости. Для того чтобы осветить приблизительно понятие о порядке величины ϵ_i , можно считать в формуле (19) отношение

$$\frac{X_1(\epsilon)}{X_2(\epsilon)} = \frac{X_1(\alpha + \beta)}{X_2(\alpha)} = \frac{X_1(\beta)}{X_2(\alpha)}$$

величиной одного порядка с единицей. Сумма $\sum_{\epsilon=1}^n \frac{v_i \omega_i^2}{v_i M(\omega_i^2 - \omega^2)}$ для

примативического стержня есть величина порядка 0,015 для $i = 1$; 1,25 для $i = 2$ и 2,75 для $i = 3$. Надо думать, что и для судна она выражается цифрами, близкими к тем, что приведены. Величина, данная даже для третьего тона свободных колебаний, выражается обычно чем-то вроде $3 \frac{H}{\omega_i^2} = 3\beta = 0,18$. Поэтому

радикал $\sqrt{\left[1 + \frac{\omega^2 - \omega_i^2}{H\omega} \epsilon_i\right]^2 + \epsilon_i^2}$, входящий в выражение (29)

и (30), можно с большой степенью точности считать равным единице. Легко также видеть, что величина $1 - \epsilon_i$ близка к единице.

На основании сказанного можно выписать выражения (29) и (30) в следующем, несколько упрощенном виде

$$Q = \frac{X_1(\epsilon)}{X_2(\epsilon)} \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{v_i M \omega_i^2} \sqrt{\frac{\gamma^2 + \beta^2}{(\alpha - \gamma \gamma_0 + \beta \beta^2 + \beta \gamma + \beta \gamma_0)^2}} \quad (32)$$

$$q = \frac{X_1(\epsilon)}{X_2(\alpha + \beta)} \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{m \omega_i^2} \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha - \gamma \gamma_0 + \beta \beta^2 + \beta \gamma + \beta \gamma_0)^2}} \quad (33)$$

Величина q , как видно из формулы (22), есть амплитуда колебаний усилителя. Мы увидим ниже, см. формулу (50), что

$$q = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{m \omega_i^2} \frac{X_1(\epsilon)}{X_2(\alpha + \beta)} \sqrt{2}.$$

Принимая это во внимание и зная, что разность $1 - \epsilon_i$ весьма близка к единице, можно неравенство (31) переписать в следующем виде

$$|Z(\alpha + \beta)|_{\max} = \frac{X_2(\alpha + \beta)}{X_2(\alpha)} Q + \sum_{\epsilon=1}^n \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{v_i M(\omega_i^2 - \omega^2)} \times \frac{X_1(\epsilon)}{X_2(\alpha + \beta)} \frac{X_2(\alpha + \beta)}{X_2(\alpha)} \sqrt{2}. \quad (34)$$

Величина $|Z(\alpha + \beta)|_{\max}$ есть амплитуда колебаний того сектора судна, где установлен прибор. Если бы прибора не было, то под действием той же возмущающей силы амплитуда колебаний этого сектора удвоилась бы в равенстве

$$|Z(\alpha + \beta)|_{\max} < \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{v_i M \omega_i^2} \frac{X_1(\epsilon) X_2(\alpha + \beta)}{X_2(\alpha) X_2(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{\gamma_i^2 + \beta^2}} + \sum_{\epsilon=1}^n \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{v_i v_j M(\omega_i^2 - \omega^2)} \frac{X_1(\epsilon)}{X_2(\alpha)} \frac{X_2(\alpha + \beta)}{X_2(\alpha)}. \quad (35)$$

Первый член правой части неравенства (35) представляет собой влияние доминирующего тона колебаний на избранный тон, определяемый абсциссой $x = \alpha + \beta$. Второй же член — влияние всех остальных тонов. Сравнивая выражение (35) с выражением (34), видим, что влияние усилителя заключается как бы в том, что:

- 1) амплитуда колебаний i -го (доминирующего) тона получает значение Q (определяемое формулой (32)), вместо того чтобы быть равной $\frac{X_1(\epsilon)}{X_2(\alpha)} \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{v_i M \omega_i^2} \frac{1}{\sqrt{\gamma_i^2 + \beta^2}}$;
- 2) сумма амплитуд всех тонов, отличных от доминирующего, выражается при действии усилителя суммой:

$$\sum_{\epsilon=1}^n \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{v_i v_j M(\omega_i^2 - \omega^2)} \frac{X_1(\epsilon)}{X_2(\alpha + \beta)} \frac{X_2(\alpha + \beta)}{X_2(\alpha)} \sqrt{2},$$

а то время как без усилителя она равна

$$\sum_{\epsilon=1}^n \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{v_i v_j M(\omega_i^2 - \omega^2)} \frac{X_1(\epsilon)}{X_2(\alpha)} \frac{X_2(\alpha + \beta)}{X_2(\alpha)}.$$

Сравнивая эти суммы между собой, видим, что они отличаются друг от друга только тем, что в первой вместо множителя $\frac{X_1(\epsilon)}{X_2(\alpha)}$

занимает множитель: $\frac{X_1(\epsilon)}{X_2(\alpha + \beta)} \frac{X_2(\alpha + \beta)}{X_2(\alpha)} \sqrt{2}$.

Первая сумма не всегда меньше второй. Наоборот, так как $\frac{X_1(\epsilon)}{X_2(\alpha + \beta)} \frac{X_2(\alpha + \beta)}{X_2(\alpha)}$ — величины, в среднем равные друг другу, то первая из рассматриваемых сумм может даже в среднем считаться в 1,4 раза больше второй. Это показывает, что та часть общей вибрации, которая объясняется наличием колебаний тонов, отличных от доминирующего, действием усилителя не только не уменьшается, но иногда может быть увеличена, правда, в среднем не больше, чем в 1,4 раза.

Усилитель рассматриваемого типа может принести существенную пользу лишь в том случае, когда колебания преобладающего (i -го) тона превзойдут сумму амплитуд всех остальных тонов во много раз.

Отношение амплитуд i -го тона, к сумме амплитуд всех остальных тонов получается наибольшим при $\alpha = \omega_i$; максимум этого отношения есть, как нетрудно видеть

$$\left(\delta \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega^2} \right)^{-1}$$

Сумма, входящая в это выражение, как мы выше видели для

случая $i = 1$ — близка к 0,015;
 для $i = 2$ — близка к 1,25;
 для $i = 3$ — близка к 2,75
 и вообще растет с возрастанием номера доминирующего тона.

При $\delta = 0,04$ величина $\left(\delta \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega^2} \right)^{-1}$ близка

для $i = 1$ — к 1500;
 для $i = 2$ — к 20;
 для $i = 3$ — к 9.

Цифры эти показывают, что усилитель рассматриваемого типа всего лучше применим для уменьшения вибрации, если доминирующим является первый тон; худшие результаты получаются, когда доминирующим является второй тон и чем выше номер доминирующего тона, тем меньше пользы, приносимая прибором.

Все дальнейшие рассуждения будут относиться к случаю, когда вторые члены правой части неравенств (34) и (35) пренебрежимо малы по сравнению с первым членом той же части неравенства (35).

В этом случае величину Q можно считать амплитудой вибрации корабля при действии усилителя; величину же Q_0 определяем равенством

$$Q_0 = \frac{\sqrt{A^2 + B^2} X_1(\omega)}{m M \omega_1^2 X_2(\omega)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\gamma_0^2 + \beta^2}} \quad (36)$$

— амплитудой вибрации корабля при выключенном усилителе.

Величина Q_0 имеет максимум при $\gamma_0 = 0$, равный

$$|Q_0|_{\max} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2} X_1(\omega)}{m M \omega_1^2 X_2(\omega)} \cdot \frac{1}{\delta} \quad (37)$$

Величина Q также изменится с изменением величины γ_0 и при некотором γ_0 также достигнет максимума.

Отношение $\chi = |Q_0|_{\max} / |Q|_{\max}$ показывает, во сколько раз увеличивает прибор максимальную амплитуду вибрации корабля. Величину χ можно назвать *коэффициентом полезного действия прибора*, или *полезным действием прибора*. Пользуясь равенствами (32) и

(37), можно получить следующее выражение для степени полезного действия прибора

$$\chi = \frac{|Q_0|_{\max}}{|Q|_{\max}} = \sqrt{\frac{(\alpha + \gamma \gamma_0 + \delta \beta)^2 + (\delta \gamma + \beta \gamma_0)^2}{\beta^2(\gamma^2 + \beta^2)}} \quad (38)$$

К подробному анализу его как и надлежит теперь перейти.

§ 7. Влияние сопротивления прибора

Посмотрим прежде всего, как влияет на действие прибора величина сопротивления в катракте.

Означая, что при $\beta = \infty$ выражение, стоящее под радикалом в правой части равенства (38), имеет минимум при $\gamma_0 = 0$, причём $\chi = 1,00$. Это свидетельствует, что при слишком большом сопротивлении в катракте, прибор не действует на амплитуду судовой вибрации. Прямным этого анализе понятна.

Если же $\beta = 0$, то $\chi = \sqrt{\frac{(\alpha - \gamma \gamma_0)^2 + (\delta \gamma)^2}{\delta^2 \gamma^2}}$.

Действие прибора зависит в данном случае не только от параметра γ_0 , но и от параметра γ . Если γ сделать равным нулю, т. е. иметь прибор, настроенный строго в унисон с возмущающей силой, то χ получится равным бесконечности независимо от величины параметра γ_0 .

Если же мы настроим прибор на какую-либо определенную частоту, то при изменении частоты возмущающей силы изменятся будут и γ и γ_0 . При некоторой частоте возмущающей силы величина $\alpha - \gamma \gamma_0$ обратится в нуль, а χ в единицу. Например, если прибор настроен в унисон с i -ым (доминирующим) тоном вибрации корабля, то частота возмущающей силы, при которой вибрация судна, несмотря на присутствие усилителя, получится той же величины, как если бы прибора не было, определяется равенством

$$\gamma = \gamma_0 = \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_i^2}$$

откуда $\omega = \omega_i \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{\omega_i^2}}$ и при α , даже равном 0,004, критическая частота возмущающей силы, данная этим равенством, отличается от ω_i не больше чем на 3,5%.

Прибор, относительно сопротивления которого β равно нулю, может таким образом уничтожать вибрацию судна лишь в том случае, когда он настроен в унисон с возмущающей силой.

Если же частота свободных колебаний усилителя не будет в точности совпадать с частотой возмущающей силы, а разниться от нее хотя бы на 2—3%, то при малых β такой незначительной разницей частот может оказаться достаточно для того, чтобы успокаивающее действие прибора было сведено к нулю.

Частота возмущающей силы, вызывающей вибрацию корабля, не может считаться величиной вполне постоянной. Так как после каждого изменения частоты возмущающей силы прибор с относительно малым сопротивлением в катаракте необходимо настраивать на новый тон, то обслуживать его очень затруднительно, если только он не снабжен синхронизатором, т. е. приспособлением, автоматически уравнивающим частоту свободных колебаний успокоителя с частотой возмущающей силы.

Есть, однако, вероятность того, что, выбирая сопротивление прибора β не слишком большим и не слишком малым, нам удастся получить хорошие результаты и от прибора, синхронизатором не снабженного. Чтобы выяснить, нужен ли вообще синхронизатор, необходимо уточнить, каких результатов можно ожидать от прибора, не снабженного синхронизатором, а затем определить, не могут ли результаты эти быть улучшены благодаря применению синхронизатора.

§ 8. Действие успокоителя, не снабженного синхронизатором

Допустим, что прибор настроен на постоянный тон, так что $\omega_0 = \text{const}$. При изменении величин ω очевидно γ и γ_0 будут меняться, но так, что разность $\gamma - \gamma_0$ будет оставаться величиной постоянной. Чтобы определить результаты, достижимые посредством прибора, настроенного на постоянный тон, нам следовало бы:

1) считать $\gamma - \gamma_0 = \text{const}$, определить, при каком γ обращается правая часть равенства (38) в минимум, т. е. найти критическую частоту возмущающей силы;

2) определить соответствующие этой частоте значение величины χ ;

3) подобрать сопротивление в приборе β , а также величину разности $\gamma - \gamma_0$, так, чтобы χ было возможно больше;

4) определить значение χ , соответствующее наилучшей величине параметров β и $\gamma - \gamma_0$.

Нетрудно, однако, предвидеть, что наилучшее значение разности $\gamma - \gamma_0$ есть величина, близкая к нулю. Это обстоятельство позволяет при дифференцировании выражения (38) по γ , считать не $\gamma - \gamma_0 = \text{const}$, а $\gamma : \gamma_0 = \text{const}$. От такой замены выкладки значительно упрощаются. Допустим, что $\gamma_0 = \frac{1}{n} \gamma$, где n параметр пока неизвестный, и заметим, что все дальнейшие выводы будут справедливы, если n близко к единице, введя дифференцируем формулу по γ . Очевидно, что подрадикальная величина имеет максимум и минимум при γ . Удовлетворяющих следующим равенствам:

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= 0; \\ \gamma^2 &= -\beta^2 + n \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha \left[\beta \delta + \frac{\rho^2}{n} \right]}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Нетрудно видеть, что при β , близком удовлетворяющего равенству

$$\beta^2 = n \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha \left[\beta \delta + \frac{\rho^2}{n} \right]}, \quad (40)$$

минимум правой части равенства (38) получается при $\gamma = 0$ и равняется величине $1 + \frac{\alpha}{\beta \delta}$. Эта величина падает при дальнейшем увеличении параметра β , т. е. наилучшее значение не превышает значения, удовлетворяющего равенству (40).

Но при β , удовлетворяющем неравенству

$$\beta^2 = n \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha \left[\beta \delta + \frac{\rho^2}{n} \right]},$$

правая часть равенства (38) достигает минимума при γ , определяемом выражением (39); χ , как не трудно видеть, равняется

$$\chi = \sqrt{\frac{2 \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha \left[\beta \delta + \frac{\rho^2}{n} \right]} - \left(2\alpha - n\beta^2 + \frac{\rho^2}{n} \right)}{n\beta^2}}$$

χ получается больше всего, когда

$$\frac{\rho^2}{n} = 1,5 n + 0,5 \frac{n^2 \delta}{\beta}, \quad (41)$$

причем радикал $\sqrt{\alpha^2 + 2\alpha \left[\beta \delta + \frac{\rho^2}{n} \right]}$ становится равен двум-четыре $\frac{2\rho^2}{n} - \alpha$, а для χ получается следующее выражение:

$$\chi = \sqrt{\frac{3 \frac{\rho^2}{n} - 4\alpha + n\beta^2}{n\beta^2}} = \sqrt{\frac{\alpha \left(1 + \frac{n\delta^2}{\rho^2} \right)}{2n\beta^2}}, \quad (42)$$

или, что то же

$$\chi = \sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{n\delta} \right)^2 \frac{1 + \frac{n\delta^2}{\rho^2}}{3 + \frac{n\delta^2}{\rho^2}}}. \quad (43)$$

Равенство (43) показывает, что полезное действие прибора получается значительным лишь при $\left(\frac{\beta}{n\delta} \right)^2$ близком по сравнению с единицей. А при этом условии χ , как показывает равенство (42), убывает с увеличением n . Прибор, не снабженный синхронизатором, дает лучшие результаты тогда, когда он настроен так, что n выходит минимальным, т. е. равным единице, как выразился ниже, если частота его свободных колебаний равна частоте колебаний преобладающего тона судовых вибраций.

$\delta: \sqrt{a}$	0,00	0,0046	0,0493	0,0742	0,0993
$\beta^2: a$	1,50	1,51	1,52	1,53	1,54
$\delta: \beta$	0,00	0,020	0,04	0,06	0,08
x	0,00	39,6	15,2	10,4	7,98

Если частота ω_0 собственных колебаний усилителя выбрана правильно, т. е. если $\kappa = 1$, то наименьшее сопротивление прибора определяется из условия

$$\frac{\delta^2}{a} = 1,5 + 0,5 \frac{\delta}{\beta}. \quad (44)$$

а полезное действие его выходит равным:

$$x = \sqrt{0,5 \frac{a}{\beta^2} \left(1 + \frac{\delta}{\beta}\right)}. \quad (45)$$

Табл. 1 иллюстрирует взаимную связь величин $\frac{\delta}{\sqrt{a}}$, $\frac{\beta^2}{a}$, $\frac{\delta}{\beta}$ и x .

Установившуюся формулами (44) и (45).

Из таблицы видно, что

- 1) при $x > 5$ величина отклонений наименьшего сопротивления в приборе β к \sqrt{a} (кору квадратному из относительной массы прибора) есть величина почти постоянная, близкая к 1,50;
- 2) для увеличения амплитуды усилителем не менее, чем в 5 раз, необходимо, чтобы δ к \sqrt{a} были связаны неравенством $\delta < 0,175 \sqrt{a}$.

Если считать грубо, что a есть отношение массы усилителя к одной четверти массы корабля, то для уменьшения амплитуды в 5 раз, необходимо, чтобы вес усилителя был не менее, чем $\frac{a^2}{0,25 D}$ $\frac{a^2}{0,25 D}$, где D есть водоизмещение корабля в тоннах. При $\delta = 0,02$ вес такого усилителя будет составлять около 0,3% от водоизмещения; при $\delta = 0,06$ уменьшение амплитуды в 5 раз возможно, если вес усилителя составит около 3% от водоизмещения.

Для судна в 10 000 т вес усилителя, увеличивающего амплитуду колебаний корабля в 5 раз, даже при таком малом δ , как 0,02, будет составлять около 30—35 т. Цифры эти заставляют думать, что усилитель без синхронизатора получается слишком громоздким и может быть применим лишь на малых судах.

Таблица 2

0,1345	0,15	0,1755	0,201	0,227	0,253	0,319
1,55	1,56	1,57	1,58	1,59	0,160	0,1625
0,10	0,12	0,14	0,16	0,18	0,20	0,25
6,55	5,59	4,90	4,39	4,00	3,67	3,10

§ 9. Действие усилителя, снабженного синхронизатором

Посмотрим теперь, имеется ли возможность установкой синхронизатора уменьшить массу усилителя. Как устроить такой синхронизатор, мы касаться не будем. Предположим лишь, что он достаточно чувствителен и прибор после всякого изменения частоты возмущающей силы быстро настраивается в унисон с ней, иными словами, допустим, что амплитуда судна после любого изменения частоты возмущающей силы очень быстро приходит в установившееся состояние, — настолько быстро, что можно не интересоваться теми промежуточными процессами, во время которых прибор перестраивается на новый тон, а исследовать лишь то движение, которое имеет место после достижения нового стационарного состояния. Новое стационарное состояние характеризуется очевидно тем, что ω и ω_0 суть величины постоянные.

Если бы синхронизатор работал идеально, то частоту ω_0 он делал бы всегда в точности равной частоте возмущающей силы. Практически такой идеальной работы синхронизатора достигнуть нельзя и мы должны считать параметр γ , определенный разностью частот ω и ω_0 , хотя и малым, но не пренебрежимо малым по сравнению с α и β . Легко видеть, что чем больше γ , тем хуже действие усилителя. Величину γ можно назвать *неустранимой синхронизацией*. Чтобы учесть подробно влияние неустраняемой синхронизации, считая α и γ величинами заданными, найдем γ_0 , обращающее правую часть равенства (38) в минимум. Очевидно, это γ_0 определяется равенством

$$\gamma_0 = -\frac{\gamma^2}{\alpha + \beta}. \quad (46)$$

и, найдя соответствующее ему значение x :

$$x = 1 + \frac{\beta}{\delta} \frac{\alpha}{\alpha + \beta}. \quad (47)$$

Определив β , обращающее x в максимум, и затем, подставляя это наименьшее β в выражение для x , определить соответствующее ему полезное действие прибора.

Легко видеть, что наименьшее β определяется равенством $\beta = \gamma$. (48)

а соответствующее ему x может быть выражено так:

$$x = 1 + \frac{\alpha}{2\beta\gamma}. \quad (49)$$

Рассмотрев формулы (47), (48) и (49), можно высказать следующие положения:

1) погрешность синхронизатора γ для уменьшения действия прибора следует уменьшать настолько это возможно;

2) сопротивление прибора β не следует делать меньше погрешности синхронизатора. Лучше всего делать $\beta = \gamma$, но если сделать β столь малым по техническим соображениям оказывается невозможным, то β следует делать возможно меньше;

3) когда β не может быть сделано равным γ , то формулой (49) можно пользоваться для определения степени полезного действия прибора, но под γ в этой формуле следует подразумевать приведенную погрешность синхронизатора, равняющуюся дроби $\frac{\gamma + \beta}{2\beta}$;

4) приведенную погрешность синхронизатора следует стараться иметь возможно меньшей.

Для большей наглядности в табл. 2 собраны в зависимости от величины δ и степени полезного действия прибора, соответствующие им значения отношения $\gamma : \alpha$. Из таблицы видно, что для получения x в пределах $10 > x > 5$ при δ от 0,02 до 0,06 величина $\gamma : \alpha$ должна заключаться в пределах:

$$1,0 < \gamma = \beta, 0.$$

Какова должна быть погрешность успокоителя для того, чтобы размеры прибора не были слишком громоздки, показывает следующей численный пример.

Значения $\gamma : \alpha$ в функции от x и δ Таблица 2

x	δ				
	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
10	2,78	1,86	1,39	1,11	0,92
9	3,12	2,08	1,56	1,25	1,04
8	3,57	2,33	1,78	1,42	1,19
7	4,16	2,79	2,08	1,67	1,39
6	5,03	3,33	2,50	2,00	1,67
5	6,25	4,17	3,12	2,50	2,08
4	8,33	5,55	4,16	3,33	2,78
3	12,50	8,33	6,25	5,00	4,16
2	25,0	16,7	12,50	10,00	8,33

Для судна в 10 000 т возмещения вес успокоителя в 2,5 т является не слишком большим. При $\gamma = 0,25$ это соответствует $\alpha = 0,10\%$, и согласно только что выписанным неравенствам γ должно для успешности действия успокоителя быть доведено до величин, лежащей в пределах: $0,10\% < \gamma < 0,6\%$.

Мы видели, что для уменьшения массы успокоителя, необходимо уменьшать погрешность синхронизатора. Есть, однако, одно обстоятельство, которое препятствует безраздельному уменьшению массы прибора: уменьшение массы прибора, производящее заданное успокаивающее действие, может происходить лишь за счет увеличения амплитуды колебаний этой массы. Так как увеличить данную амплитуду беспроблемно нельзя, то и массу прибора нельзя уменьшать до бесконечности и независимо от того, какие максимальные значения параметров β и γ могут быть осуществлены, для α должен существовать известный минимальный предел, определяемый предельной допустимой амплитудой успокоителя. Попробуем найти выражение для этого предела.

§ 10. Амплитуда колебаний успокоителя

При изучении выражения (33), дающего амплитуду вибраций успокоителя, можно ограничиться случаем, когда прибор снабжен синхронизирующим приспособлением, иначе амплитуда колебаний успокоителя выходит настолько небольшой, что не может быть и речи о желательности уменьшения ее за счет увеличения массы прибора. Можно считать при анализе формулы (33) величинами α и γ заданными и для отыскания α , при котором g достигнет максимума, дифференцировать выражение (35) по α .

Нетрудно видеть, что наибольшее значение g получается при $\gamma = \frac{\alpha}{\beta + \gamma}$ и определяется выражением

$$g_{\max} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\alpha \omega^2} \cdot \frac{X(\delta)}{X_1(\alpha + \delta)} \cdot \frac{\alpha}{\sqrt{\gamma^2 + \beta^2} \cdot \left(\delta + \frac{\beta \alpha}{\gamma^2 + \beta^2} \right)}$$

и в наиболее выгодном в смысле уменьшения колебаний корабля случае, когда $\beta = \gamma$

$$g_{\max} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\alpha \omega^2} \cdot \frac{X(\delta)}{X_1(\alpha + \delta)} \cdot \frac{\sqrt{2}}{1 + \frac{2\beta\gamma}{\alpha}}. \quad (50)$$

Согласно формуле (49) множитель $1 + \frac{2\beta\gamma}{\alpha}$, стоящий в знаменателе выражения (50), может быть выражен непосредственно через x . Имеем: $1 + \frac{2\beta\gamma}{\alpha} = 1 + \frac{1}{x-1}$.

При χ в пределах $5 < \chi < 10$ множитель этот лежит в пределах

$$1,00 < 1 + \frac{2\theta \gamma}{\alpha} < 1,25.$$

Поэтому при $\chi > 5$ g_{\max} лежит в пределах от

$$1,40 \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\omega \omega_0^2} \frac{X_0(t)}{X_0(t_0 + \tau)} > g_{\max} > 1,12 \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\omega \omega_0^2} \frac{X_0(t)}{X_0(t_0 + \tau)}$$

и в среднем при приближенных соотношениях может быть принято

$$g_{\max} \approx 1,25 \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\omega \omega_0^2} \frac{X_0(t)}{X_0(t_0 + \tau)}.$$

Если эту величину сравнить с максимальной амплитудой колебаний корабля без ускорителя, т. е. с

$$|Q_0|_{\max} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\omega_1 M \omega_0^2} \frac{X_0(t)}{X_0(t_0 + \tau)},$$

то можно видеть, что минимальный предел для α есть:

$$\alpha \approx 1,25 \frac{|Q_0|_{\max}}{|g|_{\max}} \delta.$$

Если считать, что

$$\begin{aligned} |g|_{\max} &= 400 \text{ мк}, \\ |Q|_{\max} &= 16 \text{ мк}. \end{aligned}$$

то α не следует делать меньше величины, удовлетворяющей неравенству:

$$\alpha > 0,05 \delta \quad (51)$$

и при δ в пределах $0,02 < \delta < 0,06$ минимальное допустимое значение α получается

$$0,1\% < \alpha < 0,3\%.$$

Окажется ли осуществимым прибор, масса которого была бы равна пределу, указываемому равенством (51), зависит от того, возможно ли построить синхронизаторы с достаточно малой приведенной погрешностью. Для наглядности в табл. 3 сопоставлены степень влияния действия прибора χ и соответствующая ей предельная допустимая погрешность синхронизатора для

Таблица 3

χ	26	17,7	13,5	11,0	9,3	7,2	6,0	5,17
$\gamma, \%$	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60

ускорителя минимальной массы, определяемой равенством $\alpha = 0,05 \delta$.

Насколько осуществимы значения γ , собранные в этой таблице, судить нельзя, пока это не будет установлено опытом. Поэтому мы принуждены воздержаться от каких-либо окончательных суждений по вопросу об осуществимости или неосуществимости прибора минимального веса. На основании всего сказанного наше дело, что при попытках конструктивного осуществления разбросанного прибора нужно стремиться к возможному уменьшению приведенной погрешности его синхронизатора, и практическое применение, по-видимому, суждено приобрести лишь тому прибору, в котором величина эта будет доведена до минимума.

26. ТЕОРИЯ ЖИРОСКОПИЧЕСКОГО СТАБИЛИЗИРОВАНИЯ ОДНОРЕЛЬСОВОГО ВАГОНА*

Введение

Жироскопические устройства, служащие для уличтожения колебательных движений качающегося тела, разделяются на два класса.

К первому классу относятся жироскопы свободные, т. е. такие, ось которых подвижна к корпусу стабилизируемого тела посредством двойного шарнирного сочленения, или двух рам. Ось таких жироскопов свободна занимать любое положение по отношению к стабилизируемому телу.

Ко второму классу принадлежат жироскопы «непосредственного действия», подвижные к корпусу качающегося тела посредством одной рамы. Ось их не может занять относительно стабилизируемого тела произвольное положение, и принуждена оставаться все время в некоторой плоскости последнего. Плоскость эта носит наименование плоскости качания жироскопа.

Жироскоп «свободный» нашел применение в самодвижущихся минах.

Такой жироскоп стремится сохранить неизменным направление своей оси, так что по положению его относительно удерживаемого им тела можно судить об отклонении последнего от прямолинейного направления. О всяком таком отклонении сообщает сервомотор, который посредством тех или иных механизмов вызывает появление ускория, приводящего систему в надлежащее положение.

Жироскопы «непосредственного действия» имеет другие задачи. Всякое ускорие, стремящееся наклонить тело, стабилизируемое таким стабилизатором, вызывает прецессионное перемещение рамы жироскопа. Жироскопический момент, соответствующий этому перемещению, является непосредственным фактором, удерживающим стабилизируемое жироскопом тело от падения. Этот класс стабилизаторов принято называть стабилизаторами непосредственного действия.

* Впервые напечатано, Госиздат, 1922.

Стабилизатор П. П. Шидловского для вагонов однорельсового проема так же, как и стабилизаторы Шерде и Бренана, принадлежит ко второму классу, но отличается от них особой системой того устройства, назначение которого — заглушать колебания, приобретаемые системой под влиянием различных, действующих на нее, сил. Система эта, как показано ниже, представляет значительные достоинства.

Целью настоящей статьи является обеспечение теоретической основы действия стабилизатора. Малая разработанность теории однорельсовой дороги открывает очень широкий простор для исследований.

Настоящее исследование ограничивается разрешением важнейших чисто практических задач, касающихся отношения к поезду П. П. Шидловского.

В частности, настоящее исследование ограничено разбором случая, когда плоскость качания жироскопа совпадает с продольной «двухсторонней» плоскостью вагона, за средние же положение жироскопа принята линия пересечения этой плоскости с вертикальной плоскостью, перпендикулярной к продольной оси вагона (так именно расположено жироскоп по отношению к вагону в проекте П. П. Шидловского).

Статья разделена на четыре главы.

Глава первая в основном выложена в виде общих соображений.

Во второй главе подробно рассмотрено влияние на систему различных внешних сил, которые могут действовать на поезд. Глава эта имеет целью установить формулы, позволяющие подсчитать величину тех отклонений, которые вагон и жироскоп получают под действием различных возмущающих движение системы факторов. Во избежание сложных выкладок все рассуждения сделаны в предположении, что жироскоп свободен от влияния демпферов, т. е. того прибора, который заглушает колебания системы. Влияние сил трения, соприкасающихся качки вагона и жироскопа, также не принято во внимание. Это оправдывается тем, что заглушение колебаний системы, производимое обоними факторами, становится заметным лишь по прошествии некоторого времени и обычно мало изменяет движение системы в моменты непосредственно следующие за моментами воздействия на систему возмущающей силы. Максимальные отклонения системы от положения равновесия, подсчитанные в предположении незаглушения колебаний, должны быть всегда больше действительных. Если в том или ином частном случае окажется необходимым более точное решение, то оно может быть получено, как показано в главе четвертой (отд. 2).

Вопрос о заглушении колебаний разобран в главе третьей. Принимая во внимание, что выбор аналитического выражения для момента сил сопротивления, действующих на вагон, не мешает совместно на заглушение колебаний системы, исследование выло-

нено в предположении, что момент этот пропорционален угловой скорости колебательного движения вагона. Выбор закона изменения величины момента, прикладываемого амортизатором к раме жирокопа, имеет существенное влияние на действие всего устройства. Исследованиями подтвердены поэтому не только случаи, когда момент амортизатора пропорционален угловой скорости рамы жирокопа, но когда он пропорционален углу крена вагона и когда он есть, как то предположено в проекте Н. П. Шилова, некоторая сложная функция от угла крена вагона и времени.

В главе четвертой разобраны некоторые специальные случаи движения вагона, для освещения которых было желательно иллюстрировать результаты, вытекающие из различных формул, численными выкладками.

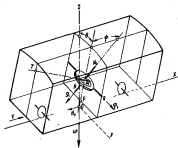


Рис. 1.

Принятые обозначения

- P — полный вес стабилизируемой системы, т. е. вагона, $мг$;
 Z — возмещение ее центра тяжести над осью качения (над осью рельса), $м$;
 K — момент инерции массы ее относительно оси качения, $мгм^2$.

- θ — угол отклонения диаметральной плоскости вагона от вертикали, измеряемый в отклоненных углах единиц и принятым большим нулем, если правый (смотри в сторону движения колеса) бок вагона снаружи;
 p — вес рамы жирокопа и всех вместе с ней касающихся его частей, $мг$;
 I — возмещение центра ее тяжести над осью качения, $м$;
 y — угловая мера отклонения рамы жирокопа от ее среднего положения, считая ее положительной, когда верхняя часть жирокопа отклонена от вертикали вперед;
 C — 0,86 от момента инерции махового колеса жирокопа относительно оси его фигуры, $мгм^2$;
 A — момент инерции рамы жирокопа и всех вместе качающихся частей относительно оси ее качения, $мгм^2$;
 Ω — угловая скорость вращения маховика жирокопа относительно его рамы, считая ее положительной, если вращение, смотря сверху, направлено против часовой стрелки, $сек^{-1}$;
 ω — угловая скорость вращения вагона вокруг вертикальной оси; положительное направление то же, что и для Ω , $сек^{-1}$;
 M — момент всех внешних сил, стремящихся наклонить вагон вперед, $мгм$;
 N — момент сил трения, сопротивляющихся наклонению вагона, $мгм$;
 L — момент всех внешних сил, стремящихся отклонить верхнюю часть рамы жирокопа вперед, $мгм$;
 μ — момент, прикладываемый к раме жирокопа амортизатором, считая его положительным, когда он стремится отклонить верхнюю часть рамы жирокопа назад, $мгм$;
 v — скорость поступательного движения колеса, $мжк^{-1}$;
 R — радиус кривизны горизонтальной траектории вагона, $м$;
 g — ускорение силы тяжести, $мжк^{-2}$.

Глава I

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

§ 1. Основные дифференциальные уравнения движения

Когда вагон движется по прямолинейному участку пути, основные дифференциальные уравнения движения его могут быть, пренебрегая различиями малыми величинами, поставлены в форме, аналогичной основным уравнениям движения корабля, снабженного

жироскопическим устойчивелем качки*, а именно:

$$K\theta'' + \Pi - PL\theta + C\Omega\psi' = M;$$

$$A\psi'' + \mu - p\psi - C\Omega\theta' = m,$$

где θ — угол крена вагона;

ψ — угловое перемещение жироскопа относительно системы координат, жестко связанной с вагоном.

Точный смысл всех остальных величин, входящих в эти уравнения, пояснен в приведенной таблице.

Для краткости в дальнейшем эти величины будут именоваться так:

θ	— отклонение вагона;
ψ	— отклонение жироскопа;
M	— пара, кренящая вагон;
Π	— сопротивление вагона;
m	— пара, кренящая жироскоп;
μ	— воздействие амортизатора;
PL	— величина пары, опрокидывающей вагон;
p	— величина пары, опрокидывающей жироскоп;
$C\Omega$	— импульс жироскопа;
K	— момент инерции вагона;
A	— момент инерции жироскопа.

При движении вагона по криволинейным участкам пути, данные уравнения следует дополнить членами, выражающими влияние угловой скорости вращения вагона вокруг вертикальной оси. Для этого следует угловую скорость ω разложить на составляющие параллельные: O_1N — ось фигуры жироскопа; O_1Q — ось шайбы рамы жироскопа и O_1T — ось общего перпендикуляра к линиям O_1Q и O_1N .

Проекция на O_1Q ось ω $\sin\theta \sin\psi = \omega_1$;

„ „ O_1N „ $\omega \cos\theta \cos\psi = \omega_2$;

„ „ O_1T „ $-\omega \cos\theta \sin\psi = \omega_3$.

Угловая скорость ω_1 непосредственно складывается с угловой скоростью Ω , вызывая вращение, пренебрежимо малое изменение импульса жироскопа. Угловая скорость ω_2 складывается с угловой скоростью качения жироскопа ψ' ; благодаря ей, жироскопический момент $C\Omega\psi'$, входящий в первое из основных уравнений движется, обращается в

$$C\Omega\psi' + C\Omega\omega \sin\theta \sin\psi \approx C\Omega\psi' + C\Omega\omega \theta.$$

Угловая скорость ω_3 вызывает появление жироскопического момента, параллельного оси O_1Q .

$$-C\Omega\omega \cos\theta \sin\psi \approx -C\Omega\omega \psi.$$

Момент этот складывается с моментом пары $p\psi$, опрокидывающей жироскоп. Уменьшение данного момента можно, подставляя во второе из основных уравнений движения величину

$$p\psi - C\Omega\omega \psi$$

вместо $p\psi$.

Сказанное позволяет выписать основные дифференциальные уравнения колебаний системы для случая, когда $\omega \neq 0$, так:

$$\left. \begin{aligned} K\theta'' + \Pi - PL\theta + C\Omega\psi' = M; \\ A\psi'' + \mu - p\psi - C\Omega\theta' = m, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где L_0 и I_0 определяются равенствами:

$$\left. \begin{aligned} L_0 &= L - \frac{C\Omega m}{P}; \\ I_0 &= I - \frac{C\Omega \mu}{P} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

и могут быть названы: первая приведенным эксцентриситетом вагона, вторая приведенным эксцентриситетом жироскопа.

Практически разность $L - L_0$ пренебрежимо мала. Разностью $I - I_0$ пренебрегать можно не всегда. Если вагон поворачивается в сторону вращения жироскопа, то $\Omega \omega > 0$ и $I_0 < I$, при вращении в противоположную сторону $I_0 > I$. Таким образом одно из значений, наблюдающихся при продолжении поезда по кривым участкам пути, есть увеличение пары, опрокидывающей жироскоп, при поворотах в сторону вращения жироскопа, и увеличение ее при поворотах в противоположную сторону.

С явлением этим надо так или иначе считаться: следить за тем, чтобы оно не нарушало правильности работы всего устройства, или же признавать соответствующие меры, чтобы парализовать его влияние, если оно почему-либо становится вредным.

§ 2. Характер свободных колебаний в случае, когда амортизатор выведен из действия

Свободными колебаниями системы принято называть те колебания, которые она совершает по инерции, т. е. будучи свободна от влияния возмущающих ее движений внешних сил. Дифференциальные уравнения свободных колебаний можно получить, подставив в общих уравнениях

$$M = m = 0.$$

* См. исследование А. Н. Крылова, «Морской сборник», 1909.

Если в шкв еще положить, что

$$\mu = 0,$$

то получаются уравнения, определяющие свободные колебания при выведенном из действия амортизаторе.

Выяснить характер этих колебаний интересно для установления необходимости применения амортизатора и почему нельзя обойтись без него. Что касается пары III, т. е. сопротивления вагонов, то достаточно ограничиться рассмотрением случая, когда она пропорциональна угловой скорости вагона, и положить

$$\Pi = F\theta'. \quad (3)$$

Основные дифференциальные уравнения принимают в этом случае вид

$$K\theta'' + F\theta' - P L\theta + C\Omega\psi' = 0,$$

$$A\psi'' - P k_0\psi - C\Omega\theta' = 0.$$

Интеграл данных уравнений в самом общем виде может быть представлен суммами:

$$\psi = \sum_{i=1}^{i=4} A_i e^{k_i t}; \quad \theta = \sum_{i=1}^{i=4} a_i e^{k_i t},$$

где k_i — корни характеристического уравнения.

$$A K x^4 + F A x^3 + (C^2 \Omega^2 - K P k_0 - A P L) x^2 - F P k_0 x + P L P k_0 = 0. \quad (4)$$

Величины A_i и a_i — восемь постоянных коэффициентов. Из восьми коэффициентов любые четыре могут быть приняты за постоянные произвольные, определяемые начальными условиями движения, а остальные четыре могут быть определены через эти четыре постоянные произвольные роствиковой общей интегралов для ψ и θ в основные дифференциальные уравнения. Общий характер движения системы определяется корнями k_i характеристического уравнения.

Если корни эти суть числа мнимые, то движение системы складывается из двух простых гармонических колебаний. Комплексными корнями определяются колебания; затухающие, если действительная часть k_i меньше нуля, и беспредельно с течением времени увеличивающиеся свою амплитуду, если действительная часть k_i положительна. Если корень характеристического уравнения не имеет мнимой части, то определяемое им движение не имеет колебательного характера и характеризуется тем, что отклонение системы от положения равновесия или с течением времени возрастает (если корень положительный) или же стремится к нулю (если он меньше нуля).

Каков же характер движения системы, когда амортизатор не работает? Чтобы выяснить это, следует найти корни уравнения (4). Уравнение (4) может быть разложено на множители так:

$$(x^2 + 2 h_1 x + g_1^2)(x^2 + 2 h_2 x + g_2^2) = 0,$$

где

$$\left. \begin{aligned} 2 h_1 + 2 h_2 &= \frac{F A}{K A}; \\ 2 g_1^2 h_1 + 2 g_2^2 h_2 &= -\frac{F P k_0}{K A}; \\ g_1^2 + g_2^2 + 4 h_1 h_2 &= \frac{C^2 \Omega^2 - K P k_0 - A P L}{K A}; \\ g_1 g_2 &= \frac{P L P k_0}{K A}. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

В том частном случае, когда сопротивление вагонов равно нулю т. е. когда

$$F = 0,$$

величины h_1 и h_2 также равны нулю, а

$$g_1^2 = \frac{C^2 \Omega^2 - K P k_0 - A P L}{2 K A} + \sqrt{\left(\frac{C^2 \Omega^2 - K P k_0 - A P L}{2 K A}\right)^2 - \frac{P L P k_0}{K A}};$$

$$g_2^2 = \frac{C^2 \Omega^2 - K P k_0 - A P L}{2 K A} - \sqrt{\left(\frac{C^2 \Omega^2 - K P k_0 - A P L}{2 K A}\right)^2 - \frac{P L P k_0}{K A}}.$$

Корни характеристического уравнения в этом случае имеют или одну вещественную часть или одну лишь мнимую часть. В первом случае в общем интеграле движения обязательно должны быть члены вида

$$e^{k t},$$

где k больше нуля, так что система, будучи отклонена от своего положения равновесия, не возвращается с течением времени к нему, а наоборот, удаляется от него все больше и больше. Необходимым условием устойчивости системы является выполнение неравенств:

$$P L P k_0 > 0; \quad (6)$$

$$C \Omega > \sqrt{K P k_0} + \sqrt{A P L}. \quad (7)$$

Если неравенства эти удовлетворены, то общий интеграл движения имеет вид

$$A_1 \sin g_1 t + B_1 \cos g_1 t + A_2 \sin g_2 t + B_2 \cos g_2 t$$

и движение системы распадается на два гармонических колебания.

Величины q_1 и q_2 могут быть названы углами скорости главных колебаний системы. Если $C \neq 0$ велико по сравнению с правой частью неравенства (7), то величины \dot{q}_1^2 и \dot{q}_2^2 с весьма большой степенью точности могут быть выражены равенствами:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_1^2 &= \frac{C^2 \omega^2}{K A} \\ \dot{q}_2^2 &= \frac{P L p_0^2}{C^2 \omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= 2\pi \sqrt{\frac{K A}{C \omega}} \\ T_2 &= 2\pi \sqrt{\frac{C \omega}{P L p_0^2}} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Неравенства (6) и (7) являются в рассматриваемом случае не только необходимыми, но и достаточными условиями устойчивости системы.

Когда сопротивление вагона не равно нулю, то

$$\left. \begin{aligned} 2 \lambda_1 &= \frac{P}{K A} \frac{(A \dot{q}_1^2 - p_0^2)}{\dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2}; \\ 2 \lambda_2 &= -\frac{P}{K A} \frac{(p_0^2 + A \dot{q}_2^2)}{\dot{q}_1^2 - \dot{q}_2^2}; \\ \dot{q}_1^2 &= \frac{C^2 \omega^2 - K p_0^2 - A P L - 4 \lambda_1 \lambda_2 K A}{2 K A} + \\ &+ \sqrt{\left(\frac{C^2 \omega^2 - K p_0^2 - A P L - 4 \lambda_1 \lambda_2 K A}{2 K A} \right)^2 - \frac{P L p_0^2}{K A}}; \\ \dot{q}_2^2 &= \frac{C^2 \omega^2 - K p_0^2 - A P L - 4 \lambda_1 \lambda_2 K A}{2 K A} - \\ &- \sqrt{\left(\frac{C^2 \omega^2 - K p_0^2 - A P L - 4 \lambda_1 \lambda_2 K A}{2 K A} \right)^2 - \frac{P L p_0^2}{K A}} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

и корни характеристического уравнения суть

$$\begin{aligned} \lambda &= -\lambda_1 \pm \sqrt{\lambda_1^2 - \dot{q}_1^2}; \\ \lambda &= -\lambda_2 \pm \sqrt{\lambda_2^2 - \dot{q}_2^2}. \end{aligned}$$

Если импульс гироскопа достаточно велик, то можно с точностью до малых величин порядка

$$\frac{A P L}{(C \omega)^2}, \frac{K p_0^2}{(C \omega)^2} \approx \frac{P^2 K p_0^2}{K^2 (C \omega)^2}, \frac{A P L}{(C \omega)^2}$$

записать

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_1^2 &= \frac{(C \omega)^2}{K A}; \\ \dot{q}_2^2 &= \frac{P L p_0^2}{(C \omega)^2}; \\ 2 \lambda_1 &= \frac{P}{K}; \\ 2 \lambda_2 &= -\frac{P K p_0^2}{K C^2 \omega^2}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

По малости отношений $(\lambda_1; \dot{q}_1)^2$ и $(\lambda_2; \dot{q}_2)^2$ по сравнению с единицей можно считать, что общий интеграл для (4) может быть выписан так

$$y = e^{-\lambda_1 t} (A_1 \sin q_1 t + B_1 \cos q_1 t) + e^{-\lambda_2 t} (A_2 \sin q_2 t + B_2 \cos q_2 t).$$

Движение системы складывается и в этом случае из двух колебаний. Одно из колебаний быстрое, совершающееся с частотой q_1 , с течением времени постепенно затухает. Амплитуда второго колебания, более медленного, с течением времени постепенно возрастает. Обычно величина второго колебания значительно больше, чем у первого. Более медленное колебание может быть рассмотрено как основное колебание системы, более же быстрое, период которого есть T_1 , как колебание сопутствующее. В дальнейшем основному колебанию системы будет присвоено наименование прецессионного, сопутствующему — нутационного.

Если амортизатор выведен из действия, то при полном отсутствии сопротивления вагона оба главных свободных колебания системы сохранят свою величину неизменной; благодаря сопротивлению вагона, колебание нутационное постепенно затухает, колебание же прецессионное постепенно увеличивается.

Это-то постепенно увеличивающееся отклонение системы от положения равновесия и должно парализовать амортизатор. Оно вызывается постепенной потерей энергии, расходуемой все время на преодоление пары сопротивления вагона; можно думать, что амортизатор может гасить колебания системы, лишь пополняя постоянную трату энергии.

Ранее, чем доказать это положение, полезно вывести некоторые общие свойства обоих главных колебаний системы.

§ 3. Главнейшие свойства нутационного колебания

Общий интеграл нутационного колебания имеет вид

$$y = e^{-\lambda_2 t} (A_2 \sin q_2 t + B_2 \cos q_2 t),$$

где q_2 есть угловая скорость этого колебания, а λ_2 может быть названо декрементом его.

Когда импульс гироскопа достаточно велик, величины q_1 и λ_2 определяются выражениями (11), причем величина λ_1 может

быть рассматриваемы как пренебрежимо малая по сравнению с φ . Это обстоятельство имеет отношение к выхождению зависимости между коэффициентами A_1 и B_1 outside интеграла для φ и такими же коэффициентами для a_1 и b_1 в общем интеграле для θ .

$$\theta = e^{-\lambda t} (a_1 \sin \varphi_1 t + b_1 \cos \varphi_1 t).$$

Пусть время отсчитывается, начиная с момента, когда $\theta = 0$. Тогда $b_1 = 0$. Подставляя φ и θ во второе из дифференциальных уравнений движения можно видеть:

$$A[B_1(\dot{M}^2 - \varphi_1^2) - 2A_1 \lambda_1 \varphi_1] - B_1 \rho_1^2 = C \Omega \varphi_1 a_1;$$

$$A[A_1(\dot{M}^2 - \varphi_1^2) + 2B_1 \lambda_1 \varphi_1] - A_1 \rho_1^2 = -C \Omega \lambda_1 a_1.$$

Второе из этих уравнений дает:

$$a_1 = \frac{-2B_1 \lambda_1 \varphi_1 - C \Omega \lambda_1 a_1}{A \dot{M}^2 - \varphi_1^2 - \frac{\rho_1^2}{A}} \approx \frac{2B_1 \lambda_1 \varphi_1 + C \Omega \lambda_1 a_1}{\dot{M}^2 \left(1 + \frac{K \rho_1^2}{C \Omega^2}\right)} \approx \frac{2B_1 \lambda_1}{\dot{M}^2} + \frac{C \Omega \lambda_1}{A \dot{M}^2} a_1.$$

Из первого же видно:

$$a_1 = B_1 \frac{A(\dot{M}^2 - \varphi_1^2 - 4\lambda_1^2) - \rho_1^2}{C \Omega \varphi_1} - \frac{2\dot{M}^2}{\dot{M}^2} a_1,$$

или, пренебрегая малыми порядками $\dot{M}^2 : \varphi_1^2$

$$a_1 \approx -B_1 \frac{A}{C \Omega \varphi_1} \varphi_1 = -B_1 \sqrt{\frac{A}{K}}.$$

По малости отношения $A_1 : B_1$ можно считать, что nutational колебание жирокопа

$$\varphi = B_1 e^{-\lambda t} \cos \varphi_1 t$$

сопровождается колебанием ватона:

$$\theta = -B_1 \sqrt{\frac{A}{K}} e^{-\lambda t} \sin \varphi_1 t.$$



Рис. 2.

Общий характер nutational колебания системы иллюстрируется рис. 2, представляющим собой траекторию точки пересечения луча, параллельного оси фигуры жирокопа, со сферой единичного радиуса. По данной траектории точка эта передвигается так, что радиус-вектор, соединяющий начало координат с ней, падает в сторону вращения жирокопа (сверху вниз, против часовой стрелки).

Если сопротивление ватона отсутствует, то рассматриваемая траектория есть эллипс, с отношением полуосей

$$\sqrt{A : K}.$$

Если сопротивление ватона нулю не равно, то траектория принимает вид эллиптической суживающейся спирали, получающейся из этого эллипса, если считать, что его радиус-вектор в каждую единицу времени убывает в e^{λ} раз.

Декрементом λ_1 характеризуются интенсивность затухания nutational колебаний системы. Чтобы иметь реальное представление о величине декремента, можно сравнить его величину с величиной декремента свободных колебаний, присущих ватону, подвешенному к рессоры с силой и искомого тот же момент инерции K , тот же вес P , тот же эксцентриситет L и тот же коэффициент пружинности K . Дифференциальное уравнение этих колебаний есть

$$K \theta'' + P \theta' + PL \theta = 0.$$

откуда видно, что при сопротивлении не слишком большом, когда движение ватон, как обычно бывает, характер восторженно затухающего колебательного движения, т. е. затухает, не аperiodически, декремент колебаний

$$H = \frac{P}{2K} \quad (12)$$

что есть не что иное, как λ_1 . Таким образом декремент nutational колебаний системы равен декременту естественного затухающего колебаний, которые имела бы та же система при восторженном жирокопе, будучи к рессоры подвешена снизу (в опрокинутом виде).

Положение это относится к случаю, когда $C \Omega$ достаточно велико. Движение становится несколько сложнее, если $C \Omega$ уменьшается; из формул (10) можно видеть, что с уменьшением величины $C \Omega$ декремент nutational колебаний возрастает, так что H есть минимальный предел декремента nutational колебаний. Если импульс жирокопа достаточно велик, то же одна из характеристик nutational колебания λ_1 и φ_1 не зависит от эксцентриситетов ватона или жирокопа.

§ 4. Главнейшие свойства прецессионного колебания (случай, когда $C \Omega$ велико)

Когда $C \Omega$ есть величина большая, то характеристика прецессионного колебания λ_2 и φ_2 можно вычислять по формулам (11), причем величиной λ_2 по сравнению с единичной можно пренебрегать. Общий интеграл прецессионного колебания жирокопа

$$\varphi = e^{-\lambda t} (A_2 \sin \varphi_2 t + B_2 \cos \varphi_2 t).$$

Соответствующее ему выражение для θ может быть выписано в форме

$$\theta = e^{-\lambda t} a_2 \sin \varphi_2 t,$$

примем A_2, B_2 и a_2 должны удовлетворять уравнениям:

$$A[B_2(\dot{M}^2 - \varphi_2^2) - 2A_2 \lambda_2 \varphi_2] - \rho_1^2 B_2 = C \Omega \varphi_2 a_2;$$

$$A[A_2(\dot{M}^2 - \varphi_2^2) + 2B_2 \lambda_2 \varphi_2] - \rho_1^2 A_2 = C \Omega \lambda_2 a_2.$$

На основании второго из них:

$$A_2 = -\frac{A \Delta B_2 \lambda_2 \dot{\varphi}_2 - C \Delta \lambda_2 \varphi_2}{A(\lambda_2^2 - \dot{\varphi}_2^2) - p_2^2} \approx \frac{\Delta A B_2 \lambda_2 \dot{\varphi}_2 + C \Delta \lambda_2 \varphi_2}{p_2^2 \left(1 + \frac{A P L}{C \Delta \dot{\varphi}_2^2}\right)} \approx \\ \approx 2 B_2 \frac{\lambda_2}{\dot{\varphi}_2} \frac{A P L}{C \Delta \dot{\varphi}_2^2} + \frac{C \Delta \lambda_2 \varphi_2}{p_2^2} \sigma_2.$$

первое же дает

$$\sigma_2 = \frac{B_2 \left[A(\lambda_2^2 - \dot{\varphi}_2^2 - 4 \lambda_2^2 \frac{A P L}{C \Delta \dot{\varphi}_2^2} - p_2^2) \right]}{C \Delta \dot{\varphi}_2} - 2 \sigma_2 \frac{A \lambda_2^2}{p_2^2},$$

и с точностью до малых порядка $\lambda_2^2/\dot{\varphi}_2^2$

$$\sigma_2 = -B_2 \sqrt{\frac{p_2^2}{P L}}.$$

Пренебрегая величиной A_2 перед B_2 по малости отношения

$$\frac{\lambda_2}{\dot{\varphi}_2} \frac{A P L}{C \Delta \dot{\varphi}_2^2},$$

можно считать, что прецессионному колебанию гироскопа

$$\varphi = B_2 e^{-\lambda_2 t} \cos \dot{\varphi}_2 t$$

соответствует колебание вагона

$$\theta = -B_2 \sqrt{\frac{p_2^2}{P L}} e^{-\lambda_2 t} \sin \dot{\varphi}_2 t.$$

Прецессионное колебание системы может быть представлено графически (рис. 3) так же, как и колебание нутационное, с той лишь разницей, что

1) отношение полюсов соответствующего эллипса есть

$$\sqrt{(p_2^2) : (P L)};$$

2) угловая скорость изображающего радиус-вектора есть $\dot{\varphi}_2$

3) декремент колебания отрицателен и, следовательно, траектория есть спираль расходящаяся.

Направление движения, изображающего радиус-вектора для прецессионного колебания, так же, как и для нутационного, совпадает с направлением вращения гироскопа.

Угловая скорость, декремент и отношение полюсов конуса прецессионного колебания зависят от эксцентриситета гироскопа и вагона. Движение имеет вышесказанный характер, когда $I_2 > 0$. При уменьшении эксцентриситета гироскопа декремент колебания по абсолютной величине убывает, и, следовательно, направляющая конуса прецессии становится спиралью все меньше и

меньше расходящейся. При $I_2 = 0$ декремент обращается в нуль и направляющая обращается в эллипс. Какаюсь бы, величину p_2^2 желательнее делать возможно ближе к нулю. Этому, однако, препятствует уменьшающаяся с уменьшением p_2^2 отношение полюсов эллипса прецессии. При уменьшении величины p_2^2 полюсы эллипса, соответствующая отклонением гироскопа φ , непрерывно возрастает. В пределе при $I_2 = 0$ она обращается в бесконечность, и система теряет способность вырабатывать даже минимальный крен вагона, если бы он ей был сообщен. При p_2^2 , хотя и не равном нулю, но слишком малом, эллипс прецессии настолько вытянут, что даже небольшим отклонением вагона могут соответствовать значительные отклонения гироскопа.

Это обстоятельство не позволяет делать величину приведенного эксцентриситета гироскопа слишком близкой к нулю.



Рис. 3.

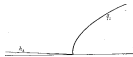


Рис. 4.

Когда $I_2 < 0$, то величина $\dot{\varphi}_2^2 = \sqrt{\lambda_2^2 - \dot{\varphi}_2^2}$ порастает быть минимой, и общий интеграл прецессионного движения принимает вид

$$\varphi = A_2 e^{-\lambda_2 t + i \dot{\varphi}_2 t} + B_2 e^{\lambda_2 t - i \dot{\varphi}_2 t},$$

где, принимая во внимание малость величин λ_2 по сравнению с $\dot{\varphi}_2$,

$$\varphi = A_2 e^{-\lambda_2 t} + B_2 e^{+\lambda_2 t}.$$

Прецессионное движение системы становится при этом движением аperiodическим и складается из двух движений. Одно из них имеет декремент $\dot{\varphi}_2$ и постепенно затухает. Декремент другого — $\dot{\varphi}_2$ отрицателен, так что движение это представляет собой некоторое возрастание отклонения системы. Декремент другого движения

$$\dot{\varphi}_2 \approx -\frac{\sqrt{P L} p_2^2}{C \Delta}$$

по абсолютной своей величине значительно превышает величину, определяющую собой интенсивность нарастания прецессионного колебания системы при I_2 большем нуля. Изменение величин λ_2 и $\dot{\varphi}_2$, определяющих интенсивность характера прецессионного колебания, может быть в функции от p_2^2 представлено рис. 4.

Таким образом, если центр тяжести гироскопа расположен достаточно высоко над осью его качания, то амортизатор должен противодействовать лишь некоторому медленному постоянному увеличению угла наклона прецессии.

Если же центр тяжести гироскопа расположен ниже оси его качания, то не будь амортизатора, система быстро стремилась бы уйти из своего среднего положения, а амортизатор должен противостоять этой постоянной тенденции системы к падению.

Проектирование такого амортизатора является задачей значительно более сложной и трудной. Поэтому-то центр тяжести гироскопа и следует располагать у рассматриваемых стабилизаторов обязательно выше оси его качания.

Вотуду в дальнейшем будем предполагать, что центр тяжести гироскопа достаточно возвышается над осью его качания. Что следует разуметь здесь под словом достаточно, будет выяснено во второй главе.

§ 5. Основные свойства движения системы, когда $C \Omega$ не велико

В предыдущих двух параграфах предполагалось, что импульс гироскопа достаточно велик, и вместо формул (10) можно, следовательно, пользоваться приближенными формулами (11). Необходимо выяснить порядок точности, вносимой этим допущением.

Пусть буквой χ обозначим величину

$$\chi = \frac{C^2 \Omega^2 - K p_0^2 - A P L - 4 A_1 A_2 K A}{2 \sqrt{K p_0^2 A P L}}$$

и формулы (10) переписаны так:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\alpha}^2 &= (\chi + \sqrt{\chi^2 - 1}) \sqrt{\frac{P L p_0^2}{K A}}; \\ \dot{\alpha}^2 &= (\chi - \sqrt{\chi^2 - 1}) \sqrt{\frac{P L p_0^2}{K A}}; \\ 2 A_1 &= \frac{P}{K} \frac{A \dot{\alpha}^2 - p_0^2}{A \Omega^2 - \dot{\alpha}^2}; \\ 2 A_2 &= -\frac{P}{K} \frac{p_0^2 + A \dot{\alpha}^2}{A \Omega^2 - \dot{\alpha}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} 4 A_1 A_2 &= -\frac{P^2}{K^2} \frac{A^2 \dot{\alpha}^2 \dot{\alpha}^2 + A p_0^2 (\dot{\alpha}^2 - \Omega^2) - \Omega^2 p_0^4}{A^2 \Omega^2 - \dot{\alpha}^2} = \\ &= -\frac{P^2}{K^2} \left[\frac{p_0^2 (A P L - K p_0^2)}{4 (\Omega^2 - 1) P L p_0^2} + \frac{p_0^2}{2 \sqrt{\chi^2 - 1}} \sqrt{\frac{K A}{P L p_0^2}} \right]. \end{aligned}$$

и, следовательно, для определения аргумента χ может служить уравнение:

$$\begin{aligned} (\chi - 1) - \frac{P^2}{2 K^2} \left[\frac{A - K \frac{p_0^2}{P L}}{4 (\chi^2 - 1) A} + \frac{1}{2 \sqrt{\chi^2 - 1}} \sqrt{\frac{K p_0^2}{A P L}} \right] \sqrt{\frac{K A}{p_0^2 P L}} = \\ = \frac{C^2 \Omega^2 - (K p_0^2 + \sqrt{A P L})^2}{2 \sqrt{K p_0^2 A P L}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Обычно величина $\frac{P^2}{2 K^2} \sqrt{\frac{K p_0^2}{A P L}}$ весьма мала по сравнению с единицей, не превосходит $\frac{1}{20}$. Поэтому при χ , сколько-нибудь отличном от единицы, второй член в левой части уравнения (14) может быть опущен, что дает возможность определить χ посредством равенства

$$\chi = \frac{C^2 \Omega^2 - K p_0^2 - A P L}{2 \sqrt{K p_0^2 A P L}}. \quad (14')$$

При $\chi = 2$ левая часть уравнения (14) выражением (14') дает ошибку в определении χ , не превышающую 3,5%.

Величину

$$C \Omega_0 = \sqrt{C^2 \Omega^2 - K p_0^2 - A P L} \quad (15)$$

можно назвать приведенным импульсом гироскопа. Если

$$C \Omega_0 > 4 \sqrt{K p_0^2 A P L},$$

то с точностью, вполне достаточной, можно аргумент χ определять по формуле (14'), пользуясь затем для определения характеристик свободных колебаний системы выражениями (13).

* Действительно

$$\frac{P}{K} \frac{P}{2 K} \approx \sqrt{\frac{K}{P L}}$$

если не что иное, как отношение двух последовательных граблей отклонений маятника, качающегося под действием и отороскопным воздействием гироскопа. Трение о рельсы и прочие факторы, влияющие на величину F , вряд ли могут быть столь велики, чтобы за полный период колебаний такого маятника амплитуда его могла уменьшаться более чем в 2,72 = \sqrt{e} раз.

Это соответствует, что

$$\frac{P}{2 K} \sqrt{\frac{K}{P L}} = \frac{1}{2 e}.$$

и тем как обычно

$$\sqrt{\frac{A}{p_0^2}} = \sqrt{\frac{K}{P L}}, \quad \frac{P^2}{2 K^2} \sqrt{\frac{K p_0^2}{A P L}} \approx 2 \left(\frac{1}{2 e} \right)^2 \approx \frac{1}{20}.$$

Если $\chi = 5$, т. е. если

$$C \Omega_1 > 10 \sqrt{K \rho_0 A P L},$$

то с точностью, вполне достаточной, можно считать

$$\chi + \sqrt{\chi^2 - 1} = 2\chi,$$

$$\chi - \sqrt{\chi^2 - 1} = \frac{1}{2\chi}$$

и, следовательно, для определения угловых скоростей главных колебаний пользоваться формулами

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{C \Omega_1^2}{K A}, \\ \Omega_2 &= \frac{P L \rho_0}{C \Omega_1^2} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

а для деформаций их, выраженных:

$$\left. \begin{aligned} 2A_1 &= \frac{P}{K} \left(1 - \frac{K \rho_0}{C \Omega_1^2} \right); \\ 2A_2 &= -\frac{P K \rho_0}{K C \Omega_1^2} \left(1 + \frac{A P L}{C \Omega_1^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Формулы (16), (17) даже при $\chi = 3$, дают погрешность всего лишь около 4%. Если $C \Omega$ отличается от $C \Omega_1$ более, чем на 3—4%, то лучше вместо формул (11) пользоваться формулами (16) и (17). Общий характер нутационного и прецессионного колебаний при этом можно считать тем же, что в § 3 и 4. Необходимо лишь помнить, что отношение полуосей конуса прецессии составит

$$-\frac{a_2}{A_1} = \frac{\rho_0^2}{C \Omega_1^2} \left(1 + \frac{A P L}{\rho_0^2} \right) = \sqrt{\frac{\rho_0}{P L}} \frac{C \Omega_1}{C \Omega} \left(1 + \frac{A P L}{C \Omega_1^2} \right)$$

вместо $\sqrt{\frac{\rho_0^2}{P L}}$, как принималось выше; а отношение полуосей конуса нутации

$$-\frac{a_1}{B_1} = \frac{A \Omega_1^2}{C \Omega_1^2} \left(1 + \frac{\rho_0}{A \Omega_1^2} \right) = \sqrt{\frac{K}{A}} \frac{C \Omega_1}{C \Omega} \left(1 + \frac{K \rho_0}{C \Omega_1^2} \right),$$

а не $\sqrt{\frac{A}{K}}$, как то было принято в § 3.

Вообще же по сказанному в настоящем параграфе можно считать, что общий характер свободных колебаний системы не отличается резко от указанного в § 3 и 4, если

$$C^2 \Omega^2 > K \rho_0 + A P L + 6 \sqrt{K \rho_0 A P L}. \quad (18)$$

С увеличением импульса гироскопа, как легко видеть из формул (13)—(17), угловые скорости обоих главных колебаний системы стремятся к совпадению, вместе с тем величины A_2 по абсолют-

ной величине возрастают, а следовательно, естественные с течением времени нарастающие прецессионные колебания системы становятся все стремительнее и стремительнее.

При

$$C^2 \Omega^2 = K \rho_0 + A P L, \quad (19)$$

как видно из уравнения (14), величина $\chi^2 - 1$ становится малой порядка $\frac{P}{K} \sqrt{\frac{K A}{P L \rho_0}}$, а разность $\Omega_1 - \Omega_2$ малой порядка

$$\sqrt{\chi^2 - 1} \sqrt{\frac{P L \rho_0}{K A}} \approx \frac{P}{K} \sqrt{\frac{P L \rho_0}{K A}},$$

обращая величину A_2 в величину порядка

$$2A_2 \approx \frac{\rho_0^2}{A} \sqrt{\frac{K A}{P L \rho_0}} \left(1 + \sqrt{\frac{A P L}{K \rho_0}} \right),$$

или, так как обычно отклонения $K : P L$ и $A : \rho_0$ суть величины одного порядка,

$$2A_2 \approx \sqrt{\frac{\rho_0^2}{A}}.$$

Если бы малость гироскопа не возрастала, то рома его имела бы стремление опрокинуться. Дифференциальное уравнение движения было бы

$$A \varphi'' - \rho_0 \varphi = 0,$$

а общий интеграл

$$\varphi = A_1 e^{-\sqrt{\frac{\rho_0}{A}} t} + B_2 e^{\sqrt{\frac{\rho_0}{A}} t}.$$

Сравнивая его с выражением для A_2 можно видеть, что при $C^2 \Omega^2 = K \rho_0 + A P L$ система имеет стремление упасть столь же стремительно, как если бы гироскоп совсем не действовал. Для устойчивости системы число оборотов должно быть более критического, определяемого равенством (19), причем вполне достаточным числом оборотов с точки зрения устойчивости можно принять определяемое равенством (18). Иногда бывает мало обеспечить устойчивость системы, а желательнее отклонение периодов главных колебаний системы иметь достаточно большим. В этом случае необходимо соответственно увеличивать коэффициент перед радикалом в формуле (18). Как видно из формул (16), коэффициент этот есть как раз отношение периодов главных колебаний. В § 7 главы 3 будет показано, что амортизатор Шидловского самострунлив в предположении, что $\Omega_1 : \Omega_2$ достаточно велико. Для системы П. П. Шидловского надо принимать коэффициент в формуле (18) не менее 6—10. Точное значение его может быть установлено лишь по испытанию опытного состава.

§ 6. Энергия колебательного движения

Энергия системы может быть выражена точно посредством формулы, введенной довольно сложным путем; допустив в ней некоторые погрешности, можно ее значительно упростить; она принимает очень простой вид, если ограничиться той же точностью, с которой составлены основные уравнения движения (1).

Действительно, равнодействующий момент всех внешних сил, действующих на вагон, имеет составляющие:

$$\text{относительно оси } \begin{cases} OX & M - \mathfrak{M} + P L_0 \theta, \\ OQ & \mu; \\ OT & N \end{cases}$$

и, следовательно, работа, или производная на угловых перемещениях относительно оси $OX - d\theta$, OQ нуль и $OT d\theta \cos \varphi$ есть

$$(M - \mathfrak{M} + P L_0 \theta) d\theta + N \cos \varphi d\theta,$$

где N — момент реакции рамы железнодорожной.

На железнодорожку действует момент, составляющие которого

$$\text{относительно оси } OT - N;$$

$$\text{относительно оси } OQ - m - \mu + p_0 \varphi;$$

на угловых перемещениях

$$\text{относительно оси } OT - d\theta \cos \varphi;$$

$$\text{относительно оси } OQ - d\varphi.$$

Она производит работу

$$-N \cos \varphi d\theta + (m - \mu + p_0 \varphi) d\varphi.$$

Суммарная работа всех сил, производимая на элементарных перемещениях системы $d\theta$ и $d\varphi$, очевидно

$$(M - \mathfrak{M} + P L_0 \theta) d\theta + (m - \mu + p_0 \varphi) d\varphi,$$

а так как из основных дифференциальных уравнений движения (1) видно:

$$(M - \mathfrak{M} + P L_0 \theta) d\theta + (m - \mu + p_0 \varphi) d\varphi = -K \theta'' d\theta + A \varphi'' d\varphi, \quad (20)$$

то на основании закона живой силы величина

$$dT = K \theta'' d\theta + A \varphi'' d\varphi$$

есть не что иное, как приращение кинетической энергии системы. Величину

$$dU = -P L_0 \theta d\theta - p_0 \varphi d\varphi$$

можно рассматривать как приращение потенциальной энергии системы. Условившись под полной энергией системы \mathfrak{E} понимать сумму

$$\mathfrak{E} = T + U,$$

можно уравнение (20) предать вид:

$$d\mathfrak{E} - dT + dU = (M - \mathfrak{M}) d\theta + (m - \mu) d\varphi,$$

откуда видно, что элементарное приращение полной энергии системы равно приращению алгебраической суммы работ, совершаемых системой пар. $(M$ и $\mathfrak{M})$, пары сопротивлений вагонов \mathfrak{M} и пары воздействия амортизатора μ .

Если \mathfrak{E}_0 есть энергия системы в положении покоя, т. е. при $\theta = \varphi = \theta' = \varphi' = 0$, то энергия ее во всяком другом положении может быть выражена формулой

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_0 + \frac{1}{2} K \theta^2 + \frac{1}{2} A \varphi^2 - \frac{1}{2} P L_0 \theta^2 - \frac{1}{2} p_0 \varphi^2,$$

причем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (K \theta^2 + A \varphi^2 - P L_0 \theta^2 - p_0 \varphi^2) = \\ = \int_0^t [(M - \mathfrak{M}) \theta' + (m - \mu) \varphi'] dt, \end{aligned}$$

где время t отсчитывается от одного из тех моментов, для которых $\theta' = \theta'' = \varphi' = \varphi'' = 0$.

Когда система движется по инерции, и, следовательно, $M = m = \mathfrak{M} = \mu$, то

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0 = \text{const}$$

и всякому свободному колебанию системы соответствует определенный запас энергии. Величина $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0$ есть не что иное, как избыток энергии, соответствующий рассматриваемому колебанию системы по сравнению с тем ее состоянием, которым система обладает в состоянии покоя. Величина $\mathfrak{E} - \mathfrak{E}_0$ будет нами присвоено наименование энергии колебательного движения.

Выше было показано, что если амплитуда железнодорожки достаточно велика, и величинами $A P L$ и $K p_0$ можно по сравнению с его квадратом пренебречь, то правильное прецессионное колебание системы при отсутствии сопротивления может быть выражено так:

$$\varphi = \frac{B}{\sqrt{P L}} \cos \varrho_2 t;$$

$$\theta = -\frac{B}{\sqrt{P L}} \sin \varrho_2 t.$$

* См. статью И. В. Мейерсого.

Энергия этого колебания

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = \frac{B^2}{2} \left(\frac{K \rho_0^2}{P L^2} \cos^2 \varphi_0 t + \frac{A \rho_0^2}{P \rho_0} \sin^2 \varphi_0 t \right) - \frac{B^2}{2} \rho_0 - \frac{B^2}{2}.$$

Нетрудно видеть, что между энергией прецессионного колебания и телесным углом Π конуса прецессии существует некоторая, весьма простая, зависимость.

Действительно, при малых углах отклонения системы от вертикали $\Pi = \frac{B^2}{\sqrt{P L P_0^2}}$, и, следовательно,

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = -\frac{\Pi}{2\omega} \sqrt{P L P_0^2}.$$

Энергия правильного прецессионного колебания меньше нуля, и, следовательно, прецессионное колебание отличается некоторым недостатком энергии у системы. Телесный угол конуса прецессии пропорционален этому недостатку энергии. Поэтому-то трата энергии на преодоление пары сопротивления III вызывает увеличение прецессионного колебания системы.

Нутационное колебание при $C \Omega$ достаточно большим может быть выражено равенствами:

$$\begin{aligned} \psi &= B \sqrt{K} \cos \varphi_1 t, \\ \theta &= -B \sqrt{A} \sin \varphi_1 t. \end{aligned}$$

Энергия его

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = \frac{B^2 P}{2} (A K \varphi_1^2 - A P L \cos^2 \varphi_1 t - K P_0 \sin^2 \varphi_1 t) \rho_0 \quad \rho_0 \frac{B^2 P}{2} C \Omega^2.$$

Пусть

$$N = \pi (B)^2 \sqrt{K A}$$

телесный угол конуса нутации. Тогда

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = \frac{N}{2\omega} \frac{C^2 \Omega^2}{\sqrt{K A}}.$$

Нутационное колебание отличается некоторым избытком энергии у системы. Телесный угол конуса нутации пропорционален этому избытку энергии. Естественно, что трата энергии на преодоление пары III сопротивления вагона уменьшает величину нутационного колебания, а не увеличивает ее.

Чтобы прецессионное колебание системы затухало, амортизатор должен производить на раму гироскопа действие, обратное трению. Действуя на раму гироскопа, он должен создавать пару μ такую, чтобы для колебания прецессионного было

$$-\int_0^1 \mu \psi' dt - \int_0^1 \Pi \theta' dt > 0.$$

Если неравенство это будет иметь место и для колебания нутационного, то амортизатор будет все время увеличивать затухание, и, следовательно, и возмущение нутационного колебания. Правильно сконструированный амортизатор будет достаточно быстро приводить энергию к колебанию нутационному. Амортизатор должен работать автоматически и притом, приспособляясь автоматически и всевозможным изменениям величины сопротивления вагона III, зависящей от осевого пути, скорости поезда, атмосферных и всяких других влияний.

Все это вместе взятое делает заключение правильной конструкции амортизатора для одноосевого вагона задачей сложной и неизмеримо более деликатной, чем проектирование такого же прибора для тушителя качки устойчивой системы. Устойчивые системы (корабль с жирокопом) отличаются от неустойчивых тем, что у них в прецессионном и нутационном колебании системы соответствует некоторый избыток энергии. Поэтому трение в шлицах жирокопа тушит и нутацию и прецессию устойчивой системы, и надо лишь подобрать величину трения так, чтобы колебания при заданных размерах жирокопа затухали возможно интенсивнее. Иногда, как в случае стрельбы с катера, снабженного жирокопом, к основному требованию прибавляется дополнительное, несколько ограничивающее выбор величины трения в шлицах рамы жирокопа, но даже и в этом случае проектирование амортизатора для устойчивой системы гораздо проще, чем проектирование такого для системы неустойчивой. Несмотря на всю сложность и трудность последней задачи, она допускает, по-видимому, как то будет выяснено в главе III, вполне удовлетворительное решение.

Глава II

ПРИНУЖДЕННОЕ КОЛЕБАНИЕ СИСТЕМЫ

§ 1. Общие замечания

При изучении действия на систему различных внешних сил будет предположено, что амортизатор не действует в течение первой стадии движения, порожденного этими силами, и начинает на нее влиять только некоторое время спустя, когда система уже достигла своих предельных отклонений. Вычисленные в данном предположении предельные отклонения системы являются, конечно, несколько преувеличенными, и на них следует смотреть, как на первое приближение, обратиться к численному решению основных дифференциальных уравнений во всех тех случаях, когда есть основание считать отклонение системы, даваемое приведенными ниже формулами, слишком преувеличенным.

Кроме того, еще предполагаем, что трение вагона не оказывает существенного влияния на предельные отклонения системы и что импульс гироскопа велик, т. е. что дробями $\frac{AFL}{C^2 \Omega^2}$ и $\frac{K \omega_0}{C^2 \Omega^2}$ можно пренебречь по сравнению с единицей.

В соответствии с этим за основные уравнения движения системы будут приняты

$$\begin{cases} K\theta'' - PL\theta + C\Omega\psi' = M, \\ A\psi'' - P^2\psi - C\Omega\theta' = m, \end{cases} \quad (1)$$

и за общий их интеграл (см § 3 и 4)

$$\begin{cases} \psi = \psi_1 + B_1 \cos(\Omega_1 t + \epsilon_1) + B_2 \cos(\Omega_2 t + \epsilon_2); \\ \theta = \theta_1 - B_1 \sqrt{\frac{A}{K}} \sin(\Omega_1 t + \epsilon_1) - B_2 \sqrt{\frac{P^2}{FL}} \sin(\Omega_2 t + \epsilon_2). \end{cases} \quad (2)$$

где ψ_1 и θ_1 суть какие-нибудь частные решения уравнений (1), а B_1 , B_2 , ϵ_1 и ϵ_2 суть четыре постоянные интегрирования, определяемые начальными условиями движения.

Линейность основных дифференциальных уравнений движения (1) дает возможность для изучения движения, порождаемого несколькими силами, широко пользоваться принципом сложения движений. Благодаря этому представляется достаточным рассмотреть влияние на систему каждого возмущающего ее движущего фактора в отдельности. Если за начальные условия движения, каждым таким фактором порождаемого, принять

$$\psi = \theta = \psi' = \theta' = 0, \quad (3)$$

то это движение системы можно будет считать анализом системы ее движения, которое имело бы место в случае отсутствия рассматриваемой возмущающей силы; движущее же, являющееся результатом совокупного воздействия на систему нескольких возмущающих сил, можно будет получить сложив во времени движения, порождаемые каждой силой в отдельности.

Например, пусть M_1 и m_2 суть некоторые функции от времени, обращающиеся в нуль при $t < 0$ и отличные от нуля при $t > 0$; $\psi = \psi_1(t)$ и $\theta = \theta_1(t)$ есть движение, имя вышесказанное и такое, что при $t = 0$ начальные условия (3) выполнены. Пусть $\psi_2(t)$ и $\theta_2(t)$ есть также же движение системы, но соответствующее парам M_2 и m_2 переставшим также быть равными нулю при $t = 0$, и удовлетворяющее при $t > 0$ начальным условиям (3). Тогда*

$$\begin{cases} \psi = \psi_1(t - t_1) + \psi_2(t - t_2); \\ \theta = \theta_1(t - t_1) + \theta_2(t - t_2) \end{cases}$$

есть суммарное движение системы в том случае, если пары M_1 и m_1 начинают действовать при $t = t_1$, а пары M_2 и m_2 при $t = t_2$.

§ 2. Движение при постоянной кренящей паре

Если пары M и m сохраняют свою величину и направление неизменными, то частное решение уравнений (1) может быть выписано так: $\psi_1 = -\frac{m}{P^2}$; $\theta_1 = \frac{M}{FL}$.

и за общий интеграл их можно принять

$$\begin{cases} \psi = -\frac{m}{P^2} + B_1 \cos(\Omega_1 t + \epsilon_1) + B_2 \cos(\Omega_2 t + \epsilon_2); \\ \theta = -\frac{M}{FL} - B_1 \sqrt{\frac{A}{K}} \sin(\Omega_1 t + \epsilon_1) - B_2 \sqrt{\frac{P^2}{FL}} \sin(\Omega_2 t + \epsilon_2). \end{cases} \quad (4)$$

Из этого выражения следует:

1. Если на вагон действует постоянная по величине кренящая пара M , то вертикальное положение вагона не есть его среднее положение его, около которого он колеблется. Средним же или нейтральным положением вагона является некоторое наклон, а именно то, при котором он наклонен на угол $\frac{M}{FL}$ в сторону, противоположную кренящей паре.

2. Если на раму гироскопа действует постоянная по величине пара m , то рама наклонится на угол $\frac{m}{P^2}$ в сторону, противоположную действию пары m , и колеблется около этого положения как около среднего.

3. Пара M , кренящая вагон, не изменяет среднего положения гироскопа, пара же m , кренящая гироскоп, не влияет на нейтральное положение вагона.

4. Отклонение амплитуды колебаний вагона к амплитуде колебаний гироскопа зависит всегда между большим и меньшим из чисел

$$\sqrt{\frac{A}{K}} \text{ и } \sqrt{\frac{P^2}{FL}}.$$

5. Общая картина колебательного движения системы дана на рис. 5. Ось OO_1 параллельна нейтральному положению оси гироскопа. Вокруг оси описан конус вращения. Линия OO_2 перпендикулярна плоскости $O_1O_2O_3$, вращающейся вокруг оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью Ω , является в каждый момент мгновенной осью конуса вращения.

Конус вращения совершает колебательное движение, следуя движению своей оси O_1O_2 и не вращаясь вокруг нее.

Вокруг мгновенной оси конуса вращения O_1O_2 с постоянной угловой скоростью Ω вращается плоскость O_1O_2N , пере-



Рис. 5.

* Члены за вертикальной чертой пренебрежимо малы при $t > t_1$.

сечения этой плоскости с мгновенным положением конуса гугадин есть мгновенное направление оси жирокопа.

Примечание. Положение 3 справедливо, когда амортизатор не действует. При действии амортизатора, как то будет показано ниже, пара, кренящая вагон, может вывалить, кроме изменения среднего положения вагона, еще то или иное ψ в зависимости от конструкции амортизатора) отклонение жирокопа.

§ 3. Колебания под действием внезапно приложенной пары, кренящей вагон

Пусть на вагон действует кренящая пара M , определяемая тем, что

$$\text{при } t < 0 \quad M = 0,$$

$$\text{при } t > 0 \quad M = \text{const};$$

пусть при $t = 0$ положение системы удовлетворяет условиям (3). Тогда по малости отклонения $\vartheta_0 = \varphi_0$

$$\left. \begin{aligned} \varphi' &= \frac{M \sqrt{K A}}{C \sqrt{D^2}} \sin \varphi_0 t + \frac{M}{\sqrt{F L} \rho_0} \sin \varphi_0 t; \\ \vartheta' &= \frac{M}{F L} - \frac{M A}{C \sqrt{D^2}} \cos \varphi_0 t + \frac{M}{F L} \cos \varphi_0 t \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

и максимальное отклонение жирокопа получается

$$\varphi_{\max} \approx \frac{M}{\sqrt{F L} \rho_0} \quad (6)$$

а максимальный крен вагона

$$\vartheta_{\max} \approx \frac{2M}{F L} \quad (7)$$

Рассматриваемое движение системы имеет много общего с колебанием системы под влиянием начального крена вагона при отсутствии пары M . Действительно, положив для $t = 0$

$$\vartheta = \vartheta_0, \quad \vartheta' = \varphi = \varphi' = 0$$

и считая $M = 0$, можно из общего интеграла (2) получить

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= -\vartheta_0 \frac{\sqrt{K A F L}}{C \sqrt{D^2}} \sin \varphi_0 t + \vartheta_0 \frac{\sqrt{F L}}{\rho_0} \sin \varphi_0 t; \\ \vartheta &= -\vartheta_0 \frac{A F L}{C \sqrt{D^2}} \cos \varphi_0 t + \vartheta_0 \cos \varphi_0 t, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

откуда видно, что если движение системы порождено начальным

креном вагона ϑ_0 , то углы отклонения системы от положения равновесия изменятся, оставаясь приблизительно в пределах:

$$\left. \begin{aligned} -\vartheta_0 \sqrt{\frac{F L}{\rho_0^2}} < \varphi < +\vartheta_0 \sqrt{\frac{F L}{\rho_0^2}}; \\ -\vartheta_0 < \vartheta < +\vartheta_0. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Из формул видно:

1. Если на вагон при $t = 0$ начинает действовать пара, кренящая вагон, возрастающая внезапно до величины M и затем сохраняющая эту величину неизменной, то движение системы около ее нового положения равновесия протекает совершенно так как если бы вагон был отклонен от нового положения равновесия в начальный момент на угол

$$\vartheta_0 = \frac{M}{F L},$$

а величины ϑ' , φ и φ' были равны нулю и движение системы происходило по инерции.

2. Если пара M начинает кренить вагон внезапно, а затем сохраняет свою величину постоянной, то наибольшее ее значение не превышающее опасных отклонений системы, определяется выражением

$$M = \sqrt{F L} \rho_0 \varphi_{\max} \quad (10)$$

где φ_{\max} — наибольшее допустимое отклонение системы, и, следовательно:

3. Система выдерживает внезапно нагрузку тем большей кренящей парой, чем больше эксцентриситет вагона и жирокопа.

4. Начальный крен вагона, безопасен системой выдерживаемый, определяется формулой

$$\vartheta_0 = \varphi_{\max} \sqrt{\frac{\rho_0^2}{F L}} \quad (11)$$

и, следовательно:

5. Система выдерживает тем большее начальное отклонение вагона, чем больше эксцентриситет жирокопа и чем меньше эксцентриситет вагона.

6. Если величина начального крена вагона, системой безопасно выдерживаемого, есть величина заданная, то тем сложнее задать и минимальный допустимый предел отклонения $\rho_0^2 : F L$.

Как раз такой случай имеет место тогда, когда вагон, движущийся со скоростью v , вступает внезапно с железнодорожного участка пути на закругление, очерченное дугой радиуса R . Радиодей-

стующий момент всех сил, действующих на таком закруглении вагона, складается из:

а) момента от центробежных сил, действующих на вагон,

$$\frac{v_0^2}{R} \frac{P L}{g};$$

б) гироскопического момента четырех колес

$$4 A' \omega' \omega,$$

где A' — момент инерции колеса относительно оси его фигуры, величина

$$\omega' = \frac{v}{R}$$

есть угловая скорость вращения колес вокруг этой оси (v радиус колес), а величина

$$\omega = \frac{v}{R}$$

есть угловая скорость вращения вагона вокруг вертикальной оси. Равнодействующий момент всех сил, действующих на вагоне повороте,

$$M = \frac{P L v^2}{g R} (1 + \gamma), \quad (10)$$

где отмеченный коэффициент

$$\gamma = \frac{4 A' v}{P L v} \quad (11)$$

выражает влияние гироскопического действия колес.

На основании положения 1. и формулы (10) можно заключить, что:

7. Если вагон вступает внезапно с прямолинейного участка пути на закругление, очерченное дугой круга, то колебание системы относительно нового положения равновесия происходит так, как если бы вагон получил начальное отклонение от нового положения равновесия на угол

$$\theta_0 = \frac{v^2(1 + \gamma)}{g R}. \quad (11')$$

Угол этот определяется скоростью поезда, радиусом R и коэффициентом γ . Последний коэффициент обычно мал по сравнению с единицей. Поэтому, хотя γ и зависит от $P L$, но величину угла θ_0 определяемую формулой (11'), можно считать практически от $P L$ не зависящей, и на основании положения 4 и формулы (9') утверждать, что:

8. Поезд может двигаться с заданной скоростью v , переходить внезапно с прямолинейного участка пути на закругление радиуса R , если эксцентриситет гироскопа l_0 удовлетворяет неравенству

$$P l_0 > L P \left[\frac{v^2(1 + \gamma)}{g R} + \frac{v^2}{v_{max}^2} \right]. \quad (12)$$

9. Как видно из формул (5) и (8) амплитуда путающего колебания в рассматриваемом случае мала по сравнению с величиной колебания прелескопного. Если заданной является величина внезапно приложенной кренившей пары, то амплитуда путающего колебания не зависит от $P L$; если же пара эта пропорциональна величине $P L$, как в формуле (10), или же если заданное является начальное отклонение вагона θ_0 , то путающее колебание получается при прочих равных условиях тем больше, чем больше эксцентриситет вагона L .

Как бы ни было мало путающее колебание, оно тем заметнее, чем, прелеская с большой частотой, выражается как бы в сильном дрожании всей системы. Отмеченное только что обстоятельство является одним из тех, которые заставляют, насколько возможно, уменьшать L .

§ 4. Колебания под действием внезапно приложенной пары, кренившей гироскоп

Если на гироскоп действует крениющая пара не такая, что при $t < 0$ $m = 0$, при $t > 0$ $m = \text{const}$,

то движение системы, удовлетворяющее условиям

$$\theta = \varphi = \varphi' = \theta' = 0 \quad \text{при } t = 0,$$

по величине отклонений θ_0 , φ_0 может быть выведено так:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{m}{P l_0} \left(-1 - \frac{K P l_0}{C^2 \omega^2} \cos \varphi_0 t + \cos \varphi_0 t \right); \\ \theta &= \frac{m \sqrt{K A}}{C^2 \omega^2} \sin \varphi_0 t - \frac{m}{\sqrt{P L} P l_0} \sin \varphi_0 t. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Максимальное отклонение гироскопа

$$\varphi_{max} = \frac{m}{P l_0}, \quad (14)$$

максимальное же отклонение вагона

$$\theta_{max} = \frac{1}{\sqrt{P L} P l_0} m. \quad (15)$$

Если бы гироскопу при $m = 0$ было сообщено начальное отклонение $\varphi = \varphi_0$, и при этом так, чтобы было

$$\theta = \theta' = \varphi' = 0 \quad \text{при } t = 0,$$

то движение системы определялось бы выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= -\varphi_0 \frac{K P l_0}{C^2 \omega^2} \cos \varphi_0 t + \varphi_0 \cos \varphi_0 t; \\ \theta &= +\varphi_0 \frac{\sqrt{K A} P l_0}{C^2 \omega^2} \sin \varphi_0 t - \varphi_0 \sqrt{\frac{P L}{L}} \sin \varphi_0 t; \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

и максимальное отклонение системы от положения равновесия было бы

$$\begin{aligned} \psi &= \pm \psi_0 \\ \delta &= \pm \psi_0 \sqrt{\frac{m_0}{PL}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Как видно из формул (17) и (16):

1. Заданное начальное отклонение гироскопа вызывает при прочих равных условиях тем большее раскачивание вагона и тем большее жутящее колебание системы, чем больше эксцентриситет вагона.

2. Величину m_0 не следует делать больше, чем это необходимо по соображениям, изложенным в предыдущем параграфе или иначе каким-либо, устанавливая таким образом минимальный предел для m_0 . Положение это заставляет признать, что:

3. Всякой заданной величине PL соответствует некоторое определенное наибольшее значение величины m_0 . Формулы (14) и (15) на первый взгляд показывают только что указанному положению 2, так как из них видно, что при заданной величине пары m колебания системы получаются тем меньше, чем больше m_0 . Противоречие это, однако, лишь кажущееся, ибо пары m , которые фактически могут действовать на раму гироскопа, пропорциональны величине m_0 .

Действительно пара m может появиться вследствие одной из следующих причин.

Если масса гироскопа уравновешена относительно его оси качения и пара m_0 создается пружинами, то пара m является при движении поезда по уклону. Пусть φ есть величина предельного уклона пути, тогда

$$m = m_0 \varphi. \quad (18)$$

Если же опрокидывающая пара создается тем, что шарфы рамы гироскопа располагаются ниже центра тяжести ее, то пара m появляется при всяком изменении скорости поезда и зависит от ускорения последнего

$$m = - \frac{m}{g} \frac{dv}{dt}. \quad (19)$$

Какую из двух систем создания опрокидывающей пары следует предпочесть, зависит от того, какая из двух величин:

$$\varphi \text{ или } \frac{m}{g} \frac{dv}{dt}$$

больше. Обычно предельный уклон пути не превосходит 1°, так что

$$\varphi_{\max} = 0,02.$$

Ускорение же поезда при торможении может доходить до 4 м сек⁻²

$$\frac{1}{g} \left. \frac{dv}{dt} \right|_{\max} = -0,40.$$

Ясно поэтому, что

4. Опрокидывающую пару m_0 желательно создавать не эксцентричным расположением осей, а посредством пружин, тем более, что благодаря эксцентричному расположению осей увеличивается момент A инерции вращающейся части гироскопа, а следовательно, и необходимый импульс его $C\Omega$.

§ 5. О желательной величине эксцентриситета вагона

Положение 3. предыдущего параграфа в связи с формулами (6) и (7) дает возможность заключить, что колебания системы под действием внешнего приложенной пары M , не зависящей от PL , обратно пропорциональны эксцентриситету вагона. Для того чтобы такие факторы, как расстояние вага или период пассажира, вызывали возможно меньший крен вагона и возможно меньшие колебания системы, желательно центр тяжести вагона располагать возможно выше.

Есть очень важные соображения, заставляющие не идти далеко в увеличении L . Одно из них уже указано в конце § 3. Не менее важные соображения диктуются формулами (11) главы I. Действительно, положение 3. предыдущего параграфа и вторая из формул (11) главы I показывают, что угловая скорость прещиса при заданном импульсе гироскопа $C\Omega$ пропорциональна величине PL , но чрезмерное увеличение скорости прещиса может иметь своим последствием то, что колебания системы приобретут характер порывистой качки. Для того чтобы этого избежать, требуется тем больший импульс гироскопа, чем больше PL . О том же свидетельствует и четвертая из формул (11) главы I. В самом деле, как видно из этой формулы, модуль прещиса имеет стремление тем быстрее увеличиваться, чем больше PL . Задача амортизатора становится тем труднее и ответственнее, чем больше величина PL . Чтобы противодействовать этому, надо, как видно из той же формулы, увеличивать импульс гироскопа тем больше, чем больше эксцентриситет вагона.

К тому же выводу можно прийти и из рассмотрения формул (14) главы I. Входящая в нее величина χ характеризует как бы меру устойчивости системы, и из формулы (14') видно, что для сохранения величины χ заданного значения, необходимо давать импульсу гироскопа тем большее значение, чем больше PL . Все это заставляет стремиться к возможно более низкому расположению центра тяжести вагона.

* Как указано выше, m_0 является пропорциональным величине PL .

§ 6. Влияние бесконечно краткого крещющего импульса

В некоторых случаях, как, например, при вступлении поезда на стрелку, горизонтальная траектория поезда поворачивается внезапно на некоторый угол α . Если поезд проходит такой участок пути со скоростью v , то вагоны его получают колебательное движение, характеризующее тем, что в начальный момент времени, т. е. при $t=0$

$$y = \theta = y' = \dot{\theta} = 0;$$

начальная же угловая скорость вагона $\dot{\theta}_0$ не равна нулю:

$$\dot{\theta}_0 = \frac{\alpha v P L}{g K} (1 + \eta). \quad (20)$$

где коэффициент η определяется формулой (11).

По малости $\dot{\theta}_0$: $\dot{\theta}_1$ можно считать, что

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{\alpha v P L (1 + \eta)}{g \Omega D} (-\cos \dot{\theta}_1 t + \cos \dot{\theta}_2 t) \\ \dot{\theta} &= \frac{\alpha v P L (1 + \eta)}{g \Omega D} \left(\sqrt{\frac{K}{L}} \sin \dot{\theta}_1 t - \sqrt{\frac{K}{P L}} \sin \dot{\theta}_2 t \right) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Изменив в этих формулах величину $\frac{\alpha v P L (1 + \eta)}{g}$ равной ей величиной $K \dot{\theta}_0$, можно получить формулы

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{K \dot{\theta}_0}{\Omega D} (-\cos \dot{\theta}_1 t + \cos \dot{\theta}_2 t) \\ \dot{\theta} &= \frac{K \dot{\theta}_0}{\Omega D} \left(\sqrt{\frac{K}{L}} \sin \dot{\theta}_1 t - \sqrt{\frac{K}{P L}} \sin \dot{\theta}_2 t \right) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

которые позволяют по заданной величине $K \dot{\theta}_0$ бесконечно краткого крещющего импульса определить вынужденные им колебания системы, независимо от того, получен ли этот импульс вагоном от прохождения поезда по стрелке или от какого-либо другого толчка, например от выстрела из орудия, установленного на вагоне. Из формул (22) видно, что:

1. Амплитуда куцашкомого колебания, порождаемого в системе бесконечно кратким крещющим вагом импульсом, есть величина того же порядка, что амплитуда прерывистого колебания.
2. Максимальное отклонение системы под влиянием бесконечно краткого крещющего вагом импульса

$$\left. \begin{aligned} y_{\max} &= \pm \frac{2K \dot{\theta}_0}{\Omega D}; \\ \dot{\theta}_{\max} &= \pm \frac{K \dot{\theta}_0}{\Omega D} \left(\sqrt{\frac{K}{L}} + \sqrt{\frac{K}{P L}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

и зависит явно от импульса жирокопа, будучи ему обратно пропорционально.

Из формулы (21) следует:

3. Для уменьшения колебаний системы, порождаемых проложением вагона по стрелке, надо при прочих условиях увеличивать импульс жирокопа, т. е. брать тем больше, чем больше $P L$.

Угловое ускорение колебательного движения вагона, определяемого формулой (21)

$$\ddot{\theta} = \frac{\alpha v P L (1 + \eta)}{g \Omega D} \left(-\sqrt{\frac{K}{L}} \frac{C \Omega^2}{K A} \sin \dot{\theta}_1 t + \sqrt{\frac{K}{P L}} \frac{P L \dot{\theta}_0}{C \Omega^2 D} \sin \dot{\theta}_2 t \right),$$

приним максимальная величина этого ускорения приблизительно может быть выражена формулой

$$\ddot{\theta}_{\max} = \frac{\alpha v P L (1 + \eta)}{g K} \frac{C \Omega}{\sqrt{K A}}, \quad (24)$$

откуда видно, что:

4. Угловое ускорение вагона тем больше, чем больше при прочих равных условиях импульс жирокопа $C \Omega$. Если на основании сказанного в предыдущем параграфе и на основании положения 3. настоящего параграфа принять, что $C \Omega$ надо увеличивать прямо пропорционально величине $P L$, то числитель формулы (24) можно считать пропорциональным L^2 . Момент инерции вагона есть также функция от эксцентриситета вагона:

$$K = \frac{P}{g} (e^2 + L^2),$$

где e — радиус инерции массы вагона относительно его продольной центральной оси. Обычно $e \approx L$ и, следовательно,

$$\frac{\Delta K}{K} \approx \frac{\Delta L}{L},$$

так что приблизительно K пропорционально L ; знаменатель формулы (24) пропорционален L^2 , а $\ddot{\theta}_{\max}$ пропорционален L^2 и

5. Колебание вагона от прохождения им стрелки получается тем более стремительнее, чем больше эксцентриситет вагона.

Это заключение и положение 3, говорят о неизбежности увеличения величины L , отмеченной в предыдущем параграфе.

Пользуясь формулами (21) для определения колебаний вагона от прохождения им стрелки, иногда бывает полезно обратить внимание на то обстоятельство, что обе тележки вагона попадают на стрелку не одновременно, а с интервалом

$$\tau_0 = \frac{H}{v} \text{ сек.},$$

где H — расстояние между центрами тележек.

На вагон действует поэтому не один крещющий импульс $K \dot{\theta}_0 = \frac{\alpha v P L (1 + \eta)}{g}$, а два, действующих через τ сек. друг после друга, но величина же равных импульсов только что написанной

величины. Пользуясь принципом сложения движений, можно видеть, что колебание системы, порождаемое обшивкой ампульсами,

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{\alpha \sigma P L (1 + \nu)}{\rho \sigma \Omega} \left[-\cos \frac{\Omega_1 \tau_0}{2} \cos \varphi_0 \left(t - \frac{\tau_0}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{\Omega_2 \tau_0}{2} \cos \varphi_0 \left(t - \frac{\tau_0}{2} \right) \right]; \\ \theta &= \frac{\alpha \sigma P L (1 + \nu)}{\rho \sigma \Omega} \left[\sqrt{\frac{A}{K}} \cos \frac{\Omega_1 \tau_0}{2} \sin \varphi_0 \left(t - \frac{\tau_0}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{\frac{A}{K}} \cos \frac{\Omega_2 \tau_0}{2} \sin \varphi_0 \left(t - \frac{\tau_0}{2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} (25)$$

Примечание. Движение системы, вызванное небольшой угловой скоростью жироиско,

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{A \omega_0'}{\sigma \Omega} \left[\sqrt{\frac{K}{A}} \sin \varphi_0 t - \sqrt{\frac{P L}{\rho \sigma}} \sin \varphi_0 t \right]; \\ \theta &= \frac{A \omega_0'}{\sigma \Omega} (\cos \varphi_0 t - \cos \varphi_0 t). \end{aligned} \right\} (26)$$

§ 7. Влияние кратковременного внешнего импульса

Пусть на валон действует кратковременный, хотя и не бесконечно краткий, внешняя импульс, и пара M задана тем, что

$$\begin{aligned} M &= \cos \omega t = M_0 \quad \text{при } 0 < t < \tau; \\ M &= 0 \quad \text{при } t < 0 \text{ и } t > \tau. \end{aligned}$$

В движении системы можно в этом случае различать две фазы: первую, когда $M = M_0$, и вторую, во время которой $M = 0$, и движение системы происходит так, как если бы на валон действовало одновременно 2 пары пар $M = M_0$, действующая непрерывно, начиная с момента $t = 0$, и пара $M = -M_0$, действующая, начиная с $t = \tau$.

С помощью выражений (5) и принципа сложения движений можно для второй стадии движения получить:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{M_0 \tau}{\sigma \Omega} \left[-\frac{\sin 0,5 \Omega_1 \tau}{0,5 \Omega_1 \tau} \cos \varphi_0 \left(t - \frac{\tau}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sin 0,5 \Omega_2 \tau}{0,5 \Omega_2 \tau} \cos \varphi_0 \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right]; \\ \theta &= \frac{M_0 \tau}{\sigma \Omega} \left[\frac{\sin 0,5 \Omega_1 \tau}{0,5 \Omega_1 \tau} \sqrt{\frac{A}{K}} \sin \varphi_0 \left(t - \frac{\tau}{2} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sin 0,5 \Omega_2 \tau}{0,5 \Omega_2 \tau} \sqrt{\frac{A}{K}} \sin \varphi_0 \left(t - \frac{\tau}{2} \right) \right]. \end{aligned} \right\} (26)$$

Максимальные отклонения системы

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\max} &= \frac{M_0 \tau}{\sigma \Omega} \left[\frac{\sin 0,5 \Omega_1 \tau}{0,5 \Omega_1 \tau} + \frac{\sin 0,5 \Omega_2 \tau}{0,5 \Omega_2 \tau} \right]; \\ \theta_{\max} &= \frac{M_0 \tau}{\sigma \Omega} \left(\frac{\sin 0,5 \Omega_1 \tau}{0,5 \Omega_1 \tau} \sqrt{\frac{A}{K}} + \frac{\sin 0,5 \Omega_2 \tau}{0,5 \Omega_2 \tau} \sqrt{\frac{A}{K}} \right). \end{aligned} \right\} (27)$$

В пределе при $\tau = 0$ выражения (27) обращаются в выражения (23), ибо по закону количества движения:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} M \tau = K \phi_0.$$

В случае, если τ — величина большая по сравнению с периодом колебаний системы, аргументы

$$0,5 \Omega_1 \tau \text{ и } 0,5 \Omega_2 \tau$$

даже от ничтожного относительного изменения величины τ могут получить такие изменения, от которых $\sin 0,5 \Omega_1 \tau$ и $\sin 0,5 \Omega_2 \tau$ изменяются весьма сильно. Поэтому, если $\tau > \frac{\pi}{\Omega_1}$, то осторожно считать $\sin 0,5 \Omega_1 \tau = 1$, а при $\tau > \frac{\pi}{\Omega_2}$ еще и $\sin 0,5 \Omega_2 \tau = 1$. Это дает возможность при $\tau > \frac{\pi}{\Omega_2}$ пользоваться для φ и θ выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= -\frac{2M_0 \sqrt{K A}}{\sigma \Omega^2} \cos \varphi_0 \left(t - \frac{\tau}{2} \right) + \frac{2M_0}{\rho \sigma P L} \cos \varphi_0 \left(t - \frac{\tau}{2} \right); \\ \theta &= -\frac{2M_0 A}{\sigma \Omega^2} \sin \varphi_0 \left(t - \frac{\tau}{2} \right) - \frac{2M_0}{\rho \sigma P L} \sin \varphi_0 \left(t - \frac{\tau}{2} \right). \end{aligned} \right\} (28)$$

а для максимальных отклонений системы выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{\max} &= \pm \frac{2M_0}{\rho \sigma P L}; \\ \theta_{\max} &= \pm \frac{2M_0 A}{\rho \sigma P L}. \end{aligned} \right\} (29)$$

Формулы (29) отличаются от соответствующих формул параграфа 3 множителем 2. Множитель возникает в них в силу сделанных при их выводе допущений: 1) незатухаемости колебаний и 2) возможности совпадения фаз у колебаний, вызванного ее незатухающей полнотеневости. При очень больших значениях τ формулы эти, в особенности первая из них, могут дать для φ_{\max} и θ_{\max} несколько преувеличенные значения и для более точного определения максимальных отклонений надо учесть затухание колебаний (см. главу IV).

Примечание. Если считать, что кратковременный вынуждающий от проволочной петли со скоростью v по окружности радиуса R , то:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{FLv^2}{gM} (1 + \eta); \\ \tau &= \frac{R}{v} \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где θ — большой угол поворота кривоизогнутого проволочного закрученного.

§ 8. Влияние двух кратковременных импульсов, действующих непосредственно один за другим в противоположных направлениях

Иногда может представлять интерес также задание пары M :

$$\left. \begin{aligned} M &= 0 \quad \text{при } t < 0; \\ M &= M_0 \quad \text{при } 0 < t < \tau; \\ M &= -M_0 \quad \text{при } \tau < t < 2\tau; \\ M &= 0 \quad \text{при } 2\tau < t. \end{aligned} \right\}$$

Соответствующие выражения для φ и θ легко получаются из формулы (26) с помощью принципа сложения:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{M_0 \tau}{C \Omega} \left[\frac{\sin^2 \alpha_1 \Omega_1 \tau}{0,25 \Omega_1 \tau} \sin \alpha_1 (t - \tau) - \frac{\sin^2 \alpha_2 \Omega_2 \tau}{0,25 \Omega_2 \tau} \sin \alpha_2 (t - \tau) \right]; \\ \theta &= \frac{M_0 \tau}{C \Omega} \left[\frac{\sin^2 \alpha_1 \Omega_1 \tau}{0,25 \Omega_1 \tau} \sqrt{\frac{K}{K'}} \cos \alpha_1 (t - \tau) - \frac{\sin^2 \alpha_2 \Omega_2 \tau}{0,25 \Omega_2 \tau} \sqrt{\frac{K'}{K}} \cos \alpha_2 (t - \tau) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

* Формулы эти относятся к третьей стадии движения, когда $t > 2\tau$. Для первых двух стадий надо пользоваться формулами: (5) и (26).

§ 9. Общее выражение для вынужденных колебаний системы

Пусть M , m и μ известны, как некоторые функции времени:

$$\left. \begin{aligned} M &= F(t); \\ m - \mu &= f(t). \end{aligned} \right\}$$

Воспользовавшись принципом сложения движений и формулами (5) и (13), можно составить общее выражение, которое можно использовать для определения вынужденных колебаний системы во всех тех случаях, когда $\rho_2 = \text{const}$. Это равно нулю для прелеб-

режимо мало, а $m - \mu$ известно в функции от времени. Для этого достаточно разбить время t на бесконечно малые промежутки и считать, что в каждый такой промежуток времени на систему действует действительная пара

$$dM = \frac{dF(t)}{dt} dt = F'(t) dt,$$

действующая на систему, сохраняющаяся, начиная с момента своего появления, величину свою неизменной, и пара

$$d(m - \mu) = f'(t) dt,$$

действующая на раму микроскопа, точно также возрастающая от нуля до своего наибольшего значения мгновенно и затем уменьшающаяся своей величиной.

Движение, сообщаемое системе этими двумя элементарными парами, может быть выражено с помощью формул (5) и (13). Например, движение, вызываемое парами, начинающими действовать при $t = \xi$:

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= F'(\xi) \left[-\frac{\sqrt{K'K}}{C \Omega^2} \sin \alpha_1 (t - \xi) + \frac{1}{\sqrt{FL} \Omega_1^2} \sin \alpha_1 (t - \xi) \right] d\xi + \\ &+ f'(\xi) \left[-\frac{1}{FL} - \frac{K}{C \Omega^2} \cos \alpha_1 (t - \xi) + \frac{1}{\rho_2 K} \cos \alpha_1 (t - \xi) \right] d\xi; \\ d\theta &= F'(\xi) \left[-\frac{1}{FL} - \frac{K}{C \Omega^2} \cos \alpha_1 (t - \xi) + \frac{1}{FL} \cos \alpha_1 (t - \xi) \right] d\xi + \\ &+ f'(\xi) \left[\frac{\sqrt{K'K}}{C \Omega^2} \sin \alpha_1 (t - \xi) - \frac{1}{\sqrt{FL} \Omega_1^2} \sin \alpha_1 (t - \xi) \right] d\xi. \end{aligned} \right\}$$

Складывая во времени все эти элементарные движения, можно видеть, что пары

$$M = F(t)$$

и

$$m - \mu = f(t)$$

вызывают движение, выражающееся интегралами:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \int_0^t \left\{ \frac{F'(\xi)}{C \Omega} \left[-\frac{\sin \alpha_1 (t - \xi)}{\Omega_1} + \frac{\sin \alpha_2 (t - \xi)}{\Omega_2} \right] + \right. \\ &+ f'(\xi) \left[-\frac{C \Omega}{\rho_2 K} - \sqrt{\frac{K}{K'}} \frac{\cos \alpha_1 (t - \xi)}{\Omega_1} + \sqrt{\frac{FL}{K'}} \frac{\cos \alpha_2 (t - \xi)}{\Omega_2} \right] \left. \right\} d\xi, \\ \theta &= \int_0^t \left\{ \frac{F'(\xi)}{C \Omega} \left[-\frac{C \Omega}{FL} - \sqrt{\frac{K}{K'}} \frac{\cos \alpha_1 (t - \xi)}{\Omega_1} + \sqrt{\frac{FL}{K'}} \frac{\cos \alpha_2 (t - \xi)}{\Omega_2} \right] + \right. \\ &+ f'(\xi) \left[\frac{\sin \alpha_1 (t - \xi)}{\Omega_1} - \frac{\sin \alpha_2 (t - \xi)}{\Omega_2} \right] \left. \right\} d\xi \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Если жирескоп устроен так, что величина R_0 не зависит от угловой скорости вращения вагона вокруг оси, то формулами (32) можно пользоваться для исследования движения поезда по пути с закруглением переменной кривизны. Этому же формулами можно пользоваться и для исследования влияния амортизатора на колебания системы, если амортизатор устроен так, что μ некоторой заданной функции от времени.

§ 10. Влияние закругленной переменной кривизны

Пусть поезд, движущийся с постоянной скоростью v , проедет кривую часть пути переменной радиуса R и время отсчитывается с момента вступления поезда на рассматриваемую кривую. Пара, кривая вагон

$$M = (1 + \gamma) \frac{P L v}{g} \omega, \quad (33)$$

есть функция времени, ибо таковой является величина:

$$\omega = \frac{v}{R} = \omega(t).$$

Если горизонтальная траектория поезда известна и функция $\omega(t)$ также известна, то, пользуясь формулой

$$\varphi = \frac{P L v}{g C D} (1 + \gamma) \int_0^t \left[-\frac{\sin \varphi_0 (t - \xi)}{R_0} + \frac{\sin \varphi_1 (t - \xi)}{R_1} \right] \omega(\xi) d\xi, \quad (34)$$

можно проверить, не вызывает ли прохождение по рассматриваемой кривой опасных отклонений системы.

Формулой (34) можно было бы воспользоваться для отыскания наиболее желательной формы путевых закруглений. Действительно, функция $\omega(t)$ есть не что иное, как секундное приращение угла θ отклонения горизонтальной траектории поезда от ее первоначального направления, так что к моменту времени t угол

$$\theta = \int_0^t \omega(t) dt,$$

а полный угол отклонения реального пути для всего закругления

$$\Theta = \int_0^t \omega(t) dt,$$

уравнение же траектории, считая начало координат в начале закругления, будет

$$x = \int_0^t v \cos \theta dt; \quad y = -\int_0^t v \sin \theta dt,$$

а для отыскания наиболее желательной формы путевых закруглений достаточно отыскать наименьшей вид функции $\omega(t)$.

Представиться при этом могут два случая:

1. По условиям задачи может представляться желательным повернуть поезд возможно больше на минимальном пути.

2. Может быть необходимо достигнуть максимального отклонения поезда при минимальной длине биссектрисы

$$b = y_0 \cos \frac{\Theta}{2}.$$

В первом случае функцию $\omega(t)$ следовало бы подобрать так, чтобы при заданном Θ и v величина y_{\max} была бы возможно меньше. Во втором случае надо ту же функцию $\omega(t)$ определить из условия, чтобы при заданных значениях угла Θ и величине

$$y_0 = -\int_0^{\Theta} v \sin \theta dt$$

величина y_{\max} была бы минимальная.

Объем настоящей статьи не позволяет останавливаться на подробностях этого довольно сложного вопроса. Не рассматривая его в настоящей статье во всем объеме, покажем лишь на частном примере, что применение кривых прогрессивной кривизны может представлять значительные преимущества.

П р и м е р. Пусть $\omega(t)$ меняется по закону синусоиды:

$$\omega(t) = \frac{\pi \Theta}{2\tau} \sin \left(\frac{\pi}{\tau} t \right) \quad (35)$$

и, следовательно:

$$\left. \begin{aligned} b &= \Theta \sin^2 \left(\frac{\pi}{\tau} \frac{t}{2} \right); \\ x &= S \int_0^{\Theta} \cos \left[\Theta \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} u \right) \right] du; \\ y &= -S \int_0^{\Theta} \sin \left[\Theta \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} u \right) \right] du, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$



Рис. 6.

где

$S = v \tau$ — полная длина закругления;

μ — отклоненный параметр:

$$\mu = \frac{1}{\tau}.$$

Отклонение жирископа можно, пренебрегая инерционным колебанием, в рассматриваемом случае принять при $t > \tau$ равным величине:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{P L \sigma}{\rho C \Omega^2} (1 + \eta) \Theta \left(\frac{\pi}{\tau} \right)^2 \int_0^{\tau} \frac{\sin \Omega_0 (t - \xi)}{\Omega_0} \cos \left(\frac{\pi}{\tau} \xi \right) d\xi = \\ &= \frac{P L \sigma}{\rho C \Omega^2} (1 + \eta) \Theta \left(\frac{\pi}{\tau} \right)^2 \frac{\sin \left(\Omega_0 - \frac{\pi}{\tau} \right) \tau}{\left(\Omega_0 - \frac{\pi}{\tau} \right)} \frac{\cos \Omega_0 \left(t - \frac{\tau}{2} \right)}{\left(\Omega_0 + \frac{\pi}{\tau} \right)} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\varphi_{\max} = \frac{P L \sigma}{\rho C \Omega^2} (1 + \eta) \Theta \frac{\pi^2}{\left(\Omega_0 \tau + \pi \right)} \frac{\sin 0,5 \left(\Omega_0 \tau - \pi \right)}{\left(\Omega_0 \tau - \pi \right)}. \quad (37)$$

Если закружение было совершено по дуге круга, то согласно формулам (27) и (30) было бы

$$\varphi_{\max} = \frac{P L \sigma}{\rho C \Omega^2} (1 + \eta) \Theta \frac{\sin 0,5 \Omega_0 \tau}{0,5 \Omega_0 \tau}. \quad (38)$$

а координата y горизонтальной траектории загона была бы:

$$y = -\delta \int_0^{\Theta} \sin(\Theta u) du. \quad (39)$$

Если угол Θ не превышает 60° , то с весьма большой степенью точности можно полагать, что для кругового овертания закружения длина биссектрисы есть согласно формуле (39):

$$b_n \approx \frac{\delta \Theta}{8} \cos(0,5 \Theta),$$

а для овертания прогрессивной кривизны:

$$b_n = \delta \Theta \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2\pi} \cos(0,5 \Theta) = \frac{\delta \Theta}{11} \cos(0,5 \Theta)$$

и, следовательно, при δ, τ и Θ одинаковых длина биссектрисы получается при круговом закружении приблизительно на 37% больше, чем при рассматриваемом закружении прогрессивной кривизны.

Отыскание максимальных отклонений жирископа есть функция более сложная. Введя для простоты обозначения:

$$X_n = \frac{\pi^2}{\left(\Omega_0 \tau + \pi \right)} \frac{\sin 0,5 \left(\Omega_0 \tau - \pi \right)}{\left(\Omega_0 \tau - \pi \right)}; \quad X_0 = \frac{\sin 0,5 \Omega_0 \tau}{0,5 \Omega_0 \tau}, \quad (40)$$

можно видеть, что $X_n : X_0$ показывает, во сколько раз при заданных τ и Θ колебание жирископа получается больше при прогрессивном изменении кривизны, чем при постоянстве кривизны путевого закружения, а отношение

$$\frac{X_n}{X_0} \frac{b_n}{b_0}$$

Таблица 1

$0,5 \Omega_0 \tau$	X_n	X_0	$X_n : X_0$	$(x_n, b_n) : (x_0, b_0)$
0,00	1,000	1,000	1,00	0,73
0,25 π	0,900	0,942	1,03	0,76
0,50 π	0,636	0,786	1,24	0,90
0,75 π	0,425	0,664	1,53	0,97
1,00 π	0,318	0,583	1,85	0,76
1,50 π	0,213	0,425	0,59	0,43
2,00 π	0,159	0,0957	0,42	0,31
3,00 π	0,106	0,0395	0,27	0,20
4,00 π	0,0796	0,0159	0,20	0,15
5,00 π	0,0637	0,0101	0,16	0,12
10,00 π	0,0318	0,0025	0,08	0,06
	0,0000	0,0000	0,01	0,00

может служить для ответа на вопрос, во сколько раз прогрессивное овертание путевого закружения выгоднее в смысле возможности уменьшения биссектрисы b при заданных Θ и φ_{\max} .

В табл. 1 собраны векторные значения коэффициентов X_n и X_0 , а также величины $x_n : x_0$ и $(x_n, b_n) : (x_0, b_0)$.

Из таблицы видно, что для сокращения длины путевого закружения прогрессивное овертание их выгодно лишь при $0,5 \Omega_0 \tau > \pi$, для сокращения же величины биссектрисы оно выгодно всегда, хотя при $\frac{0,5 \Omega_0 \tau}{\pi}$ близком к 0,75—0,50 выгода невелика. Чем длиннее закружение, тем больше выгод приносит прогрессивное овертание его кривизны.

Примечание. Так как при $\Omega_0 \tau$ большим очень трудно поручиться за точное значение величин $\sin 0,5 \Omega_0 \tau$ и $\sin 0,5 (\Omega_0 \tau - \pi)$, то при составлении табл. 1 все округлено вправо, равными единицам при всех значениях τ , больших названного обратяющегося случая в единицу.

Глава III

ЗАТУХАНИЕ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ

А. ДЕЙСТВИЕ АМОТИЗАТОРА, СОЗДАЮЩЕГО УСИЛИЕ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ РАМЫ ЖИРИСКОПА

§ 1. Условия затухаемости колебаний

Пусть амортизатор создает усилие, пропорциональное угловой скорости рамы жирископа, т. е. пусть

$$\mu = c \varphi',$$

и пусть, как и в главе I,

$$\mathbb{M} = F\theta.$$

Тогда за основные дифференциальные уравнения свободных колебаний можно принять:

$$K\theta'' + F\theta' - PL\theta + C\Omega\psi' = 0,$$

$$A\psi'' + c\psi' - p_0\psi - C\Omega\theta' = 0.$$

Общий интеграл этих уравнений

$$\theta = \sum_{i=1}^{i=4} A_i e^{\lambda_i t},$$

$$\psi = \sum_{i=1}^{i=4} a_i e^{\lambda_i t},$$

где λ_i — четыре корня характеристического уравнения:

$$AKx^4 + (Kc + FA)x^3 + (C^2D^2 + cF - Kp_0 - APL)x^2 - (Fp_0 + cPL)x + PLp_0 = 0.$$

Свободные колебания затухают с течением времени, если действительная часть корней характеристического уравнения меньше нуля, а это согласно теореме *Hurwitz'a* имеет место тогда и только тогда, если

$$\left. \begin{aligned} PLp_0 &> 0, \\ Kc + FA &> 0, \\ -Fp_0 - cPL &> 0, \\ C^2D^2 + cF - Kp_0 - APL &> -KA \frac{Fp_0 + cPL}{Kc + FA} - \\ &- PLp_0 \frac{Kc + FA}{Fp_0 + cPL}. \end{aligned} \right\} (1)$$

Первое из неравенств устанавливает нижний предел допустимых значений эксцентриситета жирокопа:

$$p_0 > 0. \quad (2)$$

Второе и третье условия свидетельствуют, что коэффициент c должен быть меньше нуля, находясь в пределах:

$$\frac{p_0}{PL} < \frac{-c}{F} < \frac{A}{K}. \quad (3)$$

Удовлетворить им можно в том случае, если

$$p_0 < PLAK^{-1}. \quad (4)$$

чем устанавливается верхний предел допустимых значений эксцентриситета жирокопа.

Чем более приближается c к одному из пределов, данных неравенствами (3), тем больше правая часть четвертого из неравенств группы (1) и, следовательно, тем большей амплитуде жирокопа требуется для устойчивости системы. Поэтому, чем меньше $C\Omega$, тем уже пределы допустимых значений величины c . Если $C\Omega$ бесконечно велико, то c должно удовлетворять неравенствам (3); при $C\Omega$ конечном c может иметь значения лишь в пределах:

$$\beta_1 \frac{p_0}{PL} < -\frac{c}{F} < \frac{A}{K} \beta_2 \quad (5)$$

где β_1 и β_2 — некоторые отвлеченные коэффициенты, из которых β_1 возрастает при уменьшении $C\Omega$, а β_2 убывает.

Когда $C\Omega$ слишком мало, то удовлетворить неравенствам (3) становится невозможным ни при каком c .

Если величина $F\left(\sqrt{\frac{A}{K}} + \sqrt{\frac{p_0}{PL}}\right)\left(\sqrt{\frac{K}{A}} + \sqrt{\frac{PL}{p_0}}\right)^{-1}$ мала по сравнению с $\sqrt{Kp_0APL}$, как обычно можно считать, то за критические значения амплитуды жирокопа можно принимать:

$$C\Omega_0 \approx (\sqrt{Kp_0} + \sqrt{APL})^2. \quad (6)$$

§ 2. О наимыгоднейшем значении коэффициента c

Если неравенства

$$0 < p_0 < PLAK^{-1}$$

и

$$C\Omega > C\Omega_0$$

удовлетворены, то, как выше было сказано, величиной c можно располагаться так, чтобы оба главных колебания системы были затухающими.

Наимыгоднейшим значением c будет то, при котором колебания системы затухают лучше всего.

Для нахождения этого значения разложим ларантерстическое уравнение на множители:

$$(x^2 + 2\bar{\lambda}_1 x + \bar{q}_1)(x^2 + 2\bar{\lambda}_2 x + \bar{q}_2) = 0.$$

Очевидно

$$\left. \begin{aligned} 2\bar{\lambda}_1 + 2\bar{\lambda}_2 &= (FA + cK)(AK)^{-1}, \\ \bar{q}_1 + \bar{q}_2 + 2\bar{\lambda}_1 2\bar{\lambda}_2 &= (C^2D^2 + cF - \\ &- Kp_0 - APL)(AK)^{-1}, \\ 2\bar{\lambda}_1 \bar{q}_1 + 2\bar{\lambda}_2 \bar{q}_2 &= -(Fp_0 + c p_0)(AK)^{-1}, \\ \bar{q}_1 \bar{q}_2 &= PLp_0(AK)^{-1}. \end{aligned} \right\} (6)$$

Повторяя рассуждения §§ 2 и 5 главы I, можно убедиться, что если величина:

$$C \Omega^2 = C \Omega + \epsilon P - K p_0^2 - A P L \quad (7)$$

достаточно велика по сравнению с $\sqrt{K p_0^2 A P L}$, то с достаточной точностью:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}_1^2 &= C \Omega^2 (K A)^{-1/2} \\ \bar{\omega}_2^2 &= P L p_0^2 (C \Omega)^{-1/2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Принимая это во внимание и решая 1-е и 3-е уравнения группы (6) относительно $2 \bar{\lambda}_1$ и $2 \bar{\lambda}_2$ можно видеть:

$$\left. \begin{aligned} 2 \bar{\lambda}_1 &= \frac{P(A \bar{\omega}_1^2 + p_0^2) + \epsilon(K \bar{\omega}_1^2 + P L)}{K A (\bar{\omega}_1^2 - \bar{\omega}_2^2)} \\ 2 \bar{\lambda}_2 &= \frac{P(A \bar{\omega}_2^2 + p_0^2) - \epsilon(K \bar{\omega}_2^2 + P L)}{A K (\bar{\omega}_1^2 - \bar{\omega}_2^2)} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где $\bar{\omega}_1$ и $\bar{\omega}_2$ определяются равенствами (8), причем

$$\bar{\omega}_1^2 - \bar{\omega}_2^2 > 0.$$

Ясно, что при $\epsilon < 0$ увеличении абсолютной величины коэффициента ϵ вызывает увеличение величины $\bar{\lambda}_1$ и уменьшение величины $\bar{\lambda}_2$. Наиболее удобным значением ϵ является то, при котором

$$2 \bar{\lambda}_1 = 2 \bar{\lambda}_2$$

Значение это, очевидно

$$\epsilon = -P \frac{2p_0^2 + A(\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2)}{2P L + K(\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2)} \quad (10)$$

При нем

$$2 \bar{\lambda}_1 = 2 \bar{\lambda}_2 = \frac{P}{K A} \frac{A P L - K p_0^2}{2P L + K(\bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2)}$$

По жалости отношения $A P L : (C \Omega)^2$ и $K p_0^2 : (C \Omega)^2$ можно с вполне достаточной точностью принимать также:

$$2 \bar{\lambda}_1 = 2 \bar{\lambda}_2 = \frac{P}{K} \frac{A P L}{(C \Omega)^2} \left(1 - \frac{K p_0^2}{A P L}\right) \quad (11)$$

Равенством (11) определяются $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\lambda}_2$, соответствующие наименьшему значению величины ϵ .

§ 3. О наименьшем значении величины p_0

На основании выражений (11), казалось бы, можно заключить, что чем меньше p_0 , тем лучше затухают колебания системы. Однако это не совсем так, ибо $\bar{\lambda}_2$ является декрементом прецессионного колебания лишь при условии, что $\bar{\omega}_2 > \bar{\lambda}_2$.

При $\bar{\omega}_2 < \bar{\lambda}_2$ корни уравнения

$$x^2 + 2 \bar{\lambda}_2 x + \bar{\omega}_2^2 = 0$$

перестают быть комплексными, и прецессионное колебание распадается на два апериодических движения, декременты которых суть

$$\bar{\lambda}_2 \pm \sqrt{\bar{\lambda}_2^2 - \bar{\omega}_2^2}.$$

С увеличением p_0 величина $\bar{\lambda}_2$ возрастает, а $\bar{\omega}_2$ убывает. Когда $\bar{\omega}_2 < \bar{\lambda}_2$, то дальнейшее убывание p_0 невыгодно, ибо декремент

$$\bar{\lambda}_2 - \sqrt{\bar{\lambda}_2^2 - \bar{\omega}_2^2}$$

падает. Наиболее удобным p_0 поэтому определяется условием:

$$\bar{\omega}_2 = \bar{\lambda}_2,$$

или что то же, учитывая (4), условием

$$\frac{P}{4K^2} \frac{(A P L)^2}{(C \Omega)^2} \left(1 - 2 \frac{K p_0^2}{A P L}\right) = \frac{P L p_0^2}{C^2 \Omega^2} \quad (12)$$

Решая уравнение (12) относительно p_0 , можно найти наименьшее значение эксцентриситета гироскопа. Обычно величина

$$\frac{4K}{A} \left(\frac{C \Omega}{P}\right)^2$$

весьма велика по сравнению с единицей. Поэтому искомым корнем уравнения (12) есть:

$$p_0^2 = P L \left(\frac{A P}{2K C \Omega}\right)^2 \quad (13)$$

При этом декременты $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\lambda}_2$, определяемые равенством (11), выходят близкими к величине:

$$\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = \frac{P}{2K} \frac{A P L}{(C \Omega)^2} \quad (14)$$

§ 4. Общие заключения о действии амортизатора рассматриваемого типа

Выведенные выше формулы позволяют сделать некоторые общие заключения о действии амортизатора, создающего усилие, пропорциональное угловой скорости рамы гироскопа. Вот важнейшие из них:

1. Амортизатор рассматриваемого типа не дает возможности достигнуть сколько-нибудь интенсивного затухания колебаний.

Действительно, и наилучшем случае

$$\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = R \frac{APL}{(C\Omega)^2},$$

где по сказанному в главе I величина H есть декремент того же самого вагона, но устойчиво подвешенного под рельсом (при остановленном жирокоме), величина же $APL(C\Omega)^{-2}$ есть весьма малая дробь.

2. Наиболее выгодное значение эксцентриситета жирокома весьма мало [см. формулу (13)] по сравнению с тем, положенным в предыдущем параграфе, его приходится делать больше, что ухудшает затухаемость колебаний еще больше.

3. При разбираемой конструкции амортизатора удовлетворительное действие прибора получается только тогда, когда отношение $\epsilon: F$ лежит в весьма узких пределах.

Но F (трение вагона о рельс) не есть какая-либо строго постоянная величина; F может зависеть от состояния пути, поезда и других обстоятельств. Поэтому подобрать должным образом $\epsilon: F$ почти невозможно.

Все это позволяет прийти к заключению, что рассматриваемое устройство амортизатора нельзя считать удачным.

Обстоятельство это, не отмеченное *Verret-Gon**, было известно уже тогда, когда проектировался вагон *Wrenan's*.

Один из конструкторов вагона, *H. Osmida*, предлагал** чрезвычайно интересное устройство швеллера и систему для улучшения ее затухания лишней степени свободы (по счету третьей). С теоретической точки зрения решение было прекрасно, и, если конструкция действовала у *Wrenan's* не совсем удачно, то это, по-видимому, вследствие не совсем удачного конструктивного осуществления идеи.

Б. ДЕЙСТВИЕ АМОРТИЗАТОРА, УСИЛИЕ КОТОРОГО ПРОПОРЦИОНАЛЬНО КРИВУ ВАГОНА

§ Б. Условия наилучшего затухания колебаний

Посмотрим, нельзя ли улучшить действие прибора, дела и усилие, создаваемое амортизатором, пропорциональным не угловой скорости рамы жирокома, а криву вагона.

Пусть, следовательно,

$$\mu = \epsilon_2 \theta$$

* В книге *L'effet gyroscopique de ses applications*, Bruxelles, 1912, 364—69, разбирается только лишь эта система амортизаторов, и ее обзору характеру положения можно думать, что автор считает ее вполне удовлетворительной.

** В *Engineering*, 1913, p. 678, 731 имеется по этому поводу очень интересная статья «The Stability of dynamo Single — track vehicles by H. Osmida».

и пусть, кроме того,

$$\mathfrak{M} = F\theta'.$$

Тогда основные дифференциальные уравнения будут

$$\begin{aligned} K\theta'' + F\theta' - PL\theta + C\Omega\psi' &= 0, \\ A\psi'' + \epsilon_2\theta - \mu_0\psi - C\Omega\theta' &= 0. \end{aligned}$$

Их характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} K A x^4 + F A x^3 + (C^2 \Omega^2 - A P L - K \mu_0) x^2 - \\ - (F \mu_0 + \epsilon_2 C \Omega) x + P L \mu_0 = 0 \end{aligned}$$

может быть разложено на множители:

$$(x^2 + 2\bar{h}_1 x + \bar{q}) (x^2 + 2\bar{h}_2 x + \bar{q}) = 0,$$

если положить

$$\left. \begin{aligned} 2\bar{h}_1 + 2\bar{h}_2 &= -PK^{-1}; \\ \bar{q} + \bar{q} + 4\bar{h}_1\bar{h}_2 &= [(C\Omega)^2 - K\mu_0 - APL](KA)^{-1}; \\ 2\bar{h}_1\bar{q} + 2\bar{h}_2\bar{q} &= (F\mu_0 + \epsilon_2 C\Omega)(KA)^{-1}; \\ \bar{q} + \bar{q} &= \frac{PL\mu_0}{KA}. \end{aligned} \right\} (15)$$

Обе главных колебания получаются затухающими тогда и только тогда, если:

$$\left. \begin{aligned} PL\mu_0 &> 0; \\ F &> 0; \\ -\epsilon_2 C\Omega - F\mu_0 &> 0; \\ (C\Omega)^2 - K\mu_0 - APL &> -KA \frac{\epsilon_2 C\Omega + F\mu_0}{FA} - \frac{PL\mu_0 PA}{(C\Omega + F\mu_0)}. \end{aligned} \right\} (16)$$

Все эти условия будут удовлетворены, если положить

$$\left. \begin{aligned} \mu_0 &> 0; \\ -\epsilon_2 - F^{-1} &> \mu_0 (C\Omega)^{-1} \end{aligned} \right\} (17)$$

и удовлетворить четвертому из неравенств группы (16), т. е. если:

- 1) центр тяжести жирокома расположен выше его оси качания;
- 2) действие амортизатора сделать достаточно интенсивным;
- 3) импульс жирокома сделать достаточно большим.

Чем больше PL и μ_0 , тем больше *ceteris paribus* требуется $C\Omega$. Если ϵ_2 постепенно увеличивать, начиная со значения, данногого

третьим неравенством (16), то необходимая величина импульса сначала падает, а потом возрастает. Минимальный импульс жирископа необходим в том случае, если

$$-\frac{c_0 C \Omega - F p_0}{F A} = \sqrt{\frac{F L p_0}{K X}}$$

Это его наименьшая величина

$$C \Omega_0 = \sqrt{K p_0} + \sqrt{A F L}$$

Если импульс жирископа меньше данной величины, то ни при каком c_0 нельзя получить затухания обеих колебаний. Если $C \Omega > C \Omega_0$, то четвертое из неравенств (16) дает два предельных значения для величины c_0 . Чем ближе величина c_0 к одному из этих пределов, тем хуже затухаемость одного из главных колебаний системы. Наиболее выгодное c_0 определяется условием

$$2 \bar{\lambda}_1 = 2 \bar{\lambda}_2$$

и [в силу выражений (15)]

$$-c_0 = \frac{F}{C \Omega} \left[p_0 + \frac{1}{2} A (\vartheta^2 + \vartheta_0^2) \right] \quad (17)$$

приним

$$\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2 = \frac{F}{4K} = \frac{1}{2} H \quad (18)$$

где H , как и выше, декремент естественного затухания колебаний устойчиво подвешенного маятника.

При наиболее выгодном c_0 величина $\bar{\lambda}_1 = \bar{\lambda}_2$ не зависит от p_0 . Для того чтобы ее можно было принимать за декремент главных колебаний системы, необходимо лишь наличие неравенства:

$$\vartheta^2 > \vartheta_0^2 > \bar{\lambda}_1^2 = \bar{\lambda}_2^2$$

Но при $C \Omega$ достаточно большом для ϑ^2 можно принять приближенно

$$\vartheta^2 = F L p_0 (C \Omega)^{-2}$$

и, следовательно, $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\lambda}_2$ суть декременты главных колебаний всегда, если

$$p_0 > F L \left(\frac{C \Omega}{F L} \bar{\lambda}_0 \right)^2 = F L \left(\frac{F C \Omega}{4 K F L} \right)^2 \quad (19)$$

При рассматриваемой конструкции амортизатора условие наилучшего затухания колебаний не ограничивает, таким образом, величины p_0 какими-либо верхним пределом.

§ 6. Общее заключение о действии амортизатора рассматриваемого типа

Изложенное в предыдущем параграфе позволяет прийти к следующим заключениям:

1. Если маяк μ пропорционально крену вагона, то величина p_0 должна быть лишь больше некоторого предельного значения. Делать же ее в точности равной некоторому определенному значению не требуется. Это, конечно, значительно облегчает конструкцию прибора.

2. Наиболее удобным выбором величины c_0 можно декременты главных колебаний довести до половины естественного декремента вагона, подвешенного к рельсу устойчиво, что значительно лучше результата, достижимого при $\mu = c \varphi'$ [см. формулу (14)].

3. При $C \Omega$ достаточно большом колебания системы получатся затухающими, если c_0 лежит в пределах [см. четвертое из неравенств группы (16)].

$$F(A \vartheta^2 + p_0^2)(C \Omega)^{-2} < -c_0 < F(A \vartheta^2 + p_0^2)(C \Omega)^{-2}$$

Наилучшее же затухание колебаний получается [см. формулу (17)], когда c_0 равно полусумме из его предельных допустимых значений.

Поэтому, зная неустановивчивость точного значения величин F и делая правильный выбор коэффициента c_0 довольно затруднительным, но не так трудным, как в случае $\mu = c \varphi'$, когда (в чем легко убедиться) наиболее выгодное значение величины c_0 весьма близко к одному из пределов, переходить который она не должна.

Все вышесказанное позволяет заключить, что делать усилие амортизатора пропорциональным крену вагона гораздо выгодней, чем делать его пропорциональным угловое скорости качания рамы жирископа.

Разобранная только что система не дает возможности достигнуть очень интенсивного затухания колебаний. Для улучшения действия прибора надо еще ослабить влияние амортизатора на нутационные колебания и усилить его влияние на колебание вращательное. Устройства П. П. Шваловского преследует именно эту цель.

В. ДЕЙСТВИЕ АМОТИЗАТОРА СИСТЕМЫ П. П. ШВАЛОВСКОГО

§ 7. Идея устройства

В системе П. П. Шваловского воздействие амортизатора также зависит от крена вагона, но оно еще пропорционально, а зависит, помимо крена вагона, еще и от некоторых других факторов.

В основных чертах конструкция П. П. Шваловского действует следующим образом.

1. Когда вагон изклоняется на бок, то жирископ перемещается вдоль цапф своей рамы (использует в них) направо или налево.

Коническая зубчатка, установленная на раме жироскопа и получающая вращение от его механизма, входит в сцепление с одним из двух зубчатых секторов. Направление вращения зубчатки и число ее оборотов подобраны так, чтобы усилие, получающееся от сцепления ее с неподвижным сектором, стремилось ускорять естественную прецессию жироскопа, соответствующую рассматриваемому явлению вагона.

Для избежания ударов, вредно влияющих на прочность конструкции, привод, сообщивший шестерне движение, спроектирован эластичным: шестерня насажена на шпиль оси колеса и связана с ней пружиной, начальное поджатие которой и упругость могут быть выбраны по желанию.

Пусть

- средний радиус зубчатого сектора;
- усилие, которое зубчатый сектор должен приложить к шестерне амортизатора для продолжения начального поджатия ее пружины;
- увеличенное усилие от относительного поворота зубчатой шестерни относительно ее оси на одну угловую единицу;
- передаточное число зубчатого сцепления (сектор—шестерня);
- угловая скорость вращения оси шестерни амортизатора;
- угол отклонения жироскопа в момент начала сцепления шестерни с сектором;
- время в момент сцепления.

Момент μ может быть при рассматриваемом устройстве амортизатора принят равным:

$$\mu = Q\varrho + q\varrho k \{ \Psi_0^*(t - t_0) - (\varphi - \varphi_0) \}, \text{ если } \vartheta < 0 \} \\ \mu = -Q\varrho - q\varrho k \{ \Psi_0^*(t - t_0) + (\varphi - \varphi_0) \}, \text{ если } \vartheta > 0. \quad (20)$$

2. В тех случаях, когда величина q , не равна нулю, μ может с течением времени бесконечно возрастать, если только у устройства не будет предусмотрено какого-либо приспособления, ограничивающего максимальное значение этого момента. Чрезмерное увеличение усилия, даваемого амортизатором, никогда, как будет показано ниже, нежелательно. Поэтому ввиду в дальнейшем будем предполагать, что максимальное значение величин μ , ограничено некоторой предельной величиной μ_0 .

3. Для увеличения предельного влияния амортизатора на нутационное колебание системы в конструкции П. П. Шиловского предусмотрено следующее:

а) Угловая скорость Ψ_0^* ось шестеренки амортизатора выбирается в соответствии с наибольшей угловой скоростью прецессионного колебания рамы жироскопа, а в сцеплении шестеренки амортизатора с редукцией ее валом имеется выключатель амор-

тизатора — нечто вроде свободного колеса велосипеда. Выключатель же влияет на величину пары μ , пока система имеет лишь прецессионные колебания, и пока, следовательно, величина

$$\pm \Psi_0^*(t - t_0) + (\varphi - \varphi_0)$$

сохраняет знак первого ее члена. Но если нутационное колебание станет достаточно велико, и величина $\Psi_0^*(t - t_0) \mp (\varphi - \varphi_0)$ примет знак второго ее члена, то выключатель обратит пару μ в нуль и заставит ее быть равной нулю все время, пока величина

$$\pm \Psi_0^* + \psi'$$

сохранит знак ее второго члена.

б) Переход жироскопа от сцепления с одним зубчатым сектором к сцеплению с другим происходит не мгновенно, а в момент когда $\vartheta = 0$, а в течение некоторого промежутка времени, малого по сравнению с периодом прецессионного колебания, но близкого к периоду колебания нутационного. Благодаря этому, амортизатор действует непрерывно, пока прецессионное колебание системы значительно, но практически все время остается выключенным, когда система имеет большое нутационное колебание. Последнее и затухает поэтому так, как если бы амортизатор не было.

Отмеченны два обстоятельства: наличие выключателя и конечность времени перехода жироскопа от сцепления с одним сектором к сцеплению с другим позволяют считать предельное влияние амортизатора на затухание нутационных колебаний в системе П. П. Шиловского устраненным в достаточной мере. Доказать это возможно точными выкладками затруднительно, особенно в общем виде, так как μ_0 есть некоторая непрерывная функция времени, и система П. П. Шиловского поддается математическому анализу в общем нелегко. На модели, построенной П. П. Шиловским, правда, без соблюдения точного масштаба, колебание это вполне подтвердилось. Нет оснований опасаться, что у большого вагона дело будет обстоять хуже, чем у модели. В дальнейшем будет принято, что амортизатор системы П. П. Шиловского не производит вредного влияния на нутационное колебание системы и что, следовательно, в системе П. П. Шиловского никакие сооружения затухаемости нутационного колебания не задают никаких ограничений на допустимые максимальные значения величин Q , q и μ_0 .

Действие амортизатора системы П. П. Шиловского будет рассмотрено поэтому исключительно с точки зрения влияния его на прецессионное колебание системы.

В соответствии со всем только что сказанным будем далее предполагать, что:

- 1) амплитуда нутационного колебания пренебрежимо мала;
- 2) величина $\pm \Psi_0^*(t - t_0) + (\varphi - \varphi_0)$ имеет, следовательно, знак первого ее члена;

3) пара μ меняет при $\theta = 0$ свой знак и может быть вычислена по формулам (20) до тех пор, пока она не достигнет своего предельного значения μ_* .

4) до достижения парой μ значения μ_* она остается равной этой величине до того момента, когда θ не становится вновь равным нулю;

5) с момента, когда вторично $\theta = 0$, μ начинает вновь меняться по закону, выражаемому одним из двух равенств (20) — в соответствии со знаком угла θ .

Чтобы не делать слишком громоздких выкладок, рассмотрим будут только два предельных случая: когда $g = 0$ и когда $Q = 0$. Во втором случае для простоты выкладок будем предполагаться, что колебания системы достаточно малы, а следовательно $\mu < \mu_*$.

§ 8. Характер движения системы в случае, когда $g = 0$

Если пружина шестеренки имеет значительные начальные поджатие, но малую упругость, то можно считать, что $g = 0$. В этом случае основные дифференциальные уравнения свободных колебаний могут быть выписаны так:

$$\begin{aligned} K\theta'' + F\theta' - FL\theta + C\Omega\psi' &= 0, \\ A\psi'' - p_0^2\psi - C\Omega\theta' &= \pm Q_0. \end{aligned}$$

здесь величина Q_0 есть некоторая постоянная, знак же перед ней зависит от знака величины θ , будучи плюсом, если $\theta > 0$, и минусом, если $\theta < 0$.

Если $C\Omega$ достаточно велика, а трение о рельс достаточно мало, то общий интеграл дифференциальных уравнений без последнего члена может быть с помощью формул § 3 и 4, главы I, выписан так:

$$\left. \begin{aligned} \psi &= -B_1 e^{-\lambda t} \cos(q_1 t + \epsilon_1) - B_2 e^{-\lambda t} \cos(q_2 t + \epsilon_2), \\ \theta &= +B_1 e^{-\lambda t} \sin(q_1 t + \epsilon_1) + B_2 e^{-\lambda t} \sin(q_2 t + \epsilon_2), \end{aligned} \right\} (21)$$

где q_1 , q_2 , λ_1 и λ_2 определяются формулами (11) главы I.

Пусть отсчет времени производится от некоторого такого момента, что

$$\theta > 0 \text{ при } 0 < t < t_0$$

и пусть при $t = 0$ амортизатор, бездействовавший до этого момента, включается.

При этих условиях следует считать, что правая часть второго дифференциального уравнения при $t = 0$ внезапно возрастает от нуля до величины Q_0 и затем до момента, когда t равно t_0 , сохраняет эту величину неизменной.

Благодаря амортизатору, таким образом, при $t = 0$ на широкое начинает внезапно действовать кренищая пара $+Q_0$, вызы-

ваяющая (согласно сказанному в § 4, гл. II, и § 3 и 4, гл. I) колебания:

$$\psi_1 = \frac{Q_0}{p_0^2} \left[-1 - \frac{K p_0^2}{(C\Omega)^2} e^{-\lambda t} \cos q_1 t + e^{-\lambda t} \cos q_1 t \right];$$

$$\theta_1 = \frac{Q_0}{p_0^2} \left[\frac{1}{C\Omega} p_0^2 e^{-\lambda t} \sin q_1 t - \sqrt{\frac{p_0^2}{FL}} e^{-\lambda t} \sin q_1 t \right],$$

складывающиеся с колебаниями (21) и выходящие ноль при $t < 0$.

При $t = t_0$ крен вагона меняет свой знак с плюса на минус. Усилие амортизатора поэтому также меняет внезапно в этот момент свой знак, что равносильно внезапному приложению к раме широкоскопа новой кренищей пары $-2Q_0$, прибавляющей к движению системы новое колебание

$$\begin{aligned} \psi_2 &= -\frac{2Q_0}{p_0^2} \left[-1 - \frac{K p_0^2}{(C\Omega)^2} e^{-\lambda(t-t_0)} \cos q_1(t-t_0) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\lambda(t-t_0)} \cos q_1(t-t_0) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= -\frac{2Q_0}{p_0^2} \left[\frac{1}{C\Omega} p_0^2 e^{-\lambda(t-t_0)} \sin q_1(t-t_0) - \right. \\ &\quad \left. - e^{-\lambda(t-t_0)} \sin q_1(t-t_0) \right]. \end{aligned}$$

Вперед до какой перемены знака величины θ (пусть этот момент есть $t = t_1$) движение системы определяется суммой $\psi + \psi_2$ и $\theta + \theta_2$.

При $t = t_1$ на широкоскоп начинает внезапно действовать пара $+2Q_0$, вызывающая колебание ψ_3 и θ_3 , выражение которого легко выводится из формул, определяющих ψ_2 и θ_2 , если в них переменить знак перед Q_0 и подставить вместо t_0 величину t_1 .

Вообще при всякой перемене знака величины θ к движению, существующему к моменту перемены, прибавляется новое движение

$$\begin{aligned} \psi_{n+1} &= (-1)^n \frac{2Q_0}{p_0^2} \left[-1 - \frac{K p_0^2}{(C\Omega)^2} e^{-\lambda(t-t_n)} \cos q_1(t-t_n) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\lambda(t-t_n)} \cos q_1(t-t_n) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta_{n+1} &= (-1)^n \frac{2Q_0}{p_0^2} \left[p_0^2 \frac{1}{C\Omega} e^{-\lambda(t-t_n)} \cos q_1(t-t_n) + \right. \\ &\quad \left. + e^{-\lambda(t-t_n)} \cos q_1(t-t_n) \right]. \end{aligned}$$

Вследствие этого суммарное движение между n -й и $(n+1)$ -й переменами знаков величины θ , т. е. при

$$t_n < t < t_{n+1}$$

$$\begin{aligned} \vartheta &= (-1)^n \frac{Q_0}{\rho L} + \\ &+ e^{-\lambda t} \left[-B_1 \cos(\vartheta_1 t + \varepsilon_1) - \frac{2Q}{(\partial^2)^2} \sum_{i=1}^n (-1)^i e^{\lambda t_i} \cos \vartheta_1(t + t_i) \right] + \\ &+ e^{-\lambda t} \left[-B_2 \cos(\vartheta_2 t + \varepsilon_2) + \frac{2Q}{(\partial^2)^2} \sum_{i=1}^n (-1)^i e^{\lambda t_i} \cos \vartheta_2(t + t_i) \right], \quad (22) \\ \theta &= e^{-\lambda t} \left[B_1 \sin(\vartheta_1 t + \varepsilon_1) + \frac{2Q}{\rho L} \sum_{i=1}^n (-1)^i e^{\lambda t_i} \sin \vartheta_1(t - t_i) \right] + \\ &+ e^{-\lambda t} \left[B_2 \sin(\vartheta_2 t + \varepsilon_2) - \frac{2Q}{\rho L} \sum_{i=1}^n (-1)^i e^{\lambda t_i} \sin \vartheta_2(t - t_i) \right], \end{aligned}$$

где под знаком t_i надо разумеать 0 и считать, что $(-1)^i$ есть в данном случае условное обозначение для 0,5.

С помощью выражений (22) легко проследить характер свободных колебаний при рассматриваемом устройстве амортизатора. Пусть амплитуда нутационного колебания мала по сравнению с колебанием прецессионным. Тогда при $0 < t < t_1$ можно полагать

$$\begin{aligned} \theta &= e^{-\lambda t} \sqrt{\frac{2Q}{\rho L}} \left(B_1 \sin(\vartheta_1 t + \varepsilon_1) - \frac{Q}{\rho L} \sin \vartheta_1 t \right) = \\ &= e^{-\lambda t} B_1 \sqrt{\frac{2Q}{\rho L}} \sin(\vartheta_1 t + \varepsilon_1'), \end{aligned}$$

причем по сказанному выше предполагаем, что $\theta > 0$ при рассматриваемых значениях t , и, следовательно,

$$\begin{aligned} B_1 &= 0; \\ 0 &< \varepsilon_1' < \pi. \end{aligned}$$

Момент t_1 первой перемены знака величины θ определяется выражением:

$$t_1 = \frac{\pi - \varepsilon_1'}{\vartheta_1}.$$

Начиная с этого момента, отклонение вагона

$$\theta \text{ на } e^{-\lambda t} \sqrt{\frac{2Q}{\rho L}} \left(-B_2 + \frac{2Q}{\rho L} e^{\lambda t} \right) \sin \vartheta_2(t - t_1)$$

и меняет свой знак вторично, когда

$$t = t_2 = t_1 + \frac{\pi}{\vartheta_2}.$$

после чего

$$\theta = -e^{-\lambda t} \sqrt{\frac{2Q}{\rho L}} \left[B_2 - \frac{2Q}{\rho L} e^{\lambda t} (e^{\lambda t_1} + e^{\lambda t_2}) \right] \sin \vartheta_2(t - t_1).$$

Вообще момент n -й перемены знака определяется тем, что

$$t_n = t_1 + \frac{(n-1)\pi}{\vartheta_n}.$$

колебание же вагона при $t_n < t < t_{n+1}$

$$\theta = -e^{-\lambda t} \sqrt{\frac{2Q}{\rho L}} \left(B_2 - \frac{2Q}{\rho L} e^{\lambda t} \sum_{i=1}^n e^{\lambda t_i} \right) \sin \vartheta_2(t - t_1).$$

Как видно из этого выражения, общий характер движения вагона в рассматриваемом случае может быть представлен колебательным движением

$$\theta = -B \sin \vartheta_2(t - t_1),$$

амплитуда которого B — величина переменная. Каждую секунду она возрастает непрерывно в $e^{-\lambda}$ раз, но, кроме того, в отдельные моменты t_1, t_2, \dots, t_n внезапно уменьшается сразу на некоторую конечную величину

$$\frac{2Q}{\rho L \rho L}.$$

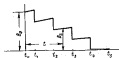


Рис. 7.

Графически амплитуда

B колебания вагона может быть представлена ступенчатой кривой (см. рис. 7), постепенно убывающей, если

$$\frac{2Q}{\rho L \rho L} > \left(e^{-\lambda \frac{\pi}{\vartheta_n}} - 1 \right) e^{-\lambda t_n}.$$

Амплитуда колебаний убывает согласно рис. 7 до тех пор, пока к моменту очередной перемены знака она не станет меньше величины

$$\frac{2Q}{\rho L \rho L}.$$

После этого момента наступает резкое изменение в характере движения. Действительно, пусть к моменту k -й перемены знака величиной θ_k амплитуда колебаний вагона есть B_k , и пусть

$$0 < B_k < \frac{2Q}{\rho L \rho L}.$$

Если бы и после этого момента общий характер движения следовал прежнему закону, то, принимая для t , близкого к t_k , величину $e^{-\lambda t} = 1$, мы имели бы:

$$\theta = -B_k \sin \vartheta_2(t - t_k) \text{ при } t < t_k;$$

$$\theta = -B_k - \frac{2Q}{\rho L \rho L} \sin \vartheta_2(t - t_k) \text{ при } t > t_k.$$

В этих выражениях при $t = t_0$ меняет свой знак одновременно и величина $\sin \theta (t - t_0)$ и множитель перед ней. Поэтому θ во второй стадии движения, т. е. при $t > t_0$, получается того же знака, что и при $t < t_0$. Жирский, бывший к моменту $t = t_0$ в сцеплении с одним из секторов, а данный момент расцепляется с ним, но, коснувшись второго сектора, имеет тенденцию немедленно же вернуться опять к первому. Движению системы становится, начиная с указанного момента, беспорядочным, причем амортизатор как бы перестает работать. Преследование колебаний ватона не нарастает, но убывает, оставаясь в пределах $0 < \theta < \frac{2\sigma_0}{\sqrt{PL\mu_0}}$.

Движение такого рода продолжается до тех пор, пока к моменту очередного расцепления жирского с одним из секторов амплитуда ватона не станет равной $\frac{Q_0}{\sqrt{PL\mu_0}}$. В момент этого расцепления жирский, расцепившись с одним сектором, не войдет в соприкосновение со вторым; амплитуда колебаний жирского поэтому уменьшится на $\frac{Q_0}{\sqrt{PL\mu_0}}$ и обратится, наконец, в нуль в тот самый момент, когда и $\theta = 0$.

Таким образом амортизатор П. П. Шидловского с постоянным поджатием пружины плохо приспособлен для тушения колебаний, не достигающих величины $\frac{2\sigma_0}{\sqrt{PL\mu_0}}$. Это обстоятельство заставляет считать нежелательным применение в системе П. П. Шидловского пружинных муфт с большим начальным поджатием.

§ 9. Общие выражения для свободных колебаний в случае, когда пружинная муфта амортизатора не имеет начального поджатия

Если пружинная муфта амортизатора не имеет начального поджатия, то в выражениях (20) следует считать $Q = 0$, и дифференциальные уравнения свободных колебаний могут быть выписаны так:

$$\left. \begin{aligned} K\theta'' + F\theta' - PL\theta + C\Omega\psi' &= 0; \\ A\psi'' - (\mu_0^2 + g_0k)\psi + g_0k\psi_0 - C\Omega\theta' &= \pm g_0k\Phi_0^2(t - t_0). \end{aligned} \right\} (23)$$

Знак плюс в правой части второго из уравнений надо писать, когда $\theta > 0$, и знак минус, если $\theta < 0$. Кроме того, необходимо помнить, что дифференциальными уравнениями (23) можно пользоваться лишь пока μ , определенное выражением (20), меньше некоторой величины μ_* , значение которой определяется устрой-

ством выключателя, если же $\mu > \mu_*$, то вместо уравнений (23) следует пользоваться уравнениями:

$$\left. \begin{aligned} K\theta'' + F\theta' - PL\theta + C\Omega\psi' &= 0; \\ A\psi'' - \mu^2\psi - C\Omega\theta' &= \pm \mu_*. \end{aligned} \right\} (24)$$

выписывая в правой части знак плюс, если $\theta > 0$, и минус, если $\theta < 0$.

Если колебания системы немалы, то абсолютное значение величины μ не достигает своего предельного значения μ_* , и, следовательно, исследовать случай достаточно малых колебаний, можно пользоваться уравнениями (23). Последние удобно переписать так:

$$\left. \begin{aligned} K\theta'' + F\theta' - PL\theta + C\Omega\psi' &= 0; \\ A\psi'' - \mu_0^2\psi - C\Omega\theta' &= -g_0k\psi_0 \pm g_0k\Phi_0^2(t - t_0). \end{aligned} \right\} (25)$$

Здесь для простоты введено обозначение

$$\mu_0^2 = \mu_0^2 + g_0k. \quad (26)$$

Амортизатор рассматриваемого устройства увеличивает несколько приведенный эквивалентный жирский, уменьшая тем период преследования колебаний системы; кроме того, он прилагает к раме жирского:

- 1) пару, пропорциональную величине ψ_0 , т. е. отклонению жирского в момент начала сцепления ватерной амортизатора с его сектором;
- 2) пару, абсолютное значение которой растет пропорционально времени.

Исследование движения системы в общем виде представляет значительные трудности, но в любом частном случае проследить влияние амортизатора на движение системы можно без особого труда. При надлежащем выборе постоянных, характеризующих собой конструкцию амортизатора, его успокаивающее влияние оказывается настолько сильным, что соприкосновение ватона $F\theta'$ не оказывает на общий характер движения никакого влияния, и для исследования движения системы можно пользоваться формулами главы II.

На основании сказанного только что, в так же изложенного в упомянутой главе, легко заключить, что колебание системы, определенное уравнениями (23), можно рассматривать как сумму трех отдельных движений:

- 1) свободного колебания, соответствующего начальным условиям;
- 2) движения, порождаемого у покоящейся системы парой $-g_0k\psi_0$, начинающей при $t = 0$ внезапно действовать на раму жирского;
- 3) такого же движения, порождаемого парой $-g_0k\Phi_0^2 t$, непрерывно возрастающей по абсолютной своей величине.

Исследование суммарного движения значительно упрощается тем обстоятельством, что затухающими колебаниями можно пренебречь. В соответствии с этим для первого из упомянутых трех движений можно написать:

$$y = A_1 \sin q_1 t + B_1 \cos q_1 t;$$

$$\theta = \sqrt{\frac{PL}{F'L}} (A_2 \cos q_2 t - B_2 \sin q_2 t);$$

где

$$q_2^2 = \frac{PL}{C'Q^2} p_2^2.$$

и постоянные A_1 и B_1 определяются из начальных условий.

В главе первой было указано (см. § 6), что в прецессионном колебании системы кинетическая энергия ее пренебрежимо мала. Поэтому если исследование ограничить рассмотрением одного лишь прецессионного колебания, то за начальные условия движения следует принимать φ_0 и θ_0 , так как $\dot{\varphi}_0 = \dot{\theta}_0 = 0$ не являются для данного движения величинами характеристическими.

Определим A_1 и B_1 из условия

$$y = \varphi_0, \theta = \theta_0 \text{ при } t = 0,$$

можно за свободное колебание, соответствующее начальным условиям, принимать:

$$\left. \begin{aligned} y &= +\theta_0 \sqrt{\frac{F'L}{p_1^2}} \sin q_1 t + \varphi_0 \cos q_1 t, \\ \theta &= \theta_0 \cos q_2 t - \varphi_0 \sqrt{\frac{PL}{F'L}} \sin q_2 t. \end{aligned} \right\} \quad (25a)$$

За движение, порождаемое парой $-g \pm k \varphi_0$, можно принять (см. формулу (13) главы II):

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{g \pm k \varphi_0}{p_1^2} (1 - \cos q_1 t); \\ \theta &= \frac{g \pm k \varphi_0}{F'L p_1^2} \sin q_1 t. \end{aligned} \right\} \quad (25b)$$

Движение, порождаемое парой $\pm g \pm k \Psi_0^2 t$, может быть вычислено с помощью равенств (32) главы II, что дает:

$$\left. \begin{aligned} y &= \pm \frac{g \pm k \Psi_0^2}{C' \Omega} \int_0^t \left(-\frac{C \Omega}{p_1^2} + \sqrt{\frac{F'L}{p_1^2}} \frac{\cos q_1 (t-\xi)}{q_1} \right) d\xi = \\ &= \pm \frac{g \pm k \Psi_0^2}{C' \Omega} \left(-\frac{t C \Omega}{p_1^2} + \sqrt{\frac{F'L}{p_1^2}} \frac{\sin q_1 t}{q_1^2} \right); \\ \theta &= \pm \frac{g \pm k \Psi_0^2}{C' \Omega} \left(-\frac{1 - \cos q_1 t}{q_1^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (25c)$$

Вводя обозначение

$$\theta^0 = \frac{g \pm k \Psi_0^2 C \Omega}{F'L p_1^2} \quad (27)$$

и принимая во внимание вышеприведенное выражение для q_1 , можно суммарное из трех движений (25) выразить так:

$$\left. \begin{aligned} y &= \varphi_0 + \sqrt{\frac{F'L}{p_1^2}} (\theta_0 \pm \theta^0) \sin q_1 t \mp \theta^0 \varphi_0 t + \\ &\quad + \varphi_0 \frac{p_1^2}{p_2^2} (-1 + \cos q_2 t); \\ \theta &= (\theta_0 \pm \theta^0) \cos q_2 t \mp \theta^0 - \varphi_0 \sqrt{\frac{PL}{F'L}} \sin q_2 t, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

причем из двойных знаков верхний относится к случаю $\theta > 0$, а нижний к случаю $\theta < 0$.

Формулы (28) дают возможность исследовать в каждом случае характер движения. В качестве примера полезно разработать вопрос о затухании свободных колебаний, вызванных начальным отклонением вагона.

§ 10. Затухание свободных колебаний, вызванных начальным отклонением вагона

Пусть при $t = 0$ положение системы определяется тем, что $\theta = \theta_0 > 0$ и $\varphi_0 = 0$ и пусть амортизатор, до этого момента бездействовавший, начнет работать.

Пока θ остается большим нуля, в формулах (28) следует удерживать верхний знак. Полагая в них $\varphi_0 = 0$, легко получить:

$$\left. \begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{F'L}{p_1^2}} (\theta_0 + \theta^0) \sin q_1 t - \theta^0 \varphi_0 t; \\ \theta &= (\theta_0 + \theta^0) \cos q_2 t - \theta^0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Первая стадия движения, во время которой оно выражается формулами (29), оканчивается при $t = t_1$, когда θ обращается впервые в нуль. Очевидно

$$\cos q_2 t_1 = \frac{\theta^0}{\theta_0 + \theta^0}. \quad (30)$$

К концу этой стадии движения отклонения жирокола достигают максимума

$$\varphi_1 = \sqrt{\frac{F'L}{p_1^2}} \left(\sqrt{\theta_0^2 + 2\theta^0 \theta_0} - \theta^0 \operatorname{arctg} \cos \frac{\theta^0}{\theta_0 + \theta^0} \right). \quad (31)$$

Если бы амортизатор во время этой стадии движения не действовал, то отклонение жирокола к концу ее было бы

$$\varphi_1 = \theta_0 \sqrt{\frac{F'L}{p_1^2}}. \quad (32)$$

Влияние амортизатора во время первой стадии движения сводится таким образом к уменьшению максимального отклонения жирокопа в

$$\sqrt{\frac{p_1^2}{p_0^2} \left(\sqrt{1 + 2 \frac{p_0^2}{p_1^2} \frac{g}{\omega_0} \sin \theta_0} - \frac{g}{\omega_0} \cos \frac{g}{\omega_0} \frac{g}{\omega_0 + p_1} \right) \text{ рад.}} \quad (33)$$

Ниже будет показано (см. формулы (30) и (27)), что для величин θ^* можно принимать значение

$$\theta^* = \frac{0,30 g g \delta}{\sqrt{p^2 L p_1^2}}.$$

Принимая для θ_0 его максимально возможное значение

$$|\theta_0|_{\max} = 0,70 \sqrt{\frac{p_1^2}{p^2 L}},$$

можно видеть, что

$$\theta^* : |\theta_0|_{\max} = \frac{g g \delta}{p_1^2}.$$

Наивыгоднейшее значение этого отношения, как показано выше, есть $0,22 : 1,22 = 0,18$. Принимая его, можно видеть, что выражение (33) приблизительно равно 0,85. Таким образом во время первой стадии движения амортизатор П. П. Шаломского влияет на движение системы сравнительно слабо, уменьшая ее предельное отклонение всего лишь на 15%.

Вторая стадия движения отличается тем, что в момент начала ее $\varphi = \varphi_1 = 0$, а $\dot{\varphi} < 0$. Формулы (26) показывают, что при $\varphi_1 > 0$ отклонение жиропа в эту стадию движения получается меньше, а при $\varphi_1 < 0$ больше нуля. Принимая это во внимание, легко видеть, что, каков бы ни был знак величины φ_1 , движение системы во время второй ее стадии, может быть выражено так:

$$\left. \begin{aligned} \varphi - \varphi_1 = \varphi_1 \frac{p_1^2}{p_0^2} (1 - \cos \varphi_1 (t - t_1)) + \\ + \text{ctg } \gamma_1 \{ \varphi_1 (t - t_1) - \sin \varphi_1 (t - t_1) \}, \\ \theta = \varphi_1 \left[\frac{p_1^2}{p^2 L p_1^2} (-\sin \varphi_1 (t - t_1) + \text{ctg } \gamma_1 [1 - \cos \varphi_1 (t - t_1)] \right], \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

где

$$\text{ctg } \gamma_1 = \frac{g^* \sqrt{F L p_1^2}}{p_1^2 \omega_0} = \frac{g g \delta p_0^2}{p_1^2 \varphi_1 \omega_0}. \quad (35)$$

Вторая стадия кончается при $t = t_2$, когда θ вновь обращается в нуль.

Нетрудно видеть, что

$$\varphi_1 (t_2 - t_1) = 2 \gamma_1 \quad (36)$$

и что в момент ее окончания отклонение жирокопа

$$\varphi_2 = \varphi_1 \left[1 - 2 \frac{p_0^2}{p_1^2} (1 - \gamma_1 \text{ctg } \gamma_1) \right]. \quad (37)$$

Нетрудно также видеть, что если $|\varphi_1|$ велико, то

$$\varphi_2 \approx \varphi_1 \left(1 - 2 \frac{p_0^2}{p_1^2} \right),$$

если же $|\varphi_1|$ есть величина мала, то

$$\varphi_2 \approx \varphi_1.$$

Вообще же $|\varphi_2| < |\varphi_1|$ и колебания системы всегда затухают. Если φ_1 настолько мало, что

$$1 - 2 \frac{p_0^2}{p_1^2} (1 - \gamma_1 \text{ctg } \gamma_1) > 0,$$

то φ во второй стадии движения не переходит в нуль. То же относится и в этом случае и ко всем последующим стадиям движения; движение системы затухает аperiodически.

При φ_1 достаточно большом может оказаться

$$1 - 2 \frac{p_0^2}{p_1^2} (1 - \gamma_1 \text{ctg } \gamma_1) < 0.$$

В этом случае φ_2 и φ_1 получаются противоположными по знаку. То же может оказаться и для следующих нескольких стадий движения. При φ_1 достаточно большом движение системы вообще не носит аperiodического характера. Но когда колебания системы несколько утихнут, движение и в этом случае принимает характер аperiodического затухания.

Иногда φ_1 может иметь такое значение, что соответствующее ему γ_1 удовлетворяет условию

$$1 - 2 \frac{p_0^2}{p_1^2} (1 - \gamma_1 \text{ctg } \gamma_1) = 0. \quad (38)$$

Пусть это значение величины φ_1 есть Ψ . В данном случае система достигает состояния покоя к моменту окончания второй стадии движения; колебания затухают очень быстро. Можно так подобрать значение величины $g g \delta$, чтобы Ψ было около 0,50. Тогда колебания, вызываемые начальными отклонением жирокопа около 30°, будут затухать всего интенсивнее.

Пологая в выражении (35) и (38)

$$\varphi_1 = \Psi = 0,50$$

и принимая во внимание, что $p_1^2 = p_0^2 + g g \delta$ и по сказанному в § 7 величину Ψ_0^2 можно считать равной амплитуде угловой скорости прецессионного колебания рамы жирокопа:

$$\Psi_0^2 = \varphi_{\max} \varphi_2 = 0,70 \varphi_1 \quad (39)$$

можно для определения γ_1 и $\frac{qgk}{r_0^2}$ получить уравнения:

$$\gamma_1 \operatorname{ctg} \gamma_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{qgk}{r_0^2} \quad (38)$$

$$\text{и} \quad \operatorname{ctg} \gamma_1 = 1,4 \frac{qgk}{r_0^2} \quad (39)$$

откуда

$$(\gamma_1 + 0,35) \operatorname{ctg} \gamma_1 = 0,50.$$

Определяя наименьший положительный корень этого уравнения, можно получить:

$$\gamma_1 = 1,26, \operatorname{ctg} \gamma_1 = 0,31,$$

и, следовательно, наименьшее значение для эластичности пружины можно принимать равным

$$qgk = 0,22 r_0^2 \quad (40)$$

Если qgk и W_0 выбраны согласно выражениям (39) и (40), то чем меньше начальное отклонение жирокома, тем медленнее затухают колебания. Легко видеть, что даже при весьма малом η_0 колебания затухают удовлетворительно.

За меру интенсивности затухания колебаний можно принять относительное уменьшение отклонения жирокома в единицу времени, т. е. величину:

$$\frac{\eta_0 - \eta_1}{\eta_0(\eta_0 - \eta_1)} = 2 \frac{r_0^2}{r_0^2} \eta_0 \left(\frac{1}{\gamma_1} - \operatorname{ctg} \gamma_1 \right) = 1,64 \eta_0 U(\gamma_1) \quad (41)$$

где

$$U(\gamma_1) = \left(\frac{1}{\gamma_1} - \frac{1}{\operatorname{ctg} \gamma_1} \right) \quad (42)$$

Если W_0 и qgk выбраны согласно выражениям (39) и (40), то различным значениям η_0 соответствуют такие значения величины η_1 и $1,64 U(\gamma_1)$.

Таблица 2

η_0	24°	14,5°	10°	6,5°	4°	2°	1°
η_1	1,20	1,00	0,83	0,66	0,40	0,20	0,10
$1,64 U(\gamma_1)$	0,74	0,60	0,47	0,34	0,23	0,11	0,05

Как видно из табл. 2, интенсивность затухание колебаний мала лишь при η_0 около 1—2°, по по существу и не требуется, чтобы колебания, настолько малые, затухали быстро.

Интересно отметить, что у автоматической модели вагона Шляковского замечается такое же уменьшение интенсивности затухания колебаний при малых значениях начального ее отклонения.

§ 11. Общие замечания о действии амортизатора системы П. П. Шляковского

Все вышесказанное побуждает прийти к заключению, что устройства, описанные в пункте 3 параграфа 7, устраняющие вредное влияние амортизатора на нутационное колебание системы и позволяющие поэтому при выборе элементов амортизатора исходить из соображений наилучшей затухающей пресцессивного колебания системы, дают возможность интенсивно тушить свободные колебания системы. Амортизатор системы П. П. Шляковского особенно хорошо тушит колебания, если их начальная величина сравнительно велика, т. е. наиболее опасные колебания. Хорошее затухание колебаний дает даже основание предполагать что благодаря воздействию амортизатора, вагон Шляковского может без вреда выдерживать действие несколько больших возмущающих усилий, чем дается формулами главы II. Особенно интересно высказать данный вопрос в отношении предельных допустимых радиусов пучных закруглений.

Некоторые подробности в связи с этим вопросом будут вынесены далее в главе IV.

Следует также отметить, что в системе Шляковского область допустимых значений эксцентриситета жирокома не ограничена каким-либо максимальным значением. Это дает возможность конструктору выбирать для r_0^2 значение, которое он найдет наилучшим по различным соображениям, изложенным в главе II.

Немаловажным достоинством системы Шляковского является то обстоятельство, что она дает возможность осуществить желательную интенсивность затухания пресцессивных колебаний независимо от того, чему равно сопротивление вагона F . Сопротивление это пропорционально в случае системы Шляковского интенсивности затухания нутационного колебания. Принимать какие-либо меры к искусственному увеличению сопротивления не следует. Нужно лишь параллельно его влиянию на пресцессивное колебание надлежащим увеличением (см. формулу (41)) величины η_0 , т. е. надлежащим выбором приведенного эксцентриситета жирокома.

Следует полагать, что в основе системы Шляковского заложен правильный идея, и она представляет значительный практический интерес.

В одном отношении, однако, система Шляковского требует большого внимания к всей конструкции — в отношении влияния на нее моментов, возникающих вагона.

Вопрос этот очень важен, и разбору его мы посвятим часть следующей главы.

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

А. О ДЕЙСТВИИ ВЕТРА НА ВАГОН СИСТЕМЫ П. П. ШИДЛОВСКОГО

§ 1. Сущность вопроса

Если на вагон действует какой-либо кренящий момент M , то, как показывают основные уравнения движения, вагон наклонится навстречу моменту на угол $\theta = PL$ и колеблется около этого наклонного положения, как около нейтрального положения. Нейтральное положение жирокопа может также измениться, но может остаться и неизменным (в зависимости от конструкции амортизатора). Нетрудно видеть, что, если воздействие амортизатора пропорционально скорости рамы жирокопа, то нейтральное положение жирокопа остается неизменным. Если воздействие амортизатора пропорционально отклонению вагона, отчитываемому от вертикали, то нейтральное положение жирокопа относительно вагона зависит от величины пары, кренящий вагон.

Если же жирокоп снабжен амортизатором системы П. П. Шидловского, то жирокоп реагирует различно в зависимости от того, создается ли пара, кренящая вагон ветром, или же порождается силами инерции на поворотах пути.

Средний крен вагона в обоих случаях должен быть

$$\theta = \frac{M}{PL}$$

Но, если пара M создается силами инерции, то жирокоп не подумает, благодаря крену, стремления сползти направо или налево и сцепиться с каким-либо из соседних секторов; для нейтрального положения $\varphi = 0$. Если же пара M создается каким-либо усилием вrade ветра, то на жирокоп в плоскости поверхности себана вагона не действует никаких усилий, кроме тяжести. Благодаря крену вагона, жирокоп сползает в сторону своей опущившейся цапфы, и сцепляется с соответствующим сектором. К раме жирокопа оказывается приложенным усилие, абсолютная величина которого постепенно возрастает. Рама жирокопа уходит поэтому все больше и больше от нейтрального своего положения. Развивающийся жирокопический момент постепенно выравнивает крен вагона. Жирокоп расцепляется со своим сектором, лишь выравнив крен вагона. Он имеет, таким образом, стремление удерживать вагон в положении, в котором все действующие на вагон силы статически не уравновешены. Естественно, что система не может достигнуть при этом состояния покоя ни в каком своем положении и должна прийти в состояние некоторого установившегося колебательного движения.

Устранить колебательное движение можно. Для этого надо протвадействовать причине, его вызывающей, т. е. либо поднять

существующую цапфу жирокопа, либо выравнять крен вагона перемиением соответствующего груза, либо приложить к цапфе жирокопа направленные вдоль их оси усилия, устраняющие вредное сцепление жирокопа с секторами.

Последнее решение задачи является, по-видимому, наиболее простым. Автоматически приспособление, устраняющее вредное влияние на систему таких усилий, как кренящее усилие от ветра, может работать от установленного в вагоне маятникового кренометра. При поворотах поезда такой маятник не отклоняется от диаметральной плоскости вагона. Если же вагон кренится ветром, то угол крена может быть отсчитан по кренометру, и соответствующее усилие может быть подлаженным автоматом приложено к жирокопу вдоль оси его цапфы. Не один автомат не может, однако, работать абсолютно точно, и тем точнее требуется работа автомата, тем сложнее должно быть его устройство. Весьма уместен вопрос: какая же точность требуется от автомата, только что упомянутого?

Отвечать на данный вопрос можно лишь выяснив предварительно характер и масштаб того движения, которое порождается у системы, заданной точностью автомата. Для общей ориентировки в вопросе достаточно выяснить, что происходит с системой, если указанный автомат полагает вредное действие ветровальности. Выяснение этого вопроса особенно просто, так как сводится к определению влияния на систему некоторого постоянного по величине кренящего вагон момента.

§ 2. Решение задачи

Пусть при $t = 0$, когда $\theta = 0$, а $\varphi = \varphi_0$ на вагон начинает внезапно действовать пара M от давления ветра, сохраняющая свою величину неизменной.

За дифференциальные уравнения движения, пренебрегая парой $P\theta'$, можно в этом случае принять:

$$\left. \begin{aligned} K\theta'' - PL\theta + C\Omega\varphi' &= M; \\ A\varphi'' - P_1\varphi - C\Omega\theta' &= -g\varrho k\varphi_0 + g\varrho k\varphi_0 t. \end{aligned} \right\} (1)$$

Пусть $M > 0$ и $\varphi_0 > 0$, тогда для первой стадии движения $\theta < 0$, и из двух знаков в правой части второго уравнения следует выбрать нижний.

Суммарное движение системы можно считать складываемым из: 1) свободного колебания, соответствующего началному отклонению жирокопа [см. формулу (16), гл. III:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 \cos \Omega_1 t; \\ \theta &= -\varphi_0 \sqrt{\frac{P_1}{PL}} \sin \Omega_1 t. \end{aligned} \right\} (2)$$

2) движения, порождаемого парой M [см. формулу (5), гл. II];

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{M}{\sqrt{FL\rho_1}} \sin \varphi_0 t \\ \theta &= -\frac{M}{\rho_1 L} (1 - \cos \varphi_0 t) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

3) движения, вызванного парой $-g \rho \pm \varphi_0$ [см. формулу (13), гл. II];

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{g \rho \pm \varphi_0}{\rho_1 L} (1 - \cos \varphi_0 t) \\ \theta &= \frac{g \rho \pm \varphi_0}{\sqrt{FL\rho_1}} \sin \varphi_0 t \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

4) движения, вызванного парой $-g \rho \pm \varphi_0'$ [см. формулу (26), гл. III];

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \frac{g \rho \pm \varphi_0'}{\rho_1 \varphi_0} (\varphi_0 t - \sin \varphi_0 t) \\ \theta &= \frac{g \rho \pm \varphi_0'}{\sqrt{FL\rho_1 \varphi_0}} (1 - \cos \varphi_0 t) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Складывая движения (2), (3), (4) и (5), можно для суммарного колебания системы получить:

$$\left. \begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &= \left(\frac{M}{\sqrt{FL\rho_1}} - \frac{g \rho \pm \varphi_0'}{\rho_1 \varphi_0} \right) \sin \varphi_0 t + \frac{g \rho \pm \varphi_0'}{\rho_1 L} t - \\ &\quad - \varphi_0 \frac{\rho_1}{\rho_1 L} (1 - \cos \varphi_0 t); \\ \theta &= 2 \sqrt{\frac{\rho_1}{FL}} \left[\left(-\frac{M}{\sqrt{FL\rho_1}} + \frac{g \rho \pm \varphi_0'}{\rho_1 \varphi_0} \right) \sin \frac{1}{2} \varphi_0 t - \right. \\ &\quad \left. - \varphi_0 \frac{\rho_1}{\rho_1 L} \cos \frac{1}{2} \varphi_0 t \right] \sin \frac{1}{2} \varphi_0 t \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Выражениями (6) движение системы определяется вплоть до того момента, когда θ впервые обращается в нуль. Пусть этот момент есть $t = t_0$. Легко видеть, что

$$\varphi_0 t_0 = 2 \text{ arc tg} \left(\frac{\lambda}{1 - \nu} \right), \quad (7)$$

где

$$\lambda = \frac{\rho_1 \varphi_0 \varphi_0'}{g \rho \pm \varphi_0} \quad (8)$$

и

$$\nu = \frac{M}{\sqrt{FL\rho_1}} \frac{\rho_1}{g \rho \pm \varphi_0} \quad (9)$$

и что

$$\varphi_1 - \varphi_0 \left[1 + 2 \frac{\rho_1}{\rho_1 L} \frac{1}{\lambda} \left(\text{arc tg} \frac{\lambda}{1 - \nu} - \lambda \right) \right]. \quad (10)$$

Всякому значению пары, крившей вагон, соответствует, как выше сказано, некоторое установившееся движение; для него:

$$\varphi_1 - \varphi_0 = 0.$$

Пусть λ_0 соответствующее этому φ_0 есть λ_0 .

Легко видеть, что λ_0 есть наименьший корень уравнения

$$\text{tg} \lambda_0 = \frac{\lambda_0}{1 - \nu}. \quad (11)$$

В табл. 3 приведено несколько численных значений λ_0 в функции от ν .

Нетрудно убедиться, что каковы бы ни были начальные условия движения, величина λ действительно стремится к λ_0 , как к пределу.

Действительно:

$$\varphi_0 < \frac{g \rho \pm \varphi_0'}{\rho_1 \varphi_0} \lambda_0 \quad \text{то} \quad \varphi_1 > \varphi_0$$

если же

$$\varphi_0 > \frac{g \rho \pm \varphi_0'}{\rho_1 \varphi_0} \lambda_0 \quad \text{то} \quad \varphi_1 < \varphi_0$$

Если движение системы принимает установившийся характер, θ обращается в нуль в тот момент, когда

$$\varphi = \frac{g \rho \pm \varphi_0'}{\rho_1 \varphi_0} \lambda_0 \quad (12)$$

Это отклонение широкого для установившегося движения не есть максимальное.

Дифференцируя по времени общее выражение (6), можно за-

Таблица 3

ν	0,00	0,04	0,16	0,39	0,75	1,31	2,21	3,91	6,97	∞
λ_0	0,00	0,35	0,70	1,05	1,40	1,74	2,09	2,44	2,79	3,14
ρ	0,00	0,20	0,40	0,60	0,79	0,96	1,14	1,30	1,45	1,57
$\Phi_1(\varphi)$	0,00	0,01	0,03	0,08	0,21	0,28	0,50	0,97	2,40	∞
$\Phi_2(\varphi)$	0,00	0,18	0,36	0,56	0,84	1,10	1,73	2,75	5,67	∞

Здесь, что φ достигает максимума при t , удовлетворяющем условию:

$$\cos \Omega_2 t - \frac{\lambda}{1-\mu} \sin \Omega_2 t = \frac{1}{1-\mu}.$$

Ограничиваясь рассмотрением установившегося колебания, можно λ заменить на λ_0 и с помощью выражения (11) заменить это уравнение так:

$$\cos (\Omega_2 t - \lambda_0) = \frac{\sin \lambda_0}{\lambda_0},$$

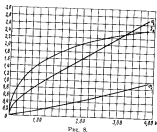


Рис. 8.

корни которого суть

$$\Omega_2 t = \lambda_0 \mp \text{arc} \cos \left(\frac{\sin \lambda_0}{\lambda_0} \right). \quad (13)$$

Первому из этих корней соответствует

$$\varphi_{\max} - \varphi_0 = \varphi_0 \frac{\rho_1'}{\rho_1} \Phi_2(\nu), \quad (14)$$

второму же

$$\varphi_{\min} - \varphi_0 = -\varphi_0 \frac{\rho_2'}{\rho_2} \Phi_1(\nu). \quad (15)$$

Отклонение маятника от вертикали получается максимальным, когда

$$\Omega_2 t = \frac{1}{2} \Omega_2 t_1 = \text{arc} \operatorname{tg} \frac{\lambda_0}{1-\mu} = \lambda_0, \quad (16)$$

причем

$$\varphi_{\text{ста}} = -\varphi_0 \sqrt{\frac{\rho_1'}{\rho_1} \frac{\rho_2'}{\rho_2}} \Phi_2(\nu). \quad (17)$$

Легко видеть, что

$$\Phi_1(\nu) = \frac{1}{\lambda_0} (\operatorname{tg} \beta - \beta), \quad (18)$$

где

$$\cos \beta = \frac{\sin \lambda_0}{\lambda_0}; \quad (19)$$

$$\Phi_2(\nu) = \operatorname{tg} \frac{\lambda_0}{2}. \quad (20)$$

Несколько частных значений этих величин приведено в табл. 3 и на рис. 8.

Из рассмотрения кривых таблицы можно прийти к следующим

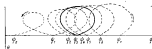


Рис. 9.

заключениям относительно общего характера установившегося движения:

1. Пока аргумент ν , пропорциональный паре M , мал — наибольшее и наименьшее отклонения гироскопа почти не отличаются от среднего.

2. С увеличением крутящего момента возрастают и среднее отклонение гироскопа и отношение к нему максимального его отклонения.

3. Отношение полуосей конуса прецессии не есть в установившемся движении величина постоянная, а зависит от величины крутящего момента.

Графически движение может быть представлено рис. 9, на котором конус прецессии установившегося движения вычерчен жирной линией, а тонкие линии изображают характер движения, пока оно еще не установилось, и ось гироскопа вычерчивается из горизонтальной плоскости ряд эллиптических дуг.

§ 3. Численный пример и выводы

Формулы предыдущего параграфа не дают прямого ответа на вопрос, поставленный в параграфе первом. Обратимся поэтому к численному примеру.

Пусть $\rho_1' = 1.35$; $P L = 70$.

Таблица 4

$M: PZ$	$0,15^\circ$	$0,30^\circ$	$2,0^\circ$	$9,6^\circ$
ν	0,16	0,75	2,21	8,67
φ_0	$6,1^\circ$	$12,3^\circ$	$18,4^\circ$	$24,8^\circ$
φ_{max}	$6,2^\circ$	$14,4^\circ$	20°	72°
δ_{max}	$0,27^\circ$	$1,30^\circ$	$4,0^\circ$	$17,5^\circ$

Цифры эти близки к выбранным у опытового моторного вагона, и пусть согласно формулам (39) и (40) главы III:

$$\nu^* = 0,70 \nu;$$

$$\nu \rho k = 0,22 \rho k_0.$$

В таком случае

$$\frac{M}{PZ} = 0,70 \sqrt{\frac{P_0}{P}} \frac{\nu \rho k}{P_0} \nu \approx 0,195 \nu = 1,11^\circ \nu; \quad (39)$$

$$\varphi_0 = \frac{2 \rho k}{P_0} 0,70 \lambda = 0,154 \lambda_0 = 8,8^\circ \lambda_0; \quad (40)$$

$$\varphi_{max} = \varphi_0 \left[1 + \frac{P_0}{P} \Phi_0(\nu) \right] = \varphi_0 [1 + 0,82 \Phi_0(\nu)]; \quad (41)$$

$$\delta_{max} = -\varphi_0 \frac{P_0}{P} \sqrt{\frac{P_0}{P}} \Phi_1(\nu) \approx -0,126 \varphi_0 \Phi_1(\nu). \quad (42)$$

В табл. 4 сопоставлено несколько цифр, данных этими выражениями. Цифры показывают, что момент от давления ветра, вызывающий среднее отклонение вагона около 1° , вызывает отклонение жирокопа около 15° . Желательно, чтобы погрешность автомата, описанного в параграфе 1, была не более 1° . Но при ветре, давление которого 100 кг/м^2 , средний угол рассматриваемого вагона будет около 6° . Необходимо, следовательно, чтобы относительная погрешность автомата была не более 1:6. Автомат, работающий с такой точностью, по-видимому, вполне осуществим. Тем же менее, безусловно слабый амортизатор упомянутый в п. 2, § 7, главы II ограничивает максимальной величиной воздействие его пружиной, во всяком случае до тех пор, пока опытом не будет доказана полная надежность работы автомата, должествующего в системе Шкловского устранять вредное влияние ветра.

§ 4. Общие замечания

Выше было указано (см. § 1 главы I), что при прохождении поезда по криволинейным участкам пути на раму жирокопа действует момент, зависящий от величины пары, опрокидывающей его. Как видно из формулы (2) главы I, приведенный эксцентриситет жирокопа увеличивается, когда $\omega < 0$, т. е. при поворотах в сторону, противоположную направлению вращения колеса жирокопа, и уменьшается, когда $\omega > 0$. Это дает возможность заключить (см. главу II), что при поворотах в сторону, противоположную направлению жирокопа: 1) увеличивается угловая скорость прецессииного колебания; 2) увеличивается полусумма конуса прецессии, соответствующая углам θ . Благодаря этому колебания вагона приобретают на таких закруглениях более стремительный характер и при большом ω могут стать неприятны для пассажиров.

При поворотах в сторону вращения жирокопа приходится (см. формулу (12), гл. II) уменьшать радиусы закруглений, чтобы удержать отклонение жирокопа в пределах безопасного.

Проходя по кривым, полезно изменять эксцентриситет жирокопа. Было бы, конечно, лучше всего, если бы на поворотах величина ρ_0 менялась автоматически так, чтобы всегда было:

$$\rho_0 = \rho - C \Omega = \text{const.}$$

Средства для достижения сего могут быть разные. Самое простое и действительное, — это применение не одного жирокопа, а двух вращающихся в разные стороны. Если рамы жирокопов связать так, чтобы одна отклонялась вперед всегда на столько, на сколько другой отклоняется назад, и дать одному жирокопу импульс $+\frac{1}{2} C \Omega$, а другому $-\frac{1}{2} C \Omega$, то для рассматриваемых жирокопов будет действовать во всем как один, импульс которого есть $C \Omega$; но на поворотах величина ρ_0 будет, независимо от значения величины ω , оставаться равной ρ .

П. П. Шкловский предлагает, применяя один жирокоп, регулировать на поворотах величину эксцентриситета жирокопа ρ_0 так, чтобы разность $\rho_0 - C \Omega$ оставалась неизменной. Для этого же сконструирован особый автоматический аппарат, который в зависимости от угловой скорости вращения поезда поворачивает вертикальной оси или перемещает центр тяжести жирокопа вверх и вниз, или же меняет соответствующим образом натяжение тех пружин, действие которых создает опрокидывающую жирокопа пару. При умеренных скоростях движения поезда этот способ также должен давать хорошие результаты.

С увеличением скорости поезда угловая скорость его *аварий* равная возрастает, длительность же тех промежуток времени, во время которых величина ρ_0 должна меняться от своего миним-

му до максимума, убывает. Поэтому при увеличении скорости движения поезда приходится предвидеть все более и более высокие требования к автомат, регулирующему эксцентриситет жирокопа, а во вторых приходится увеличивать мощность этого автомата. Действительно, мощность эта есть $C\Omega \frac{du}{dt}$ и $\frac{du}{dt}$ при увеличении скорости поезда и растет catena parabolica , как v^2 .

Все сказанное позволяет видеть, что как бы ни конструировать автомат, регулирующий эксцентриситет жирокопа, устройство его выйдет довольно сложным. Желательно поэтому выяснить, действительно ли он необходим? Для сменения данного поворота могут служить приводимые ниже результаты некоторых численных определений минимально допустимого радиуса закруглений.

Подсчеты были сделаны отвлеченно для следующих двух предположений:

1) в предположении, что приспособление, регулирующее эксцентриситет жирокопа, действует идеально, т. е. что

$$R_0 = \text{const};$$

2) в предположении, что жирокоп не имеет такого приспособления, и, следовательно,

$$R_0 = R - C\Omega v,$$

где $R = \text{const}$.

В обоих случаях предполагалось, что поезд движется по закруглению, очерченному дугой круга, на которое вступает с прямолинейного участка пути внезапно. Во втором случае предполагалось, что поезд поворачивается в сторону вращения жирокопа, так как это направление его вращения является более опасным.

Все численные расчеты приведем в каждом из указанных случаев сначала в предположении, что амортизатор не действует, а затем в предположении, что он сконструирован по системе П. Г. Шаловского, и притом так, что θ_0 и Φ_0 выбраны согласно формулам (39) и (40) главы III. Во избежание излишнего осложнения выкладок, влияние ограничителя максимальных воздействий амортизатора не учитывалось.

В расчетах принималось, что поезд переходит с прямолинейного участка на круговое закругление при $t = 0$ и что в этот момент состояние системы

$$\theta = \theta_0 = \theta'_0 = \psi'_0 = 0.$$

Принималось также, что максимальное отклонение жирокопа не должно превосходить 30°

$$\Phi_{\text{max}} = 0,50.$$

Величины $R, L, p, C\Omega$ и τ принимались равными выбранным для опытного состава ж.д. дороги Петроград—Гатчина, именно:

$$\Omega R = 70 \text{ м. м.};$$

$$p = 4,5 \text{ м.};$$

$$C\Omega = 13 \text{ м. м. сек.};$$

$$\tau = 0,1.$$

§ 5. Случай идеальной регулировки эксцентриситета

Если амортизатор не действует, то для определения колебаний системы, вызванных продолжением по закруглению, можно пользоваться формулами (27) главы II. Нужно лишь принять для величины крайней пары M_0 и длительности ее действия τ значения, данные формулами (30) главы II.

Преобразуя нутационным колебанием системы, можно за максимальные отклонения ее принять:

$$\Phi_{\text{max}} = \frac{2(1 + \eta)e^{\theta}}{gR} \left| \frac{PL}{R^2} \right| \sin(0,5 \Phi_0 \tau),$$

$$\theta_{\text{max}} = -\frac{2(1 + \eta)e^{\theta}}{gR} \sin(0,5 \Phi_0 \tau).$$

Пусть $\tau_0 = \pi/g\Omega^2$ и θ_0 есть соответствующий угол поворота пути. Принимая во внимание формулы (30) главы II, можно видеть, что

$$\sin(0,5 \Phi_0 \tau) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\tau}{\tau_0}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\theta}{\theta_0}\right).$$

При больших значениях отношения $\theta : \theta_0$ даже незначительное изменение отношения $\theta : \theta_0$ может изменять $\sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\theta}{\theta_0}\right)$ очень сильно, поэтому безопаснее считать $\sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{\theta}{\theta_0}\right) = 1$ всегда, если $\theta > \theta_0$, т. е. если закругление достаточно велико.

Принимая это во внимание, можно считать, что, если угол поворота пути больше некоторого предела, а именно, если

$$\theta > \theta_0, \quad (18)$$

то для определения минимально допустимого радиуса закругления может служить формула

$$R_{\text{min}} = \frac{2(1 + \eta)e^{\theta}}{g\Phi_{\text{max}}} \left| \frac{PL}{R^2} \right|, \quad (19)$$

а для определения соответствующего ему максимального отклонения системы выражение:

$$\theta_{\text{max}} = \Phi_{\text{max}} \left| \frac{PL}{R^2} \right|. \quad (20)$$

Таблица 5

		I_0	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
		θ_{max}	2,4°	4,2°	5,4°	6,4°	7,2°
ϵ		θ_0	$R_{max}, \text{м}$				
км/час	м/сек						
40	11,1	6,7°	695	400	310	260	220
60	16,7	4,5°	1560	960	700	590	520
80	22,2	3,3°	2780	1630	1240	1050	930
100	27,8	2,7°	4350	2500	1940	1640	1450
120	33,4	2,2°	6290	3560	2730	2360	2050
140	38,9	1,9°	8500	4930	3650	3210	2830

Что же касается величины θ_0 , то очевидно

$$\theta_0 = \frac{C \Omega}{R_{max}} - \frac{\pi}{R_{max} \theta_0} - \frac{\pi}{2} \frac{C \Omega}{g(1 + \eta) R_{max}} \quad (21)$$

При заданных значениях g , η , R_{max} , $C \Omega$, p и $P L$ критический угол поворота закрутки θ_0 есть функция одной лишь скорости поезда; максимальное отклонение вагона θ_{max} — функция одного лишь эксцентриситета жирокопа $I_0 = L$; предельный же допустимый радиус закрутки R_{max} зависит и от ϵ и от I_0 .

В табл. 5 приводятся численные значения величин R_{max} , θ_0 и θ_{max} в функции аргументов ϵ и I_0 для случаев:

$$\eta = 0,5; \quad p = 4,5; \quad C \Omega = 13; \quad P L = 70 \text{ и } \gamma = 0,1.$$

Если угол поворота поезда θ_0 меньше θ_{max} , то для получения R_{max} следует табличные значения величины R_{max} умножить на $\sin \frac{\theta_0}{2\theta_{max}}$.

Таблица 5 показывает, что если не принимать во внимание затухания колебаний, то для радиусов путевых закруток приходится выбирать значения сравнительно большие.

Влияние амортизатора может быть легко учтено на основании формул, выведенных в главе III.

Если закручение достаточно велико, то в движении системы, снабженной таким амортизатором, следует различать следующие три стадии:

Стадия I: от момента вступления на кривую до момента максимального отклонения жирокопа.

Стадия II: от момента максимального отклонения жирокопа до начала нового прямолинейного движения.

Стадия III: движение по прямой после прохода закрутки.

Таблица 6

$\eta_0 \theta_0 - \eta_1$	0	1,05	1,57	2,10	2,52
$\theta_0 \sqrt{\frac{P L}{p I_0}} = \eta_0$	-1,05	-1,63	-1,62	-1,45	-1,05
$\eta_0 : \eta_1$	1,00	0,62	0,33	0,08	0,00
$\eta_{max} : \eta_1$	-0,17	-1,31	-1,52	-1,33	-1,00

Отсчитывая для первой стадии движения угол отклонения вагона от его среднего наклона на кривой, можно для движения системы во время этой стадии пользоваться формулами (29)–(30) главы III. Надо лишь положить в них:

$$\theta_0 = \frac{(1 + \eta) \pi^2}{g R} \quad (22)$$

и помнить, что при невыгоднейшем устройстве амортизатора

$$\eta_0 \theta_0 = 0,22 \theta_0^2$$

$$p I_0 = 1,22 \theta_0^2$$

$$\eta_0^2 = 0,70 \theta_0$$

а следовательно [см. формулу (27) главы III],

$$\theta^2 = 0,154 \frac{p I_0}{P L p I_0} = 0,126 \sqrt{\frac{p I_0}{P L}}. \quad (23)$$

Из формулы (31) главы III можно заключить, что величина θ_0 начального крена вагона связана с величиной η_{max} максимального отклонения жирокопа зависимостью:

$$\theta_0 = \eta_{max} \sqrt{\frac{p I_0}{P L} \left(\sqrt{1 + 2 \frac{\eta^2}{\theta_0^2}} - \frac{\eta}{\theta_0} \operatorname{arccos} \frac{\eta}{\theta_0 + \eta} \right)^2}. \quad (24)$$

Зависимость эту можно, приняв во внимание равенство (23),

рассматривать как уравнение относительно величин $\theta_0 \sqrt{\frac{P L}{p I_0}}$.

Легко видеть, что при $\eta_{max} = 0,50$ корень этого уравнения есть

$$\theta_0 = 1,05 \eta_{max} \sqrt{\frac{p I_0}{P L}}. \quad (25)$$

Приняв во внимание это, а также равенство (22), можно видеть, что отклонение жирокопа достигает к концу первой стадии движения величины $\eta_{max} = 0,50$, если R удовлетворяет условию

$$\eta_{max} = 0,50 = 0,95 \sqrt{\frac{P L}{p I_0}} \frac{(1 + \eta) \pi^2}{g R}. \quad (26)$$

Во время второй стадии движения отклонение жirosкопа убывает, креп же высота сигнала возрастает до некоторой величины, а затем убывает. Движение системы определяется при этом формулами (34)–(37) главы III.

Если длительность пребывания поезда на закруглении достаточно велика, то к концу второй стадии движения система достигает состояния покоя, и отклонение жirosкопа во время третьей стадии движения не превышает данного равенством (26).

Система П. П. Шидловского позволяет для определения максимальной кривины траектории пользоваться равенством

$$R_{\text{max}} = 0,95 \frac{(1+\eta) \epsilon^2}{g \sin \alpha} \sqrt{\frac{P L}{\rho_0}} = 0,86 \frac{(1+\eta) \epsilon^2}{g \sin \alpha} \sqrt{\frac{P L}{\rho_0}} \quad (27)$$

если только длительность пребывания поезда на кривой τ превышает величину

$$\tau = t_1 + (t_2 - t_1) = \left(\arccos \frac{\rho_0}{\rho_0 + \rho_1} + 2\gamma_1 \right) g^{-1} \quad (28)$$

[см. формулы (30) и (36) главы III].

Принимая для θ^* и θ_2 значения, данные равенствами (23) и (25), и, считая u , как корень уравнения (35) главы III, равным 1,56, можно видеть, что τ , определяемое выражением (28), есть

$$\tau = \left(\arccos \frac{0,53}{1,33} + 2,52 \right) g^{-1} = 3,65 g^{-1} = 1,16 \tau_0,$$

а соответствующий угол поворота пути

$$\theta = 1,16 \theta_0 = \theta_1 \quad (29)$$

где θ_0 определяется равенством (21) и цифрами табл. 5.

Раземируя сказанное, можно видеть, что для данных закруглений, т. е. тех, для которых

$$\theta > \theta_1,$$

система П. П. Шидловского позволяет принимать минимальные радиусы закруглений в 2,0; 0,86 = 2,34 раза меньше, данным табл. 5.

Если закругление менее длинное, и стало быть

$$\theta < \theta_1,$$

то колебание системы, порождаемое угловым поворотом поезда на кривую, не успеет затухнуть к моменту начала нового прямолинейного движения, и максимальное отклонение жirosкопа во время третьей стадии движения получается больше, чем к концу первой.

Действительно, пусть ψ в момент начала второй стадии движения системы системы есть:

$$\psi = \psi_1; \quad \theta = 0 \quad \text{при} \quad t = t_1$$

и пусть поезд сходит с кривой на прямую при $t = t_2$ и пусть

$$\psi_1 (t_2 - t_1) < 2\gamma_1,$$

Тогда начальное для третьей стадии движения отклонение системы дается формулами (34) главы III, если в них положить $t = t_1$. Вычисляемое так отклонение угла осуществляется от положения наклоненного к вертикали на угол

$$-\theta_0 = -\frac{(1+\eta) \epsilon^2}{g R}.$$

Для получения отклонения угла относительно вертикали надо к криву выколу, вычисленному по формуле (34) главы III, прибавить величину

$$\frac{(1+\eta) \epsilon^2}{g R}.$$

Для ψ и ψ_1 подставляя затем найденные значения величины θ_2 и ψ в формулы (28) главы III, вместо θ_2 и ψ_1 можно исследовать движение во время третьей его стадии. Таблица 6 дает несколько значений величины θ_2 и ψ_1 в функции от длительности второй стадии движения, вычисленных для случая

$$\left. \begin{aligned} \text{ctg } \gamma_1 &= 0,31; \\ \theta^* &= 0,252 \psi_1 \sqrt{\frac{P L}{\rho_0}}; \\ \psi_1 &= 0,5. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

В той же таблице приведены и соответствующие отклонения ψ_{max} : ψ_1 максимального отклонения жirosкопа для третьей стадии движения и величине отклонения его в момент окончания первой стадии.

Как видно из этой таблицы, самым невыгодным закруглением является такое, для которого вторая стадия движения длится одну четверть периода прецессионного колебания системы.

В этом самом невыгодном случае радиус закругления приходится принимать приблизительно в 1,52 раза больше, чем для закруглений длинных. Но для последних система П. П. Шидловского, как выше показано, позволяет принимать радиусы в 2,34 раза меньше, чем в табл. 5.

В самом худшем случае, следовательно, как можно для системы П. П. Шидловского брать 2,34 : 1,52 \approx 1,5 раза меньше, чем в табл. 5.

§ 6. Случай отсутствия регуляровки эксцентриситета жirosкопа

Если усмоктель не имеет приспособления, регулирующего приведенный эксцентриситет жirosкопа, то во время движения по закруглению, очерченному дугой круга, ρ_0 не равно ρ , но есть все же некоторая постоянная

$$\rho_0 = \rho - C \Omega_{\text{ж}}^2. \quad (30)$$

Таблица 7

a	j				
	0,1	0,2	0,5	0,7	0,9
11,1	0,233	0,134	0,105	0,088	0,078
16,7	0,155	0,089	0,070	0,059	0,052
22,2	0,117	0,068	0,053	0,045	0,039
27,8	0,093	0,054	0,042	0,035	0,031
33,4	0,077	0,044	0,035	0,029	0,025
38,0	0,066	0,038	0,030	0,025	0,022

Приведенный эксцентриситет жирокопа следует принимать по этой формуле для I и II стадий движения. Для третьей стадии бы считать

$$p'_0 = p_0$$

то, чтобы не усложнять сильно выкладки, можно и для третьей стадии брать приведенный эксцентриситет жирокопа по формуле (30). От этого расчетные радиусы закругления станут лишь немного больше, данных более точным подсчетом.

Если амортизатор выключен, то для v_{\max} , θ_{\max} и θ_0 можно пользоваться формулами (19), (20) и (18), подставляя лишь в них p'_0 из выражения (30). При этом θ_{\max} и θ_0 определяются, очевидно, совершенно теми же выражениями, что и в предыдущем параграфе; выражения же (18) и (30) для определения R_{\min} дают:

$$R_0 = \frac{C \Omega \sigma}{r^2} R - \frac{4(1+\eta)^2}{r^2} \frac{v^2}{v_{\max}} \frac{PL}{r^2} = 0$$

Откуда

$$R_{\min} = \frac{2(1+\eta)^2 \sqrt{PL}}{r v_{\max}} (\alpha + \sqrt{1+\alpha^2}), \quad (31)$$

где

$$\alpha = \frac{C \Omega \sigma v_{\max}}{4(1+\eta)^2 PL} \frac{1}{\sigma \sqrt{r^2}}. \quad (32)$$

Сравнивая эту формулу с формулой (19), легко видеть, что отсутствие у жирокопа приспособления, регулирующего его приведенный эксцентриситет, требует увеличения минимального радиуса круговых закруглений в $(\alpha + \sqrt{1+\alpha^2})$ раз.

В табл. 7 приведено несколько значений величины α , подсчитанных по формуле (32) для случая:

$$PL = 70; \quad \eta = 0,10; \quad C \Omega = 13; \quad r = 4,5; \quad v_{\max} = 0,50.$$

Как видно из таблицы, α есть довольно малая по сравнению с единицей дробь. Поэтому можно приблизительно считать, что

$$\alpha + \sqrt{1+\alpha^2} \approx 1 + \alpha. \quad (33)$$

Пользуясь табл. 7 и формулами (31), (32) и (33), нетрудно учесть влияние искусственного регулирования величины p'_0 на величину допустимой кривизны закруглений.

Влияние амортизатора при допущениях, сделанных в настоящем параграфе, не отличается ничем от того, которое было найдено в предыдущем параграфе. Так же, как и в § 5, можно принимать, что при достаточно больших закруглениях, амортизатор дает возможность длину закруглений уменьшить в 2,5 раза, а при наиболее невыгодной их длине — в 1,5 раза.

§ 7. Общие заключения

Из рассмотренных цифр, помещенных в табл. 7 и 8, можно видеть, что:

1. Искусственная регулировка эксцентриситета жирокопа не приносит при овертании путей закруглений дуги круга почти никакой пользы. Так, например, при $v = 27,8$ м/сек $= 100$ км/час, она позволяет радиусы закруглений уменьшать не более, чем на 5—9%.

2. Наиболее действительным средством для уменьшения радиуса закруглений является увеличение эксцентриситета жирокопа.

3. С увеличением естественного эксцентриситета жирокопа выгоды от искусственной регулировки эксцентриситета падают.

Например, приняв для рассмотренного численного примера $j = 0,30$, можно при различных скоростях движения поезда допускать следующие радиусы длинных закруглений (в метрах), см. табл. 8.

Цифры табл. 8 показывают, что при круговом овертании путей закруглений регулировка эксцентриситета не является обязательной, и вряд ли польза, ею приносимая, может окупить вызванное ею усложнение системы.

Таблица 8

v, км/час	40	60	80	100	120	140
Если имеется регулировка эксцентриситета	175	350	700	1100	1600	2100
Если ее нет	200	425	750	1160	1670	2180

Положение это остается справедливым и для обычных железнодорожных закруглений с небольшой переходной кривой. Это следовало бы, однако, пересмотреть, если бы для пугавых закруглений применялись закругления прогрессивной кривизны, вроде рассмотренных в конце главы II. Для достаточно длинных и достаточно плавных закруглений прогрессивной кривизны искусственная регуляция эксцентриситета жароскопа может дать значительное уменьшение допустимых радиусов кривизны.

§ 8. О влиянии масштаба сооружения на относительный вес жароскопа

Профессор Д. Перри в своей популярной книге «Springing Trains» затронул интересный вопрос о влиянии размеров вагонов на относительный вес жароскопа, указав без доказательства,* что, если для какого-либо вагона вес жароскопа приходится делать равным 10% от полного веса всего сооружения, то для вагона, все размеры которого вдесятеро больше, он должен быть всего лишь 4,1%. Важно высказать, можно ли это положение считать справедливым в полной мере.

Пусть имеются два вагона, и все размеры у одного в L раз больше, чем у второго. Ясно, что отношение весов вагонов есть куб модуля подобия:

$$P \propto L^3 \quad (33)$$

интенсивность спрашивающей пары $P L_0$ пропорциональна четвертой степени его:

$$P L_0 \propto L^4 \quad (34)$$

а моменты инерции вагонов — пятой степени

$$K \propto L^5 \quad (35)$$

Выше было найдено, что максимальное отклонение жароскопа под влиянием внезапно приложенной к вагону кренящей пары

$$\varphi_{\max} = \frac{M}{\sqrt{P L_0 \rho_0^2}}$$

Поэтому при заданном φ_{\max} величину $\sqrt{P L_0 \rho_0^2}$ надо выбирать по условию

$$\sqrt{P L_0 \rho_0^2} = \frac{M}{\varphi_{\max}} \quad (36)$$

Но величина пары M не может не зависеть от размеров вагона. Если наиболее опасной парой, кренящей вагон, является пара

от давления ветра, то M пропорционально, очевидно, третьей степени линейных размеров вагона

$$M \propto L^3 \quad (37)$$

Если же наиболее опасными являются моменты от центробежных сил на поворотах, то

$$M = \frac{P L_0 v^2}{g R}$$

и, следовательно, $M \propto L^3$ только в том случае, если радиусы закруглений при той же скорости будут увеличены пропорционально линейным размерам вагона: $R \propto L$. Если же $R = \text{const}$ и $v = \text{const}$, то

$$M \propto P L_0 \propto L^4 \quad (38)$$

Формулой (37) надо пользоваться в случае малой скорости движения; формулой (38) для скорых пассажирских поездов, если только для последних радиусы пугавых закруглений не делаются пропорциональными размерам вагонов.

В первом случае по формулам (36) и (37) получается

$$\sqrt{P L_0 \rho_0^2} \propto L^3 \quad (39a)$$

во втором

$$\sqrt{P L_0 \rho_0^2} \propto L^4 \quad (39b)$$

Импульс жароскопа по формуле (18) главы I следует выбирать по условию:

$$(C \Omega)^2 = K \rho_0^2 + \Delta P L + 6 \sqrt{K \rho_0^2 \Delta P L}$$

В правой части этого выражения главным членом является последний. Можно поэтому считать:

$$(C \Omega)^2 \approx \sqrt{K \rho_0^2 \Delta P L}$$

а, следовательно [см. формулы (35) и (39)]:

$$(C \Omega)^2 \propto L^2 \sqrt{L} \quad (40a)$$

или

$$(C \Omega)^2 \propto L^2 \sqrt{L} \quad (40b)$$

Смотря по тому, какой степени модуль L пропорциональна величина M .

Пусть I есть модуль подобия жароскопов. Ясно, что

$$\begin{cases} A \propto I, \\ C \propto I. \end{cases} \quad (41)$$

Импульс жароскопа нельзя, однако, считать пропорциональным пятой степени модуля подобия I , так как при увеличении

* См. «Springing Trains» by J. Perry, London, 1910, p. 149.

размер жирокопа его число оборотов надо понижать. Закон механического подобия дает, что, если плотность металла, из которого жирокоп сделан, а равно и допускаемые в нем напряжения заданы, то

$$\Omega \rightarrow l^{-1} \\ C \Omega = H, \quad (42)$$

и, следовательно,

С помощью формул (40), (41) и (42) легко видеть, что между модулем вибрации жирокопа I и вагона L существует либо соотношение

$$I \rightarrow L, \quad (43)$$

если наиболее опасной парой, кренящей вагон, является пара от давления ветра; либо же

$$I \rightarrow L^{0.8}, \quad (44)$$

если поезд движется с большой скоростью и радиусы путей закруглений не увеличиваются пропорционально размеру вагона.

Вес жирокопического устройства p растет не пропорционально кубу линейных размеров жирокопа, а несколько медленнее. Пропорционально кубу растет вес маховика, ось его и тому подобным частям, составляющим от общего веса устройства от 30 до 60%. Вес всех остальных частей, как-то: дисков, кожухов, шестерен, секторов и тому подобных частей устройства, растет приблизительно пропорционально R^2 , так как толщина этих частей не пропорциональна модулю I , а, грубо говоря, пропорциональна корню квадратному из I .

Можно поэтому считать

$$p \rightarrow R^2,$$

что для относительного веса жирокопического устройства дает:

$$\frac{p}{P} \rightarrow \frac{R^2}{L}.$$

Поэтому для умеренных скоростей движения, когда I определяется формулой (43),

$$p : P \rightarrow L^{-0.2}, \quad (45)$$

а для скорых пассажирских поездов

$$p : P \rightarrow L^{0.8 \cdot 0.2 - 0.80} = L^{0.20}, \quad (46)$$

Пусть, например, модуль увеличения размеров вагона есть 2:

$$L = 2.$$

Тогда по формуле (45):

$$p : P \rightarrow 0.80,$$

а по формуле (46):

$$p : P \rightarrow 1.15.$$

Если принять, что для меньшего вагона жирокопическое устройство весит 10%, то для вагона вдвое большего оно должно весить от 8 до 11,5% в зависимости от того, какая из двух пар, кренящих вагон, опаснее, — давление ли ветра или пара от сил инерции на поворотах.

Сказанное показывает, что положение проф. Д. Перри можно считать справедливым, если поезд движется медленно, или если радиусы путей закруглений выбираются для одной и той же скорости движения тем большими, чем больше вагон. Если же v и R суть величин заданные, и скорость поезда велика, то при увеличении размеров вагона относительный вес жирокопического устройства не уменьшается, а даже несколько увеличивается.

§ 9. О невыгоднейшем габарите вагона

В параграфе 5 главы II было указано, что эксцентриситет вагона, при сохранении его габаритных размеров, желательно делать возможно меньше. Интересно выяснить, как следует выбрать габарит вагона для уменьшения веса жирокопического устройства.

Пусть, например, требуется спроектировать товарный вагон определенного веса. По допускаемой нагрузке на колесо можно найти число колес n , следовательно, длину вагона. Зная же длину

вагона и его кубатуру, можно установить площадь поперечного сечения его F_0 . Площадь эту можно считать заданной.

Пусть H — высота, B — ширина того прямоугольника, который представляет поперечное сечение вагона, занятое грузами. Пусть a есть минимальное осуществимое отстояние его от оси рельса (см. рис. 10).

Пусть, наконец, массы распределены по площади прямоугольника более или менее равномерно. Спрашивается, как надо выбрать B , чтобы импульс жирокопа был минимальным?

Импульс жирокопа можно считать пропорциональным радиалу:

$$\sqrt{K p_0^2 A P L},$$

величину же $\sqrt{P L p_0^2}$ следует считать пропорциональной паре, кренящей вагон. Для товарного состава пара эта определяется давлением ветра. Поэтому

$$\sqrt{P L p_0^2} \rightarrow H (0.5 H + a). \quad (47)$$

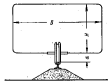


Рис. 10.

Момент инерции вагона, очевидно, пропорционален величине:

$$\frac{B^2 B}{12} + \frac{B^2 B}{12} + (a + 0,5 H)^2 H B,$$

но

$$H B = F_0 = \text{const},$$

поэтому

$$K + \left(\frac{B^2}{3} + a H + a^2 + \frac{F_0^2}{12 H^2} \right). \quad (48)$$

С помощью формул (47) и (48) можно видеть, что необходимым импульс жирокопии с высотой вагона связан зависимостью:

$$C \Omega + \sqrt{\left(\frac{B^2}{3} + a H + a^2 + \frac{F_0^2}{12 H^2} \right) (0,5 H^2 + a H)}. \quad (49)$$

Наименьшее H должно обращать правую часть выражения (49) в минимум. При всяком a и F_0 найти такое H не трудно. Пусть, например, как для проектируемого 480-тонного вагона:

$$a = 0,60 \text{ м},$$

$$F_0 = 20 \text{ м}^2.$$

В этом случае радикал в выражении (49) обращается в минимум при $H = 1,5 \text{ м}$, $B = 13,3 \text{ м}$. Минимум этот есть 2,42. По конструктивным соображениям столь малая высота вагона неприемлема. Приближим ее к более большой, т. е. сделаем $H = 3,0 \text{ м}$, $B = 6,6 \text{ м}$, придется увеличить импульс жирокопии на 12%.

Сделанное позволяет заключить, что вагоны надо делать возможно более призматичными.

§ 10. О горизонтальном давлении на рельс

При движении по прямолинейному участку пути колеса могут оказывать на рельс горизонтальное поперечное давление, вследствие: давления ветра; поперечного колебательного движения вагона; жирокопической реакции колес.

При движении по закруглениям к этим давлениям прибавляется еще давление от поступательного перемещения центра тяжести вагона, вращения вагона вокруг вертикальной оси, дополнительного жирокопического действия колес.

Реакции колес от давления ветра могут быть определены с помощью уравнений статки. Реакции от поперечных колебательных движений вагона можно также легко определить, если подсчитать силу инерции от поперечных колебаний центра тяжести вагона. Легко видеть, что сила эта есть

$$\frac{P L \theta''}{g}$$

и приложена к центру тяжести вагона, вызываемые этой силой реакции отдельных колес могут быть легко определены с помощью уравнений статки.

Вызываемая качкой вагона жирокопическая реакция колес, как показано подробно в статье И. В. Мешерского, выражается в появлении у каждого колеса момента

$$A' \omega' \theta' = A' \theta' \omega'^2,$$

стремящегося вывернуть колесо на рельс.

Пусть в каждой тележке по два колеса и пусть a — расстояние между их осями. Ясно, что благодаря своему жирокопическому действию колесо давит на рельс силой реборадами с усилием

$$2 A' \theta' \omega' (r a)^{-1}.$$

Зная колебания вагона, можно таким образом без особых затруднений подсчитать производимое им давление на рельс на протяжении прямолинейных участков пути.

При движении поезда по закруглению поступательное перемещение центра тяжести вагона вызывает появление центробежной силы

$$\frac{P v^2}{g R},$$

разлагающейся на отдельные колеса по правилам статки.

Момент инерции от вращения вагона вокруг его вертикальной оси очевидно есть:

$$K_0 \frac{d\omega}{dt} = K_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{v}{R} \right),$$

где K_0 — момент инерции от вращения вагона вокруг его вертикальной центральной оси. Вызываемое этим моментом давление отдельных колес легко определяется по правилам статки.

Дополнительное жирокопическое действие колес от вращения вагона вокруг вертикальной оси не оказывает непосредственного на рельс давления, влияя лишь на качку вагона. Влияние ее учитывается косвенно при определении усилий от θ'' и θ' .

Изложенное позволяет заключить, что для нахождения горизонтальных давлений колес на рельс надо к давлению, вычисленным в предположении, что вагон на своей оси не качается, прибавить прибавки давления от силы инерции

$$\frac{P L \theta''}{g}$$

и от вертикальных вращающих моментов

$$A' \omega' \theta'.$$

Сделать это в каждом частном случае не трудно. Надо лишь предварительно определить колебательное движение вагона.

Не оставшаяся на подробностях, отметим лишь, что численные подсчеты свидетельствуют о невозможности пренебрежения нутационным колебанием системы: несмотря на малость этого колебания его скорости, а в особенности ускорения достигают часто значений, много превосходящих соответствующие величине колебания прецессионного.

Заключение

Получившая реальное осуществление система П. П. Шмидова разрабатывалась первоначально экспериментальным путем. Это обычный ход большинства изобретений и ход не только естественный, но в особенно обидящий успех при условии правильного проведения индуктивного метода. Было бы, однако, целесообразно отвлечь те данные теоретического анализа, которые им могут быть даны.

Настоящая статья представляет собой попытку рассмотреть проблему в свете этого анализа.

Изложенные выше рассуждения позволяют думать, что изобретатель шел к поставленной цели, по-видимому, правильным путем. Конструкция его не содержит в своей идее чего либо органически несправильного и даже может рассматриваться как реальный успех. Надлежащей комбинацией различных элементов устройства можно, по-видимому, добиться вполне удовлетворительного действия стабилизатора.

Найти удовлетворяющую всем предъявляемым требованиям комбинацию элементов устройства не легко. Настоящая статья должна помочь конструктору в разрешении этой трудной задачи.

Вероятно, изложенные выше соображения помогут также более сознательно отнестись к обработке результатов представших опытов и испытаний. Если это будет так, то автор будет считать свою задачу выполненной.

О целесообразности самой идеи одорельсовой дороги здесь не говорилось ничего; данный вопрос может быть освещен лишь опытами и экономическими исследованиями, не входящими в программу настоящей статьи.

27. К ПРОЕКТУ ОДНОРЕЛЬСОВОГО ВАГОНА ДЛЯ 400 ПАССАЖИРОВ*

Проверка основных элементов гироскопического стабилизатора

Настоящая записка имеет целью численными выкладками показать, что основные элементы гироскопического устройства выбраны для проектируемого вагона в полном соответствии с основными размерами вагона и теми усилками, которые могут на него действовать. Прежде чем перейти к этим выкладкам, полезно напомнить те основные положения теории вопроса, на которых все численные подсчеты базируются. В соответствии с этим настоящая записка содержит:

1. Краткое изложение основных положений теории.
2. Подсчет основных элементов гироскопического стабилизатора пассажирского вагона.
3. Краткий подсчет тех же элементов для проектируемого товарного вагона в 480 т.

При изложении основных положений теории они будут приводиться без доказательств. Интересующиеся ими найдут их в статье «Теория гироскопического стабилизирования одорельсового вагона»**.

I

Основные движения

Основанием для изучения колебательных движений одорельсового вагона служат дифференциальные уравнения движения, написать которые можно так:

$$K \ddot{\theta} + M \dot{\theta} - P L \dot{\psi} + C_2 \Omega \cos \varphi \dot{\psi} = M, \\ \ddot{\psi} + \mu - \left(p l + \frac{C_2 \Omega \cos \varphi}{K} \right) \sin \varphi - C_2 \Omega \cos \varphi \dot{\theta} = m, \quad (1)$$

где θ — угол отклонения вагона;
 ψ — угол отклонения гироскопа;
 K — момент инерции вагона;

* Печатается впервые.

** Печатается в данном сборнике.

Π — пара сопряженная вагона;
 P — вес вагона;
 L — эксцентриситет вагона;
 C_0 — момент инерции махового колеса жирокопа;
 Ω — его угловая скорость;
 M — пара внешних сил, крещаящая вагон;
 A — момент инерции качающейся части жирокопа, относительно ось качания;
 μ — воздействие амортизатора;
 P — вес качающейся части жирокопа;
 I — ее эксцентриситет;
 v — скорость движения поезда;
 R — радиус кривизны горизонтальной траектории поезда, считая его большим нулю, когда поезд поворачивается в сторону вращения жирокопа;
 m — пара внешних сил, действующих на раму жирокопа.

В этих уравнениях, как и во всех дальнейших подсчетах единиц, приняты: для веса, μ ; для длины, M ; для времени, сек.

Пара Π , входящая в основное уравнение, может быть без всякого ущерба для общности исследования быть принята пропорциональной производной по времени от угла θ

$$\Pi = P\theta'.$$

Пара воздействия амортизатора для системы П. П. Шилова-ского выражается так*

$$\mu = -g \rho k [(y - y_0) \pm \Psi_0' (t - t_0)], \quad (2)$$

где ρ — радиус зубчатого сектора амортизатора;
 k — передаточное число зацепления его;
 g — усилие, которое надо приложить к зубчатой шестеренке амортизатора, для того чтобы уменьшить на I радиус угла ее поворота относительно ведущей оси (между этой осью и шестеренкой есть звездчатая муфта);
 Ψ_0' — угловая скорость, которую амортизатор сообщал бы жирокопу, если бы шестеренка его была жестко связана с ведущей ее осью ($k\Psi_0'$ очевидно, есть угловая скорость оси).

y_0 — угол отклонения жирокопа } в момент последнего
 t_0 — время } сцепления жирокопа с сектором.

Примечание. Верхний знак в выражении (2) при $\delta < 0$. Нижний знак в выражении (2) при $\delta > 0$.

Входящий в основное уравнение движения эксцентриситет жирокопа складывается обычно из двух частей: I_0 создается факти-

ческим расположением центра тяжести жирокопа; I_0 создается особыми пружинами или шквитами, причем

$$I = I_0 + I_1. \quad (3)$$

В дальнейшем будут еще приняты обозначения:

$$p I_0 = p I + \frac{C_0 \Omega \sin \theta}{R} v, \quad (4)$$

$$p I_1 = p I_0 + g \rho k, \quad (5)$$

принимая которые и полагая переменную величину $C_0 \Omega \cos \varphi$ равной некоторой постоянной

$$C \Omega = C_0 \Omega \cos 30^\circ = 0,86 C_0 \Omega,$$

можно основные дифференциальные уравнения (1) переписать в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} K\theta'' + P\theta - P L \theta + C \Omega \theta' &= M, \\ A \theta'' - p I_1 \theta - C \Omega \theta' &= m - g \rho k \varphi_0 \pm g \rho k \Psi_0' (t - t_0). \end{aligned} \right\} (6)$$

злопе удобным для нахождения общего интеграла.

Благодаря тому что во втором из этих уравнений функции, общий интеграл их нельзя представить в виде, удобном для вывода различных общих положений, и при решении уравнений (6) лучше всего ограничиться разбором различных частных случаев.

Главное колебание системы

Для исследования общего характера движения положим сначала правые части уравнений (6) равными нулю. Общий интеграл получаемых таким образом уравнений представляет сумму двух колебательных движений.

Одно из них более медленное, так называемое прецессионное, является обычно доминирующим и определяет собой предельные отклонения системы. Второе, более быстрое, интуитивное является обычно сопутствующим. Оно обычно весьма мало и при определении предельных отклонений системы неинтересно. Оба колебания можно себе представить наглядно, проведя из какой-либо неподвижной точки пространства линию, остающуюся все время параллельной мировому положению оси жирокопа. В обоих движениях воображаемая линия движется по некоторым коническим поверхностям, диаметральной плоскости которых соответствуют: большая — плоскости качания жирокопа (углом φ); меньшая же — плоскости качания вагона (углом θ). Угловая скорость прецессионного колебания

$$\Omega_0 = \frac{\sqrt{PL\Psi_0'}}{C \Omega_1}. \quad (7)$$

* См. формулу (20) и конец § 3, стр. 564—570.

* См. формулу (16), стр. 532.

где $C \Omega_1$ — приведенный импульс гироскопа,

$$C \Omega_1 = \sqrt{C^2 \Omega^2 - K^2 p_1^2} - A P L. \quad (8)$$

Период этого колебания

$$T_4 = 2\pi : \varphi_4 \quad (9)$$

отношение же осей соответствующего ему конуса

$$\varphi_{\max} : \theta_{\max} = \sqrt{P L : p_1 A}. \quad (9')$$

Движение это отличается некоторым недостатком энергии у системы, и растет поэтому по мере расхождения во времени у прецессионные пары III. Для затухания данного колебания, надо, следовательно, уменьшить недостаток энергии, подводя к ней энергию ланге. Амортизатор должен давать на раму гироскопа в сторону движения ее, а для этого необходимо иметь:

$$\mathcal{P}_2 > \mathcal{P}_{\max} = \mathcal{P}_{\max} \varphi_4 \quad (10)$$

Угловая скорость нутационного колебания

$$\dot{\varphi} = C \Omega_1 : \sqrt{K A}. \quad (11)$$

период же его

$$T_1 = 2\pi : \dot{\varphi}. \quad (12)$$

Энергия оно обладает почти исключительно в кинетической форме, и отдается, следовательно, некоторым ее избытком. От трений оно поэтому затухает. Если амортизатор будет подводить энергию к системе, то он может вызвать нарастание нутационного колебания. Необходимо ослабить его действие на это колебание.

Для последней цели в системе П. П. Шидловского следует:

1) не давать угловой скорости оси несвободной амортизатора больше, чем требуется выражением 10 (1), т. е. делать ее равной величине:

$$\dot{\varphi} \mathcal{P}_2 = \dot{\varphi} \mathcal{P}_{\max}. \quad (13)$$

2) делать время, потребное гироскопу на переход от сцепления с одним сектором к другому, хотя и малым по сравнению с периодом прецессионного колебания, но достаточно большим по сравнению с периодом колебания нутационного. Для данной цели приходится делать

$$T_4 : T_1 > 12 - 10, \quad (14)$$

$$T_4 : T_1 = \frac{C \Omega_1^2}{\sqrt{K p_1} A P L}. \quad (15)$$

Отсюда следует, что приведенный импульс гироскопа должен быть не менее, чем

$$(C \Omega_1)^2 > 10 \sqrt{K p_1} A P L. \quad (16)$$

Указанными только что мерами можно устранить вредное влияние амортизатора на нутационное колебание, и при выборе величин $\varphi g \dot{\varphi}$, т. е. интенсивности его действия, считаться с одним лишь прецессионным колебанием, подбирая ее так, чтобы колебание это затухало достаточно быстро.

О затухании свободных колебаний системы

Приведенная выше формула (9') показывает, что

$$\varphi_{\max} : \theta_{\max} > 1$$

рама гироскопа может перевернуться гораздо легче, чем загон. Наиболее опасным отклонением системы является отклонение φ , и, говоря о затухании колебаний, надо иметь в виду главным образом колебание, порожденное начальными отклонениями гироскопа.

Теория показывает, что если $M = m = 0$ и в начальный момент, когда гироскоп сцепляется с сектором, т. е. когда $\theta = 0$, начальное отклонение гироскопа есть φ_0 , то гироскоп выйдет от этого сектора при θ , вновь обращаясь к нулю, когда угол отклонения его становится равным величине φ_0 такой, что

$$\varphi_0 = \varphi_0 \left[1 - \frac{2p_1^2}{p_1^2} (1 - \gamma_1 \operatorname{ctg} \gamma_1) \right], \quad (17)$$

где

$$\operatorname{ctg} \gamma_1 = \frac{g g \dot{\varphi}}{p_1^2} \frac{1}{\varphi_0 \varphi_1}. \quad (18)$$

длительность же этой фазы движения

$$t_2 - t_1 = \frac{2\gamma_1}{\dot{\varphi}}, \quad (19)$$

Можно так подобрать величину $\varphi g \dot{\varphi}$, чтобы при $\varphi_0 = 30^\circ$ φ_2 было бы равно нулю, т. е. чтобы колебание, вызванное начальным отклонением 30° , затухало до нуля за время рассматриваемой стадии движения. Тогда колебания, вызванные начальным отклонением гироскопа в 30° , будут затухать всего лучше. Колебания же, вызванные меньшим и большим φ_0 , будут затухать несколько медленнее. Колебания, не превышающие значения $\varphi_0 = 30^\circ$, будут затухать не переходя через нуль, т. е. как бы аperiodически.

* См. формулу (57), стр. 575.

** См. формулу (25), стр. 574.

*** См. формулу (16), стр. 574.

* См. формулу (15), стр. 531.

** См. стр. 543.

*** См. формулу (16), стр. 532.

Если движение вызвано начальным отклонением вагона, т. е. если при $t = t_0 \neq 0$; $v_0 = 0$, то в движении следует различать две фазы; во время первой фазы крив вагона убывает до нуля, отклонение же жароскопа возрастает до своего максимума. Как показывает теория, длительность этой стадии движения

$$t_1 - t_0 = \frac{\sin \theta \frac{g^2}{P^2 L}}{g_0} \quad (20)$$

где

$$g^2 = \frac{g R k}{P_0} \frac{P_0^2 C Q}{P^2 L} \quad (21)$$

приобретаемое жароскопом к концу ее максимальное отклонение, может быть найдено по формуле

$$v_1 = g_0 \sqrt{\frac{P L}{P_0} \left(\sqrt{1 + 2 \frac{g^2}{k} - \frac{g^2}{k} \operatorname{arctg} \cos \frac{g}{g_0}} \right)} \quad (22)$$

Формула (22) может служить для определения максимального крена вагона, выражаемого жароскопом. Следует отметить, что выражение в фигурных скобках в формуле (22) при v_0 близком к 0,50, обычно близко к единице, будучи всегда несколько меньше ее. Обращаясь к величине на систему применяемых усилителей, следует различать три рода их:

- 1) влияние пар, кренящих жароскоп;
- 2) влияние таких пар, кренящих вагон, при которых жароскоп покидает сектор при нейтральном положении вагона;
- 3) влияние таких пар, кренящих вагон, при которых жароскоп расцепляется с сектором в вертикальном положении вагона.

Влияние пар, кренящих жароскоп

Крив жароскопа может оказаться приложенной креници на пара в двух случаях: когда поезд идет по уклону и при торможении. Аналитически выразить эту пару можно так:

$$m = P_0 \varphi + P_0 \frac{a}{g} \quad (23)$$

где a — ускорение поезда; g — ускорение силы тяжести.

Действуя статически, эта пара не изменяет среднего положения вагона и не вызывает колебаний системы, а лишь перемещает нейтральное положение жароскопа на угол

$$\varphi = \frac{m}{P_0} \quad (24)$$

будучи же приложен — неизменно, порождает еще колебания системы начальным отклонением жароскопа от этого среднего положения:

$$v_0 = + \frac{m}{P_0} \quad (25)$$

отклонение это выходит обычно весьма малым, в движении, им порожаемое, затухает, не переходя через нуль, так что формулой (24) определяется максимальное отклонение жароскопа, вызываемое парами m .

Влияние сил инерции, кренящих вагон на поворотах

Под влиянием этих сил к вагону оказывается приложенной пара

$$M = \frac{P L v^2}{g R} \quad (26)$$

которая, действуя статически, наклоняет вагон на угол

$$\theta = - \frac{P L v^2}{g P L} = - \frac{v^2}{g R} \quad (27)$$

не влияя на перемещение жароскопа и не вызывая колебаний системы. Происходит это потому, что жароскоп сам находится под действием данных сил и покидает один сектор, чтобы занять с другим, лишь тогда, когда вагон приходит в нейтральное положение, определяемое углом по выражению (27).

Появляясь внезапно, такая пара вызывает колебания вагона около среднего положения, определяемого формулой (27), вполне самостоятельные тем, которые происходят от начального отклонения вагона на угол

$$\theta = \frac{v^2}{g R} \quad (28)$$

Колебания эти затухают почти до нуля за время $t_1 - t_0$, определенное выражениями (19) и (20). Если длительность пребывания поезда на круговом закруглении превышает эту величину, то наибольшее отклонение жароскопа от прохождения поездом кривой может быть определено по формуле (22).

Нетрудно видеть, что длительность пребывания поезда на кривой связана с углом θ шворота пути зависимостью

$$\tau = \frac{\theta R}{v} \quad (29a)$$

Формулой (22) и выражением (26) можно пользоваться для определения наибольших отклонений жароскопа от прохождения кривой всегда, если

$$\theta > \frac{g}{R} (t_1 - t_0) = \theta_0 \quad (29)$$

* См. формулу (30), стр. 573.

** См. формулу (27), стр. 573.

*** См. формулу (31), стр. 573.

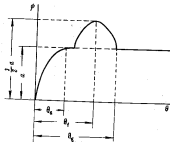
Подсчеты показывают, что такие же отклонения жirosкопа получаются, если

$$\theta = \theta_0 = \frac{v}{R} (t_2 - t_0); \quad (30)$$

что для закруглений, угол поворота ких несмалые θ_0 , можно для вычисления φ_{\max} умножить результат, даваемый формулой (22) на

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} \frac{\theta}{\theta_0} \right);$$

что наиболее неблагоприятной длиной закруглений следует при-



знать ту, при которой поезд остается на закруглении одну четверть периода прецессионного колебания после того, как жirosкоп достиг максимального своего отклонения от вступления на кривую; для таких наиболее неблагоприятных случаев

$$\theta = \theta_1 = \frac{v}{R} \left(\frac{1}{4} T_1 + t_1 - t_0 \right), \quad (31)$$

а максимальное отклонение жirosкопа приблизительно в 1,52 раза больше вычисленного по формуле (22) и получается тогда, когда поезд, пройдя кривую, вновь движется по прямолинейному участку пути.

Графическая связь между длительностью пребывания поезда на кривой заданного радиуса и максимальным отклонением жirosкопа может быть представлена кривой (см. рисунок), где и вычисляется по формуле (22).

Действие ветра на вагон

Если вагон выводится под действием бокового ветра, то он испытывает кренящий момент

$$M = B \lambda v; \quad (32)$$

где v — давление ветра, $сг/м^2$;

B — боковая проекция вагона, $м^2$;

λ — высота ее центра тяжести над осью рельса.

Момент этот не меняет того положения вагона, при котором жirosкоп расцепляется с сектором, занимая нейтральное положение вагона на угол

$$\theta = - \frac{M}{F L};$$

Благодаря этому система ни в каком положении не может, если не принять соответствующих мер, быть в положении покоев, и даже, если пара M действует статически, обязательно должна совершать некоторые колебания. Если пара M действует спонтанно, то колебания в конце концов принимают установившийся характер. Теория показывает, что в установившемся движении угол φ_0 при котором вагон выпрямляется, а жirosкоп расцепляется с сектором, связан с величиной пары M уравнением:

$$\varphi_0 = \frac{g \lambda}{R v} \frac{v_0}{v_0} \lambda_0; \quad (33)$$

$$M = \frac{g \lambda}{R v} \frac{v_0}{v_0} \sqrt{F L P_1} v; \quad (34)$$

$$\operatorname{tg} \lambda_0 = \frac{\lambda_0}{1 - \varphi}; \quad (35)$$

максимальное же отклонение жirosкопа может быть вычислено по формуле

$$\varphi_{\max} = \varphi_0 \left(1 + \frac{P_1}{P_2} \Phi_0 \right); \quad (36)$$

где

$$\Phi_0 = \frac{1}{\lambda_0} \left[\operatorname{tg} \left(\operatorname{arc} \cos \frac{\sin \lambda_0}{\lambda_0} \right) - \operatorname{arc} \cos \frac{\sin \lambda_0}{\lambda_0} \right]; \quad (37)$$

Для уничтожения этих колебаний в системе П. П. Шваловского служит автомат, производящий на цапфы рамы жirosкопа осевые давления и тем изменяющий положение вагона, при котором жirosкоп покидает секторы амортизатора. При идеальном действии

* См. формулу (8) стр. 580.

** См. формулу (9) стр. 580.

*** См. формулу (11) стр. 581.

**** См. формулу (14) стр. 582.

***** См. формулу (18) стр. 583.

автомата момент от давления ветра лишь менял бы нейтральное положение вагона, не вызывая никаких колебаний.

Осторожнее считать, что некоторая доля данного момента не будет уравновешена амортизатором. В дальнейшем расчете она будет принята равной 10%. Такое же влияние, как ветер, на вагон оказывает жарокопическое действие колес, дающее момент

$$M = (\sum A' \varphi) \frac{r}{R}$$

и эксцентричное расположение грузов, дающее момент

$$M = \sum (Q \delta),$$

где A' — моменты вращений колес;

φ — их угловая скорость;

Q — вес эксцентрично расположенных грузов;

δ — их расстояние от диаметра вращающегося вагона.

Посмотрим, что дают эти формулы для проектируемых вагонов-гигантов.

II

Размеры проектируемого вагона для 400 пассажиров характеризуются следующими цифрами (см. приложение 1): вес вагона нормальный $P = 335$ т; эксцентриситет его $L = 2,11$ м; интенсивность опрессовки вагона парой $P L = 710$ т·м; момент инерции относительно оси качения $K = 316$ т·м².

Проектируемое для него жарокопическое устройство (общий вес 40 т) по сделанным подсчетам (смотри таблица его приложения, см. приложение 2) обладает следующими характеристиками: вес качающейся части $p = 28,75$ т; естественный эксцентриситет ее $l_0 = 0,15$ м; создаваемый пневматический дополнительный эксцентриситет $l_1 = 1,35$ м; момент инерции махового колеса $I_0 = 2,4$ т·м²; момент инерции качающейся части $A = 2,2$ т·м²; число оборотов жарокопа в минуту $N = 1500$; радиус зубчатого сектора $q = 1,82$ м; передаточное число амортизатора $k = 22$; суммарная упругость двух муфт его $g = 0,235$ м; число оборотов шестерен амортизатора 105; угловая скорость их $k \varphi_0 = 11 \frac{1}{\text{сек}}$.

На основании этих цифр можно принимать за импульс жарокопа

$$C \varphi = 0,86 \cdot 2,4 \cdot 137 = 325,$$

а за приведенный импульс [см. формулу (8)]

$$C \varphi_1 = \sqrt{325^2 - 316 \cdot 52,4 - 2,2 \cdot 710} = 293,$$

ибо в рассматриваемом случае

$$p l_1 = 28,75(1,35 + 0,15) + 22 \cdot 1,82 \cdot 0,235 = 52,4.$$

Угловая скорость прещескованного колебания согласно формуле (7) есть

$$\varphi_0 = \sqrt{710 \cdot 52,4} = 293 = 0,66,$$

период его

$$T_0 = 2 \pi : 0,66 = 9,5 \text{ сек.}$$

Угловая скорость нутационного колебания по формуле (11) получается

$$\varphi_0 = 293 : \sqrt{316 \cdot 9,5} = 11,2,$$

период его

$$T_1 = 2 \pi : 11,2 = 0,57 \text{ сек.}$$

Отношение периодов главных колебаний

$$T_0 : T_1 = 16,7,$$

вследствие чего число оборотов жарокопа следует считать достаточным. Необходимая угловая скорость шестеренок амортизатора по формуле (13) получается

$$k \varphi_0 = 22 \cdot 0,66 \cdot 0,75 = 10,9 \frac{1}{\text{сек}},$$

что соответствует принятому числу оборотов ш.к.

Принятое значение интенсивности воздействия амортизатора

$$g q k = 22 \cdot 1,82 \cdot 0,235 = 9,4$$

обеспечивает удовлетворительное затухание свободных колебаний.

Действительно, подставив в формулы (17), (18) и (19)

$$p l_1 = 28,75 \cdot 1,5 = 43;$$

$$p l_1 = 43 + 9,4 = 52,4; \quad I_0 = 1,82;$$

$$\varphi_0^2 = \varphi_0 = 0,75,$$

можно видеть, что различными значениями начального отклонения жарокопа φ_0 соответствуют следующие значения его, получающиеся через промежуток времени $t_1 - t_0$:

$$\varphi_1 = 0,75 \quad 0,50 \quad 0,25 \quad 0,10;$$

$$\varphi_2 = -0,11 \quad 0,01 \quad 0,11 \quad 0,083;$$

$$t_2 - t_1 = 2 \cdot 2,1 \text{ сек.} \quad 2 \cdot 1,9 \quad 2 \cdot 1,5 \quad 2 \cdot 0,83 \text{ сек.}$$

Для определения отклонений жарокопа, вызываемых начальным креном вагона, можно воспользоваться формулами (21) и (22). В рассматриваемом случае

$$\varphi^0 = \frac{0,4}{52,4} \cdot \frac{0,5 \cdot 293}{710} = 0,037.$$

Формулы (22) и (20) для различных значений начального крена вагона θ_0 дают

$$\theta_0 = 0,20 \quad 0,15 \quad 0,10 \quad 0,05;$$

$$\theta^* : \theta_0 = 0,185 \quad 0,247 \quad 0,37 \quad 0,74;$$

$$\left(\sqrt{1 + 2 \frac{\theta^*}{\theta_0} - \frac{\theta^*}{\theta_0} \arccos \frac{\theta^*}{\theta_0 + \theta_0^*}} \right) = 0,91 \quad 0,88 \quad 0,84 \quad 0,77;$$

$$\eta_1 = 0,67 \quad 0,49 \quad 0,31 \quad 0,14.$$

Указанные отклонения жirosкопа, как показывает формула (20), достигают через $t_1 - t_0$ секунд с момента начала движения, причем в зависимости от θ_0 время это получается:

$$\theta_0 = 0,20 \quad 0,15 \quad 0,10 \quad 0,05;$$

$$t_1 - t_0 = 2,15 \text{ сек.} \quad 2,1 \quad 1,97 \quad 1,65 \text{ сек.}$$

Обращаясь к определению максимальных отклонений жirosкопа от действия различных кренящих усилий, можно видеть, что максимальное отклонение жirosкопа от действия усилий кренящих его, есть [см. формулы (23) и (24)]

$$\gamma_{\max} = \left(\frac{\theta_0}{t_1} + \frac{\alpha}{\beta} \frac{t_0}{t_1} \right) 57,3^\circ.$$

Принимая во внимание, что уклон пути не будет превышать 10:1000, а ускорение поезда 1 м/сек², можно полагать отклонение жirosкопа не более чем

$$\gamma_{\max} = \frac{0,01 \cdot 1,35 + 0,1 \cdot 1,60}{1,82} 57,3^\circ = 0,9^\circ. \quad (A)$$

Для определения величины пар. кренящих вагонов на прямых участках пути, принимаем:

S — площадь боковой проекции вагона	300 м ² ;
π — давление ветра максимальное	150 кг/м ² ;
k — повышение центра тяжести боковой проекции вагона	3,4 м ;
A' — момент инерции для колес моторных	0,68 м ² сек ² ;
A'' — для колес беговых	0,19 м ² сек ² ;
ω' — угловая скорость моторных колес при скорости поезда 150 км/час	$42 \frac{1}{\text{сек}}$;
ω'' — то же для беговых	$56 \frac{1}{\text{сек}}$;
Q — величина эксцентрично расположенного груза, принимаемая его равным весу пассажиров верхнего этажа	13,5 м ;
b — его отстояние от диаметральной плоскости вагона	3,0 м.

На прямых участках пути момент, кренящий вагон, может достигать

$$M = 45 \cdot 3,4 + 13,5 \cdot 3,0 = 193,5 \text{ м.}$$

Считая, что 10% его могут остаться автоматом, действующим на шпалы рамы жirosкопа, неустранинным можно считать момент, возбуждающий установившееся колебательное движение системы на прямых участках пути, равный 19,35 м. На кривых к моменту M может еще прибавиться действующий таким же образом момент.

$$\left(\sum A' \omega' \right) \frac{v}{R} = (428 \cdot 0,48 + 8,56 \cdot 0,19) \frac{42,5}{1500} = 6,8 \text{ м.}$$

представляющий прибавку пренебрежимо малую. Округлая, будем считать момент, вызывающий перманентные колебания системы, равным 20 м:

$$M = 20 \text{ м.}$$

Подставляя это в формулу (34), находим

$$v = \frac{20}{\sqrt{2L - R_1}} \frac{R_1 \eta_1}{R_0 + R_1} = \frac{20 \cdot 52,4 \cdot 0,66}{194 \cdot 0,4 + 0,5} = 0,76,$$

что по подстановке в уравнение (35) дает:

$$\lambda_2 = 1,41$$

и, следовательно [см. формулу (33)],

$$\Phi_2 = \frac{6,4}{42} \cdot \frac{0,8}{0,66} \cdot 1,41 = 0,235.$$

Для величины Φ_1 с помощью выражения (37) легко получить

$$\Phi_1 = 0,21,$$

и, следовательно, максимальное отклонение жirosкопа от действия ветра и эксцентричного груза

$$\gamma_{\max} = 0,235 \left(1 + \frac{43}{62,4} \cdot 0,21 \right) = 0,275 = 16^\circ. \quad (B)$$

На кривых участках пути к максимальному отклонению жirosкопа, определяемому суммой выражений (A) и (B), надо прибавить отклонение от прохождения кривой.

Для достаточно длинных круговых закруглений, очерченных радиусом $R = 1500$ м и проходящих со скоростью $v = 42,5$ м/сек $= 153$ км/час, можно это отклонение жirosкопа получить по формулам (28), (21) и (22), которые дают:

$$\theta = \frac{42,5^2}{15 \cdot 1000} = 0,118;$$

$$\theta^* : \theta_0 = 0,31;$$

$$\eta_1 = \theta_0 \sqrt{\frac{R}{R_0}} = 0,86.$$

Величину R_1 на кривой надо принимать равной

$$R_1 = 52,4 - C \frac{v}{R} = 52,4 - 293 \frac{42}{1500} = 44,2$$

и, следовательно,

$$\varphi_1 = 0,118 \sqrt{\frac{739}{24,2}} \cdot 0,85 = 0,41 = 24^\circ. \quad (B)$$

Складывая величины, даваемые формулами (A), (B) и (B), можно видеть, что

$$\varphi_{\max} = 1^\circ + 16^\circ + 24^\circ = 41^\circ$$

же превышает опасного 45° . Можно полагать, что длинные закругления очерчиваются радиусом $R = 1500$ м. Закругления можно считать длинными, если (см. формулу (29)) поезд на них поворачивает на угол

$$\theta_0 = \frac{v}{R} (t_3 - t_2) = 0,028 (t_3 - t_2).$$

Но при $\theta = \theta_0 = 0,31$, как видно из приведенных выше цифр,

$$t_1 - t_2 = 2,0 \text{ сек.},$$

а при $\varphi = 0,41$

$$t_3 - t_2 \approx 2 \cdot 1,75 = 3,5 \text{ сек.}$$

Следовательно,

$$\theta = 0,028 \cdot 5,5 = 0,15 = 9^\circ.$$

Наиболее неблагоприятными закруглениями являются те, при которых поезд поворачивается на угол

$$\theta = 0,028 \left(2,0 + \frac{9,5}{4} \right) = 0,12 = 7^\circ;$$

такие закругления надо очерчивать радиусом приблизительно $1,5 \cdot 1500 = 2250$ м.

Закругления, на которых поезд остается лишь 2,0 сек., т. е. на которых он поворачивает на угол, меньший

$$\theta_0 = 0,028 \cdot 2 = 0,056 = 3,2^\circ,$$

могут быть очерчены радиусами < 1500 м.

При скоростях движения машины, чем 153 км/час, радиусы закруглений могут быть приняты в ($\theta = 42^\circ$ раз меньше; т. е. можно брать для скорости $v = 120$ км/час, принимать $R = 900$ м. При скорости же до 90 км/час радиус закругления может быть 550 м. Наибольший крен вагона не будет превышать на поворотах величины:

$$\theta = \frac{v^2}{gR} + \frac{193,5 + 4,8}{710} = 0,118 + 0,282 = 0,40 = 23^\circ.$$

Крен складается из следующих частей:
от ветра

$$\theta_1 = \frac{45 \cdot 3,6}{710} = 0,215 = 12,5^\circ;$$

от эксцентричного расположения грузов

$$\theta_2 = \frac{13,5 \cdot 3,0}{710} = 0,057 = 3,3^\circ;$$

от нераскопленного действия колес на поворотах

$$\theta_3 = 6,8 : 710 = 0,010 = 0,6^\circ;$$

от сил инерции на поворотах

$$\theta_4 = 0,118 = 6,7^\circ.$$

Крен вагона на прямых участках пути не будет превышать 16° .

III

Нагрузка проектируемого товарного вагона состоит из следующих основных статей:

	Вес, м	Плечо, м	Момент, мм
2 основных балки	17	1,1	18,7
2 балки-рапы	17	1,9	32,3
4 уголка 4 колеса	64	1,1	70,4
Жерновки	39	2,3	89,0
Ферма	12	3,1	37,2
Корпус	24	3,4	81,5
Личный ящик	15	0,4	6,0
Груз	399	2,1	838,0
Всего	479	1,96	944,0

Полный вес вагона

$$P = 479 \text{ м.}$$

Интенсивность опрокидывающей пары

$$PL = 944 \text{ мм.}$$

Момент инерции вагона

$$K = \frac{P}{g,81} \left[1,96^2 + \frac{1}{12} (3^2 + 7^2) \right] = 425 \text{ мм сек}^2.$$

Скорость вагона наибольшая 50,4 км/час $v = 14$ м/сек.

Предельный радиус поворота закруглений $R = 600$ м.

Момент инерции каждого из 16 колес $A' = 0,19 \text{ мм сек}^2$.

Угловая скорость их $\theta' = 18,7 \frac{1}{\text{сек.}}$

Суммарный момент их $\sum A' \theta' = 16 \cdot 0,19 \cdot 18,7 = 57 \text{ мм сек.}$

Площадь боковой поверхности вагона $S = 162 \text{ м}^2$.

Возвышение ее центра тяжести над осью

$$h = 2,4 \text{ м.}$$

Наибольшее давление ветра $a = 150 \text{ кг/м}^2$.

Крен вагона от центробежных сил

на повороте

$$\theta_0 = \frac{v^2}{gR} = \frac{14^2}{9800} = 0,0228;$$

от гироскопического действия колес

$$\theta_1 = \frac{57 \pi}{r L R} = \frac{57 \cdot 34}{344 \cdot 100} = 0,0013;$$

от ветра

$$\theta_2 = \frac{5 \pi k}{1000 r L} = \frac{38,8}{941} = 0,0020.$$

Наибольший крен на прямом пути

$$\theta_3 = 3,5^\circ;$$

на поворотах $\theta_4 + \theta_1 + \theta_2 = 5,5^\circ$.

Для стабилизации проектируется гироскопическое устройство общего веса 30 кг, при массе качающейся части $p = 22$ кг.

Радиус маховика 1,25 м.

Вес качающейся части 17 кг.

Число оборотов в минуту 1700.

Момент инерции махового колеса для этого

гироскопа можно принимать $C_2 = 1,42$ тмкс².

Момент инерции качающейся части $A = 1,30$ тмкс².

При угловой скорости $\Omega = 178 \frac{1}{\text{сек}}$.

Импульс гироскопа $C \Omega = 218$ тмкс.

Эксцентриситет предполагается (в мм): естественный $l_0 = 0,15$;

искусственный $l_1 = 0,60$; общий $l = 0,75$.

Интенсивность опрокидывающей пары при движении по прямолинейному пути

$$p l = 0,75 \cdot 22 = 16,5 \text{ тм},$$

при движении же по закруглениям:

$$p l_2 = p l - C \Omega \frac{v}{R} = 16,5 - 218 \cdot 0,0238 = 11,4 \text{ тм}.$$

Интенсивность воздействия амортизатора предположено принять:

$$q g k = 0,22 p l = 3,6 \text{ тм}.$$

Приведенный эксцентриситет при движении по закруглениям

$$p l_1 = 11,4 + 3,6 = 15,0 \text{ тм}.$$

Приведенный импульс гироскопа можно считать равным

$$C \Omega_1 = \sqrt{218^2 - 425 \cdot 15} = 1,5 \cdot 944 = 200 \text{ тмкс}.$$

Импульс этого вполне достаточно, так как отклонение периода главных колебаний, им обеспечиваемое, есть

$$(C \Omega_1)^2 : \sqrt{k p l_1} : A p L = 40000 : 2780 = 14,4.$$

Угловая скорость прерывистого колебания

$$\Omega_2 = \frac{\sqrt{p l_1 p l_1}}{C \Omega_1} = 0,60 \text{ 1/сек}.$$

Период его, следовательно, будет

$$T_2 = 10,5 \text{ сек}.$$

Характеристику амортизатора Ψ_2^0 предполагается сделать

$$\Psi_2^0 = 0,75 \theta_3 = 0,45 \text{ 1/сек}.$$

что для величины θ^0 даст

$$\theta^0 = \frac{q g k 0,75}{\sqrt{p l_1 p l_1}} = \frac{2,7}{37,8} = 0,072.$$

Крен вагона

$$\theta_5 = 0,0328.$$

Порождаемый неслучайным возмущением поезда на круговое закругление, порождает максимальное отклонение гироскопа

$$\varphi_2 = \theta_5 \sqrt{\frac{p l_1}{p l_2} \left(\sqrt{1 + 2 \frac{p^2}{\theta_5^2} - \frac{p^2}{\theta_5^2} \sin^2 \frac{\theta_5}{\theta_5 + p^2}} \right)} = 0,0328 \cdot 8 \cdot 0,64 = 0,115 = 6,6^\circ.$$

Пара от действия ветра может достигать, как выше было принято, 58,3 мм, пара же от гироскопического действия колес 1,3 мм. Считаю, что вагонет, ускоряющий их предсе влияние, действует с погрешностью 10%, можно считать, что пара, вызывающая перманентные колебания системы,

$$M = 6 \text{ мм}.$$

Соответствующий этой паре аргумент ν есть

$$\nu = \frac{g}{\sqrt{p l_1 p l_2}} \frac{p l_1 \theta_5}{q g k \Psi_2^0} = \frac{6}{120} \frac{15}{3,6 \cdot 0,75} = 0,28.$$

этой величине аргумента ν соответствуют:

$$\lambda_2 = 0,90; \quad \Phi_1 = 0,05.$$

Поэтому

$$\varphi_0 = \frac{3,6}{15,0} \cdot 0,75 \cdot 0,90 = 0,16,$$

а максимальное отклонение гироскопа от действия ветра:

$$\varphi_{\text{max}} = \varphi_0 \left(1 + \frac{11,4}{15,0} \cdot 0,05 \right) = 0,17 = 10^\circ.$$

Отклонение гироскопа от действия пар, крепящих его, не превышает 1°. Суммарное отклонение гироскопа не должно превышать для рассматриваемого вагона величину

$$\varphi = 1^\circ + 6,6^\circ + 10^\circ = 17,6^\circ.$$

Подсчет основных элементов пассажирского вагона

Приложение I

И	I		II		III		IV		V		VI		VII		VIII
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б	
Металлический стальной корпус	Стальная конструкция	24	4,5	136,0	566	8,5	1,2	1,8	1,8	9,7	271	1,2	1,8	1,8	271
	Формы	10	4,2	47,8	282	1,3	1,3	1,3	1,3	1,6	50	1,3	1,3	1,3	50
	Головки болты	15	1,1	16,5	18	1,2	0,3	0,3	0,3	1,6	34	1,2	0,3	0,3	34
	Валы	10	1,1	11,0	12	0,6	0,6	0,6	0,6	0,8	12	0,6	0,6	0,6	12
	Талажки с колесами	108	1,3	140,4	131	0,5	0,5	0,5	0,5	1,0	158	0,5	0,5	0,5	158
	Железные	40	2,3	92,0	21,3	2,5	2,5	2,5	2,5	5,0	209	2,5	2,5	2,5	209
	Нержавеющие	15	0,4	6,0	7,2	4,0	0	0	0	4,0	50	4,0	0	0	50
	Деревянные обшивочные	20	2,2	44,0	10,2	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	20	1,0	1,0	1,0	20
	Обшивочные панелей стенок	6	1,6	9,6	12	4,0	0,5	0,5	0,5	4,5	27	4,0	0,5	0,5	27
	Панель стенок	8	4,4	35,2	15,2	4,0	4,0	4,0	4,0	4,5	36	4,0	4,0	4,0	36
	Крыша вагона	4,5	0,9	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	4,5	18	4,5	4,5	4,5	18
	Крыша вагона	8,0	3,7	30,4	7,6	3,0	3,0	3,0	3,0	3,0	22	3,0	3,0	3,0	22
	Болты	4,0	3,0	12,0	36	1,0	0,5	0,5	0,5	0,5	2	1,0	0,5	0,5	2
Пассажирские сиденья	26,5	1,8	51,3	160	4,0	0,5	0,5	0,5	4,3	103	4,0	0,5	0,5	103	
Пассажирские сиденья	13,5	4,5	60,8	273	4,0	0,5	0,5	0,5	4,3	103	4,0	0,5	0,5	103	
Всего	335	2,11	709,6	2696	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	

Вес вагона $P = 335$ т. $PE = 710$ км.Модуль инерции $K = 2036 + 1083 = 3,81$ $= 316$ секунд.

Подсчет элементов жаровника (см. таблицу)

Приложение II

г	а		б		в		г		д		е		ж	
	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б	а	б
Полный вес котельной части	10,02	0,225	2,26	1,49	15,2	0,115	0,115	1,15	0,115	0,115	0,115	0,115	0,115	0,115
	3,28	0,25	0,65	0,91	2,1	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25
	3,27	—	—	—	1,10	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17	0,17
	1,23	—	—	—	3,80	0,52	0,52	0,52	0,52	0,52	0,52	0,52	0,52	0,52
	0,23	0,71	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$P_1 = 21,21$	$P_2 = 4,64$	$D_1 = 4,64$	$D_2 = 23,0$	$C_1 = 23,0$	$C_2 = 23,0$	$A_1 = 5,05$	$A_2 = 5,05$	$A_3 = 5,05$	$A_4 = 5,05$	$A_5 = 5,05$	$A_6 = 5,05$	$A_7 = 5,05$	$A_8 = 5,05$	$A_9 = 5,05$
Котельная часть	2,02	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	0,88	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	0,24	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	0,14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	0,14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	0,14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
$P_1 = 2,11$	$P_2 = 1,19$	$D_1 = 1,19$	$D_2 = 2,11$	$C_1 = 2,11$	$C_2 = 2,11$	$A_1 = 2,11$	$A_2 = 2,11$	$A_3 = 2,11$	$A_4 = 2,11$	$A_5 = 2,11$	$A_6 = 2,11$	$A_7 = 2,11$	$A_8 = 2,11$	$A_9 = 2,11$

Полный вес котельной части $P = P_1 + P_2 = 28,74$ т.Смодуль инерции $K = 0,51 + 0,19 = 0,15$ т.Модуль инерции котельной части относительно оси фигуры $C_1 = C_2 = 2,11$ м.Модуль инерции котельной части относительно оси вагона $A = \frac{0,5C_1 + D_1 + D_2}{g} = 2,2$ м.

Предное крыло ветра может быть устранено, если жарской будет снабжен приспособлением, не допускающим его сцепления с тем сектором, сцепившимся с которым он стал бы испытывать усилие, направленное навстречу его движению. По-видимому, нет никаких препятствий к осуществлению такого приспособления. Если оно будет осуществлено, то вертикальные колебания от действия ветра будут устранены, и колебания, вызываемые действием жарской ветра, будут закрутить слопы не хорошо, как и те, которые возмущаются от ветряного повода на зрелище. Так как во действительности максимальное отклонение жарской в случае внезапного ветра движется, не будучи сцеплен с приспособленным сектором, то максимальное его отклонение от вертикали равнозначной к нему пары от ветра

$$v_{max} = M : \sqrt{PL - p_0^2}$$

Допуская $v_{max} = 0,75$ и принимая для пассажирского вагона $PL = 710$, $p_0^2 = 43$, очевидно, что вагон может выдержать внезапно приложенной к нему ветряной момент

$$M = 0,75 \sqrt{710 - 43} = 120 \text{ тм.}$$

Крепящая пара на высоте от сил жарской жары

$$M_2 = \frac{v^2 PL}{gR} = PL v_2 = 0,118 \cdot 710 = 84 \text{ тм;}$$

от жарскопечного действия колес

$$M_2 = 6,3 \text{ тм.}$$

Вместе с этим моментом может быть внезапно приложен безопасно для системы момент от ветра

$$M_2 = 120 - 84 - 7 = 39 \text{ тм.}$$

Момент этот содействуется движением ветра

$$n = \frac{39}{S \cdot 3,4} \cdot 1000 = 28 \text{ кг/м}^2.$$

Таким образом пассажирский вагон может выдержать при ходе 155 км/час внезапное наступление на круговое закручивание рождеством 1500 м при одностороннем внезапном жарке ветра в 28 кг/м², что свидетельствует о достаточной устойчивости системы.

Тот же вагон может выдержать внезапную нагрузку парой

$$M = 0,75 \sqrt{940 - 11,4} = 78 \text{ тм.}$$

Момент крепящей пары на высоте от сил жарской жары

$$M_2 = 0,0328 \cdot 940 = 31 \text{ тм;}$$

от жарскопечного действия колес

$$M_2 = 1,3 \text{ тм.}$$

Момент от ветра, который может быть к поезду внезапно приложен при наступлении его на жарую, т. е. в самый неблагоприятный момент,

$$M_2 = 78 - 31 - 33 = 45 \text{ тм}$$

и соответствует внезапной нагрузке паром силой

$$n = \frac{M_2}{S \cdot h} \cdot 1000 = \frac{45}{162 \cdot 24} \cdot 1000 = 115 \text{ кг/м}^2.$$

т. е. движению ветра 115 кг/м², что вполне достаточно.

Если бы эти условия были применены к выделенным слопам теплопаркета, то некоторым увеличением количества жарской жары можно было удовлетворить и этим предельным заданием.

РАЗДЕЛ IV

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА КОРАБЕЛЬНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

**28. ЭЛЕМЕНТАРНОЕ РАССМОТРЕНИЕ ВОПРОСА
ОБ ИЗГИБЕ КОРАБЛЯ СИЛОЙ ПОДВОДНОГО ВЗРЫВА,
ПРИЛОЖЕННОЙ К ЕГО КРАЙНЕЙ НОСОВОЙ ОКОНЕЧНОСТИ ***

При анализе вторичных искривлений корпусов кораблей от действия подводных взрывов в общем выражении для интенсивности поперечной нагрузки как функции координаты по длине корабля, не замечали того, что уравнения равновесия:

$$\int q dz = 0, \quad (1)$$

$$\int z q dz = 0, \quad (2)$$

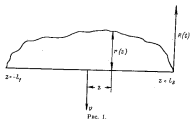
где интегрирование распространяется на всю длину корабля, справедливы лишь для той стадии его движения, когда сила, вызвавшая его колебания, оказав свое воздействие, исчезла. Для начальной стадии движения корабля, во время которой сила подводного взрыва на него еще действует, уравнения (1) и (2) вывести нельзя, ибо равнодействующая сил инерции корабля, сил сопротивления воды его движению, а равно и изменение сил поддержания, т. е. равнодействующая всех сил, входящих в общее выражение для q , в эту первую стадию движения нулю равной быть не может: равнодействующей этой уравновешивается равнодействующая подводного взрыва, а она в первую стадию движения корабля нулю не равна.

Если в качестве самого грубого приближения к истине принять, что во время первой стадии движения корпус корабля не изгибается, а перемещается как твердое целое, а, кроме того, допустить, что благодаря кратковременному действию подводного взрыва корпус корабля успевает к концу действия возмущающей силы накопить лишь скорость соответствующего поступательного и вращательного движений, но не успевает переместиться в пространстве настолько, чтобы изменение сил поддержания могло заметно отразиться на его движении в течение рассматриваемой первой стадии его, то, естественно будет признать, что в течение первой стадии его движения приложенная к корпусу корабля сила подводного взрыва уравновешивается только силами инер-

* Печатается впервые.

ции масс, участвующих в движении корабля, и силами сопротивления заборной воды.

Допустим, что обе силы распределены по длине корабля по одному и тому же закону, можно при определении изгибающих моментов, вызываемых действием на корабль силы подводного взрыва, не делать между силами инерции корабля и силами сопротивления воды его движение разлачивать и, следовательно, вычислять для первой стадии движения, пока возмущающая движущая корабля сила не исчезла, величину изгибающих моментов в корпусе корабля в предположении, что приложенная к кораблю реакция подводного взрыва уравновешивается окончательно



лишь силами инерции масс корабля, участвующих в его движении как твердого целого. Легко показать, что изгибающие моменты, вычисленные в этом предположении, не будут равны нулю. Действительно, пусть (см. рис. 1):

- $q(x)$ — относительный к единице длины корабля вес всех грузов, участвующих в его движении;
- g — ускорение силы тяжести;
- z — направленное вниз вертикальное перемещение корабля в рассматриваемом его месте;
- ζ — вертикальное, по направлению сверху вниз, перемещение центра инерции всех грузов, участвующих в движении корабля;
- θ — угол дифферента на нос;
- $B(t)$ — приложенная к крайней носовой оконечности корабля реакция подводного взрыва;
- l_1 — расстояние от центра инерции всей рассматриваемой системы до крайней носовой оконечности корабля;
- l_2 — расстояние от зенита до крайней носовой оконечности корабля;

g — интенсивность поперечной загрузки корабля силами инерции масс, участвующих в его движении.

Тогда для завершения можно будет написать

$$v = \zeta + z\theta,$$

для интенсивности же силы вытесня

$$q = \frac{r(t)}{g} \ddot{v} = \frac{r(t)}{g} (\ddot{\zeta} + z\ddot{\theta}).$$

Уравнения движения корабля даются при сделанных предположениях равенствами

$$\left. \begin{aligned} \int_{-l_1}^{+l_2} q dx &= -B(t); \\ \int_{-l_1}^{+l_2} z q dx &= -B(t) l_2. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

или, подставляя q на (2),

$$\left. \begin{aligned} \zeta \int_{-l_1}^{+l_2} \frac{r(t)}{g} dx + \theta \int_{-l_1}^{+l_2} z \frac{r(t)}{g} dx &= -B(t); \\ \zeta \int_{-l_1}^{+l_2} z \frac{r(t)}{g} dx + \theta \int_{-l_1}^{+l_2} z^2 \frac{r(t)}{g} dx &= -l_2 B(t). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Так как мы предположили, что начало координат совмещено с центром, в котором расположен центр тяжести всех участвующих в движении корабля масс, то следует принять:

$$\int_{-l_1}^{+l_2} z \frac{r(t)}{g} dx = 0, \quad (5)$$

что же касается интегралов

$$M = \int_{-l_1}^{+l_2} \frac{r(t)}{g} dx \quad (6)$$

и

$$K = g^2 M = \int_{-l_1}^{+l_2} z^2 \frac{r(t)}{g} dx, \quad (7)$$

то первым из них определяется масса корабля, вторым — центральный момент инерции всех масс, участвующих во вращательном движении корабля, определяемом углом θ .

Принимая во внимание (5), (6) и (7), можно на основании их написать:

$$\zeta = -\frac{1}{\Omega} R(t); \quad \dot{\theta} = -\frac{1}{\sigma^2 \Omega} R(t) \quad (8)$$

и, следовательно,

$$q = \frac{R(t)}{\Omega} r(x) \left(1 + \frac{x^2}{\sigma^2}\right), \quad (9)$$

или, что то же,

$$q = \frac{R(t)}{P} r(x) \left(1 + \frac{x^2}{\sigma^2}\right), \quad (10)$$

где

$$P = \Omega \sigma \quad (11)$$

есть вес всех масс, участвующих в движении корабля.

Интегрируя нагрузку q , получаем для перевернутой силы в корпусе корабля

$$N = \int_{-l_1}^{l_2} q dx = \frac{R(t)}{P} \int_{-l_1}^{l_2} r(x) \left(1 + \frac{x^2}{\sigma^2}\right) dx; \quad (12)$$

для изгибающего же момента

$$M = \int_{-l_1}^{l_2} \int_{-l_1}^x q dx^2 = \frac{R(t)}{P} \int_{-l_1}^{l_2} r(x) \left(1 + \frac{x^2}{\sigma^2}\right) dx^2, \quad (13)$$

или, что то же,

$$M = \frac{R(t)}{P} \left[\int_{-l_1}^{l_2} r(x) \left(1 + \frac{x^2}{\sigma^2}\right) dx - \int_{-l_1}^{l_2} x r(x) \left(1 + \frac{x^2}{\sigma^2}\right) dx \right]. \quad (14)$$

Для крайней носовой оконечности корабля равенства (12) дают в силу (5) и (6)

$$(N)_{x=l_2} = R(t), \quad (15)$$

как то и должно быть, если сила $R(t)$ приложена именно к этой точке корабля.

Из равенства (14) для сечения $x = l_2$ следует в силу (5) и (7)

$$(M)_{x=l_2} = \frac{R(t)}{P} (P l_2 - P l_1) = 0, \quad (16)$$

как то также должно быть, если никакого внешнего момента к носовой оконечности корабля не приложено.

Общий характер соответствующих равенств (12) и (13) эпюр моментов и перевернутой сил изображен на рис. 2.

Для примера рассмотрим случай, когда

$$r(x) = \cos x = r_0, \quad (17)$$

В этом случае

$$l_1 = l_2 = \frac{L}{2}; \quad (18)$$

$$\sigma^2 = \frac{L^2}{12},$$

где L — общая длина корабля.

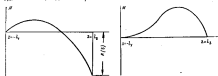


Рис. 2.

Поэтому для стержня, масса которого распределена вдоль его длины равномерно,

$$q = \frac{r_0}{\sigma^2 L} R(t) \left(1 + \frac{x^2}{\sigma^2}\right) = \frac{R(t)}{L} \left(1 + \frac{6x^2}{L^2}\right); \quad (19)$$

$$N = R(t) \left(\frac{x}{L} + \frac{1}{2} + 3\right) \frac{6x^2 - L^2}{4L^3}; \quad (20)$$

$$M = \frac{R(t)}{8} \varphi \left(\frac{2x}{L}\right), \quad (21)$$

где

$$\varphi \left(\frac{2x}{L}\right) = \left(\frac{2x}{L}\right)^3 + \left(\frac{2x}{L}\right)^2 - \left(\frac{2x}{L}\right) - 1. \quad (22)$$

В табл. 1 собраны некоторые значения функции $\varphi \left(\frac{2x}{L}\right)$.

Таблица 1

$\left(\frac{2x}{L}\right)$	-1,00	-0,80	-0,60	-0,40	-0,20	0
$\varphi \left(\frac{2x}{L}\right)$	0	-0,072	-0,296	-0,504	-0,768	-1,040

Продолжение

$\left(\frac{2x}{L}\right)$	0	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
$\varphi \left(\frac{2x}{L}\right)$	-1,000	-1,152	-1,176	-1,024	-0,640	0

№ сек.	а, м	$e = 10,8$	$1 + \frac{e}{10,8}$	$e^2, \text{м}^2$	$\frac{e^2}{10,8}$ $\times (1 + \frac{e}{10,8})$	Сумма (6) поперечной скорости	Сумма (7) поперечной скорости	Поперечка (8)	$\sum \Delta \text{вект} = \frac{\Delta \text{вект}}{10}$
30	+52,5	-4,85	-3,86	2,0	-37,6	0	0	0	0
19	-47,1	-4,38	-3,35	2,0	-33,7	-50,7	-56,7	-80	-70
26	-41,7	-3,91	-2,85	5,0	-14,3	-88,7	-196,1	-41	-235
17	-36,3	-3,43	-2,36	15,5	-22,4	-125,4	-404,2	-01	-403
16	-30,9	-2,95	-1,86	11,0	-20,5	-168,3	-697,9	-63	-763
15	-25,5	-2,48	-1,36	16,0	-17,7	-210,2	-1076,4	-102	-1203
14	-20,1	-1,99	-0,86	22,5	-10,3	-251,2	-1437,8	-123	-1503
13	-18,7	-1,86	-0,78	22,5	-8,1	-278,5	-2057,6	-123	-1503
12	-0,3	-0,29	+0,04	21,0	+3,0	-293,7	-2325,9	-143	-2210
11	-3,9	-0,36	+0,64	22,0	+14,1	-305,6	-3140,2	-164	-2735
10	+1,5	+0,14	+1,14	22,5	+25,4	-225,9	-3572,7	-206	-3880
9	+5,9	+0,64	+1,64	23,6	+38,8	-161,3	-2660,1	-236	-4265
8	+12,3	+1,14	+2,14	21,0	+43,0	-77,7	-2290,3	-266	-4343
7	+17,7	+1,64	+2,64	22,0	+53,7	+25,5	-1387,8	-307	-4720
6	+23,1	+2,14	+3,14	37,5	+55,1	+138,8	-4187,5	-308	-4470
5	+28,5	+2,64	+3,64	11,0	+40,0	+333,9	-3874,8	-308	-4125
4	+33,9	+3,13	+4,13	11,0	+45,6	+319,5	-3251,4	-359	-3500
3	+39,3	+3,64	+5,64	8,6	+39,9	+408,0	-2326,9	-350	-2863
2	+44,7	+4,14	+6,14	5,0	+25,7	+470,6	-1661,3	-370	-2030
1	+50,0	+4,64	+7,64	4,1	+13,1	+519,4	-671,3	-380	-1640
0	+55,5	+5,14	+8,14	3,3	+9,3	+592,8	+410,9	+411	0

Таким образом для прismaticкого абсолютно жесткого стержня

$$M_{\max} = -\frac{R(t) L}{k} 1,176 = -\frac{R(t) L}{6,8} \quad (23)$$

Аналогичное вычисление, выполненное для корабля, рассмотренного в работе Ю. А. Шиманского,* показало, что если бы этот корабль был абсолютно жестким, то для него

$$M_{\max} = -\frac{R(t) L}{5} \quad (24)$$

Действительно, для этого корабля, по данным Ю. А. Шиманского,

$$L = 5,4 \cdot 20 = 108 \text{ м}; \quad I_1 = 55,5 \text{ м}; \quad I_2 = 52,5 \text{ м};$$

$$P = 1560 \text{ т}; \quad \rho^2 = 600 \text{ м}^2; \quad \rho^2 : I_2 = 10,8 \text{ м}$$

и, следовательно,

$$q = \frac{R(t)}{P} r(x) \left(1 + \frac{x}{10,8}\right).$$

Благодаря тому, что суммы, по которым вычислялись в работе Ю. А. Шиманского величины I_1 , I_2 и ρ^2 , не были исправлены на полусуммы крайних ординат эвюлов моментов, первоначальные значения были несколько и исправлены линейной интерполяцией.

Как видно из табл. 2, в данном случае

$$M_{\max} = \frac{R(t)}{P} \iint q dx^2 = \frac{R(t)}{1560} 4620 \frac{(5,4)^2}{2} = R(t) 21 \cdot 6 = \\ = R(t) \frac{L}{5} = 7560 \text{ т.}$$

Полученный результат является грубо приближенным и должен быть исправлен динамическим подсчетом.

* Влияние поперечного кривиз на общую прочность корабля, Труды ЦНИИ им. А. Н. Крылова, вып. 1.

29. О ДЕЙСТВИИ КРАТКОВРЕМЕННОГО ИМПУЛЬСА НА ПРИЗМАТИЧЕСКИЙ СТЕРЖЕНЬ, СВОБОДНО ПЛАВАЮЩИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ВОДЫ*

Для иллюстрации общей схемы динамического решения задачи о влиянии подводного течения на изгиб корабля, свободно плавающего на поверхности воды, каким-либо таким примером, который позволил бы разобраться в вопросе о скорости сходимости получающихся рядов, полезно рассмотреть решение этой задачи применительно к изгибу соответствующего призматического стержня.

1. Пусть

- r — вес единицы длины рассматриваемого стержня;
- g — ускорение силы тяжести;
- v — исомое вертикальное по направлению вниз перемещение рассматриваемого его сечения;
- EJ — жесткость поперечного сечения стержня по отношению к изгибу;
- b — ширина пaterяния его;
- γ — удельный вес его;
- z — координаты, измеренные вдоль оси стержня.

Тогда, обозначая через:

- (\dot{v}) — частную производную искомой функции, соответствующую изменению аргумента z ;
- (\dot{v}) — частную производную ее, соответствующую изменению времени t ,

можно, пренебрегая демпфирующим влиянием сопротивления воды, выписать основное дифференциальное уравнение свободных колебаний рассматриваемого стержня в форме равенства

$$EJ v'''' = -\frac{r}{g} \ddot{v} - \gamma \delta v, \quad (1)$$

Граничные условия на концах стержня, свободно плавающего на поверхности воды, выписываются, если совместить начало

* Повторяется заголовком.

координат со средней длиной рассматриваемого стержня в форме равенства:

$$\left. \begin{aligned} EJ v'' &= 0 \\ EJ v''' &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ при } z = \pm 0,5 l, \quad (2)$$

где l — длина рассматриваемого стержня.

Для разыскания форм и частот главных свободных колебаний рассматриваемой механической системы применим

$$v = \sum_k v_k(z) \varphi_k(t), \quad (3)$$

где $v_k(z)$ — функции, определяющие формы главных свободных колебаний рассматриваемого стержня;

$\varphi_k(t)$ — соответствующие им главные координаты его.

Применяя к разысканию функций $v_k(z)$ метод частных решений, воспользуемся тем свойством главных свободных колебаний, по которому вкладка на всех главных координат в случае свободных колебаний системы меняется по закону

$$\varphi_k(t) = A_k \cos(\lambda_k t + \epsilon_k), \quad (4)$$

где A_k — амплитуда рассматриваемого главного колебания;

λ_k — круговая его частота;

ϵ_k — фазовый угол.

Независимо от того, отаныки ли для всех остальных главных свободных колебаний амплитуды A_k от нуля или же нет.

Из этого свойства главных координат следует, что если функцией $v_k(z)$ определяется форма одного из главных свободных колебаний рассматриваемой системы, то равенством

$$v = v_k(z) A_k \cos(\lambda_k t + \epsilon_k) \quad (5)$$

должно даваться одно из частных решений уравнения (1), удовлетворяющих граничным условиям (2). Для этого функция $v_k(z)$ должна удовлетворять уравнению

$$EJ v_k''''(z) = \left(\frac{r\lambda_k^4}{g} - \gamma \delta \right) v_k(z) \quad (6)$$

и граничным условиям

$$v_k' \left(\pm \frac{l}{2} \right) = 0. \quad (7)$$

Отношение $\frac{1}{EJ} \left(\frac{r\lambda_k^4}{g} - \gamma \delta \right)$ является, очевидно, величиной размерности M^{-4} . Введя обозначение

$$\frac{1}{EJ} \left(\frac{r\lambda_k^4}{g} - \gamma \delta \right) = \mu_k^4, \quad (8)$$

можно считать μ_k числами отличенными.

Для разыскания их заметки, что в силу (8) уравнение (6) можно считать равносильным уравнению

$$\sigma_k^{(n)}(z) = \frac{1}{r} \mu_k^2 v_k(z), \quad (9)$$

общий интеграл которого дается равенством

$$v_k(z) = a_k \operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{r} + b_k \operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{r} + c_k \cos \frac{\mu_k z}{r} + d_k \sin \frac{\mu_k z}{r}, \quad (10)$$

где a_k , b_k , c_k и d_k — постоянные интегрирования, которыми следует распорядиться так, чтобы решение (10) удовлетворяло граничным условиям (7).

Уравнение (9) и граничные к нему условия (7) никак не отличаются от дифференциального уравнения и граничных условий, определяющих формы главных свободных колебаний свободного стержня. Можно утверждать, что наличие сплошного упругого основания у стержня, свободно плавающего на поверхности воды, не имеет никакого влияния ни на формы его главных свободных колебаний, определяемые функциями $v_k(z)$, ни на соответствующие этим функциям характеристические числа μ_k .

Наличие у такого стержня сплошного упругого основания отражается лишь на связи между частотой λ_k главных свободных колебаний рассматриваемого стержня и характеристическими числами μ_k . Для стержня, свободно плавающего на поверхности воды, связь эта выражается не соотношением

$$(\lambda_k^2)^0 = \frac{a_k^2 E J g}{r^4 \mu_k^4}, \quad (11)$$

относящихся к стержню совершенно свободному, а зависимостями

$$\lambda_k^2 = \frac{a_k^2 E J g}{r^4 \mu_k^4} + \frac{\gamma b g}{r}. \quad (12)$$

Вводя обозначение

$$\lambda^2 = \frac{\gamma b g}{r}, \quad (13)$$

можно, принимая во внимание (11), придать равенствам (12) вид

$$\lambda_k^2 = (\lambda_k^2)^0 + \lambda^2. \quad (14)$$

Величиной λ_k , даваемой равенством (14), определяется квадрат частоты главных свободных колебаний абсолютно жесткого стержня, имеющего ту же массу, ту же длину и ту же жесткость упругого основания, что и рассматриваемый упругий стержень.

Равенство (14) показывает, что благодаря наличию у стержня, свободно плавающего на поверхности воды, сплошного упругого основания, квадраты частот всех его главных свободных колебаний можно вычислить как суммы квадратов частот соответствующих

колебаний соответствующего призматического стержня $(\lambda_k^2)^0$ и квадрата частоты вступаемых колебаний, собственных рассматриваемому стержню как твердому целому.*

Можно принять, что частоты и формы симметричных относительно миделя главных свободных колебаний свободно плавающего на поверхности воды призматического стержня определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} v_{-k}(z) &= 1; \\ \lambda_{-k}^2 &= \frac{\gamma b g}{r}; \end{aligned} \right\} k = -2. \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} v_k(z) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{r}}{\operatorname{ch} 0,5 \mu_k} + \frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{r}}{\operatorname{sh} 0,5 \mu_k} \right]; \\ \lambda_k^2 &= \frac{a_k^2 E J g}{r^4 \mu_k^4} + \frac{\gamma b g}{r}, \end{aligned} \right\} k = 0, 2, 4, 6, \dots \quad (16)$$

где числа μ_0 ; μ_2 ; μ_4 ; $\mu_6 \dots$ определяются корнями уравнения

$$\operatorname{tg} 0,5 \mu_k = -\operatorname{th} 0,5 \mu_k. \quad (17)$$

частоты же и формы соответствующих им колебаний, антисимметричных относительно мидельного сечения стержня равенствами

$$\left. \begin{aligned} v_{-k}(z) &= \frac{2z}{r}; \\ \lambda_{-k}^2 &= \frac{\gamma b g}{r}. \end{aligned} \right\} k = -1. \quad (18)$$

и

$$\left. \begin{aligned} v_k(z) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{\mu_k z}{r}}{\operatorname{sh} 0,5 \mu_k} + \frac{\operatorname{ch} \frac{\mu_k z}{r}}{\operatorname{ch} 0,5 \mu_k} \right]; \\ \lambda_k^2 &= \frac{a_k^2 E J g}{r^4 \mu_k^4} + \frac{\gamma b g}{r}, \end{aligned} \right\} k = 1, 3, 5, \dots \quad (19)$$

где μ_1 ; μ_3 ; μ_5 ; $\mu_7 \dots$ — корни уравнения

$$\operatorname{tg} 0,5 \mu_k = +\operatorname{th} 0,5 \mu_k. \quad (20)$$

* Нетрудно видеть, что эти колебания являются довольно обидим и могут быть, в частности, распространены на такие свободно плавающие на поверхности воды призматические стержни, у которых отношение $\lambda = r(z) : b(z)$,

где $r(z)$ — вес единицы длины стержня в рассматриваемой точке; $b(z)$ — диаметр поперечного сечения стержня в рассматриваемой точке, от координаты z не зависит.

Его можно распространить также не только на стержни, свободно плавающие на поверхности воды, но и на некоторые жесткие стержни, лежащие на сплошном упругом основании.

На подробностях этого вопроса мы здесь не останавливаемся, так как он не имеет прямого отношения к основной теме исследования.

Таблица 2

k	0	1	2	3	4	5	6	7
μ_k	4,73	7,85	11,0	14,1	17,2	20,4	23,6	26,7

Корни уравнений (17) и (20), как известно, вычислены и их можно найти во всяком курсе, рассматривающем вопрос об уругих колебаниях свободных призматических стержней.

В табл. 1 приводятся их значения.

Для значений μ , больших чем те, которые предусмотрены в приведенной таблице, числа μ_k даются с достаточной точностью приближенной зависимостью

$$\mu_k = \frac{(2k+3)\pi}{2}. \quad (21)$$

2. Обратимся к рассмотрению вынужденных колебаний исследуемого стержня, вызываемых действием кратковременного импульса, приложенного к одной из оконечностей стержня, попробуем сначала решить эту задачу методом Лагранжа, использованным в работе «Влияние подводного взрыва на обшивку прочности корабля» Ю. А. Шмаковского.

Следуя этой методе, будем вынужденные колебания, вызываемые у призматического свободно плавающего на поверхности воды стержня действием кратковременного импульса, приложенного к одной из оконечностей стержня, искать в форме ряда (3), где $\varphi_k(z)$ — так называемые формы главных свободных поперечных колебаний свободного стержня, определяемые дифференциальными уравнениями (9) и граничными условиями (7), или, что то же, равенствами (15)–(20), в $\rho_k(t)$ — главные координаты исследуемой упругой системы, которые и необходимо в функции от времени t разыскать.

Так как живая сила T и потенциальная энергия F выражаются через главные координаты упругой системы ρ_k равенствами:

$$T = \frac{1}{2} \sum_k M_k \dot{\rho}_k^2; \quad (22)$$

$$F = \frac{1}{2} \sum_k N_k \rho_k^2. \quad (23)$$

то уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\rho}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial \rho_k} + \frac{\partial F}{\partial \rho_k} = P_k(t), \quad (24)$$

где $P_k(t)$ — обобщенные силы, соответствующие координатам

ρ_k , будучи выписаны в главных координатах ρ_k , принимают вид совокупности равенств

$$M_k \ddot{\rho}_k + N_k \rho_k = P_k(t), \quad (25)$$

где k проходит через все значения от $k = -2$ до $k = \infty$.

Входящие в уравнение (25) величины — обобщенные массы M_k ; обобщенные жесткости N_k и обобщенные силы $P_k(t)$ даются для случая, когда движение системы возмущается силой $R(t)$, приложенной к рассматриваемому стержню в сечении $z = +0,5 l$

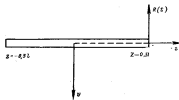


Рис. 1.

и направленной, как показано на рис. 1, и сторону, противоположную положительному направлению перемещения v , зависящим от времени

$$M_k = \int_{-0,5l}^{+0,5l} \rho \varphi_k^2(z) dz, \quad (26)$$

$$N_k = \lambda_k^2 M_k; \quad (27)$$

$$P_k(t) = -v_k(0,5 l) R(t) = -R(t), \quad (28)$$

ибо функции $\varphi_k(z)$ подобраны так, что

$$v_k(0,5 l) = 1. \quad (29)$$

Поэтому в рассматриваемом случае совокупность уравнений (25) обращается в совокупность зависимостей

$$\ddot{\rho}_k + \lambda_k^2 \rho_k = -\frac{R(t)}{M_k} \quad k = -2; -1; 0; 1; 2; 3 \dots \infty, \quad (30)$$

в которых

$$M_{-2} = -\frac{\pi l^3}{8} - 2M; \quad (31)$$

$$M_{-1} = \int_{-0,5l}^{+0,5l} \frac{z}{r} \left[\frac{dz}{r} \right]^2 dz = \frac{M}{3}, \quad (32)$$

$$M_k = \frac{1}{k} M \quad \text{при} \quad k = 0; 1; 2; 3, \quad (33)$$

где M — фактическая масса рассматриваемого стержня:

$$M = \frac{rJ}{s}. \quad (34)$$

Решение уравнений (30), удовлетворяющее начальным условиям

$$P_k = \dot{P}_k = 0, \quad (35)$$

можно, как известно, выписать как в форме равенств

$$P_k = -\frac{1}{M_k \lambda_k} \int_{t=0}^{t=t} R(\xi) \sin \lambda_k (t - \xi) d\xi \quad (36)$$

$$k = -2; -1; 0; 1; 2; 3, \dots$$

так и в форме зависимостей

$$P_k(t) = -\frac{1}{M_k \lambda_k} \int_{t=0}^{t=t} R(\xi) [1 - \cos \lambda_k (t - \xi)] d\xi \quad (37)$$

$$k = -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

данным тот же результат, что и равенства (36), если только в зависимостях (36) не опускаются конечные элементы интеграла, соответствующие точкам разрыва непрерывности функции $R(\xi)$, когда таковые у этой функции имеются.

Определив функции $P_k(t)$, с помощью равенств (36) или (37), или разкладывая как угодно иным путем решение уравнений (30), удовлетворяющее начальным условиям (35), можно искомое перемещение v найти по равенству (3), данному

$$v = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \alpha_k(z) P_k(t), \quad (38)$$

чем и кончается задача о разложении ускорит перемещений рассматриваемого стержня как функции от z и t .

Для вычисления изгибающих моментов, действующих в различных поперечных сечениях стержня, можно воспользоваться зависимостью

$$M = EJ v'' = EJ \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \alpha_k''(z) P_k(t), \quad (39)$$

тождественной в силу того, что

$$\alpha_k''(z) = v_k''(z) = 0, \quad (40)$$

зависимости

$$M = EJ \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \alpha_k''(z) P_k(t). \quad (41)$$

Практически это чрезвычайно неудобно, ибо ряд, входящий в правую часть равенств (39) и (41), сходится хуже, чем ряд (38), которым определяется искомое перемещение v .

Удобнее разлагать изгибающий момент M не путем использования зависимости (39), требующей дифференцирования функционального ряда (38), а путем интегрирования уравнения

$$M'' = q = -\frac{r}{s} \ddot{v} - \gamma b v \quad (42)$$

при граничных условиях

$$M = M' = 0 \quad \text{при} \quad z = -0,5l, \quad (43)$$

и в силу зависимости

$$M = EJ v'' \quad (44)$$

и дифференциального уравнения (1), которому удовлетворяет функция v , они должны дать тот же числовой результат, что и непосредственное использование равенства (44).

Воспользовавшись для определения изгибающего момента M зависимостью (42), совместно с равенством (38) получим

$$M'' = -\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \left[\frac{r}{s} \ddot{P}_k + \gamma b P_k \right] \alpha_k(z) \quad (45)$$

и, следовательно,

$$M = -\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \left[\left[\frac{r}{s} \ddot{P}_k + \gamma b P_k \right] \int_{-0,5l}^z dz \int_{-0,5l}^z \alpha_k(z) dz \right]. \quad (46)$$

Но в силу уравнения (30), которым и определяются величины $P_k(t)$,

$$\ddot{P}_k(t) = -\lambda_k^2 P_k - \frac{R(t)}{M_k}, \quad (47)$$

что по подстановке в равенство (46) дает:

$$M = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \frac{r}{s} \left[\left[\lambda_k^2 - \frac{\gamma b s}{r} \right] P_k + \frac{R(t)}{M_k} \right] \int_{-0,5l}^z dz \int_{-0,5l}^z \alpha_k(z) dz, \quad (48)$$

или, приняв во внимание равенство (37),

$$M = \sum_{k=-2}^{k=2} \frac{r}{M_k \lambda_k^2} \left\{ \left[\lambda_k^2 - \frac{\gamma b g}{r} \right] \left(-R'(t) + \int_{t=0}^{t-t} R'(\xi) \cos \lambda_k (t-\xi) d\xi \right) + \right. \\ \left. + \frac{R(0)}{M_k} \int_{-0,8t}^t \int_{-0,8t}^t v_k(z) dz \right\}, \quad (49)$$

Проведя в выражении (49) некоторые перегруппировки членов, можно придать полученному результату вид

$$M = \sum_{k=-2}^{k=2} \frac{r}{M_k \lambda_k^2} \left\{ \int_{t=0}^{t-t} R'(\xi) \cos \lambda_k (t-\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \frac{\gamma b g}{r \lambda_k^2} \int_{t=0}^{t-t} R'(\xi) (1 - \cos \lambda_k) (t-\xi) d\xi \int_{-0,8t}^t \int_{-0,8t}^t v_k(z) dz \right\}. \quad (50)$$

3. Займемся исследованием полученного решения.

Так как

$$\mu_{-1} = \mu_{-1} = 0$$

то согласно равенству (12)

$$\lambda_{-2}^2 = \lambda_{-2}^2 = \frac{\gamma b g}{r}$$

и, следовательно,

$$\frac{\gamma b g}{r \lambda_{-2}^2} = \frac{\gamma b g}{r \lambda_{-2}^2} = 1, \quad (51)$$

Поэтому, выделяя из суммы, входящей в правую часть равенства (50), члены, соответствующие значениям

$$k = -2 \text{ и } k = -1,$$

можно, приняв во внимание равенства (15), (18), (31), (32) и (33) написать:

$$M = \frac{R(0)}{r} \int_{-0,8t}^t \int_{-0,8t}^t \left[1 + \frac{6\alpha}{T} \right] dz + \\ + \frac{4r}{T} \sum_{k=1}^{k=2} \int_{t=0}^{t-t} R'(\xi) \left\{ \cos \lambda_k (t+\xi) + \frac{\gamma b g}{r \lambda_k^2} (1 - \cos \lambda_k (t-\xi)) \right\} d\xi \times \\ \times \int_{-0,8t}^t \int_{-0,8t}^t v_k(z) dz. \quad (52)$$

$P = \Pi g$ — вес рассматриваемого стержня.

Первый член правой части полученного общего выражения для M соответствует тому элементарному решению задачи, которое рассмотрено в статье 28.

Вторым членом первой части равенства (52) дается к нему поправка. Во втором члене величина

$$\frac{\gamma b g}{r \lambda_k^2} = \frac{\frac{\gamma b g}{r}}{\frac{\mu_k^2 R J}{r^2} + \frac{\gamma b g}{r}} = \frac{1}{\frac{\mu_k^2 R J}{\gamma b g r} + 1} \quad (53)$$

является обычно величиной весьма малой по сравнению с единицей.

Так, например, для корабля, рассматриваемого в качестве примера в разбираемой работе Ю. А. Шиманского,

$$l = 108 \text{ м.}$$

$$b = \frac{833}{108} \approx 8 \text{ м.}$$

$$\gamma = 1 \text{ м/м}^2.$$

$$E = 2 \cdot 10^9 \text{ кг/см}^2 = 2 \cdot 10^7 \text{ м/м}^2.$$

$$J = 1,5 \text{ м}^4.$$

Из чисел $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots$ наименьшим является число

$$\mu_2 = 4,73. \quad (54)$$

Таким образом, в этом частном случае

$$\frac{\mu_k^2 R J}{\gamma b g r} = \frac{4,73^2 \cdot 2 \cdot 10^7 \cdot 1,5}{1 \cdot 8 (1,58)^2 10^4} = \frac{100 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^7}{8 \cdot 1,94 \cdot 10^4} = \frac{100}{10,7} \approx 10 \quad (55)$$

и, следовательно, во всех членах суммы, входящей во второй член первой части равенства (52),

$$\frac{\gamma b g}{r \lambda_k^2} \approx \frac{1}{10}. \quad (56)$$

Скобка $1 - \cos \lambda_k (t-\xi)$ является величиной одного порядка малости с $\cos \lambda_k (t-\xi)$. Поэтому с ошибкой, не превышающей примерно 10%, можно во втором члене правой части равенства (52) член, заключенный множителем величину $\frac{\gamma b g}{r \lambda_k^2}$, отбросить.

Сделаю это, получим

$$M = M^0 + \Delta M, \quad (57)$$

где

$$M^0 = r \frac{R(0)}{r} \int_{-0,8t}^t \int_{-0,8t}^t \left[1 + \frac{6\alpha}{T} \right] dz, \quad (58)$$

а

$$\Delta M \approx \frac{4r}{T} \sum_{k=1}^{k=2} \int_{t=0}^{t-t} \left\{ R'(\xi) \cos \lambda_k (t-\xi) d\xi \int_{-0,8t}^t \int_{-0,8t}^t v_k(z) dz \right\}. \quad (59)$$

Но в силу (16)

$$\int_{-0,5}^0 \int_{-0,5}^0 \ddot{w}_k(z) dz = \frac{T}{\rho k} \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\rho k z}{2}}{\operatorname{ch} \frac{\rho k}{2}} - \frac{\cos \frac{\rho k z}{2}}{\cos \frac{\rho k}{2}} \right) \quad (50)$$

при $k = 0, 2, 4, 6, \dots$

В силу же (19)

$$\int_{-0,5}^0 \int_{-0,5}^0 \ddot{w}_k(z) dz = \frac{T}{\rho k} \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{sh} \frac{\rho k z}{2}}{\operatorname{sh} \frac{\rho k}{2}} - \frac{\sin \frac{\rho k z}{2}}{\sin \frac{\rho k}{2}} \right) \quad (51)$$

при $k = 1, 3, 5, 7, \dots$

Что можно записать также в форме равенства

$$\int_{-0,5}^0 \int_{-0,5}^0 \ddot{w}_k(z) dz = \frac{T}{\rho k} \ddot{w}_k(z), \quad (52)$$

$k = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$

где $\ddot{w}_k(z)$ — вторая производная функции $w_k(z)$, взятая по отмеченному аргументу $\frac{\rho k z}{2}$.

Примем это во внимание, можно записать формулу (50) следующей ей эквивалентной

$$\Delta M \approx \frac{4r^2}{T} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\rho k}^{\infty} \int_{t=0}^{t=1} R'(\xi) \cos \lambda_k (t - \xi) d\xi, \quad (53)$$

или, что то же, формулой

$$\Delta M \approx 4l \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\rho k}^{\infty} \int_{t=0}^{t=1} R'(\xi) \cos \lambda_k (t - \xi) d\xi. \quad (54)$$

Формулой (54) и определяется приближенно величина той поправки, которой истинное значение приближенного момента M отличается от элементарного решения M^0 , полученного в статье 28.

4. Чтобы разобраться в вопросе об относительном весе данной поправки (54) поправки к элементарному решению (58), нужно задаться законом изменения силы $R(t)$ во времени. Для того чтобы полученный результат можно было лучше сопоставить с найденным в разбираемой работе Ю. А. Шмакина, допустим,

что $R(t)$ меняется во времени (рис. 2) по закону синусоиды, т. е. что

$$\left. \begin{aligned} R(t) &= B^0 \sin \frac{\pi t}{T} \quad \text{при } 0 < t < T \\ R(t) &= 0 \quad \text{при } T < t. \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

В этом случае

$$\left. \begin{aligned} R'(\xi) &= \frac{\pi B^0}{T} \cos \frac{\pi \xi}{T} \quad \text{при } 0 < \xi < T \\ R'(\xi) &= 0 \quad \text{при } T < \xi \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

и, следовательно

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_{t=0}^{t=1} R'(\xi) \cos \lambda_k (t - \xi) d\xi = \\ &= \int_{t=0}^{t=1} \frac{\pi B^0}{T} \cos \frac{\pi \xi}{T} \cos \lambda_k (t - \xi) d\xi \\ &\quad \text{при } 0 < t < T \quad (57) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} I(t) &= \\ &= \int_{t=0}^{t=T} \frac{\pi B^0}{T} \cos \frac{\pi \xi}{T} \cos \lambda_k (t - \xi) d\xi \\ &\quad \text{при } T < t. \quad (58) \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi \xi}{T} \cos \lambda_k (t - \xi) &= \frac{1}{2} \{ \cos [(\lambda_k + \alpha) \xi - \lambda_k t] + \\ &\quad + \cos [(\lambda_k - \alpha) \xi - \lambda_k t] \}, \quad (59) \end{aligned}$$

$$\text{где } \alpha = \frac{\pi}{T}, \quad (70)$$

так что

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{\pi B^0}{2T} \left[\frac{\sin [(\lambda_k + \alpha) \xi - \lambda_k t]}{\lambda_k + \alpha} \Big|_{t=0}^{t=1} + \frac{\sin [(\lambda_k - \alpha) \xi - \lambda_k t]}{\lambda_k - \alpha} \Big|_{t=0}^{t=1} \right] = \\ &= \frac{\pi B^0}{2T} \left(\frac{\sin \lambda_k t + \sin \alpha t}{\lambda_k + \alpha} + \frac{\sin \lambda_k t - \sin \alpha t}{\lambda_k - \alpha} \right) = \\ &= \frac{\pi B^0}{T} \frac{\lambda_k \sin \lambda_k t - \alpha \sin \alpha t}{\lambda_k^2 - \alpha^2} \quad \text{при } 0 < t < T \end{aligned} \quad (71)$$

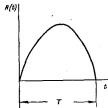


Рис. 2.

$$\begin{aligned}
 J(t) &= \frac{\pi B^0}{2T} \left[\frac{\sin[(\lambda_k + \alpha)t - \lambda_k t]}{\lambda_k + \alpha} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} + \frac{\sin[(\lambda_k - \alpha)t - \lambda_k t]}{\lambda_k - \alpha} \Big|_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{2}} \right] - \\
 &= \frac{\pi B^0}{2T} \left[\frac{\sin[(\lambda_k + \alpha)T - \lambda_k T] + \sin \lambda_k T}{\lambda_k + \alpha} + \frac{\sin[(\lambda_k - \alpha)T - \lambda_k T] + \sin \lambda_k T}{\lambda_k - \alpha} \right] - \\
 &= \frac{\pi B^0}{2} \left[\frac{\sin\left(\frac{\lambda_k + \alpha}{2} T\right)}{\frac{\lambda_k + \alpha}{2} T} \cos\left(\lambda_k t - \frac{\lambda_k + \alpha}{2} T\right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sin\left(\frac{\lambda_k - \alpha}{2} T\right)}{\frac{\lambda_k - \alpha}{2} T} \cos\left(\lambda_k t - \frac{\lambda_k - \alpha}{2} T\right) \right] \text{ при } T < t. \quad (72)
 \end{aligned}$$

Подставив найденное $J(t)$ в равенства (64), можно переписать последнее равенство так:

$$\Delta M = 4\pi B^0 t \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\gamma_k(t)}{\mu_k^2} \frac{\lambda_k T \sin \lambda_k t - \alpha T \sin \alpha t}{(\lambda_k T)^2 - (\alpha T)^2} \quad \text{при } 0 < t < T \quad (73)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta M &= 2\pi B^0 t \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\gamma_k(t)}{\mu_k^2} \left[\frac{\sin\left(\frac{\lambda_k + \alpha}{2} T\right)}{\left(\frac{\lambda_k + \alpha}{2}\right) T} \cos\left(\lambda_k t - \frac{(\lambda_k + \alpha)T}{2}\right) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\sin\left(\frac{\lambda_k - \alpha}{2} T\right)}{\left(\frac{\lambda_k - \alpha}{2}\right) T} \cos\left(\lambda_k t - \frac{(\lambda_k - \alpha)T}{2}\right) \right] \quad (74) \\
 &\quad \text{при } T < t.
 \end{aligned}$$

Что касается величины M^0 , то при рассматриваемом законе изменения силы $B(t)$ во взаимосвязи в статье 28 должно быть

$$M^0 = \frac{t B^0 \sin \alpha t}{\alpha} \varphi\left(\frac{2t}{T}\right) \quad \text{при } 0 < t < T, \quad (75)$$

$$\varphi\left(\frac{2t}{T}\right) = \left(\frac{2t}{T}\right)^2 + \left(\frac{2t}{T}\right)^4 - \frac{2t}{T} = 1 \quad (76)$$

$$M^0 = 0 \text{ при } T < t. \quad (77)$$

Таким образом, при рассматриваемом законе изменения силы $B(t)$ во времени величина M^0 достигает максимума при

$$t = \frac{T}{2}, \quad (78)$$

когда

$$M^0 = \frac{t B^0}{\alpha} \varphi\left(\frac{2t}{T}\right). \quad (79)$$

В этот момент времени

$$\Delta M = 4\pi B^0 t \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\gamma_k(t)}{\mu_k^2} \frac{\lambda_k T \sin \frac{\lambda_k T}{2} - \alpha}{(\lambda_k T)^2 - \alpha^2}. \quad (80)$$

Чтобы понять, какую долю от M^0 , определяемого равенством (79), может составить величина ΔM , определяемая равенством (80), необходимо всю правую часть зависимости в правой части равенства (80) умножить на

$$\varphi = \frac{\lambda_k T \sin \frac{\lambda_k T}{2} - \alpha}{(\lambda_k T)^2 - \alpha^2} \quad (81)$$

от их аргумента

$$\eta_k = \frac{\lambda_k T}{2}. \quad (82)$$

Для того, чтобы вскрыть эту зависимость, подсчитаем по формуле

$$\varphi = \frac{2\eta \sin \eta - \alpha}{(2\eta)^2 - \alpha^2} \quad (83)$$

величину φ для ряда различных значений η . Это выполним в табл. 2.

При весьма больших значениях аргумента η функция убывает как

$$\varphi \approx \frac{\sin \eta}{2\eta} \quad (84)$$

и, следовательно, остается всегда меньше чем $\frac{1}{2\eta}$.

Таким образом, наибольшее значение своего аргумента функция $\varphi(\eta)$ достигает при $\eta = 0$, когда $\varphi = \frac{1}{\alpha} = 0,32$.

Необходимо иметь в виду, что из функций

$\varphi_k(z)$ первая, т. е. функция $\varphi_0(z)$, положительна при всех значениях z . Поэтому при весьма малых значениях величины z

$$\frac{\lambda_k T}{2}$$

величина ΔM должна быть положительной в то время, как величина M^0 является отрицательной.

Таблица 2

φ	2φ	$\sin \varphi$	$2\varphi \sin \varphi$	$2\varphi \sin^2 \varphi$	ρ	$(2\varphi)^2 - \rho^2$	$2\varphi - \rho$	$2\varphi + \rho$
0	0	0	0	0	0,52	-0,65	-3,14	3,14
10°	0,349	0,174	0,061	0,001	0,52	-0,70	-2,79	3,49
20°	0,526	0,344	0,259	0,004	0,52	-0,70	-2,44	3,84
30°	0,866	0,500	0,423	0,012	0,51	-0,69	-2,10	4,18
40°	1,044	0,643	0,682	0,022	0,50	-0,69	-1,75	4,52
50°	1,294	0,766	0,932	0,032	0,49	-0,67	-1,40	4,86
60°	1,732	0,866	1,21	0,041	0,48	-0,65	-1,04	5,20
70°	2,44	0,935	1,58	0,048	0,47	-0,64	-0,70	5,54
80°	3,14	0,98	2,14	0,05	0,46	-0,63	-0,34	5,88
90°	3,50	0,98	3,43	0,12	0,46	-0,63	0	6,24
100°	3,85	0,860	5,01	0,47	0,69	-0,66	0,86	6,58
110°	4,21	0,760	6,84	1,00	0,93	-0,71	1,54	6,93
120°	4,57	0,643	8,92	1,75	1,17	-0,75	2,22	7,27
130°	4,93	0,500	11,25	2,71	1,41	-0,79	2,90	7,62
140°	5,29	0,344	13,81	3,88	1,65	-0,83	3,58	7,97
150°	5,65	0,174	16,58	5,25	1,89	-0,87	4,26	8,32
160°	6,01	0	19,56	6,81	2,13	-0,91	4,94	8,67
170°	6,37	-0,174	22,75	8,56	2,37	-0,95	5,62	9,02
180°	6,73	-0,349	26,25	10,49	2,61	-1,00	6,30	9,37
210°	7,35	-0,500	31,50	14,61	3,17	-1,05	7,00	9,72
240°	8,40	-0,866	39,15	20,45	4,17	-1,12	7,70	10,07
270°	9,42	-1,000	44	28,00	5,17	-1,19	8,40	10,42
300°	10,45	-0,866	52,50	37,50	6,17	-1,26	9,10	10,77
330°	11,47	-0,500	63,00	48,75	7,17	-1,33	9,80	11,12
350°	12,50	0	75,00	61,25	8,17	-1,40	10,50	11,47
360°	13,0	+0,00	80,00	65,00	9,17	-1,47	11,20	11,82
370°	13,0	+0,00	80,00	65,00	10,17	-1,54	11,90	12,17
380°	14,0	+0,09	85,00	70,00	11,17	-1,61	12,60	12,52
390°	14,0	+1,00	90,00	75,00	12,17	-1,68	13,30	12,87
400°	15,0	+0,85	96,00	80,00	13,17	-1,75	14,00	13,22
410°	15,0	+0,50	100,00	85,00	14,17	-1,82	14,70	13,57
420°	16,0	0	108,00	90,00	15,17	-1,89	15,40	13,92
430°	16,0	0	108,00	90,00	16,17	-1,96	16,10	14,27
440°	17,0	+0,50	117,00	96,00	17,17	-2,03	16,80	14,62
450°	17,0	+0,85	125,00	101,00	18,17	-2,10	17,50	14,97
460°	18,0	0	132,00	105,00	19,17	-2,17	18,20	15,32
470°	18,0	0	132,00	105,00	20,17	-2,24	18,90	15,67
480°	19,0	+0,50	140,00	110,00	21,17	-2,31	19,60	16,02
490°	19,0	+0,85	148,00	115,00	22,17	-2,38	20,30	16,37
500°	20,0	0	156,00	120,00	23,17	-2,45	21,00	16,72
510°	20,0	0	156,00	120,00	24,17	-2,52	21,70	17,07
520°	21,0	+0,50	165,00	125,00	25,17	-2,59	22,40	17,42
530°	21,0	+0,85	173,00	130,00	26,17	-2,66	23,10	17,77
540°	22,0	0	180,00	135,00	27,17	-2,73	23,80	18,12
550°	22,0	0	180,00	135,00	28,17	-2,80	24,50	18,47
560°	23,0	+0,50	189,00	140,00	29,17	-2,87	25,20	18,82
570°	23,0	+0,85	197,00	145,00	30,17	-2,94	25,90	19,17
580°	24,0	0	204,00	150,00	31,17	-3,01	26,60	19,52
590°	24,0	0	204,00	150,00	32,17	-3,08	27,30	19,87
600°	25,0	+0,50	213,00	155,00	33,17	-3,15	28,00	20,22
610°	25,0	+0,85	221,00	160,00	34,17	-3,22	28,70	20,57
620°	26,0	0	228,00	165,00	35,17	-3,29	29,40	20,92
630°	26,0	0	228,00	165,00	36,17	-3,36	30,10	21,27
640°	27,0	+0,50	237,00	170,00	37,17	-3,43	30,80	21,62
650°	27,0	+0,85	245,00	175,00	38,17	-3,50	31,50	21,97
660°	28,0	0	252,00	180,00	39,17	-3,57	32,20	22,32
670°	28,0	0	252,00	180,00	40,17	-3,64	32,90	22,67
680°	29,0	+0,50	261,00	185,00	41,17	-3,71	33,60	23,02
690°	29,0	+0,85	269,00	190,00	42,17	-3,78	34,30	23,37
700°	30,0	0	276,00	195,00	43,17	-3,85	35,00	23,72
710°	30,0	0	276,00	195,00	44,17	-3,92	35,70	24,07
720°	31,0	+0,50	285,00	200,00	45,17	-3,99	36,40	24,42
730°	31,0	+0,85	293,00	205,00	46,17	-4,06	37,10	24,77
740°	32,0	0	300,00	210,00	47,17	-4,13	37,80	25,12
750°	32,0	0	300,00	210,00	48,17	-4,20	38,50	25,47
760°	33,0	+0,50	309,00	215,00	49,17	-4,27	39,20	25,82
770°	33,0	+0,85	317,00	220,00	50,17	-4,34	39,90	26,17
780°	34,0	0	324,00	225,00	51,17	-4,41	40,60	26,52
790°	34,0	0	324,00	225,00	52,17	-4,48	41,30	26,87
800°	35,0	+0,50	333,00	230,00	53,17	-4,55	42,00	27,22
810°	35,0	+0,85	341,00	235,00	54,17	-4,62	42,70	27,57
820°	36,0	0	348,00	240,00	55,17	-4,69	43,40	27,92
830°	36,0	0	348,00	240,00	56,17	-4,76	44,10	28,27
840°	37,0	+0,50	357,00	245,00	57,17	-4,83	44,80	28,62
850°	37,0	+0,85	365,00	250,00	58,17	-4,90	45,50	28,97
860°	38,0	0	372,00	255,00	59,17	-4,97	46,20	29,32
870°	38,0	0	372,00	255,00	60,17	-5,04	46,90	29,67
880°	39,0	+0,50	381,00	260,00	61,17	-5,11	47,60	30,02
890°	39,0	+0,85	389,00	265,00	62,17	-5,18	48,30	30,37
900°	40,0	0	396,00	270,00	63,17	-5,25	49,00	30,72
910°	40,0	0	396,00	270,00	64,17	-5,32	49,70	31,07
920°	41,0	+0,50	405,00	275,00	65,17	-5,39	50,40	31,42
930°	41,0	+0,85	413,00	280,00	66,17	-5,46	51,10	31,77
940°	42,0	0	420,00	285,00	67,17	-5,53	51,80	32,12
950°	42,0	0	420,00	285,00	68,17	-5,60	52,50	32,47
960°	43,0	+0,50	429,00	290,00	69,17	-5,67	53,20	32,82
970°	43,0	+0,85	437,00	295,00	70,17	-5,74	53,90	33,17
980°	44,0	0	444,00	300,00	71,17	-5,81	54,60	33,52
990°	44,0	0	444,00	300,00	72,17	-5,88	55,30	33,87
1000°	45,0	+0,50	453,00	305,00	73,17	-5,95	56,00	34,22

Таблица 3

k	φ_k	$\sin \varphi_k$	$2\varphi_k \sin \varphi_k$	$2\varphi_k \sin^2 \varphi_k$	ρ_k	$(2\varphi_k)^2 - \rho_k^2$
1	4,17π	0,17	1,41π	0,41π	0,41 : (58π) ≈ 0	58π²
2	8,17π	0,17	2,79π	1,79π	1,79 : (268π) ≈ 0	268π²
3	13,5π	-1,0	-27π	-28π	-28 : (730π) ≈ -0,04	730π²
4	20,17π	1,17	+74π	+64π		

Надо положить, что наиболее неблагоприятного значения T должно достигать при значениях $\frac{\lambda_0 T}{2}$, близких к тем, при которых ρ достигает максимального отрицательного значения, т. е. при значениях $\frac{\lambda_0 T}{2}$, близких к $270^\circ = \frac{3\pi}{2}$.

А так как у достаточно жесткого стержня

$$\lambda_0^2 \rho_0 = \frac{2E_0 K^2 J^2}{r^4}$$

то у такого стержня при $\frac{\lambda_0 T}{2} = \frac{3\pi}{2}$

$$\varphi_1 = \frac{\lambda_0 T}{2} = \left(\frac{\mu_1}{\mu_0}\right)^{1/2} \frac{3\pi}{2} = \left(\frac{7}{5}\right)^{1/2} \frac{3\pi}{2} = \frac{25}{6}\pi = 4,17\pi;$$

$$\varphi_2 = \frac{\lambda_0 T}{2} = \left(\frac{\mu_2}{\mu_0}\right)^{1/2} \frac{3\pi}{2} = \left(\frac{7}{3}\right)^{1/2} \frac{3\pi}{2} = \frac{49}{6}\pi = 8,17\pi;$$

$$\varphi_3 = \frac{\lambda_0 T}{2} = \left(\frac{\mu_3}{\mu_0}\right)^{1/2} \frac{3\pi}{2} = \left(\frac{9}{5}\right)^{1/2} \frac{3\pi}{2} = \frac{81}{10}\pi = 13,5\pi;$$

$$\varphi_4 = \frac{\lambda_0 T}{2} = \left(\frac{\mu_4}{\mu_0}\right)^{1/2} \frac{3\pi}{2} = \left(\frac{11}{5}\right)^{1/2} \frac{3\pi}{2} = \frac{121}{10}\pi = 20,1\pi,$$

чему соответствуют значения ρ_k , поданные в табл. 3. Таким образом, при указанном наиболее неблагоприятном значении T

$$\Delta M \approx -4\pi E_0 J \frac{\ddot{v}(z)}{\rho^2} \approx -\frac{2E_0 J}{22,5} \ddot{v}_0(z) = -\frac{E_0 J}{11,25} \ddot{v}_0(z) \quad (85)$$

и, следовательно,

$$M \approx M^0 + \Delta M = \frac{E_0 J}{8} \varphi \left(\frac{2z}{l}\right) - \frac{E_0 J}{11,25} \frac{1}{2} \left(\frac{\operatorname{ch} \frac{\mu_1 z}{2}}{\operatorname{ch} 0,5 \mu_1} - \frac{\cos \frac{\mu_2 z}{2}}{\cos 0,5 \mu_2} \right). \quad (86)$$

Последние члены стержня, где $z=0$, второй член правой части равенства (86) составляет примерно 30% от первого.

При рассмотриваемом наиболее неблагоприятном значении длительности действия возмущающей силы эпор моментов должно иметь вид средней между тем, который соответствует функциям $\varphi\left(\frac{2z}{l}\right)$ и $\ddot{v}_0(z)$, более приближающийся, однако, по виду к функции $\varphi\left(\frac{2z}{l}\right)$, чем к функции $\ddot{v}_0(z)$.

36. К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ДИНАМИЧНОСТИ ДЛЯ ЖЕСТКИХ БАРАБАНОВ БАШЕННЫХ АРТУСТАНОВОК*

Жесткий барабан башенных оружейных установок является упругой конструкцией, предназначенной для восприятия как веса башни, так и усилий, которые возникают в башне при выстреле компрессорами откатающихся орудий. Характерной особенностью этой конструкции является необходимость устройства довольно значительного зазора между ней и вертикальным штырем башни, который может иметь значительное значение на величину коэффициента динамичности нагрузки, действующей на рассматриваемую упругую конструкцию при выстреле. Вопрос о величине этого зазора представлял большой интерес и был поставлен в общих чертах еще в моем докладе, сделанном в обществе «Союз морских инженеров» в 1916 г.**

В то время жесткие барабаны под башенные артиллерийские были принято рассматривать как совокупность вертикальных стоек, обладающих жесткостью лишь при изгибе в плоскости сечений, проходящих через ось башни и скрепленных наверху гибким кольцом, для которого прикрепление к нему упомянутые выше стойки являются рядом сплошного упругого основания.

То обстоятельство, что все эти стойки связаны между собой не только поверх упомянутым выше гибким кольцом, но и протяженно всей их высоты оболочкой жесткого барабана, игнорировалась. Этим в расчет вводился значительный скрытый запас прочности, что приводило заведомо к резкому преувеличению расчетных перемещений верхнего кольца жесткого барабана, соответствующих статическому действию усилий отката. Величина имеющегося в жестком барабане зазора оказывалась при этих условиях малой по сравнению со статическим горизонтальным перемещением конструкции и ее оболочкой, следовательно, большого влияния на величину динамического множителя, т. е. множителя, показывающего, во сколько раз максимальные напряжения в конструкции превышают их величину, вычисленную в предположении статического действия на конструкцию приложен-

* Впервые изложена в Докладе НТК НКВМФ, 1940, № 2.

** См. также в настоящем сборнике ст. 5.

ных к ней внешних усилий. Это и было отмечено в заключительной части упомянутого моего доклада.

Последнее взглядом на вопрос об истинных условиях работы жесткого барабана изменились. Еще во время мировой войны при проектировании береговых башенных установок для Ревельской крепости был поставлен вопрос о том, что жесткий барабан правильнее рассчитывать не как совокупность отдельных стоек, связанных сверху кольцом, а как оболочку, сохранение формы которой обеспечивается частично ее связью с палубами корабля, частично же упругим верхним ее кольцом и вставленным в кольцо жестким штырем башни. При таком представлении о работе жесткого барабана его можно было признать способным к восприятию значительно больших усилий, чем то принималось ранее, но расчетные значения усилий также возрастали, ибо уменьшение расчетного значения статических отклонений жесткого барабана являло своим последствием увеличение расчетных значений коэффициента динамичности. Вопрос о величине зазора в боевом штыре приобрел в связи с этим вновь свою актуальность, и я нашел отражение в методике расчета жесткого барабана, разработанной в 1938 году Ю. А. Шванским.

Решил он был в этой работе, по моему мнению, не вполне правильно. Настоящая статья имеет своей целью вскрыть в чем состоит эта неправильность и наметить ту методику определения коэффициента динамичности, которой при расчете жестких барабанов следует пользоваться взамен методики, разработанной Ю. А. Шванским. В соответствии с основной целью настоящей статьи она разделена на три следующих параграфа.

В § 1 рассмотрен вопрос о влиянии зазора арматурно к действительно мгновенным сил на систему с одной степенью свободы.

В § 2 изложен тот метод определения коэффициента динамичности жестких барабанов, который, по моему мнению, может быть рекомендован.

В § 3 кратко охарактеризована методика определения коэффициента динамичности, которая предложена в работе Ю. А. Шванского, и приведены некоторые соображения по вопросу о том, почему именно эту методику нельзя рекомендовать для практического использования, во всяком случае до тех пор, пока результаты расчетов, на ней базирующихся, не будут проверены расчетами, отражающими основные закономерности рассматриваемого явления лучше, чем то сделано в работе Ю. А. Шванского.

§ 1. Влияние зазора на коэффициент динамичности системы с одной степенью свободы

1. Постановка вопроса. Допустим, что материальная точка, имеющая возможность двигаться лишь по одному направлению, встречает противодействие со стороны некоторой пружины лишь после того, как ею пройден определенный путь. Допустим что:

M — масса рассматриваемой точки;
 N — жесткость пружины, ограничивающей ее ход;
 y — перемещение пружины;
 u — обжатие пружины;

$P(t)$ — величина действующей на рассматриваемую точку внешней силы, заданная как некоторая функция от времени.

Допустим также, что обжатие пружины в момент соприкосновения массы M с ней равно нулю; требуется определить, какое значение Δ величину максимального обжатия пружины имеет величина начального зазора между ее концом и массой M . Величину зазора обозначим Δ .



Рис. 1.

Для определенности примем, что сила $P(t)$ изменяется во времени по закону, изображенному на рис. 1, приближающемуся к закону изменения во времени давления компрессоров.

В движении рассматриваемой точки следует различить две стадии:

1) стадию свободного движения, длиннее до того момента времени, пока масса M не войдет в соприкосновение с пружиной;

2) стадию движения в соприкосновении с пружиной.

В отношении длительности первой из двух стадий могут представиться следующие случаи:

а) длительность t_1 первой стадии движения превышает время действия силы P , т. е. (рис. 1)

$$t_1 > t_2;$$

б) длительность t_1 первой стадии движения больше времени нарастания силы P до максимума, но меньше полного времени действия этой силы, т. е. t_1 лежит в пределах

$$t_1 < t_0 < t_2;$$

в) зазор Δ настолько мал, что длительность первой стадии движения t_1 меньше времени нарастания силы P до максимума, т. е.

$$t_1 < t_1.$$

Рассмотрим все эти случаи порознь.

2. Случай, когда $t_1 > t_2$. Если зазор Δ настолько велик, что время его выработки превышает длительность действия силы P , то скорость массы M в момент соприкосновения с пружиной, а следовательно и максимальная величина обжатия пружины, не зависят от величины зазора.

Действительно, по закону количества движения скорость U_0 массы M в момент окончания первой стадии движения

$$\dot{y}_0 = \frac{\int_0^{t_1} P(t) dt}{M}, \quad (1)$$

и так как во время всей второй стадии движения в этом случае

$$P(t) = 0,$$

то движение массы M во время этой стадии движения, т. е. при $t > t_0$ должно определяться уравнением

$$M \ddot{y} + Ny = 0. \quad (2)$$

и начальными условиями $y = 0$

$$\dot{y} = \dot{y}_0 = \frac{\int_0^{t_1} P(t) dt}{M} \quad \text{при } t = t_0. \quad (3)$$

Можно, следовательно, принять, что во время этой стадии движения

$$y = \frac{t}{M \lambda} \sin \lambda (t - t_0), \quad (4)$$

где

$$I = \int_0^{t_1} P(t) dt \quad (5)$$

и есть импульс силы $P(t)$, а

$$\lambda = \sqrt{\frac{N}{M}} \quad (6)$$

и есть частота собственных колебаний массы M , когда она соединена с ограничивающей ее ход пружиной.

Обозначим:

P^0 — максимальное значение силы $P(t)$;

$t_{\text{прим}}$ — приведенная длительность действия этой силы, вычисленная по формуле:

$$t_{\text{прим}} = \frac{I}{P^0}. \quad (7)$$

Тогда согласно формуле (4)

$$y_{\text{max}} = \frac{I}{M \lambda} = \frac{P^0 t_{\text{прим}}}{M \lambda},$$

или

$$y_{\text{max}} = \frac{P^0}{N} \lambda t_{\text{прим}}. \quad (8)$$

В этой формуле величина

$$u_{ст} = \frac{F^*}{Y} \quad (9)$$

есть статическое обжатие пружины под действием силы F^* . Поэтому формулу (8) можно переписать так же, как

$$u_{max} = u_{ст} X \quad (10)$$

где

$$X = \lambda t_{дина} \quad (11)$$

и есть динамический множитель, т. е. коэффициент, показывающий во сколько раз величина максимального обжатия пружины превышает величину ее статического обжатия под действием максимального значения силы F^* .

Обозначив через τ период собственных колебаний массы M , можно из соотношения (11) легко видеть, что в рассматриваемом случае, когда

$$t_2 > t_0,$$

динамический множитель X может быть определен также по формуле

$$X = 2 + \frac{t_{дина}}{\tau} \quad (12)$$

Формула (12) показывает, что в этом случае X не зависит от величины Δ и может быть сколь угодно велико по сравнению с единицей, если только $t_{дина}$ достаточно велико по сравнению с τ .

Максимальное обжатие пружины зависит здесь не столько от максимального значения силы F^* , сколько от амплитуды силы $P(t)$, поэтому оно прямо пропорционально.

Динамический множитель определяется формулой (12), если зазор Δ удовлетворяет условию

$$\Delta > \frac{1}{M} \int_0^{t_0} P(t) dt \quad (13)$$

В частном случае, если $P(t)$ изменяется во времени согласно рис. 1, то

$$P(t) = \frac{F^* t}{t_0} - \left[\frac{F^* (t - t_0)}{t_0} \right] \quad (14)$$

и, следовательно,

$$\int_0^{t_0} P(t) dt = \frac{F^* t_0}{2} - \left[\frac{F^* (t_0 - t_0)^2}{2t_0} \right] \quad (15)$$

так что

$$\int_0^{t_0} P(t) dt = \frac{F^* t_0}{2} - \frac{F^* (t_0 - t_0)^2}{2t_0} \quad (16)$$

Поэтому неравенство (13) соблюдается, если

$$\Delta > \frac{F^*}{2M t_0} (t_0^2 - (t_2 - t_0)^2) \quad (17)$$

3. **Случай, когда $t_1 < t_2 < t_0$.** Рассмотрим теперь случай, когда $P(t)$ задано рис. 1 и величина Δ удовлетворяет условию:

$$\frac{F^* t_0^2}{2M t_0} > \Delta > \frac{F^*}{2M t_0} (t_0^2 - (t_2 - t_0)^2) \quad (18)$$

В этом случае

$$t_1 < t_2 < t_0 \quad (19)$$

и к моменту начала второй стадии движения

$$v = 0$$

$$s = \dot{s} = \frac{1}{M} \int_0^{t_2} P(t) dt = \frac{F^*}{2M t_0} (t_0^2 - (t_2 - t_0)^2) \quad (20)$$

Так как во время второй стадии движения сила $P(t)$ остается по условию постоянной и равной F^* , то в начале этой стадии движения v должно меняться по закону:

$$v = \frac{F^*}{Y} [1 - \cos \lambda (t - t_0)] + \frac{F^*}{2M \lambda} [2 t_2 - t_0] \sin \lambda (t - t_0) \quad (21)$$

Если длительность действия возмущающей силы достаточно продолжительна и v успеет достигнуть своего максимума в то время, пока сила $P(t)$ еще не исчезла, то максимальное обжатие пружины определяется формулой

$$u_{max} = \frac{F^*}{Y} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \lambda^2 \left(t_0 - \frac{1}{2} t_2 \right)^2} \right\} \quad (22)$$

где t_0 — длительность первой стадии движения, связанная с Δ очевидной зависимостью

$$\Delta = \frac{F^*}{2M t_0} (t_0^2 - (t_2 - t_0)^2) = \frac{F^*}{2M t_0} (3 t_0 t_2 - 2 t_0 t_0 + t_0^2) \quad (23)$$

Если то время действия силы $P(t)$ обжатие пружины не успеет достигнуть максимального значения, то v достигнет своего максимума уже после того, как сила $P(t)$ исчезла, т. е. тогда, когда v определяется зависимостью:

$$v = \frac{F^*}{Y} [1 - \cos \lambda (t - t_0)] + \frac{F^*}{Y} \lambda \left(t_0 - \frac{1}{2} t_2 \right) \sin \lambda (t - t_0) - \frac{F^*}{Y} [1 - \cos \lambda (t - t_0)]$$

или, что то же, когда

$$\alpha = \frac{P^m}{N} \left\{ \cos \lambda (t - t_0) - \cos \lambda (t - t_0) + \lambda \left(t_0 - \frac{1}{2} t_1 \right) \sin \lambda (t - t_0) \right\} = \\ = \frac{P^m}{N} \left\{ 2 \sin \frac{\lambda(t_0 - t_1)}{2} \sin \lambda \left[t - \frac{1}{2} (t_0 + t_1) \right] + \right. \\ \left. + \lambda \left(t_0 - \frac{1}{2} t_1 \right) \sin \lambda (t - t_0) \right\}. \quad (24)$$

Формулы (22), (23) и (24) позволяют найти во всяком частном случае значение максимального обжатия пружины, а следовательно, и значение максимальной на нее нагрузки.

4. Пределы изменения динамического множителя соответствующего крайним значениям отношения $t_1 : t_0$. Рассмотрим, в каких пределах меняется величина Δ , когда t_2 настолько велико, что v_{max} определяется формулой (22).

Если время нарастания силы P до максимума равно нулю, то согласно формуле (23)

$$\Delta = \frac{P^m}{EM} \frac{t_1}{t_0}$$

и согласно формуле (22)

$$v_{max} = \frac{P^m}{N} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{2\Delta}{P^m N}} \right\} = v_{cr} \left\{ 1 + \sqrt{1 + \frac{2\Delta}{v_{cr}^2}} \right\}. \quad (25)$$

Если время нарастания силы P до максимума равно времени выбирания зазора, то согласно формуле (23)

$$\Delta = \frac{P^m}{EM} \frac{t_1}{t_0}$$

и, следовательно, в силу (22)

$$v_{max} = v_{cr} \left\{ 1 + \sqrt{1 + 1,75 \frac{\Delta}{v_{cr}^2}} \right\}. \quad (26)$$

Таким образом, если t_2 достаточно велико, а длительность нарастания силы P до максимума не превышает времени выбирания зазора, то динамический коэффициент, т. е. отношение

$$\chi = \frac{v_{max}}{v_{cr}},$$

лежит в пределах

$$1 + \sqrt{1 + 1,75 \frac{\Delta}{v_{cr}^2}} < \chi < 1 + \sqrt{1 + 2 \frac{\Delta}{v_{cr}^2}}. \quad (27)$$

Достигая нижнего из этих пределов, если $t_1 = t_0$, и верхнего, если $t_1 = 0$.

Пределы, устанавливаемые неравенствами (27), довольно узки.

так что при t_2 достаточно большом, а Δ не меньшем, чем даваемое равенством

$$\Delta = \frac{P^m}{EM} \frac{v_{cr}^2}{4}, \quad (28)$$

можно приближенно принимать

$$\chi = 1 + \sqrt{1 + 1,75 \frac{\Delta}{v_{cr}^2}}. \quad (29)$$

Если полная длительность действия силы t_2 превышает время выбирания зазора t_0 , но не настолько велика, чтобы v успело достигнуть своего максимума при t меньшем, чем t_2 , v_{max} должно быть определено путем вычисления максимума величины, определенной равенством (24).

Максимум этот не может превышать величины v_{max} , определенной равенством (22), и может во всяком частном случае быть легко вычислен. Не останавливаясь на данном вопросе более подробно, обратимся к рассмотрению случая, когда время выбирания зазора меньше времени нарастания силы P до максимума.

5. Случай, когда $t_0 < t_p$. Если $t_0 < t$, то как легко видеть, между величиной зазора Δ и длительностью его выбирания должна существовать зависимость

$$\Delta = \frac{P^m}{EM} \frac{t_1}{t_0}, \quad (30)$$

из которой видно, что

$$t_0 : t_1 = \left(\frac{EM \Delta}{P^m t_1} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (31)$$

Скорость, накапливаемая массой M к началу второй стадии движения, определяется зависимостью

$$v = \frac{P^m}{EM} \frac{t_1}{t_0} = \frac{P^m t_1 (EM \Delta)^{\frac{1}{2}}}{EM t_0}.$$

откуда, обозначая через α отношение

$$\alpha = t_0 : t_1, \quad (32)$$

определяемое равенством (31), можно получить

$$v = \frac{P^m \Delta}{EM} \alpha^2. \quad (33)$$

Во время второй стадии своего движения масса движется, в этом случае, как если бы на нее одновременно действовали, начиная с момента времени $t = t_0 = \alpha t_1$:

- сила P^m , внезапно приложенная при $t = t_0$;
- сила P , определяемая графиком рис. 2.

Начальные условия движения массы M в эту стадию движения даются равенствами

$$\left. \begin{aligned} w &= 0 \\ \dot{a} &= \frac{P\alpha}{2M} \alpha^2 \end{aligned} \right\} \text{ при } t = \alpha t_1. \quad (34)$$

Можно поэтому принять, что во время второй стадии движения

$$w = \frac{P\alpha}{N} \left\{ \frac{\lambda t_1}{2} \alpha^2 \sin \lambda (t - \alpha t_1) + \alpha [1 - \cos \lambda (t - \alpha t_1)] \right\} + \frac{t - \alpha t_1}{t_1} - \frac{1}{\lambda t_1} \sin \lambda (t - \alpha t_1) - \left[\frac{t - t_1}{t_1} - \frac{1}{\lambda t_1} \sin \lambda (t - t_1) \right]. \quad (35)$$

Первой строкой правой части этого равенства выражается начальная скорость массы M ; второй строкой до знака $|\lambda t_1$ — движение, порожденное силой αP , внезапно приложенной при $t = \alpha t_1$; заключен двумя последними членами определяется движение, порожденное силой, изображенной на рис. 2.



Рис. 2.

Формула (35) позволяет без особого труда подсчитать значения w , соответствующие ряду частных значений t , и тем определить максимальное значение величины обжатия пружины.

6. Предельные случаи. Рассмотрим, какие результаты дает нам формула (35) в предельных случаях, когда:

- зазор Δ равен нулю и, следовательно, $\alpha = 0$,
- времени выбора зазора равно длительности нарастания силы до максимума и, следовательно, $\alpha = 1$.

В случае, если $\alpha = 0$, формула (35) обращается в известную формулу

$$w = \frac{P\alpha}{N} \left\{ \frac{t}{t_1} - \frac{\sin \lambda t}{\lambda t_1} \right\} - \left[\frac{t - t_1}{t_1} - \frac{\sin \lambda (t - t_1)}{\lambda t_1} \right], \quad (36)$$

соответствующую случаю, когда зазора нет.

В случае если $\alpha = 1$, формула (35) дает

$$w = \frac{P\alpha}{N} \left\{ \frac{\lambda t_1}{2} \sin \lambda (t - t_1) + 1 - \cos \lambda (t - t_1) \right\}, \quad (37)$$

т. е. как раз тот результат, который в случае $t_2 = t_1$ дает также формула (21).

Такие образцы в предельных случаях, когда $\alpha = 0$ или $\alpha = 1$, формула (35) дает те же результаты, которые для данных случаев найдены были иным путем. Это может служить косвенным подтверждением ее правильности.

7. Резюме всего сказанного в предыдущих пунктах. Подводя итоги всему сказанному выше, можно констатировать следующее:

1. Если зазор между начальным положением массы M и отражающей ее под пружинной достаточно велик, то динамический множитель определяется независимо от величины зазора формулой (12), в которой τ есть период собственных колебаний системы, а $t_{\text{зам}}$ — приведенная длительность действующего на массу M импульса:

$$t_{\text{зам}} = \frac{1}{P} \int_0^t P(t) dt.$$

2. Если сила F меняется во времени по закону, соответствующему рис. 1, и длительность t_2 выбора зазора превышает длительность нарастания силы F до максимума, но достаточно мала по сравнению с полной длительностью действия силы P , то динамический множитель χ лежит в пределах

$$1 + \sqrt{1 + 1,5 \frac{\Delta}{w_{\text{ст}}}} < \chi < 1 + \sqrt{1 + 2 \frac{\Delta}{w_{\text{ст}}}}.$$

Приближенная величина коэффициента χ может быть определена по формуле

$$\chi \approx 1 + \sqrt{1 + 1,75 \frac{\Delta}{w_{\text{ст}}}}.$$

где $w_{\text{ст}}$ — статическое обжатие пружины, соответствующее максимальному значению силы F .

3. Если длительность выбора зазора превышает длительность нарастания силы F до максимума, но достаточно мала по сравнению с полной длительностью действия силы P , то динамический множитель χ может не достигнуть величины, соответствующей случаю (2), и тогда максимальное значение длины пружины определяется формулой (24).

4. Если длительность выбора зазора меньше длительности нарастания силы F до максимума, то максимальное обжатие пружины может быть определено формулой (35), где через α обозначено отношение $t_2 : t_1$, определенное равенством (31).

5. В предельном случае, когда зазора между массой M и отражающей ее под пружинной нет, формула (35) обращается в

(36) и динамический множитель может быть определен по известной формуле

$$\chi = 1 + \frac{\sin \frac{\lambda t_0}{2}}{\frac{\lambda t_0}{2}} \quad (38)$$

б. В предельном случае, когда длительность нарастания силы P до максимума равна длительности нарастания зазора, формула (35) обращается в (37), и динамический множитель χ определяется равенством (26).

7. Наличие в системе зазора увеличивает величину динамического множителя по сравнению со случаем, когда зазора в системе нет, и увеличивает длину, оказываемое на величину множителя длительностью нарастания силы до максимума.

8. Общий случай, когда $P(t)$ есть любая функция от t , а Δ имеет любое значение. Сказанное выше относится в основном к тому случаю, когда сила $P(t)$ меняется во времени по закону, изображенному на рис. 1.

Если сила $P(t)$ является иной функцией от времени, то для определения длительности t_0 выборки зазора надо построить кривую, дающую в функции от t величину интеграла

$$y = \int_0^t \frac{P(t)}{M} dt^2 \quad (39)$$

и взять эту кривую ординатой $y = \Delta$.

Абсцисса выбранной точки даст величину t_0 . Определив эту величину, можно скорость массы M в момент соприкосновения с пружиной определить по формуле

$$v_0 = \int_0^{t_0} \frac{P(t)}{M} dt \quad (40)$$

После чего определение величины α для последующих моментов времени может быть найдено интегрированием уравнения

$$M \ddot{u} + N u = P(t) \quad (41)$$

при начальных условиях движения:

$$u = 0;$$

$$\dot{u} = v_0 = \int_0^{t_0} \frac{P(t)}{M} dt \quad \text{при } t = t_0 \quad (42)$$

Соответствующий этим начальным условиям интеграл уравнения (41) дается равенством

$$u = v_0 \frac{1}{\lambda} \sin \lambda (t - t_0) + \int_{t=t_0}^{t=t} \frac{P(\xi)}{M \lambda} \sin \lambda (t - \xi) d\xi \quad (43)$$

Вычислив его для ряда частных значений t , можно путем построения соответствующего графика определить величину u_{\max} и тем определить максимальное значение загрузки на пружину, ограничивающую ход рассматриваемой массы.

§ 2. Предлагаемая методика определения динамического коэффициента для жесткого барабана башенных артиллерийских установок

1. Общие замечания. В предыдущем параграфе рассмотрен подробно вопрос о длине зазора на величину динамического множителя для системы с одной степенью свободы. Распространять все результаты, полученные в этом параграфе, непосредственно на расчет жестких барабанов башенных артиллерийских установок было бы неосмотрительно, ибо башенная установка не только является системой более чем с одной степенью свободы, но и такой системой, на различные из возможных отклонений которой зазор в боевом штатре влияет по-разному.

Действительно, предположим, что диаметральной плоскостью башенной установки является плоскостью симметрии, можно колебания башенной установки, параллельные этой плоскости, рассматривать как колебания, независимые от вращения башни вокруг ее вертикальной оси. Всякое же плоское перемещение башни, параллельное ее диаметральной плоскости, может быть охарактеризовано тремя перемещениями: вертикальным и горизонтальным перемещением центра инерции и вращением вокруг центра инерции.

Центр инерции башенной установки для облегчения ее горизонтального наведения при крепе приводит к вертикальной оси башни. Можно ограничиться, следовательно, рассмотрением случая, когда центр инерции параллельной части башенной установки лежит на упомянутой только что ее оси. Если при этих условиях вертикальные опоры жесткого барабана устроены так, что при поступательном по направлению шара перемещении жесткого барабана линия действия равнодействующей их реакций совпадает с осью башни, то вертикальные колебания башни можно считать независимыми от двух других ее колебательных движений, параллельных плоскости стрельбы, а только эти последние два колебания башни, а именно вращение вокруг центра инерции и горизонтальное перемещение центра инерции, и следует рассмотреть как движения связанные.

Основной особенностью этих двух движений является то, что в угловых своих колебаниях вокруг центра инерции башни

встречает упругое противодействие со стороны жесткого барабана с самого начала соответствующего колебания; при горизонтальных же колебаниях она до выбора зазора не испытывает противодействия со стороны жесткого барабана, прикладываемого к башне горизонтальную реакцию лишь начиная с момента выбора расчетного зазора в боевом штире.

Благодаря данной особенности рассматриваемой конструкции, в движении ее следует различать следующие две основные стадии.

Стадия 1, во время которой жесткий барабан еще не оказывает горизонтальной реакции к башне.

Стадия 2, во время которой башня встречает со стороны жесткого барабана противодействие ее горизонтальным перемещениям.

Обычно длительность первой стадии движения не превышает полного времени отката оружейных стволов, так что в движении системы, соответствующем второй стадии движения, приходится различать в свою очередь два реальных периода: период от начала второй стадии движения до исчезновения давления в компрессорах и период свободных колебаний, совершаемых системой по инерции уже после исчезновения усилий от отката.

В соответствии с вышесказанным рассмотрим отдельно сначала вертикальные колебания башни, затем для остальных ее перемещений во время первой стадии движения и, наконец, колебания башни во время последней стадии этого движения.

2. Вертикальные перемещения башни. Пусть

- R — давление башни на шаровой погон;
- v — вертикальное перемещение башни;
- v_1 — та его часть, которая зависит от обжатия шаров;
- v_2 — та его часть, которая зависит от обжатия жесткого барабана;
- v_3 — та его часть, которая происходит от деформации вертикальных опор жесткого барабана;
- k_1 — коэффициент жесткости шаров;
- k_2 — коэффициент жесткости самого барабана;
- k_3^0 — коэффициент жесткости i -й вертикальной опоры жесткого барабана;
- R_1 — вертикальная реакция этой опоры;
- N — коэффициент жесткости всей конструкции в целом;
- M — масса башни;
- G — вес башни;
- $P(t)$ — давление компрессора;
- β — угол возвышения.

Тогда для размыкания величины N можно будет составить следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} v &= v_1 + v_2 + v_3; \\ k_1 v_1 &= R; \\ k_2 v_2 &= R; \\ k_3^0 v_3 &= R; \\ \sum R_1 &= R. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Исключая из системы величины v_i и R_i , нетрудно видеть, что

$$v = \frac{R}{k_1} + \frac{R}{k_2} + \frac{R}{\sum k_3^0}, \quad (2)$$

что, будучи приведено к виду

$$R = Nv, \quad (3)$$

получим

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{\sum k_3^0}. \quad (4)$$

Размыкая с помощью равенства (4) величину N , можно написать уравнение вертикальных колебаний башни в виде равенства

$$M \ddot{v} + Nv = P(t) \sin \beta + G. \quad (5)$$

Отсчитывая $t=0$ от того состояния системы, при котором жесткий барабан не напряжен, можно начальные условия движения написать так:

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{G}{N}; \\ \dot{v} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{ при } t = 0. \quad (6)$$

Это совместно с (5) позволяет считать v определенным равенством

$$v = \frac{G}{N} + \frac{\sin \beta}{M} \int_0^t \frac{P(\xi)}{\lambda} \sin \lambda (t - \xi) d\xi, \quad (7)$$

где через λ обозначена частота вертикальных свободных колебаний, т. е. величина

$$\lambda = \sqrt{\frac{N}{M}}. \quad (8)$$

Резкая величина ν с помощью равенства (7) для ряда значений t , можно определить давление башни на жесткий барабан с помощью выражения (3), что дает

$$R = G + \sin \beta \int_{\xi=0}^{\xi=t} F(\xi) \sin \lambda (t - \xi) d[\lambda \xi]. \quad (9)$$

В частном случае, когда сила F определяется в функции от t изюмом рис. 3 и полная действительность действия силы F достаточно велика, можно из формулы (9) получить, как известно, следующее выражение для максимального значения силы R :

$$R_{\max} = G + \sin \beta F^* \left(1 + \frac{\sin \frac{\lambda t_0}{2}}{\frac{\lambda t_0}{2}} \right). \quad (10)$$

В этом случае коэффициент динамичности для вертикальной составляющей силы отката определяется хорошо известной зависимостью

$$x = 1 + \frac{\sin \frac{\lambda t_0}{2}}{\frac{\lambda t_0}{2}}, \quad (11)$$

которой и можно пользоваться в практических расчетах, если имеется уверенность в правильности определения величины λt_0 . Обычно исходные данные для ее определения бывают не вполне надежны, и осторожнее бывает полагать $\sin \frac{\lambda t_0}{2}$ в формуле (11) равным единице при всех значениях величины λt_0 , превышающих π (см. наш доклад в Ежегоднике союза морских инженеров за 1916 г.).*

3. Дифференциальные уравнения горизонтальных и вращательных колебаний башни. Обратимся к рассмотрению горизонтальных перемещений центра тяжести башни и ее вращения вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно к плоскости стрельбы (рис. 3).

Обозначим:

- $Q(t)$ — горизонтальная составляющая усилия отката;
- M — масса башни;
- $K = M \rho^2$ — момент инерции массы башни относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести башни;

* См. схему на стр. 666.

- \mathcal{M} — реактивный момент жесткого барабана на башню;
- H — горизонтальная составляющая реакции жесткого барабана на башню;
- A — возвышение центра тяжести башни над плоскостью боевого штыря;
- e — возвышение над той же плоскостью точки пересечения оси орудия с осью башни;
- y — горизонтальное перемещение центра тяжести башни по направлению действия силы Q ;
- α — горизонтальное перемещение в том же направлении вращающейся части башенной установки, измеренное на уровне боевого штыря;
- μ — горизонтальное перемещение верхнего кольца жесткого барабана;
- Δ — расчетная величина начального зазора в боевом штыре;
- θ — угловое перемещение башни вокруг оси, проходящей через ее центр тяжести перпендикулярно, когда дульные срезы орудий поднимаются.

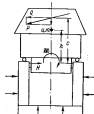


Рис. 3.

Тогда дифференциальные уравнения движения башни можно будет написать в форме равенств:

$$\begin{cases} M \ddot{y} = Q(t) - H; \\ K \ddot{\theta} = (e - h) Q(t) + H h - \mathcal{M}. \end{cases} \quad (12)$$

Между величинами y , α и θ будет существовать зависимость

$$\alpha = y - h \theta \quad (13)$$

и до тех пор, пока величина x , определяемая равенством (11), не сравняется с величиной начального зазора в боевом штыре, увеличенным на величину и горизонтального перемещения верхнего кольца, т. е. пока будет удовлетворено неравенство

$$\{e - y - h \theta < \alpha + \Delta, \quad (14)$$

можно будет горизонтальную реакцию жесткого барабана H считать равной нулю. Реактивный момент жесткого барабана

III, а равно и горизонтальное перемещение жесткого барабана будет пропорционально углу θ .

В момент, когда величина λ , определяемая равенством (13), становится равной сумме величин α и Δ , начинается вторая стадия движения, во время которой отличными от нуля являются III и II.

Перемещения α и θ должны быть функциями от обеих только что упомянутых углов. Пренебрегая нелинейностью деформации шарового погона, можно принять для первой приближения, что

$$\begin{cases} \alpha = A_{11}H + A_{12}III; \\ \theta = A_{21}H + A_{22}III, \end{cases} \quad (15)$$

где

$$A_{12} = A_{21}. \quad (16)$$

Значения величин A_{11} , A_{12} и A_{21} зависят от устройства опор жесткого барабана и его конструкции, а равно от устройства подбашенного шарового погона. В каждом частном случае величину их можно определить либо бы с помощью теоремы Кастельяно.

Когда это выполнено, можно для первой стадии движения написать:

$$\begin{cases} M\ddot{y} = Q(t); \\ K\ddot{\theta} + \frac{1}{\lambda_m}\dot{\theta} = (c - \lambda)Q(t) \end{cases} \quad (17)$$

и

$$\alpha = A_{11}III = \frac{A_{12}}{A_{22}}\theta = a\theta, \quad (18)$$

где a — некоторая вполне во всяком частном случае определенная константа.

Как уже отмечено, уравнениями (17) и (18) движение системы определяется вплоть до того момента времени, пока величина $\lambda = y - \lambda\theta$ остается меньше $\alpha + \Delta = a\theta + \Delta$.

Обозначив через t_1 то значение времени t , при котором удовлетворяется первый раз уравнению

$$y - \lambda\theta = a\theta + \Delta, \quad (19)$$

можно для всех последующих моментов времени, для которых H остается положительным, принимать

$$\begin{cases} M\ddot{y} = Q(t) - H; \\ K\ddot{\theta} = (c - \lambda)Q(t) + \lambda H - III; \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \alpha = A_{11}H + A_{12}III; \\ \theta = A_{21}H + A_{22}III \end{cases} \quad (21)$$

и

$$y - \lambda\theta = \alpha + \Delta. \quad (22)$$

Таким образом, движение рассматриваемой системы определяется во время первой стадии движения уравнениями (17) и (18), во время же второй стадии движения уравнениями (20), (21) и (22), причем первая стадия движения заканчивается в тот момент времени, когда первый раз удовлетворяется равенство (19), вторая же стадия движения — тогда, когда величина H перестает впервые быть положительной.

Упомянутыми группами уравнений и следует пользоваться при определении максимального значения усилий, прилагаемых башней к жесткому барабану.

4. Интегрирование уравнений движения, соответствующих первой стадии движения. Считая, что в начальный момент системы находится в покое и $y = \dot{y} = \dot{\theta} = 0$, можно путем интегрирования уравнений (17) легко убедиться в том, что во время всей первой стадии движения

$$y = \int_0^t \int_0^{\xi} \frac{Q(\xi)}{M} d\xi^2 \quad (23)$$

и

$$\theta = (c - \lambda) \int_0^t \int_0^{\xi} \frac{Q(\xi)}{K\lambda_m} \sin \lambda_m(t - \xi) d\xi. \quad (24)$$

где

$$\lambda_m = \sqrt{\frac{1}{\lambda_m K}}. \quad (25)$$

и что во время этой стадии движения, следовательно,

$$\begin{aligned} y - \lambda\theta - a\theta &= \int_0^t \int_0^{\xi} \frac{Q(\xi)}{M} d\xi^2 - \\ &- (\lambda + a) \int_0^t \int_0^{\xi} \frac{Q(\xi)}{K\lambda_m} \sin \lambda_m(t - \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (26)$$

Вычислив с помощью формулы (24) значения величины $y - (\lambda + a)\theta$ для различных моментов времени, можно по найденным значениям этой величины построить график, изображающий величину $\lambda - a\theta = y - (\lambda + a)\theta$ как функцию от t .

Построив такой график, можно легко определить момент окончания первой стадии движения. Для этого достаточно заглянуть упомянутый график сдвигать

$$\lambda - a\theta = \Delta \quad (27)$$

и определить отсчет соответствующего момента времени.

Значения величин y, θ и \dot{y} , соответствующие данному моменту времени, могут быть найдены после этого непосредственно с помощью формул (21), (22) и (18), скорости же \dot{y} и $\dot{\theta}$ — с помощью равенств

$$\dot{y} = \int_0^t \frac{Q(t)}{M} dt \quad (26)$$

$$\dot{\theta} = (c - k) \int_0^t \frac{Q(t)}{K} \cos \lambda_2 (t - \xi) d\xi \quad (27)$$

получаемых из (21) и (22) путем дифференцирования по времени.

Найденными таким образом значениями величин y, θ, \dot{y} и $\dot{\theta}$ для начального момента первой стадии движения определяются начальные значения всех этих величин для второй стадии его.

Б. Движение системы во время второй его стадии. Обозначим значения величин $t, y, \theta, \dot{y}, \dot{\theta}$, соответствующие концу первой стадии движения, через $t_0, y_0, \theta_0, \dot{y}_0$ и $\dot{\theta}_0$. Тогда задача о размыкании движения системы, соответствующего второй стадии ее, сводится к разысканию такого интеграла уравнений (12), (15), (20), который удовлетворял бы начальным условиям

$$\left. \begin{aligned} y &= y_0; & \theta &= \theta_0; \\ \dot{y} &= \dot{y}_0; & \dot{\theta} &= \dot{\theta}_0 \end{aligned} \right\} \text{ при } t = t_0 \quad (28)$$

Для разыскания такого интеграла упомянутых только что уравнений исключаем прежде всего величину \dot{y} из системы рассматриваемых уравнений. Подставив \dot{y} из (20) в (15), будем иметь вместо последних

$$\left. \begin{aligned} y - k\theta - \Delta &= A_{11}H + A_{12}M; \\ \theta &= A_{21}H + A_{22}M, \end{aligned} \right\}$$

или, прибавляя к первому из только что записанных уравнений второе, предварительно умноженное на k ,

$$\left. \begin{aligned} y - \Delta &= (A_{11} + k A_{21})H + (A_{12} + k A_{22})M; \\ \theta &= A_{21}H + A_{22}M. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Введя для краткости обозначения:

$$\left. \begin{aligned} A_{11} + k A_{21} &= \bar{A}_{11}; \\ A_{12} + k A_{22} &= \bar{A}_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

можно равенствам (29) придать вид:

$$\left. \begin{aligned} y - \Delta &= \bar{A}_{11}H + \bar{A}_{12}M; \\ \theta &= A_{21}H + A_{22}M. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Величины H и M , входящие в правую часть равенств (31), можно разыскать из уравнений (12). Сделав это, получим

$$\left. \begin{aligned} H &= Q(t) - M \ddot{y}; \\ M &= c Q(t) - (K \ddot{\theta} + k M \ddot{y}), \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

что после подстановки в (31) дает:

$$\left. \begin{aligned} y - \Delta &= (\bar{A}_{11} + c \bar{A}_{12}) Q(t) - \bar{A}_{12} M \ddot{y} - (\bar{A}_{11} + k \bar{A}_{12}) M \ddot{\theta}; \\ \theta &= (A_{21} + c A_{22}) Q(t) - A_{22} M \ddot{y} - (A_{21} + k A_{22}) M \ddot{\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Введя для простоты обозначения:

$$\left. \begin{aligned} B_{11} &= \bar{A}_{11} + c \bar{A}_{12}; & B_{12} &= (A_{21} + c A_{22}) k; \\ B_{21} &= A_{21} + k A_{22}; & B_{22} &= (A_{21} + k A_{22}) k; \\ B_{13} &= \frac{\bar{A}_{12} c^2}{k}; & B_{23} &= A_{22} c^2. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

можно переписать уравнения (33) так:

$$\left. \begin{aligned} y - \Delta &= B_{11} Q(t) - M B_{12} \ddot{y} - M B_{21} (k \ddot{\theta}); \\ k \theta &= B_{21} Q(t) - M B_{22} \ddot{y} - M B_{23} (k \ddot{\theta}). \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

В полученной системе уравнений неизвестные y и θ не разделены.

Чтобы разделить неизвестные в системе основных дифференциальных уравнений задачи, введем, используя метод Лагранжа, новые переменные p_1 и p_2 подстановкой:

$$\left. \begin{aligned} y - \Delta &= v_{11} p_1 + v_{12} p_2; \\ k \theta &= v_{21} p_1 + v_{22} p_2. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

где v_{ij} — некоторые постоянные, которые подберем так, чтобы в частном случае, когда $Q(t) = 0$, система уравнений (35) допускала частные решения вида:

$$p_1 = a_1 \cos(\lambda_1 t + \epsilon_1); \quad p_2 = 0 \quad (37)$$

и

$$p_1 = 0; \quad p_2 = a_2 \cos(\lambda_2 t + \epsilon_2), \quad (38)$$

где $a_1, a_2, \lambda_1, \lambda_2, \epsilon_1$ и ϵ_2 — некоторые постоянные.

Решение

$$\left. \begin{aligned} y - \Delta &= v_{11} a_1 \cos(\lambda_1 t + \epsilon_1); \\ k \theta &= v_{22} a_2 \cos(\lambda_2 t + \epsilon_2) \end{aligned} \right\}$$

удовлетворяет уравнениям:

$$\left. \begin{aligned} y - \Delta &= -M B_{11} \ddot{y} - M B_{12} (k \ddot{\theta}); \\ k \theta &= -M B_{21} \ddot{y} - M B_{23} (k \ddot{\theta}). \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

если v_{11} и v_{21} связаны между собой зависимостями:

$$\begin{aligned} v_{11} &= M \lambda^2 (B_{11} v_{11} + B_{21} v_{21}) \\ v_{21} &= M \lambda^2 (B_{12} v_{11} + B_{22} v_{21}). \end{aligned} \quad (40)$$

Решение

$$\begin{aligned} y - \Delta &= v_{11} \sigma_1 \cos(\lambda_1 t + \epsilon_1), \\ \delta \theta &= v_{21} \sigma_2 \sin(\lambda_2 t + \epsilon_2) \end{aligned}$$

удовлетворяет тем же уравнениям (39), если v_{11} и v_{21} связаны между собой зависимостями:

$$\begin{aligned} v_{11} &= M \lambda^2 (B_{11} v_{11} + B_{21} v_{21}) \\ v_{21} &= M \lambda^2 (B_{12} v_{11} + B_{22} v_{21}). \end{aligned} \quad (41)$$

Уравнения (40) являются линейными однородными алгебраическими уравнениями относительно v_{11} и v_{21} . Уравнения (41) являются уравнениями такого же вида, но относительно неизвестных v_{11} и v_{21} . Они дают для v_{11} решение, отличное от нуля только в том случае, если их определитель равен нулю, т. е. если

$$\begin{vmatrix} (M \lambda^2) B_{11} - 1 & M \lambda^2 B_{12} \\ M \lambda^2 B_{21} & (M \lambda^2) B_{22} - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (42)$$

Уравнение (42) является квадратным относительно неизвестной λ^2 . Оба его корня должны быть вещественными и положительными. Приняв меньший из них за λ_1^2 , больший за λ_2^2 , можно из уравнений (40) определить соотношение между величинами v_{11} и v_{21} из уравнений же (41) соотношение между величинами v_{11} и v_{21} . Допустим, что соотношение:

$$v_{11} : v_{21}$$

и

$$v_{12} : v_{22}$$

указанным образом найдем. Тогда, введя в рассмотрение числа

$$\begin{aligned} k_1 &= \left(\frac{v_{11} - v_{21}}{v_{21}} \right)^{-1} \\ k_2 &= \left(\frac{v_{12} - v_{22}}{v_{22}} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (43)$$

можно будет, приняв

$$v_{11} - v_{21} = v_{12} - v_{22} = 1,$$

записать

$$\begin{aligned} y - \Delta - \delta \theta &= (v_{11} - v_{21}) p_1 + (v_{12} - v_{22}) p_2 = p_1 + p_2 \\ y - \Delta &= v_{11} p_1 + v_{21} p_2 = k_1 p_1 + k_2 p_2 \end{aligned} \quad (44)$$

где k_1 и k_2 — найденные отвлеченные числа.

Координаты p_1 и p_2 являются главными координатами исследуемой системы.

Угловая частота собственных колебаний системы, соответствующих первой из этих координат, как уже сказано, определяется меньшим корнем уравнения (42), угловая частота второго главного колебания — большим из корней упомянутого только что уравнения.

Зная числа λ_1^2 , λ_2^2 , k_1 и k_2 , можно без труда составить дифференциальные уравнения вынужденных колебаний системы в главных координатах. Для этого может служить схема Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{p}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial p_k} + \frac{\partial V}{\partial p_k} = P_k, \quad (45)$$

где

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} M \dot{\theta}^2 \quad (46)$$

есть кинетическая энергия системы;

V — потенциальная энергия ее деформации;

P_k — обобщенная сила, соответствующая k -й главной координате.

Принимая во внимание, что в главных координатах T должно выражаться разностями

$$T = \frac{1}{2} (M_1 \dot{p}_1^2 + M_2 \dot{p}_2^2), \quad (47)$$

можно на основании зависимостей (46), (44) и (43) легко видеть, что

$$\begin{aligned} M_1 &= M \left[k_1^2 - \frac{c}{k_1} (k_2 - 1)^2 \right]; \\ M_2 &= M \left[k_2^2 - \frac{c}{k_2} (k_2 - 1)^2 \right]. \end{aligned} \quad (48)$$

Поэтому, если числа k_1 , c , k_2 и k_2 ниже unity, то коэффициенты M_1 и M_2 выражения (47) находятся без труда.

Для нахождения потенциальной энергии системы можно воспользоваться известным из теории малых колебаний соотношением

$$V = \frac{1}{2} (M_1 \lambda_1^2 p_1^2 + M_2 \lambda_2^2 p_2^2). \quad (49)$$

Для определения обобщенных сил P_k достаточно, как известно, дать координате p_k бесконечно малое приращение δp_k и, определяя работу δR внешних сил, произходимую на этом приращении, разложить P_k из уравнения

$$P_k = \delta R : \delta p_k.$$

В рассматриваемом случае внешние силы приводятся к одной лишь силе $Q(t)$, приложенной к точке A (рис. 3). Когда координаты

нак p_0 увеличивается на величину δp_0 , точка приложения этой силы проходит в направлении действия силы $Q(t)$ путь

$$\left[1 + (k_1 - 1) \frac{c}{k}\right] \delta p_0.$$

Можно поэтому признать, что в данном случае

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= \left[1 + (k_1 - 1) \frac{c}{k}\right] Q(t); \\ P_2 &= \left[1 + (k_2 - 1) \frac{c}{k}\right] Q(t). \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

Принимая во внимание равенства (47), (49) и (50), можно интересующие нас уравнения движения (45) выписать в развернутом виде следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} M_1 \ddot{p}_1 + M_1 \lambda_1^2 p_1 &= \left[1 + (k_1 - 1) \frac{c}{k}\right] Q(t); \\ M_2 \ddot{p}_2 + M_2 \lambda_2^2 p_2 &= \left[1 + (k_2 - 1) \frac{c}{k}\right] Q(t). \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

Общий интеграл этих уравнений дается равенствами:

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \frac{1}{M_1 \lambda_1^2} \left\{ \int_{t_0}^{t-\tau} \left[1 + (k_1 - 1) \frac{c}{k}\right] Q(\xi) \sin \lambda_1 (t - \xi) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + p_1^0 \cos \lambda_1 (t - t_0) + \frac{1}{\lambda_1} \dot{p}_1^0 \sin \lambda_1 (t - t_0) \right\}; \\ p_2 &= \frac{1}{M_2 \lambda_2^2} \left\{ \int_{t_0}^{t-\tau} \left[1 + (k_2 - 1) \frac{c}{k}\right] Q(\xi) \sin \lambda_2 (t - \xi) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + p_2^0 \cos \lambda_2 (t - t_0) + \frac{1}{\lambda_2} \dot{p}_2^0 \sin \lambda_2 (t - t_0) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

где p_1^0 , \dot{p}_1^0 , p_2^0 и \dot{p}_2^0 — начальные значения главных компонент p_1 и их производных по времени, определять которые в силу равенств (28) и (44) можно из уравнений

$$\left. \begin{aligned} p_1^0 + p_2^0 &= u_0 = (y_0 - \Delta) - h \delta_0; \\ k_1 p_1^0 + k_2 p_2^0 &= y_0 - \Delta; \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{p}_1^0 + \dot{p}_2^0 &= \dot{u}_0 = \dot{y}_0 - h \dot{\delta}_0; \\ k_1 \dot{p}_1^0 + k_2 \dot{p}_2^0 &= \dot{y}_0. \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Определив величины p_1^0 и p_2^0 из уравнений (53), а \dot{p}_1^0 и \dot{p}_2^0 из уравнений (54), можно их подставить в равенства (52) и затем подставить величинами p_1 и p_2 для ряда частных значений t .

Когда это выполнено, можно без труда определить для тех же моментов времени величины η и $\delta \theta$ по формулам (44) и

$$\Delta \theta = (k_1 - 1) p_1 + (k_2 - 1) p_2. \quad (55)$$

и, решив предварительно уравнения (15) относительно H и Π , подставить для тех же значений t значения H и Π .

Вычертив кривые, дающие H и Π как функции от t , нетрудно определить по ним максимальные значения величин H и Π , т. е. обобщенных условий жесткого барабана, и затем рассмотреть напряжение как в самом жестком барабане, так и в креплениях его к судовому корпусу, а равно и в шарах шарового погона.

6. Приближенный способ определения колебаний башни во время второй стадии ее движения. Хотя использованные вычислительной схемы предыдущего параграфа и не требуют особо сложных вычислений, тем не менее неточность исходных данных всего расчета может повлиять под определенное количество использованных вложенной в виде расчетной схемы как схемы, претендующей на точность, не соответствующую точности исходных данных.

В качестве приближенного приема, дающего, по-видимому, достаточную точность при несколько более простых выкладках, можно предложить прием, основанный на замене исследуемой системы, имеющей две степени свободы, системой, число степеней свободы которой на единицу меньше. В основу такой замены может быть положено допущение, что форма колебаний рассматриваемой системы совпадает во время второй стадии ее движения с формой статического отклонения башни под действием силы Q , приложенной в точке A (рис. 3).

Приняв это допущение, можно приближенную величину динамического множителя определять для жесткого барабана следующим образом.

С помощью формул (15) определяются перемещения η и θ для частного случая, когда

$$H = Q,$$

$$\Pi = 0.$$

Это дает:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= (A_{11} + c A_{21}) Q; \\ \theta &= (A_{21} + c A_{22}) Q. \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

и, следовательно,

$$\delta \theta = \eta = \frac{h(A_{21} + c A_{22})}{A_{11} + A_{21}} \quad (57)$$

Обозначив отношение $\delta \theta = \mu$, определенное формулой (57) через $k - 1$, т. е. положим

$$k \delta \theta = \mu = \frac{h(A_{21} + c A_{22})}{A_{11} + A_{21}} = k - 1, \quad (58)$$

будем на основании формул (50) и (58) иметь для второй стадии движения

$$(y - \Delta) : u = (k\theta + \alpha) : u = k, \quad (59)$$

и, следовательно,

$$T = \frac{1}{2} M \dot{y}^2 + \frac{1}{2} k \theta^2 = \frac{1}{2} M \left\{ \dot{\theta}^2 + (k-1)^2 \frac{g^2}{k^2} \dot{\theta}^2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2} M \left\{ 1 + \left(\frac{k-1}{k} \right)^2 \left(\frac{g}{k} \right)^2 \right\} \dot{y}^2 \right. \quad (60)$$

С другой стороны, из зависимостей (56) вытекает

$$y - \Delta = [(A_{11} + \epsilon A_{21}) + k(A_{12} + \epsilon A_{22})] Q,$$

что можно с помощью обозначения

$$\frac{1}{N} = [A_{11} + \epsilon A_{21} + k(A_{12} + \epsilon A_{22})] \quad (61)$$

привести к виду

$$N(y - \Delta) = Q. \quad (62)$$

Вычислив величину N с помощью формул (61), можно разложить потенциальную энергию системы с помощью зависимости

$$V = \frac{1}{2} Q (y - \Delta) = \frac{1}{2} N (y - \Delta)^2, \quad (63)$$

вытекающей непосредственно из теоремы Клайперона. Таким образом, приняв, что во время второй стадии движения между $\Delta\theta$ и Δy существует соотношение (57), можно для этой стадии движения принимать

$$T = \frac{1}{2} M \left\{ 1 + \left(\frac{k-1}{k} \right)^2 \left(\frac{g}{k} \right)^2 \right\} \dot{y}^2 \quad (64)$$

и

$$V = \frac{1}{2} N (y - \Delta)^2, \quad (65)$$

где N определяется равенством (61).

Располагая этими выражениями для T и V , можно дифференциальное уравнение для определения перемещения $(y - \Delta)$ составить по схеме Лагранжа:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial (y - \Delta)} + \frac{\partial V}{\partial (y - \Delta)} = P(t), \quad (64)$$

где $P(t)$ — обобщенная сила, соответствующая перемещению $(y - \Delta)$. Определив последнюю по общему правилу, нетрудно видеть, что в силу равенства (58) должно быть

$$P(t) = Q(t) \left[\frac{k-1}{k} \frac{c}{k} + \frac{1}{k} \right]. \quad (65)$$

Поэтому, размытая уравнения (64), для второй стадии движения получим уравнение

$$M \left\{ 1 + \left(\frac{k-1}{k} \right)^2 \left(\frac{g}{k} \right)^2 \right\} \ddot{y} + N (y - \Delta) = \\ = \left[\frac{k-1}{k} \frac{c}{k} + \frac{1}{k} \right] Q(t), \quad (66)$$

общий интеграл которого дается равенством

$$y = \Delta + \frac{k-1}{k} \frac{c}{k} + \frac{1}{k} \int_{t_0}^{t-1} \frac{Q(\xi)}{M \lambda_0} \sin \lambda_0 (t - \xi) d\xi + \\ + (y_0 - \Delta) \cos \lambda_0 (t - t_0) + \frac{1}{\lambda_0} \dot{y}_0 \sin \lambda_0 (t - t_0), \quad (67)$$

где λ_0 — частота соответствующих свободных колебаний системы, определенная выражением

$$\lambda_0^2 = - \frac{N}{M \left\{ 1 + \left(\frac{k-1}{k} \right)^2 \right\}}. \quad (68)$$

t_0 — значение времени t , соответствующее началу второй стадии движения;

y_0 и \dot{y}_0 — начальные для второй стадии движения значения перемещения y и скорости \dot{y} , определить которые можно способом, изложенным в п. 4.

Изложенный только что приближенный прием должен давать тем лучше приближение к истине, чем меньше значения величин θ и $\dot{\theta}$, соответствующие началу второй стадии движения. В какой мере расходятся данные им результаты с результатами, полученными более точным расчетом, изложенным выше, может быть выяснено лишь на численных примерах, выполнение которых не входит в программу настоящей статьи.

Вопрос об окончательном выборе между приближенным способом расчета, изложенным только что, и более точным, изложенным выше, мы должны оставить открытым, пока не будет выполнено несколько численных расчетов, позволяющих оценить степень расхождения результатов, данных обоих рассмотренных приемов.

§ 3. Методика определения величины динамического множителя, предложенная Ю. А. Шиманским

1. Краткая характеристика методики, предложенной Ю. А. Шиманским. Иллюстра те расчетные приемы, которые, по нашему мнению, могут быть использованы для определения коэффициента динамичности для условий, действующих на жесткие барьеры башенных артиллерийских установок, рассмотрим, чем отличается

от них методика определения этого коэффициента, предложенная Ю. А. Шиманским.

Охарактеризовать в общих чертах данную методику можно следующими образами.

1. Ю. А. Шиманский при определении максимальной величины горизонтальной реакции жесткого барабана считает, что башня вертикального движения, характеризуемого углом θ , не имеет. Этим отождествляются во время второй стадии движения башни перемещение $y - \Delta$ с перемещением верхней точки жесткого барабана x , что приводит к замене выведенного выше приближенного уравнения (66) уравнением

$$M\ddot{x} + N_1 x = Q(t), \quad (69)$$

в котором величина N_1 определяется по формуле (61), формулу

$$\frac{1}{N_1} = A_{10} \quad (70)$$

Так как в выражении (15) величины A_{10} , A_{20} , A_{30} и A_{40} обычно положительны, то величина N_1 , входящая в уравнение Ю. А. Шиманского, может оказаться значительно большей величины N , входящей в уравнение (66). С другой стороны, в уравнение (69) масса башни M входит без множителя, с которым эта масса входит в уравнение (66).

Благодаря этому частота собственных колебаний башни, соответствующая уравнению Ю. А. Шиманского

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{N}{M}} = \sqrt{\frac{1}{M A_{10}}} \quad (71)$$

может оказаться значительно больше того же значения

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{N}{M \left[1 + \left(\frac{k-1}{k} \frac{g}{h} \right)^2 \right]}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{M [A_{10} + \epsilon A_{20} + \lambda (A_{30} + \epsilon A_{40}) \left[1 + \left(\frac{k-1}{k} \frac{g}{h} \right)^2 \right]}} \quad (72)$$

которое соответствует более точному, с принципиальной точки зрения, уравнению (66); статическое же смещение центра тяжести башни, соответствующее действию силы $Q(t)$, определяется в теории Ю. А. Шиманского величиной

$$x_{ст} = \frac{1}{N_1} Q(t), \quad (73)$$

вместо величины

$$(y - \Delta)_{ст} = \frac{k-1}{k} \frac{c}{N} + \frac{1}{k} Q(t) \quad (74)$$

оказывается в расчетах Ю. А. Шиманского преуменьшением по сравнению с действительностью.

Принимая во внимание сказанное в § 1, следует полагать, что теория Ю. А. Шиманского должна приводить к значениям динамического коэффициента, заниженным, по сравнению с действительностью, если только величина ϵ в формуле (74) не слишком мала по сравнению с величиной λ и, следовательно, множитель $\frac{k-1}{k} + \frac{1}{k}$ в формуле (74) не слишком мал по сравнению с единицей, чего при стрельбе с малыми углами возмущения (наиболее неблагоприятными для конструкции) ожидать нельзя.

2. Определение угла поворота башни производится в теории Ю. А. Шиманского следующим образом.

Разыскав величину x как функцию от времени решением уравнения (69), Ю. А. Шиманский определяет соответствующие значения горизонтальной реакции жесткого барабана с помощью уравнения, получаемого из первых обозначений из первого уравнения группы (15) путем отбрасывания второго члена правой части, т. е. с помощью равенства

$$H = \frac{1}{A_{10}} x = N_1 x, \quad (75)$$

а после того как величина горизонтальной реакции жесткого барабана таким образом определена, вычисляет величину углового перемещения жесткого барабана в предположении (рис. 4), что изгибаемая реакция жесткого барабана уравновешивается частью силой Q , приложенной к башне на высоте ϵ над плоскостью бокового штыря, частью же силой $H - Q$, приложенной на высоте λ над этой плоскостью.

Оказывающиеся неуравновешенными момент силы Q равный ϵQ , и силы $(H - Q)$, равный $\lambda(H - Q)$, уравновешиваются частью моментов сил инерции кратчайшего движения башни вокруг пересечения линии действия силы H с осью башни, т. е. вокруг точки B (рис. 4), частью же реактивным моментом жесткого барабана, пропорциональным углу поворота башни.

В соответствии с этим Ю. А. Шиманский выписывает уравнение угловых колебаний башни, если допустить последние обозначения, так:

$$M(g^2 + k^2)\ddot{\theta} = \epsilon Q(t) + \lambda(H - Q) - \frac{1}{A_{10}} \theta = (\epsilon - \lambda) Q(t) + \lambda H - \frac{1}{A_{10}} \theta, \quad (76)$$

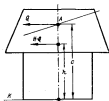


Рис. 4.

$$\lambda_2^2 = \frac{1}{M A_0 (\omega^2 + \lambda_1^2)} \quad (79)$$

Сравнивая это уравнение с уравнениями (12) и (15), можно видеть, что в него множителем к θ кладет величина $M(\omega^2 + \lambda_1^2)$ вместо величины $M\omega^2$, что принять было бы правдивее. Кроме того, в уравнении (76) принято, что реактивный момент жесткого барабана M может быть положен равным величине $\frac{1}{A_0}$, а то время как на самом деле этот момент в общем случае зависит не только от угла поворота θ , но и от горизонтальной перемещения жесткого барабана.

Какие искажения вносятся в расчет данными погрешностями можно вывести только на соответствующих числовых примерах, до получения которых вряд ли можно принять расчеты, основанные на использовании уравнения (76), убедительными, особенно если принять во внимание некоторые соображения, которые будут изложены ниже в дальнейших пунктах настоящего параграфа.

3. Третьей основой предпосылки расчета, предложенного Ю. А. Шиманским для определения угловых перемещений башни, является предположение о возможности замены во вторую стадию движения в уравнении (76) истинного выражения для H как функции от t сплюскающей зависимостью вида

$$H = \chi Q \sin \lambda_2^2 (t - t_0) \quad (77)$$

где λ_2^2 — частота свободных колебаний башни, вычисленная по формуле (71), т. е. в предположении, что центр тяжести башни расположен на уровне боевого штыря;

χ — динамический коэффициент горизонтальной реакции жесткого барабана, вычисленный в том же предположении;

Q — максимальное значение силы $Q(t)$.

Этим в расчет вносится новая условность, хотя может быть и не столь существенная, как основная предпосылка расчета, формулированная в п. 1.

4. При интегрировании уравнения (76) принимается, что в момент начала второй стадии движения (при $t = t_0$) имеют место условия

$$\theta_0 = \dot{\theta}_0 = 0.$$

5. Если сила $Q(t)$ во время рассматриваемой стадии движения во времени меняется, то при интегрировании соответствующего первого члена правой части уравнения (76), Ю. А. Шиманский предлагает заменить истинное значение ее в каждый данный момент времени средним значением функции $Q(t)$ за время одного полуцикла изменения горизонтальной реакции жесткого барабана.

Указанные допущения позволяют выписать для θ следующее выражение:

$$\theta = (c - k) Q_0 \left[1 - \cos \lambda_2 (t - t_0) \right] + \frac{k \chi Q_0}{M (\omega^2 + \lambda_1^2 (\omega_0^2 - \lambda_2^2))} \left[\sin \lambda_2 (t - t_0) - \frac{\lambda_2^2}{\omega_0^2} \sin \lambda_1^2 (t - t_0) \right], \quad (78)$$

максимум которого принимается Ю. А. Шиманским за величину того угла поворота башни, которым и определяется максимальное значение реактивного момента шарового болтов, а следовательно, и расчетное давление на шары.

2. **Некоторые частные случаи.** Из вышесказанного видно, что методика определения расчетного давления на шары башни, предложенная Ю. А. Шиманским, весьма условна. Может ли она тем не менее быть использована для сравнительных расчетов? Нам представляется, что ответ на этот вопрос должен быть дан отрицательный, ибо сравнительные расчеты можно базировать на таких лишь методах, которые правильно отражают основные закономерности исследуемого явления и нуждаются для получения достаточно точных результатов лишь в более или менее равномерной числовой корректировке результатов расчета.

Между тем методика, изложенная выше в п. 1 настоящего параграфа, приводит в различных частных случаях к погрешности разного масштаба. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть следующие частные случаи.

Случай 1. Допустим, что жесткий барабан устроен так, что его верхнее кольцо практически не может поворачивать горизонтальных перемещений, повороты же башни вокруг центра кольца жесткого барабана не устраняются. Допустим, что сила $Q(t)$ действует на башню таким образом, что в момент начала второй стадии движения башня на уровне боевого штыря горизонтальной скорости не имеет.

В этом случае точный расчет должен привести к конечным значениям динамического коэффициента, расчет же, изложенный в п. 1 настоящего параграфа, к бесконечно большому значению его. Ясно, что ни о какой числовой корректировке данных приближенного расчета путем установления величин расчетных напряжений на основании опытов, относящихся к случаю, когда горизонтальные смещения жесткого барабана не устранены, не может быть и речи.

Случай 2. Жесткость жесткого барабана такова, что частоты свободных колебаний λ_2^2 и λ_0^2 , вычисленные по формулам (71) и (79), уравняются.

В этом случае, согласно формуле (78), должно было бы иметь место нечто вроде своеобразного резонанса вращательных и горизонтальных колебаний башни, в то время как никаких таких резонансов на самом деле наблюдаться не должно, ибо вращение башни и ее горизонтальное перемещение оба идут друг из друга.

Случай 3. Допустим, что жесткость барабана в смысле его влияния на вращательные движения башни остается более или

меньше постоянной, жесткость же его по отношению к горизонтальным перемещениям его первого кольца постепенно увеличивается, оставаясь конечной.

Расчеты, проведенные в соответствии с п. 1 настоящего параграфа, приводят в этих случаях иногда к парадоксальному результату: коэффициент динамичности горизонтальной реакции жесткого барабана иногда возрастает, в то время как коэффициент динамичности для реакции шарового погона уменьшается. Происходит это очевидно благодаря тому, что с увеличением жесткости жесткого барабана коэффициент динамичности горизонтальной его реакции возрастает в этих случаях несколько медленнее, чем убывает жесткость одного из колец горизонтальных колебаний жесткого барабана. На самом деле, казалось бы, однако, что таких явлений наблюдаться не должно. Поэтому такого рода результаты, полученные при использовании методики п. 1 настоящего параграфа, нуждаются если не в аспирации, то, казалось бы, хотя бы в проверке по данным менее условных расчетов.

Желательность замены расчетов, базирующихся на методике п. 1 настоящего параграфа, расчетами, отражающими лучше основное закономерности рассматриваемого явления, подтверждается и тем обстоятельством, что расчеты, основанные на использовании допущений (изложены в п. 1 настоящего параграфа), приводят к явно преувеличенным значениям углов поворота башни по отношению к ее шаровому погону и указывают на необходимость снабжения шаровых погонов подкатами у таких башен, которые на самом деле, как показал опыт, и подкатами не нуждаются.

Следует признать необходимой замену методики, изложенной в п. 1 настоящего параграфа, методикой, отражающей истинные закономерности рассматриваемого сложного явления лучше. Было бы, в частности, весьма желательно рассчитать все те конструкции, для которых выполнены расчеты, основанные на допущениях п. 1 настоящего параграфа, теми методами, которые изложены в предыдущем параграфе. Надо полагать, что расчеты, изложенные в § 2, дадут результаты, лучше согласующиеся с данными опыта. Является также необходимой постановка серии тщательной продуманных опытов на построенных кораблях для численной проверки не только результатов расчетов, проведенных с использованием предположений, изложенных в п. 1 настоящего параграфа, но и результатов, полученных с помощью более точных расчетных схем предыдущего параграфа. Последнее необходимо хотя бы для проверки степени точности тех расчетных приемов, которые могут быть предложены сейчас для вычисления коэффициентов A_{11} , A_{12} , A_{21} и A_{22} в формулах (15) предыдущего параграфа.

31. О ВЛИЯНИИ НАЧАЛЬНОГО ПОДЖАТИЯ ПРУЖИНАЩИХ КАТКОВ БОЕВОГО ШТЫРЯ АРТИЛЛЕРИЙСКИХ БАШЕН НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ЭТИХ БАШЕН К КОЛЕБАНИЯМ ЗАЗОРА В БОЕВОМ ШТЫРЕ*

Вопрос о влиянии пружинящих катков боевого штыря на изменение зазора в штыре, вызываемые колебаниями температуры башни, а также деформацией зубчатых вырезов под действием общего изгиба корабля, трактуется обычно без учета начального

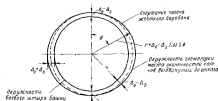


Рис. 1.

поджатию упомянутых катков. В случае отсутствия у боевого штыря начальной эллипсности влияние начального поджатию катков на равномерное под влияние нагрева башни уменьшение зазора в боевом штыре может быть еще и не существенным. Но при наличии у боевого штыря начальной эллипсности, равно как и при изучении изменений этой эллипсности под действием общего изгиба корабля, пренебрегать влиянием начального поджатию катков боевого штыря казалось бы нельзя.

В связи с этим интересно рассмотреть следующую задачу.

Пусть (рис. 1) начальный радиус боевого штыря r , причем

$$r_0 = \text{const}; \quad (1)$$

* Печатается впервые.

начальной же радиус вертикального погона жесткого барабана башни определяется равенством

$$R_0 = r_0 + \Delta, \quad (3)$$

где Δ — величина начального зазора в боковом штыре, изменяющаяся в функции от угла θ , измеренного от траверзы корабля, по закону

$$\Delta = \Delta_0 - \Delta_1 \cos 2\theta. \quad (4)$$

Пусть в этом состоянии башня ее пружинящие витки отрегулированы так, что все они, будучи вытолкнуты своими пружинками из их гнезд до отказа, выступают из бокового штыря башни на одну и ту же величину

$$\Delta_2 - \Delta_0,$$

так что катки, совпадающие с наименьшим диаметром жесткого барабана, едва его касаются, остальные же катки вовсе не касаются вертикального погона жесткого барабана.

Пусть при малейшем обжатии катков каждый из них даст сразу отпор Q_0 , причем пружина катков настолько эластична, что увеличением отпора, соответствующим дальнейшему вдавлению катка внутрь башни, можно для простоты выкладки прене-

речь. Пусть число катков n весьма велико, расположены же они на равных интервалах друг от друга так, что катки можно считать прикладывающими к жесткому барабану башни равномерный отпор интенсивности

$$q_0 = \frac{Q_0 n}{2\pi r} \quad (4)$$

на всем том протяжении периметра жесткого барабана, где катки вдавлены внутрь бокового штыря, т. е., где радиус жесткого барабана (рис. 2) стал почему-либо меньше, чем

$$r_0 + \Delta_0 - \Delta_2.$$

Допустим, что под совместным влиянием охлаждения верхнего кольца жесткого барабана, а также общего изгиба корабля радиус-векторы, соединяющие отдельные точки вертикального погона жесткого барабана, получают тенденцию к уменьшению и увеличивались бы, если бы пружинящие ролики не давали отпора на величину

$$w_0 = a_0 + a_1 \cos 2\theta, \quad (5)$$

под влиянием же распора этих катков, изображенного на рис. 2, радиус-векторы уменьшаются не на w_0 , а на $w_0 - w(\theta)$, где $w(\theta)$ — увеличение радиус-векторов жесткого барабана, вызываемое действием одного лишь отпора катков, изображенного на рис. 2. Тогда угол α , определяющий длину периметра жесткого барабана башни, нагруженного отпором катков q_0 , определяется уравнением

$$r_0 + \Delta_0 - \Delta_2 \cos 2\alpha + w_0 - w(\alpha) = r_0 + \Delta_0 - \Delta_2,$$

или, что то же, уравнением

$$w_0 - w(\alpha) = -\Delta_2 (1 - \cos 2\alpha). \quad (6)$$

Требуется определить: какой зависимостью связаны величинами a_0 и a_1 характерные уменьшение радиального зазора в боковом штыре, вычисленные в предположении, что катки башни отпора жесткому барабану не дают с максимальным фактическим уменьшением этого зазора, т. е. с величиной

$$w_0 = w(\alpha) = \kappa. \quad (7)$$

При решении этой задачи примем, что

F — площадь поперечного сечения верхнего кольца жесткого барабана;

J — момент инерции этой площади, характеризующий жесткость изгиба верхнего кольца в плоскости бокового штыря;

k — коэффициент жесткости стоек жесткого барабана башни, относительный к единице длины периметра башни.

Все эти величины известны и от θ не зависят.

Для решения задачи требуется, очевидно, выписать функцию $w(\theta)$, которой определяется, как сказано, увеличение радиус-векторов верхней половины жесткого барабана башни, соответствующее нагрузке последней, изображенной на рис. 2. Чтобы нагрузка была определенной, помимо приняты за независимые параметры ее величины a_0 и a_1 , а одну из этих величин и угол α , характеризующий длину участков рассматриваемого кольца, нагруженных нагрузкой q_0 . Так и поступим.

Будем искать функцию $w(\theta)$ энергетическим методом в форме бесконечного ряда

$$w(\theta) = c_0 + \sum_n c_n \cos n\theta, \quad (8)$$

где c_0 и c_n — неизвестные константы, а n пробегает через все четные значения от $n = 2$ до $n = 60$.

Примем, как обычно, что с растяжением кольца необходимо считаться лишь при рассмотрении среднего пружинения его радиуса, характеризуемого параметром c_0 , при рассмотрении же изгиба кольца, характеризуемого параметрами c_n , кольцо можно считать практически не удлиняющимся. Изменением кривизны

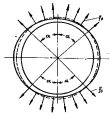


Рис. 2.

кольца, соответствующим его равномерному обжатию, пренебрежем.

Примем, что при малых отклонениях кольца от правильной круговой формы:

а) потенциальная энергия растяжения кольца определяется выражением

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} E F \left(\frac{\partial v}{\partial r} \right)^2 r d\theta; \quad (9)$$

б) потенциальная энергия его изгиба — равенством

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{E J}{r^3} \left[\sum_n c_n (n^2 - 1) \cos n\theta \right]^2 r d\theta; \quad (10)$$

в) потенциальная энергия деформации его упругого основания — формулой

$$V_3 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} k [w(\theta)]^2 r d\theta; \quad (11)$$

г) силовая же функция нагрузки q_n — равенством

$$U = 4 \int_0^{2\pi} q_n w(\theta) r d\theta. \quad (12)$$

Разворачивая с помощью равенств (8) выражения (9)–(12), получим

$$\left. \begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{2} 2\pi \frac{E F}{r} c_n^2 \\ V_2 &= \frac{1}{2} \pi \frac{E J}{r^3} \sum_n (n^2 - 1)^2 c_n^2 \\ V_3 &= \frac{1}{2} \left[2\pi k r c_n^2 + \pi k r \sum_n c_n^2 \right]; \\ U &= 4 q_n r c_n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{n} \sin n\alpha. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Далее, в начале возможных перемещений уравнения

$$\frac{\partial(U - V_1 - V_2 - V_3)}{\partial c_n} = 0 \quad (n = 0, 2, 4, 6, \dots), \quad (14)$$

равносятся уравнению:

$$4 q_n r \alpha - 2\pi \left(\frac{E F}{r} + k r \right) c_n = 0; \quad (15)$$

$$4 q_n r \sin \alpha - \pi \left[\frac{E J (n^2 - 1)^2}{r^3} + k r \right] c_n = 0 \quad \text{при } n = 2, 4, 6, \dots \quad (16)$$

из которых

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= q_0 \frac{6\alpha}{k + \frac{E F}{r}}; \\ c_n &= q_n \frac{4 \sin n\alpha}{n\pi \left[k + \frac{E J}{r^3} \right] (n^2 - 1)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Подставляя найденные c_0 и c_n в равенство (8), получим для искомого $w(\theta)$:

$$w(\theta) = 4 q_0 \frac{\alpha}{k + \frac{E F}{r}} + 4 q_n \frac{2, 4, 6, \dots}{\pi} \frac{\sin n\alpha}{n\pi \left[k + \frac{E J}{r^3} \right] (n^2 - 1)^2} \cos n\theta. \quad (18)$$

откуда видно, что уравнение (8) в развернутом виде выписывается так:

$$\begin{aligned} a_0 + a_2 \cos 2\alpha &= 4 q_0 \frac{\alpha}{k + \frac{E F}{r}} + \\ &+ 4 q_n \frac{2, 4, 6, \dots}{\pi} \frac{\sin 2n\alpha}{2n\pi \left[k + \frac{E J}{r^3} \right] (n^2 - 1)^2} + A_2 (\cos 2\alpha - 1). \end{aligned} \quad (19)$$

Задваясь в равенстве (19) углом α и одной из величин a_0 и a_2 , можно вторую из них найти из данного равенства. После этого интересующую нас величину максимального уменьшения зазора можно вычислить по формуле (7), дающей

$$x = a_0 + a_2 - 4 q_0 \frac{\alpha}{k + \frac{E F}{r}} - 4 q_n \frac{2, 4, 6, \dots}{\pi} \frac{\sin n\alpha}{n\pi \left[k + \frac{E J}{r^3} \right] (n^2 - 1)^2}. \quad (20)$$

Равенствами (19) и (20) дается интересующая нас параметрическая зависимость между величинами a_0 и a_2 одной стороны, и уменьшением зазора в боковом штире x .

С помощью обозначений

$$F_1(\alpha) = - \frac{6\alpha}{k + \frac{E F}{r}} + 4 \frac{2, 4, 6, \dots}{\pi} \frac{\sin 2n\alpha}{2n\pi \left[k + \frac{E J}{r^3} \right] (n^2 - 1)^2} \quad (21)$$

"

$$F_2(\alpha) = \frac{6\alpha}{k + \frac{E F}{r}} + 4 \frac{2, 4, 6, \dots}{\pi} \frac{\sin n\alpha}{n\pi \left[k + \frac{E J}{r^3} \right] (n^2 - 1)^2} \quad (22)$$

можно придать ей вид:

$$\begin{cases} F_1(\alpha) = a_1 + a_2 \cos 2\alpha + \Delta_2 (1 - \cos 2\alpha) \\ x = a_1 + a_2 - F_1(\alpha). \end{cases} \quad (23)$$

Для того, чтобы воспользоваться равенствами (23), необходимо применительно к рассматриваемому частному случаю проинтегрировать функцию $F_1(\alpha)$ и, вычертив график, дающий $F_1(\alpha)$ как функцию от α , засечь график кривой соответствующей функции $a_1 + a_2 \cos 2\alpha + \Delta_2 (1 - \cos 2\alpha)$. Определив таким образом (рис. 3) угол α , можно с помощью выражения (22) подсчитать соответ-

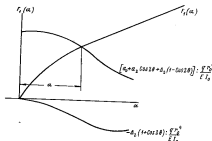


Рис. 3.

ствующее значение функции $F_2(\alpha)$ и затем с помощью второго из уравнений (23) определить x .

Формулы (21)–(23) позволяют проанализировать в каждом частном случае влияние, оказываемое на величину x как величиной Δ_2 , так и величинами a_1 и a_2 . При использовании их следует иметь в виду, что эти формулы справедливы лишь до тех пор, пока начальный зазор в штыре не выбран, т. е. пока x , найденное с помощью равенства (23), удовлетворяет условию

$$x = \Delta_2 - \Delta_2 \quad (24)$$

Примечание. Если правая часть первого из равенств (23) представляет $F_1(\alpha)$ при всяком α , лежащем в пределах $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то следует принять

$$\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

32. О ДИАГРАММЕ ОТВОРА ПРУЖИНЯЩИХ КАТКОВ, ЦЕНТРУЮЩИХ БАШНЮ ПРИ КРЕНЕ *

1. Главное значение пружинящих катков, центрующих башню артиллерийских установок, состоит в предохранении башни от выбора зазора в боковом штыре до достижения креном корабля некоторого предела. Для этой цели приходится либо делать пружины катков весьма жесткими, либо же давать пружинам некоторую начальную поджатие, обычно достаточно большое. Первое нежелательно, так как в случае уменьшения зазора в боковом штыре крену нагнетения башни может оказаться чрезмерное увеличение нагрузки на катки, затрудняющее вращение башни. Поэтому пружинам, центрующим башню катков, сообщают некоторое начальное поджатие. Назначение поджатия — приблизить диаграмму отпора катков, т. е. диаграмму, изображающую связь между перемещением башни x и суммарной реакцией осей катков башни R , к типу, изображенному на рис. 1, т. е. до возможности добиться того, чтобы для вывода башни из среднего положения к ней требовалось приложить некоторую ненулевую силу R_0 , соответствующую заданному крену корабля, не увеличивающуюся при увеличении отклонения башни от ее среднего положения.

Если обеспечить диаграмму отпора катков башни характер, соответствующий рис. 1, то башня будет стоять в своем среднем положении при всех кренах корабля, не превышающих соответствующего силе R_0 , и будет плотно прижиматься к обшивке вертикального полета жесткого барабана башни при всех кренах.

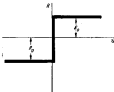


Рис. 1.

* Печатается впервые.

больших чем крен, соответствующий силе R_0 , равно как и при откате орудий после выстрела.

Плотно сопряжение башни с вертикальным потоком жесткого барабана при выстреле желательно с точки зрения разгрузки механизма горизонтального наведения от перегрузки при стремлении башни к повороту вокруг вертикальной оси во время выстрела из одного из орудий, не лежащего в диаметральной плоскости башни.

К тому типу диаграммы отпора боевого штыря, который изображен на рис. 1, можно приблизиться путем установки в боевом штыре башни двух катков, выталкиваемых из своих гнезд

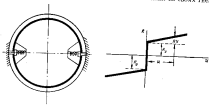


Рис. 2.

Рис. 3.

двумя пружинами весьма эластичными, до которых большие начальное поджатие и отрегулированными (рис. 2) так, чтобы, будучи оставлены в корабельный жесткий барабан, они едва касались бы последнего своими пружинными роликками, до отказа вытолкнутыми из своих гнезд их пружинами.

Если упругость пружин не бесконечно мала, то устройство, изображенное на рис. 2, работает так, как показано на рис. 3. Башня не смещается из среднего положения, пока сила, стремящаяся ее из такого положения вывести, не достигнет значения $R = R_0$; при больших же значениях донной силы смещение башни пропорционально избытку силы R по сравнению с величиной R_0 . Получается это потому, что как только башня отклонится от среднего положения хоть немного, скажем, вправо, так сейчас же правый ролик башни вступит в действие, прикладывая к башне отпор, равный

$$R_0 + k\alpha,$$

где R_0 — начальное поджатие его пружины,

k — коэффициент ее жесткости,

Левый ролик башни, упреясь запястьем, ограничивающим его ход по отношению к башне, выходит из сопряжения с жестким барабаном и нижней реакцией со стороны последнего не толкается.

В результате при перемещении башни вправо к ней приложена направленная справа величина силы

$$R = R_0 + k\alpha. \quad (1)$$

при перемещении же башни влево — такой же величины сила, но направленная слева направо (см. рис. 3).

2. Представим теперь, что катки отрегулированы так, что, будучи оба вытолкнуты до предела из своих гнезд пружинами, сжатие каждой из которых есть R_0 , они только коснулись жесткого барабана башни, но после этого вследствие ее наклонения башни или же охлаждения ее жесткого барабана радиальный зазор в боевом штыре башни увеличился на величину α , и пружины обеих роликков получили дополнительное обжатие на ту же величину α (рис. 4). От этого начальное поджатие обеих пружин увеличится и достигнет величины

$$R_0 + k\alpha.$$

Рис. 4.

но обе они, прикладывая к башне равные и противоположные направленные силы, никакого суммарного отпора башне двигать не будут до тех пор, пока она не выйдет из своего среднего положения. Когда башня сместится направо на величину α , то обжатие правой пружины увеличится на величину $k\alpha$ и достигнет величины

$$R_0 + k(\alpha + \alpha).$$

Обжатие левой пружины будет равно $(\alpha - \alpha)$ до тех пор, пока $m < \alpha$. При $m > \alpha$ левый каток башни окажется вытолкнутым из гнезда до отказа и, упреясь запястьем в стол башни, выйдет из сопряжения с жестким барабаном. В результате при перемещении башни вправо на величину α реакция ее правого катка оказывается

$$R_1 = R_0 + k(\alpha + \alpha); \quad (2)$$

реакция же левого катка определяется равенством

$$\left. \begin{aligned} R_2 = R_0 + k(\alpha - \alpha) \\ \text{при } m = \alpha \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и равенством

$$\left. \begin{aligned} R_2 &= 0 \\ \text{при } a &= a. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Суммарный отпор жесткого барабана таким образом при перемещении башни выражается

$$\left. \begin{aligned} R &= R_1 - R_2 = 2k a \\ \text{при } a &= a \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} R &= R_1 - R_2 = R_0 + 2k a + k a \\ \text{при } a &= a. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Это и изображено на рис. 5.

Диаграмма отпора, соответствующая перемещению башни влево, антисимметрична по отношению к части ее, соответствующей перемещению башни вправо.

3. Обращаясь к вопросу о том, каков же должен быть начальный зазор в боевом штире башни, чтобы при диаграмме отпора

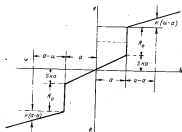


Рис. 5.

(рис. 5) он не был выбран до тех пор, пока $R < R_0$, видно, что необходимо подобрать его величину и жесткость касания жесткого барабана выдвинутыми до упора катками башни так, чтобы после ожидаемого уменьшения радиального зазора на величину a башня должна была для полной выборки зазора в боевом штире пройти еще путь a . Начальный зазор в боевом штире Δ , соответ-

ствующий состоянию ее катков, изображенному на рис. 6, должен удовлетворять равенству

$$\Delta = 2a,$$

где a — уменьшение радиального зазора в боевом штире башни, которого можно ожидать после такого отрегулирования катков башни, когда они budou до отказа выдвинуты из башни, только коснутся ее жесткого барабана.

Таким образом начальный радиальный зазор Δ должен быть равен, по крайней мере, двойной величине ожидаемого его уменьшения в результате увеличения температуры башни по отношению к температуре ее жесткого барабана.

4. До сих пор мы предположили, что башня центруется двумя катками, установленными в плоскости поперечного сечения корабля. Чтобы башня приподнялась ими в среднее положение независимо от ее курсового угла, ее приходится снабжать не одной парой катков, а несколькими. Это может несколько изменить форму диаграммы отпора катков. Посмотрим, какой вид имеют диаграммы, когда катков так много, что их жесткость можно считать распределенной по окружности боевого штира башни практически равномерно.

Пусть, как и выше:

R_0 — начальное обжатие пружины каждого катка;
 k — коэффициент ее жесткости;
 n — общее число катков на окружности башни;
 a — увеличение зазора в боевом штире башни, отсчитываемое от того ее состояния, когда выдвинуты до отказа катки ее только лишь касаются жесткого барабана;

α — перемещение башни по направлению $\theta = \pi$.

Обозначим через q_0 и π величины

$$\left. \begin{aligned} q_0 &= \frac{R_0 n}{2x}; \\ \pi &= \frac{k a n}{2a}. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

можно для отнесенной к единице угла θ интенсивности реакции жесткого барабана башни принимать (см. рис. 7)

$$q = q_0 + \pi (\alpha - a \cos \theta) \quad \text{при } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}. \quad (8)$$

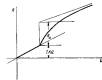


Рис. 6.

если $m < a$, z

$$q = 0 \text{ при } 0 < \theta < \alpha;$$

$$q = q_0 + m(a - m \cos \theta) \text{ при } \alpha < \theta < \frac{\pi}{2}. \quad (9)$$

если $m > a$,

В формулах (9) через α обозначено (см. рис. 8) то значение угла θ , начиная с которого катки можно считать соприкасающимися с жестким барабаном башки.

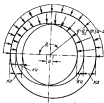


Рис. 7.

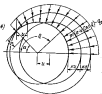


Рис. 8.

Угол этот связан с величинами a и m очевидной зависимостью

$$a - m \cos \alpha = 0, \quad (10)$$

позволяющей написать

$$m = \frac{a}{\cos \alpha} \quad (11)$$

и, следовательно,

$$q = 0 \quad \text{при } 0 < \theta < \alpha; \\ q = q_0 + m a \left(1 - \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} \right) \quad \text{при } \alpha < \theta < \frac{\pi}{2}. \quad (12)$$

если $m = \frac{a}{\cos \alpha} > a$.

Полный радиальный отпор жесткого барабана башки R связан с его интенсивностью q зависимостью z

$$R = -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} q \cos \theta d\theta, \quad (13)$$

далее по подстановке в нее q из равенств (8) и (12)

$$R = m \pi a = \frac{k a}{2} m \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{при } m < a \end{array} \right\} \quad (14)$$

и

$$R = 2 q_0 m \pi a + m a \left[\frac{\pi - \alpha}{\cos \alpha} + \sin \alpha \right] \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{при } m = \frac{a}{\cos \alpha} > a \end{array} \right\} \quad (15)$$

Формулам (14) и (15) устанавливается интересная связь между R и m . Исследуем эту связь.

При α меньшем, чем α_0 , R , как видно из (14), является линейной функцией от m . При $m > a$ отпор жесткого барабана R определяется равенством (15) или, что то же,

$$R = m \pi a + 2 q_0 m \pi a + m \pi a f(\alpha) + \frac{m \pi}{2} (m - a), \quad (16)$$

где

$$m = \frac{a}{\cos \alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\pi} \left[\sin \alpha + \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)} - \frac{\pi}{2} \right]. \quad (17)$$

В табл. 1 значения функции $f(\alpha)$ подсчитаны для ряда частных значений угла α .

Как видно из таблицы, связь между R и m при m больших, чем a , может быть при всяком a конечном представлена графиком рис. 9, причем, чем меньше a , тем ближе точка A рис. 9 к оси ординат, кривая же $A E J$, изображающая R как функцию от m , к ломаной линии $A B C$.

Для практических вычислений удобнее вместо формул (16) пользоваться эквивалентами им зависимостями,

$$R = R^* \left[\sin \alpha + \frac{\pi}{2} \frac{k a}{R^*} f(\alpha) \right] \\ m = \frac{a}{\cos \alpha}. \quad (18)$$

Таблица 2

α	15°	30°	45°	60°	75°	90°
(1) $\frac{\pi}{2} - \alpha$	1,205	1,046	0,785	0,524	0,264	0
(2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$	0,966	0,865	0,707	0,500	0,259	0
(3) $\frac{\pi}{2} - \alpha$	1,205	1,308	1,409	1,448	1,010	1,000
(4) $\sin \alpha$	0,259	0,500	0,707	0,865	0,966	1,000
(5) $(3) + (4)$	1,614	1,708	1,816	1,916	1,878	2,000
(6) $\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$	0,044	0,138	0,248	0,344	0,426	0,430
(7) $f(\alpha) = \frac{(6)}{2}$	0,014	0,044	0,078	0,110	0,180	0,135

120

$$R^* = \frac{R_0 \alpha}{\pi} \quad (19)$$

и

$$F(\alpha) = 1 + f(\alpha) + \frac{1}{2} \frac{1 - \cos \alpha}{\alpha} \quad (20)$$

В табл. 2 подсчитано несколько значений функции $\frac{\pi}{2} F(\alpha)$, соот-

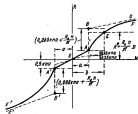


Рис. 9.

ветствующих различным значениям угла α .

На рис. 9 построено несколько кривых отпора, изображающих связь между R^* и α для одной и той же установки, для которой

$$R: k = 3,5 \text{ мм.}$$

Первой из этих

кривых соответствует $\alpha = 0$ и, следовательно, $\frac{k\alpha}{R_0} = 0$;

второй $\alpha = 0,20 \text{ мм}$ $\frac{k\alpha}{R_0} = 0,0572$;

третьей $\alpha = 0,35 \text{ мм}$ $\frac{k\alpha}{R_0} = 0,1$;

четвертой $\alpha = 0,70 \text{ мм}$ $\frac{k\alpha}{R_0} = 0,2$;

пятой $\alpha = 1,05 \text{ мм}$ $\frac{k\alpha}{R_0} = 0,3$.

α	15°	30°	45°	60°	75°	90°
(1) $\cos \alpha$	0,966	0,866	0,707	0,500	0,259	0
(2) $\frac{1}{\cos \alpha}$	1,036	1,154	1,412	2,000	3,856	∞
(3) $\frac{1}{\cos \alpha} - 1$	0,034	0,154	0,412	1,000	3,600	∞
(4) $\frac{1}{2} (3)$	0,018	0,072	0,206	0,500	1,426	∞
(5) $1 + f(\alpha)$	1,064	1,044	1,078	1,119	1,130	1,136
(6) $F(\alpha)$	1,032	1,116	1,284	1,619	2,560	∞
(7) $\frac{F}{2}$	1,576	1,735	2,02	2,53	4,02	∞

Все эти кривые построены по точкам, полученным в табл. 3. Отношение $R: \delta = 3,5$ мм, доложенное в основу всех подсчетов, приведенных в табл. 3, близко к той его величине, которая соответствует начальному подклинию пружинящих катков для реальных установок.

Из рассмотрения кривых рис. 10 можно сделать некоторые заключения.

Принят начальный радиальный зазор в боевом штире равным 0,70 мм и допустив, что в установке отпор $R = R^*$ уравновеши-

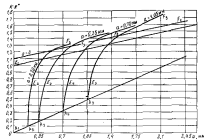


Рис. 10.

вается весов башня при крене около 10° , следует признать, что при $\Delta = 0,70$ мм и $\alpha = 0$ башня не будет заклиниваться при крене до $11,7^\circ$. Чтобы определить соответствующий угол для случая $\alpha = 0,30$ мм, мы должны зачесть кривую отката, соответствующую случаю $\alpha = 0,20$ мм, ординатой, соответствующей значению $\alpha = \Delta - \alpha = 0,50$ мм. Этому соответствует $R = 1,67 R^*$ и, следовательно, $\theta = 10,7^\circ$.

Чтобы определить угол крена, приводящий башню к заклиниванию при $\Delta = 0,70$ мм и $\alpha = 0,35$ мм, мы должны зачесть кривую отпора, соответствующую случаю $\alpha = 0,35$ мм, ординатой, проходящей через точку $\alpha = 0,70 - 0,35 = 0,35$ мм. Это дает $R = 1,157 R^*$. Следовательно, при $\Delta = 0,70$ мм и $\alpha = 0,35$ мм башня должна заклиниваться при крене около $1,6^\circ$. При $\Delta = 0,70$ мм и $\alpha = 0,70$ мм для полной выборки зазора в боевом штире никакого крена не нужно. При значениях α , лежащих в пределах от 0,35 до 0,70 мм, угол крена, приводящий к полной выборке зазора

α	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\mu = \frac{\sigma}{\sigma_{0.2}} = \frac{0,0572 P(\alpha)}{R \cdot R^*}$	0,500	0,307	0,231	0,202	0,400	0,772	∞
$\mu = \frac{\sigma}{\sigma_{0.2}} = \frac{0,157 P(\alpha)}{R \cdot R^*}$	0,050	0,092	0,101	0,115	0,145	0,230	∞
$\mu = \frac{\sigma}{\sigma_{0.2}} = \frac{0,350 P(\alpha)}{R \cdot R^*}$	0,030	0,051	0,051	0,052	0,060	0,100	∞
$\mu = \frac{\sigma}{\sigma_{0.2}} = \frac{0,700 P(\alpha)}{R \cdot R^*}$	0,010	0,010	0,010	0,010	0,010	0,020	∞
$\mu = \frac{\sigma}{\sigma_{0.2}} = \frac{1,050 P(\alpha)}{R \cdot R^*}$	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,010	∞
$\mu = \frac{\sigma}{\sigma_{0.2}} = \frac{1,400 P(\alpha)}{R \cdot R^*}$	0,003	0,003	0,003	0,003	0,003	0,005	∞
$\mu = \frac{\sigma}{\sigma_{0.2}} = \frac{1,770 P(\alpha)}{R \cdot R^*}$	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,003	∞
$\mu = \frac{\sigma}{\sigma_{0.2}} = \frac{2,172 P(\alpha)}{R \cdot R^*}$	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001	∞

в боевом штыре, является, как видно на рис. 10, линейной функцией от α . Вообще же у той установки, к которой относятся рис. 10, при $\Delta = 0,70$ мм зависимость между углом крена θ , приводящим к полной выборке зазора в боевом штыре, и величиной начального увеличения этого зазора, может быть изображена пунктирной кривой рис. 11. Подобным же образом можно убедиться, что при $\Delta = 1,5$ мм зависимость между углом крена θ , приводящим баню к полной выборке зазора, и начальным раз-

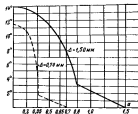


Рис. 11.

номером увеличением этого зазора α имеет (рис. 10) вид, соответствующий сплошной кривой рис. 11.

Как видно из рис. 11, чувствительность рассматриваемой бани к предному вложению нагрета при уменьшении начального зазора Δ с 1,5 до 0,70 мм резко возрастает.

6. Во всем вышесказанном мы предполагали, что ни боевой штырь бани, ни кольцо жесткого барабана не деформируются под действием режущей катанки. На самом деле, если штырь бани еще и можно считать недеформируемым, то кольцо жесткого барабана таким образом сжать нельзя. Поэтому на коложенку выше теории работы пружинящих катков надо смотреть как на грубо приближенную. Уточнить эту теорию учетом гибкости верхнего кольца жесткого барабана можно опираясь на теорию его изгиба, разработанную в диссертации О. А. Коздобина. Это требует, однако, довольно громоздких выкладок, не укладывающихся в рамки настоящей заметки, и может быть выполнено лишь в порядке написания особой научно-исследовательской работы.*

* См. работу Ю. Власова о деформируемости верхнего кольца жесткого барабана во взаимодействии с пружинящим катком боевого штыря базальных артиллерийских, помещенную в данном сборнике.

33. О ВЛИЯНИИ ДЕФОРМИРУЕМОСТИ ВЕРХНЕГО КОЛЬЦА ЖЕСТКОГО БАРАБАНА НА ДИАГРАММУ ОТПОРА ПРУЖИНЫХ КАТКОВ БОЕВОГО ШТИРЯ БАШЕННЫХ АРТУСТАНОВОК*

§ 1. Постановка вопроса

При проверке зазоров в боевом штире башен артистановок выяснилось, что благодаря эллиптичности верхнего кольца жесткого барабана этих установок зазор по поперечному диаметру их оказался почти в два раза меньше того номинального предела, который был установлен проектом, зазор же по продольному диаметру оказался у этих установок несколько превышающим установленный для этого зазора максимальный предел.

Боевой штирь такой башенной установки центруется пружинными катками, имеющими своим назначением предохранение башни от выброса зазора в боевом штире при получении кораблем взрыва. При обсуждении вопроса о допустимости отмеченного выше отклонения в боевом штире башенной установки зазора от установленных для его величины норм, не мог не возникнуть вопрос о том, какое влияние может иметь это отклонение на величину того угла взрыва корабля, при котором зазор по поперечному диаметру жесткого барабана оказывается полностью выбранным в башню, войдя в плотное соприкосновение с неподвижной частью установки, лишившись возможности столь свободно вращаться вокруг ее вертикальной оси, как то требуется для безотказной работы механизма ее горизонтального наведения. Для разрешения этого вопроса необходимо было рассмотреть зависимость между перемещениями башни по отношению к корпусу корабля и, с одной стороны, и суммарным отпором всех действующих башен пружинных катков, с другой стороны. Вопрос об этой зависимости, т. е. о так называемой диаграмме отпора пружинных катков был первоначально** рассмотрен без учета влияния начальной эллиптичности вертикального колена жесткого барабана и влияния тех изменений формы этого колена, которые вытекают из изгиба и расширения кольца, обрамляющего периметр жесткого барабана,

поддерживающего башню. При этом было установлено, что, если: 1) за диаграмму отпора отдельного пружинящего катка башни принять ломаную линию ΔBCD (рис. 1), на котором обозначено:

- Q^0 — начальное поджатие катка;
 - k — коэффициент жесткости его пружины;
 - m — перемещение катка по направлению к оси боевого штиря, отсчитываемое от того положения катка, когда он до упора выйдет из боевого стола башни;
- 2) жесткость катков боевого штиря считать распределенной вдоль его периметра практически равномерно;

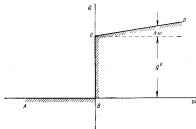


Рис. 1.

3) боевой штирь башни равно как и кольцо, обрамляющее периметр среза ее жесткого барабана, считать недеформируемыми и сохранять при данной круглую форму, и обозначить через Δ величину единичного на всем протяжении периметра боевого штиря башни начального и тем радиального зазора, то в случае, если катки боевого штиря башни будут отрегулированы так, что в начальный момент все катки башни, выдвинутые до упора в своих гнездах, будут только-только касаться вертикального колена жесткого барабана, диаграмма отпора пружинных катков башни примет вид, изображенный сплошной ломаной линией на рис. 2. Если же после указанной выше регулировки катков боевого штиря боевой стол башни, нагревшись, увеличит свой радиус на величину α , либо же периметр кольца жесткого барабана, охладившись уменьшит по всем направлениям свой радиус на ту же величину α , то диаграмма отпора пружинных катков изменится, приняв вид пунктирной кривой ΔBCD (рис. 2), причем при наличии в боевом штире башни начального ради-

* Переведено с немецкого.

** См. работу «О диаграмме отпора пружинных катков, действующих башен при взрыве», стр. 583.

ального зазора Δ , диаграммы отпора пружинящих катков башни определяется ломаной линией рис. 2 до тех пор, пока перемещение башни по отношению к корпусу, обозначенное через u , не выйдет из пределов

$$-\Delta < u < \Delta,$$

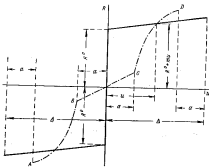


Рис. 2.

после же увеличения начального радиального зазора в боковом штыре до величины $(\Delta - a)$ до тех пор, пока

$$-(\Delta - a) < u < (\Delta - a).$$

Когда u достигает указанного только что предела, зазор в боковом штыре башни оказывается выбранным и боковой штырь башни входит в непосредственное плотное соприкосновение с корпусом корабля. Поэтому протяженность диаграммы отпора пружинящих катков, данной ломаной линией рис. 2, ограничена в направлении оси абсцисс пределами $-\Delta < u < \Delta$, протяженность же в том же направлении диаграммы, изображенной пунктирной линией $ABCD$ рис. 2, — пределами $-(\Delta - a) < u < (\Delta - a)$.

Как видно из вышесказанного, результаты, приведенные выше, относятся к тому частному случаю, когда кольцо, обрамляющее верхний срез жесткого барабана, можно считать практи-

чески недеформируемым. Влияние начального поджатия пружинящих катков башни на деформацию верхнего жесткого барабана освещено пока лишь с точки зрения влияния катков на то уменьшение внешнего диаметра этого кольца, которое вызывается общим изгибом корабля.

Сделано это в нашей заметке.* Вопрос в ней поставлен так. Пусть при некоторой определенной нагрузке корабля, при которой радиальный зазор в боковом штыре башни определяется законом

$$\Delta = \Delta_0 - \Delta_0 \cos \theta,$$

где Δ_0 и Δ_0 — некоторые константы, а θ отсчитывается от того диаметра кольца, где Δ всего меньше, — все пружинящие катки башни выдвинуты из пружинок на гнезда до упора, притом так, что они только касаются верхнего кольца жесткого барабана там, где радиус последнего меньше. Пусть после этого нагрузка корабля изменится так, что не будь у башни пружинящих катков радиальный зазор в боковом штыре уменьшился бы на величину

$$a = a_0 + a_0 \cos \theta.$$

Как изменится зазор, если начальное поджатие пружинящих катков есть некоторая заданная величина, пружины же катков настолько эластичны, что увеличением их отпора, вызванным их дальнейшим обжатием, можно пренебречь? В заметке** этот вопрос рассмотрен в предположении, что с растяжением нейтральной оси кольца необходимо считаться лишь при рассмотрении его перемещений, не зависящих от угла θ , при растяжении же перемещений кольца, являющихся функцией от угла θ , считаться необходимо лишь с жесткостью кольца по отношению к изгибу.

Таким образом по второй заметке вопрос об отпоре всей совокупности пружинящих катков, центрующих башню, вызванном смещением башни по отношению к корпусу корабля не рассмотрен; вопрос об изгибе верхнего кольца жесткого барабана рассмотрен лишь в предположении, что перемещение башни по отношению к корпусу корабля, обозначенное выше через u , равно нулю.

Целью настоящей заметки является рассмотрение связи суммарного отпора всех пружинящих катков башни от перемещений башни, обозначенных выше через u , с учетом деформируемости верхнего кольца жесткого барабана. При этом истаривается учесть как деформации кольца, которые вызваны упомянутым только что смещением башни по отношению к корпусу корабля, так и деформации этого кольца, которые являются следствием общего изгиба корабля. Зависимости, которые мы имеем в виду

* См. работу «О влиянии начального поджатия пружинящих катков бокового штыря артиллерийской башни на чувствительность этой башни к колебаниям зазора в боковом штыре».

** См. стр. 653.

здесь получить, должны, следовательно, явиться обобщением результатов, полученных в обоих упомянутых выше наших заметках, и должны включать в себе все результаты этих заметок как частные случаи.

Интересную нас задачу будем решать, основываясь на тех дифференциальных уравнениях упругой линии замкнутого кругового кольца, которыми учитывается не только изгиб этого кольца, но и растяжение его нейтральной оси. Начнем исследование с вывода системы этих дифференциальных уравнений, что будет сделано в § 2. В § 3 проверим решение, данное этими уравнениями, с помощью, получаемым энергетическим методом в форме бесконечных рядов. Только после этого обратимся к использованию полученной системы дифференциальных уравнений для решения той задачи, решение которой и будет, по сказанному выше, основной целью исследования, т. е. к выяснению влияния деформируемости верного кольца жесткого барабана поддерживающего башню, на диаграмму отпора ее пружинящих катков.

§ 2. Дифференциальные уравнения упругой линии замкнутого кругового кольца

1. Обозначения

- M и N — изгибающий момент и поперечная сила, положительными, когда они стремятся увеличить кривизну рассматриваемого кольца;
 T — растягивающее усилие, передающееся через данное поперечное сечение;
 r — радиус кривизны кольца, измеренный по нейтральной оси последнего;
 θ — угловая координата рассматриваемого сечения;
 \bar{q} — интенсивность нормальной, направленной от периферии кольца к его центру, внешней нагрузки его;
 t — интенсивность тангенциальной, т. е. направленной по касательной к нейтральной оси в сторону увеличения угла θ , нагрузки кольца.

можно (см. рис. 3.) из рассмотрения условий равновесия элемента кольца, ограниченного сечением θ и $\theta + d\theta$, легко видеть, что все эти величины связаны между собой тремя уравнениями равновесия:

$$\left. \begin{aligned} T - \frac{dN}{d\theta} &= -r\bar{q}, \\ N + \frac{dT}{d\theta} &= -rt; \\ \frac{dM}{d\theta} &= rN, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

в которых N непрерывно растет, кроме точек, где \bar{q} бесконечно велико, т. е. где кольцо нагружено внешними направленными

к его центру сосредоточенными силами, а T непрерывно растет, кроме точек, где бесконечно велико t , т. е. где к кольцу приложены внешние сосредоточенные тангенциальные усилия.

В тех задачах, которые мы имеем в виду рассмотреть, нагрузки \bar{q} и t будут конечными на протяжении всего периметра кольца. Мы можем, следовательно, принять, что T и N непрерывны на

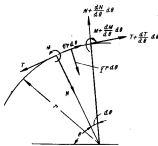


Рис. 3.

всем протяжении этого параметра, и путем исключения N из уравнений (1) получить:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dT}{d\theta} + T &= -r\bar{q} - \frac{d}{d\theta}(r\bar{q}), \\ \frac{dM}{d\theta} &= -r\left(\frac{dT}{d\theta} - r\bar{q}\right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

В уравнениях (1), а равно и (2), под r следует подразумевать собственно радиус той кривизны кольца, которая соответствует равнодействующему состоянию под действием заданной совокупности внешних сил. Ограничиваясь рассмотрением достаточно жестких колец, находящихся под действием достаточно умеренных нагрузок, можно с достаточной точностью заменить в уравнениях (1) и (2) величину r величиной радиуса начальной кривизны рассматриваемого кольца.

Приняв это допущение и считая начальную форму нейтральной оси кольца правильной окружностью, будем во всем дальнейшем

подразумевать в уравнениях (2) под r именно независимый от угла θ радиус начальной кривой кольца r_0 и в соответствии с этим заменить уравнения (2) уравнениями

$$\left. \begin{aligned} T'' + T &= r_0 (q + t); \\ M' &= -r_0 T' - ct. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

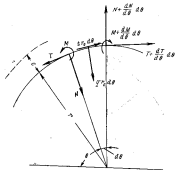


Рис. 4.

где через (\prime) обозначены производные по углу θ , т. е. где

$$(\prime) = \frac{d(\quad)}{ds} \quad (4)$$

Уравнения (3) можно принять за основные дифференциальные уравнения равновесия исследуемого кольца, если только касательные усилия t распределены, в соответствии с рис. 3, вдоль нейтральной оси рассматриваемого кольца. Если же, как на рис. 4, тангенциальная нагрузка кольца t распределена не вдоль нейтральной оси кольца, а вдоль некоторой окружности, радиус которой превышает радиус начальной окружности кольца на величину c , то третье из уравнений (1) нужно будет заменить уравнением:

$$M' = N r_0 - t r_0 c, \quad (5)$$

последнее же из уравнений группы (2) и (3) — уравнением

$$M' = -r_0 T' - r_0 (r_0 + c) t. \quad (6)$$

Предполагая для общности, что c не обязательно равно нулю, будем во всем дальнейшем принимать за основные дифференциальные уравнения равновесия рассматриваемого кольца уравнения:

$$\left. \begin{aligned} T'' + T &= -r_0 (q + t); \\ M' &= -r_0 T' - r_0 (r_0 + c) t; \\ N &= -(T' - r_0 t) = \frac{1}{r_0} M' + ct, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где, в соответствии с рис. 4, c есть избыток радиуса окружности, вдоль которой распределена приложенная к кольцу тангенциальная нагрузка t , по сравнению с радиусом нейтральной оси этого кольца.

Все дальнейшие рассуждения будут основаны на уравнениях (7) как более общих, чем уравнения (2) и (1).

2. Обращаясь к разысканию упругой линии кольца, постараемся учесть как его изгиб, так и растяжение его нейтральной оси.

Из теории упругости известно, что линейная деформация кругового кольца ϵ_{θ} в направлении $r d\theta$ выражается через радиальное в направлении $-dr$ перемещение его и тангенциальное в направлении $r d\theta$ перемещение его в зависимости

$$\epsilon_{\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{dr}{dr} - \alpha \right), \quad (8)$$

где (см. рис. 5):

r — начальное расстояние рассматриваемой точки кольца от его центра;

$$r = r_0 + z,$$

r_0 — радиус начальной нейтральной оси кольца, т. е. радиус геометрического места центров тяжести его поперечных сечений;

z — расстояние рассматриваемой точки кольца от его нейтральной оси;

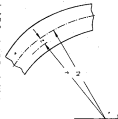


Рис. 5.

- w — радиальное по направлению от периферии к центру перемещение рассматриваемой точки;
- v — тангенциальное перемещение ее, положительное при перемещении в сторону увеличения угла θ .

Приняв гипотезу плоских сечений, можно перемещения w и v рассматриваемой точки кольца связать с перемещениями

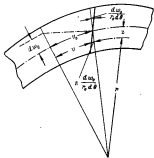


Рис. 6.

w_0 и v_0 соответствующей точки нейтральной оси зависимостями (см. рис. 6):

$$w = w_0 + z \frac{dw_0}{r_0 d\theta} - z \frac{dv_0}{r_0 d\theta} \quad (9)$$

Подставив w и v из равенств (9) в равенство (8), будем иметь

$$e_{\theta} = \frac{1}{r_0 - z} \left[\frac{d}{d\theta} \left(r_0 - z \right) w_0 - z \frac{dw_0}{r_0 d\theta} \right] - w_0 \quad (10)$$

Приняв, что r_0 достаточно велико по сравнению с z , пренебрежем при разложении дроби

$$\frac{1}{r_0 - z} = \frac{1}{r_0} \left(1 + \frac{z}{r_0} \right)$$

в ряд по степеням малого отношения $\frac{z}{r_0}$ малыми более высокого порядка, чем $\left(\frac{z}{r_0}\right)^2$. Тогда вместо (10) получим

$$e_{\theta} = \frac{1}{r_0} \left[w_0' - \frac{z}{r_0 - z} w_0'' - \frac{r_0}{r_0 - z} w_0 \right] \approx w_0' \frac{1}{r_0} \left[w_0' - \frac{z}{r_0} \left(1 + \frac{z}{r_0} \right) w_0'' - \left(1 + \frac{z}{r_0} + \frac{z^2}{r_0^2} \right) w_0 \right] \quad (11)$$

Согласно закону Гука нормальное напряжение Θ_{θ} , действующее в поперечных сечениях кольца, должно быть в силу предполагаемой нами пренебрежимой малости напряжений M и Z , связано с удлинением e_{θ} зависимостью

$$\Theta_{\theta} = E e_{\theta} \quad (12)$$

что совместно с равенством (11) дает:

$$\Theta_{\theta} = \frac{E}{r_0} \left[w_0' - \frac{z}{r_0} \left(1 + \frac{z}{r_0} \right) w_0'' - \left(1 + \frac{z}{r_0} + \frac{z^2}{r_0^2} \right) w_0 \right] \quad (13)$$

Подставив найденное выражение для Θ_{θ} в связь между M и T , с одной стороны, и Θ_{θ} , с другой, — даваемую равенствами

$$\left. \begin{aligned} M &= - \int_F \Theta_{\theta} z dF; \\ T &= \int_F \Theta_{\theta} dF. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где F — площадь поперечного сечения рассматриваемого кольца, после интегрирования получим:

$$\begin{aligned} M &= \frac{EF}{r_0^2} (w_0' + w_0); \\ T &= \frac{EF}{r_0} (w_0' - w_0) - \frac{EF}{r_0^2} (w_0' + w_0). \end{aligned} \quad (15)$$

где согласно принятому нами понятию о нейтральной оси кольца принято

$$\int_F \frac{z}{r_0} dF = 0, \quad (16)$$

интеграл

$$\int_F \frac{z^2}{r_0^2} dF$$

по малости отбросим;

через J же обозначена, как обычно, величина

$$J = \int_V x^2 dV \quad (17)$$

момента инерции плоскости поперечного сечения рассматриваемого кольца.

Из уравнений (15) следует:

$$\left. \begin{aligned} w_0'' + w_0 &= \frac{r}{EJ} M; \\ w_0' - w_0 &= \frac{M + rT}{EJ}. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Уравнениями этими, совместно с уравнениями (7), и определяются интересующие нас условия перемещения оси рассматриваемого кольца, равно как и условия в его поперечных сечениях.

Отбрасывая в этих уравнениях для простоты у w_0 , w_0' и w_0'' подстрочные индексы, можем придать полученной системе уравнений форму равенств:

$$\left. \begin{aligned} w'' + w &= \frac{r}{EJ} M; \\ w' - w &= \frac{M + rT}{EJ}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

в которых:

$$\left. \begin{aligned} T'' + T &= -r(q + t); \\ M' &= -rT - r(r + ct)t; \\ N &= -(T' - r t) = \frac{1}{2} M' + t e. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

3. Обращаясь к дальнейшему преобразованию полученной системы дифференциальных уравнений, отметим, что, как видно из первого уравнения группы (20), растягивающее усилие T может быть однозначной функцией от θ , как то должно быть у замкнутого кругового кольца, лишь в том случае, если в разложении функции $q + t$ в ряд Фурье по тригонометрическим функциям от угла θ будут отсутствовать члены, пропорциональные $\cos \theta$ и $\sin \theta$, т. е. только в том случае, если

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{2\pi} (q + t) \cos \theta d\theta &= 0; \\ \int_0^{2\pi} (q + t) \sin \theta d\theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Равенствами (21) выражаются очевидно условия общей уравновешенности главного вектора всех внешних сил, приложенных к рассматриваемому кольцу.

Ограничиваясь рассмотрением тех лишь случаев загрузки кольца, когда она симметрична по отношению к оси $\theta = 0$ и когда, следовательно, $q + t$ является четной функцией от θ , можем считать, что во всех интересующих нас случаях загрузки кольца второе из равенств (21) удовлетворяется само собой. Чтобы первое из равенств (21) было удовлетворено, необходимо положить

$$\int_0^{2\pi} t' \cos \theta r d\theta = - \int_0^{2\pi} q \cos \theta r d\theta, \quad (22)$$

или интегрируя левую часть равенства (22) по частям:

$$\left[r t \cos \theta \right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} r t \sin \theta d\theta = - \int_0^{2\pi} q \cos \theta r d\theta. \quad (23)$$

Но у кругового кольца t должно быть однозначной функцией от θ , следовательно, в левой части равенства (23) первый член может быть отброшен. Это позволяет переписать первое из условий (21) так:

$$\int_0^{2\pi} r t \sin \theta d\theta = -Q, \quad (24)$$

где

$$Q = \int_0^{2\pi} r q \cos \theta d\theta \quad (25)$$

и есть, очевидно, не что иное, как проекция на ось $\theta = \pi$ равнодействующей всей радиальной нагрузки рассматриваемого кольца.

С другой стороны, $\int_0^{2\pi} r t \sin \theta d\theta$, входящий в левую часть равенства (24), есть, как в том легко убедиться, проекция на ту же ось всей тангенциальной нагрузки рассматриваемого кольца.

Таким образом равенство (24) требует в сущности того, чтобы проекция Q на ось $\theta = \pi$ главного вектора осей радиальной нагрузки кольца была уравновешена проекцией на ту же ось всей тангенциальной его нагрузки.

Что касается до закона, согласно которому должно быть распределена вдоль периметра кольца тангенциальная нагрузка кольца t , то естественно принять закон этот, совпадающий с тем законом, по которому распределяется переизывающая сила

доль цилиндрической оболочки жесткого барабана подobenного закрепления. Этот же последний закон выражается, как то легко видеть, равенством

$$t = -t_0 \sin \theta, \quad (26)$$

где t_0 — некоторая постоянная.

Подставив t из (26) в равенство (24), получаем для определения t_0 уравнение

$$-r t_0 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = -r t_0 \pi = -Q, \quad (27)$$

откуда следует

$$t_0 = \frac{Q}{\pi r}. \quad (28)$$

Подставив (28) в (26), получим

$$t = -\frac{Q}{\pi r} \sin \theta, \quad (29)$$

где Q определяется равенством (25).

Теперь, когда функция t нам известна, можно проинтегрировать второе из равенств (30). Действительно, подставив во второе из уравнений группы (20) функцию t из равенства (29), будем иметь

$$M' = -r T' + r(r+c) \frac{Q}{\pi r} \sin \theta, \quad (30)$$

что после интегрирования по θ дает:

$$M = -r T - \frac{Q}{\pi} (r+c) \cos \theta + C_4, \quad (31)$$

где C_4 — некоторая пока неопределенная постоянная.

Равенство (31) позволяет исключить M из уравнений (19). Выполняя это, будем иметь для определения w и v :

$$w'' + w = -\frac{r}{EJ} \left[T + \frac{Q}{\pi} \frac{r+c}{r} \cos \theta - \frac{C_4}{r} \right]; \quad (32)$$

$$v' = w + \frac{C_4 - \frac{Q}{\pi} (r+c) \cos \theta}{EJ}. \quad (33)$$

В правую часть уравнения (32) входит неизвестная T . Чтобы исключить из уравнения эту неизвестную, достаточно продифференцировать уравнение (32) почленно дважды по θ и, прибавив результат дифференцирования к самому уравнению (32), принять во внимание первое из уравнений (26). Это дает

$$\left. \begin{aligned} (w'' + w)'' + (w'' + w) &= -\frac{r^2}{EJ} \left[T'' + T - \frac{C_4}{r} \right] = \\ &= \frac{r^2}{EJ} \left[q + r + \frac{C_4}{r} \right]; \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$v' = w + \frac{C_4 - \frac{Q}{\pi} (r+c) \cos \theta}{EJ},$$

или, принимая во внимание (26) и (28)

$$\left. \begin{aligned} w'''' + 2w'' + w &= \frac{r^2}{EJ} \left[q - t_0 \cos \theta + \frac{C_4}{r} \right]; \\ v' = w + \frac{C_4 - t_0 r (r+c) \cos \theta}{EJ}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

где t_0 — константа, определяемая [см. равенства (28) и (29)] зависимостью

$$t_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q \cos \theta d\theta. \quad (36)$$

Определив перемещения w и v из уравнений (35), можно внутреннее усилие в кольце разложить [см. формулы (19), (20) и (31)] с помощью выражений:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{EJ}{r^2} (w'' + w); \\ N &= \frac{1}{r} M' + t c = \frac{1}{r} M' - t_0 c \sin \theta; \\ T &= -\frac{M}{r} - t_0 (r+c) \cos \theta + \frac{C_4}{r}. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Равенствами (35), (36) и (37) дается интересующая нас система дифференциальных уравнений, позволяющих по заданной радиальной нагрузке q определить как упругие перемещения w и v оси кольца, так и внутренние усилия, ассоциируемые в его поперечных сечениях под действием этой нагрузки.

§ 3. Интегрирование системы основных дифференциальных уравнений § 2 для замкнутого кругового кольца, применительно к случаю, когда q является произвольной заданной четной функцией от θ

1. Чтобы разобратся в вопросе о том, к какому результату приводит интегрирование системы (35, 2)*, (37, 2)* для замкнутого кругового кольца, проинтегрируем эту систему применительно

* Здесь вторая цифра обозначает номер параграфа.

к частному случаю, когда g задано в виде произвольной четной функции от θ .

Для замкнутого кругового кольца нагрузка q , равно как и перемещения w и v , должны быть периодическими функциями от θ . Ограничиваясь рассмотрением случая, когда g является четной функцией от θ , можно положить:

$$q = q_0 + \sum_{k=1}^{k_{max}} q_k \cos k\theta, \quad (1)$$

где q_k — некоторые заданные константы.

Что касается до перемещений w и v , то в рассматриваемом нами случае должно быть, очевидно:

$$\left. \begin{aligned} w &= w_0 + \sum_{k=1}^{k_{max}} w_k \cos k\theta, \\ v &= \sum_{k=1}^{k_{max}} v_k \sin k\theta, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где w_k и v_k — постоянные, подлежащие определению. Подставив q из (1) в (36, 2), получим

$$k_0 = g_0 \quad (3)$$

и, следовательно,

$$g - k_0 \cos \theta = g_0 + \sum_{k=1}^{k_{max}} q_k \cos k\theta, \quad (4)$$

что по подстановке в первое из равенств (36, 2) дает:

$$w'''' + 2w'' + w = \frac{r^2}{EJ} \left[g_0 + \sum_{k=1}^{k_{max}} q_k \cos k\theta + \frac{C_0}{r} \right], \quad (5)$$

или, если принять во внимание (2):

$$w_k + \sum_{k=1}^{k_{max}} (k^2 - 1)^2 w_k \cos k\theta = \frac{r^2}{EJ} \left[g_0 + \frac{C_0}{r} + \sum_{k=1}^{k_{max}} q_k \cos k\theta \right]. \quad (6)$$

Равенство (6) может иметь место только в том случае, если

$$w_k = \frac{r^2}{EJ} \left[g_0 + \frac{C_0}{r} \right]; \quad (7)$$

$$v_k = \frac{r^2}{(k^2 - 1)^2 EJ} q_k \quad \text{при } k = 2, 3, 4, \dots \quad (8)$$

Что касается до постоянной w_0 , то она, как вытекало из уравнения (6), остается пока произвольной.

Принимая все это во внимание, видим, что в рассматриваемом случае

$$w = \frac{r^2}{EJ} \left[g_0 + \frac{C_0}{r} + \sum_{k=2}^{k_{max}} \frac{q_k}{(k^2 - 1)^2} \cos k\theta \right] + w_0 \cos \theta, \quad (9)$$

где w_0 — постоянная, пока не определенная.

Для определения w_0 подставим w из равенства (9) и из равенства (9) во второе из уравнений (35, 2). Это дает:

$$\sum_{k=2}^{k_{max}} v_k k \cos k\theta = \frac{r^2}{EJ} \left[g_0 + \frac{C_0}{r} + \sum_{k=2}^{k_{max}} \frac{q_k}{(k^2 - 1)^2} \cos k\theta \right] + w_0 \cos \theta + \frac{C_0 - k_0 r (\theta + \alpha)}{EJ} \cos \theta \quad (10)$$

и, следовательно:

$$\frac{r^2}{EJ} + \frac{C_0}{EJ} + \frac{C_0}{EJ} = 0; \quad (11)$$

$$v_k = w_0 - \frac{k_0 r (\theta + \alpha)}{EJ}; \quad (12)$$

$$v_k = \frac{r^2}{EJ k (k^2 - 1)^2} \quad \text{при } k = 2, 3, 4, \dots \quad (13)$$

Из (11) заключаем:

$$C_0 = -\frac{r^2}{J} \frac{1}{1 + \frac{r^2}{J^2}}, \quad (14)$$

что по подстановке в (9) дает:

$$w = \frac{r^2}{EJ} \left[1 - \frac{1}{1 + \frac{r^2}{J^2}} \right] + w_0 \cos \theta + \frac{r^2}{EJ} \sum_{k=2}^{k_{max}} \frac{q_k}{(k^2 - 1)^2} \cos k\theta, \quad (15)$$

или, что то же,

$$w = \frac{r^2}{EJ} \frac{1}{1 + \frac{r^2}{J^2}} + w_0 \cos \theta + \sum_{k=2}^{k_{max}} \frac{r^2}{EJ} \frac{q_k}{(k^2 - 1)^2} \cos k\theta. \quad (16)$$

Что касается до перемещения v , то согласно (35, 2), (12) и (13), должно быть

$$v = \left(\frac{r^2}{EJ} + \frac{C_0}{EJ} + \frac{C_0}{EJ} \right) \theta + \left(w_0 - \frac{k_0 r (\theta + \alpha)}{EJ} \right) \sin \theta + \sum_{k=2}^{k_{max}} \frac{r^2}{EJ} \frac{q_k}{(k^2 - 1)^2 EJ} \sin k\theta, \quad (17)$$

или, принимая во внимание (3) и (11),

$$v = \left(w_0 - \frac{k_0 r (\theta + \alpha)}{EJ} \right) \sin \theta + \sum_{k=2}^{k_{max}} \frac{r^2}{EJ k (k^2 - 1)^2} \sin k\theta. \quad (18)$$

В равенствах (16) и (18) входят одна лишь постоянная, пока не определенная, а именно постоянная w_0 , которой соответствуют те по направлению $\theta = \pi$ перемещения кольца как твердого тела, с точностью до знаков как до сдвигаемого, определяются основными дифференциальными уравнениями (35, 2) и (37, 2) упругой линии рассматриваемого кольца.

Для определения этой постоянной необходимо знать перемещение по направлению $\theta = \pm$ какой-либо точки кольца.

Если бы нас интересовали перемещения точки рассматриваемого кольца по отношению к кораблю, то естественно было бы уравнивать перемещение w у точек, лежащих на оси $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ соответствующему перемещению нейтральной оси оболочки жесткого барабана рассматриваемой башни, т. е. определить в равенствах (16) и (18) постоянную w_0 из условия

$$(w)_{\theta = \pm \frac{\pi}{2}} = v_{\theta = \pm \frac{\pi}{2}}, \quad (19)$$

где через $v_{\theta = \pm \frac{\pi}{2}}$ обозначено перемещение по направлению $\theta = \pm$ нейтральной оси оболочки жесткого барабана на уровне верхнего среза последнего.

Нас интересуют сейчас, однако, лишь изменения алгебра в боковом шпуре башен. Можно в настоящем исследовании вовсе не интересоваться перемещениями рассматриваемого кольца как твердого тела и в соответствии с этим положить:

$$w_0 = 0. \quad (20)$$

Тогда для w и v будем, согласно равенствам (16) и (18), иметь

$$w = -\frac{q_0 r^2}{E F \left(1 + \frac{q^2}{r^2}\right)} + \frac{k \sum_{\theta} \frac{q_0 r^2}{k^2 (k^2 - 1)^2 E J} \cos k \theta, \quad (21)$$

где

$$q^2 = J : F \quad (22)$$

и

$$v = -\frac{2k r^2 (q + d)}{E F} \sin \theta + \frac{k \sum_{\theta} \frac{q_0 r^2}{k^2 (k^2 - 1)^2 E J} \sin k \theta. \quad (23)$$

Равенствами (21)–(23) и воспользуемся для того, чтобы разобраться в полученном результате.

2. Как видно из равенств (21) и (23) независимая от угла θ часть нагрузки q вызывает лишь равномерное обжатие рассматриваемого кольца. Соответствующая ей часть перемещения w определяется равенством

$$w_{\theta = \pm \frac{\pi}{2}} = \frac{q_0}{r^2} + \frac{q_0 J}{r^2} \quad (24)$$

и зависит как от жесткости кольца по отношению к растяжению и сжатию $\frac{E F}{r^2}$, так и от жесткости его по отношению к изгибу $\frac{E J}{r^2}$. Обычно последняя во много раз превышает первую. Поэтому

равномерное обжатие кольца, вызываемое той частью радиальной нагрузки кольца, которая от θ не зависит, определяется в основном жесткостью рассматриваемого кольца по отношению к растяжению и сжатию, т. е. величиной $\frac{E F}{r^2}$. Жесткость кольца

по отношению к изгибу $\frac{E J}{r^2}$ входит в знаменатель правой части равенства (24), потому что при равномерном уменьшении радиуса кольца его кривизна увеличивается.

В том, что величины $\frac{E F}{r^2}$ и $\frac{E J}{r^2}$ входят в формулу (24) именно так, как они должны входить в связь между q_0 и $w_{\theta = \pm \frac{\pi}{2}}$, легко убедиться также на основании начала возможных перемещений.

Действительно, при равномерном обжатии кольца потенциальная энергия его сжатия должна определяться равенством

$$V_{\text{сж.}} = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} E F \left(\frac{w_{\theta = \pm \frac{\pi}{2}}}{r}\right)^2 r d\theta, \quad (25)$$

потенциальная энергия изгибания кривизны равенством

$$V_{\text{изг.}} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} E J \left(\frac{w_{\theta = \pm \frac{\pi}{2}}}{r^2} + \frac{w_{\theta = \pm \frac{\pi}{2}}}{r^2}\right)^2 r d\theta, \quad (26)$$

силовой же функции работы внешних сил — равенством

$$U = \int_0^{2\pi} q_0 w_{\theta = \pm \frac{\pi}{2}} r d\theta. \quad (27)$$

Словая функция всех внутренних и внешних сил, производящих работу при деформации кольца соответствующим перемещению $w_{\theta = \pm \frac{\pi}{2}}$, определяется выражением

$$U - V_{\text{сж.}} - V_{\text{изг.}} = q_0 2\pi r w_{\theta = \pm \frac{\pi}{2}} - \left(\frac{E F}{r^2} E F + \frac{E J}{r^2} E J\right) w_{\theta = \pm \frac{\pi}{2}}^2. \quad (28)$$

Определим $w_{\theta = \pm \frac{\pi}{2}}$ из условия

$$\frac{\partial (U - V_{\text{сж.}} - V_{\text{изг.}})}{\partial w_{\theta = \pm \frac{\pi}{2}}} = 0, \quad (29)$$

данного начала возможных перемещений, мы должны, следовательно, получить

$$2\pi r \left[q_0 - \left(\frac{E F}{r^2} + \frac{E J}{r^2}\right) w_{\theta = \pm \frac{\pi}{2}} \right] = 0, \quad (30)$$

что может иметь место только в том случае, если $w_{\theta = \pm \frac{\pi}{2}}$ определяется равенством (24).

В последнем обычно член $\frac{EF}{r^2}$ настолько мал по сравнению с членом $\frac{EF}{r^2}$, что, не делая практически никакой ошибки, можно вместо (24) полагать

$$v_{\theta, \text{вн}} \approx \frac{r^2 \theta}{EF} \quad (31)$$

т. е. при определении равномерного обжатия кольца, учитывать только его жесткость по отношению к растяжению и сжатию его нейтральной осью.

3. Обращаемся к рассмотрению влияния, оказываемого на кольцо нагрузкой $q, \cos \theta$, т. е. той гармонике радиальной нагрузки кольца, от которой единственно лишь и зависит направление вдоль оси $\theta = \pi$ составляющего главного вектора радиальной нагрузки кольца. Как видно из равенств (21) и (22), эта часть радиальной нагрузки кольца, уравновешивающаяся, как то было принято выше тангенциальными реакциями оболочки жесткого барабана, не вызывает радиальных перемещений w . Вызываемые ею тангенциальные перемещения кольца определяются равенством

$$v_{\theta, \text{вн}} = -\frac{q_0 r^2 (r+c)}{EF} \sin \theta, \quad (32)$$

или, что то же, равенством

$$v_{\theta, \text{вн}} = -\frac{q_0 r^2}{EF} \frac{r+c}{r} \sin \theta. \quad (33)$$

Как видно из формулы (33), жесткость кольца по отношению к этой гармонике радиальной нагрузки кольца не зависит от его жесткости по отношению к изгибу и определяется в основном жесткостью кольца по отношению к растяжению и сжатию $\frac{EF}{r^2}$.

Множителем $\frac{r+c}{r}$ учитывается поправка на несовершенство нейтральной оси кольца с периметром концентрической с ней оболочки жесткого барабана. Если периметр оболочки жесткого барабана совпадает с нейтральной осью кольца, то $c = 0$ и множитель $\frac{r+c}{r}$ обращается в единицу. Вообще, как то видно из формул (21)–(23), величина c входит в выражения для w и v только через посредство множителя $\frac{r+c}{r}$ в формуле (33). Так как с обычно очень не велико по сравнению с r , то множитель $\frac{r+c}{r}$ отличается от единицы значительно меньше, чем на 10%, а формулы определяемые формулой (33), несложно. Следует признать, что несовершенство периметра оболочки жесткого барабана с нейтральной осью кольца почти не оказывает влияния на тангенциальные перемещения кольца. На радиальные перемещения

кольца и величины w не имеет никакого влияния, если не говорить о косвенном влиянии через посредство перемещений кольца как твердого целого, формулами (21) и (32) не учитываемых.

4. Что касается до трех гармоник радиальной нагрузки кольца, т. е. зависящих от q_0, q_2, q_4, \dots гармоник q_n , которыми, как видно из равенств (21) и (23), единственно лишь и определяется искривление нейтральной оси кольца, то соответствующие им перемещения

$$\left. \begin{aligned} w_{\text{вн}} &= \frac{1}{EJ} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n r^n}{(n^2-1)^2 EJ} \cos n \theta, \\ v_{\theta, \text{вн}} &= \frac{1}{EJ} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q_n r^n}{4(n^2-1)^2 EJ} \sin n \theta. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

не зависят от жесткости кольца по отношению к растяжению и сжатию и связаны между собой той самой зависимостью

$$v' = w, \quad (35)$$

в которую переходит второе из уравнений (35.2) при EF бесконечно большом.

Перемещения кольца, вызываемые влиянием тех гармоник радиальной нагрузки кольца, которые вызывают от круглого кольца отклонения от правильной круговой формы, можно, следовательно, вычислять в предположении, что нейтральная ось кольца неразрывна.

Этот результат можно иметь в виду во всех тех случаях, когда упругую линию кольца почему-либо желательно размыкать не в форме тригонометрических рядов, а в замкнутом виде.

5. Подводя итог всему сказанному в настоящем параграфе, можно констатировать следующее:

1) та часть радиальной нагрузки кольца, которая не зависит от координаты θ , вызывает равномерное обжатие кольца, определяемое формулой

$$\left. \begin{aligned} w_{r,0} &= \frac{q_0}{EF} \frac{r}{r^2 + r^2} = \frac{q_0 r^2}{EF} \frac{1}{1 + \left(\frac{c}{r}\right)^2}, \\ v_{\theta,0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

где

$$q^2 = J : F,$$

2) та гармоника $q_n \cos \theta$ этой нагрузки, от которой зависит величина направленной вдоль оси $\theta = \pi$ составляющей

$$Q = \pi r q, \quad (37)$$

главного вектора радиальной нагрузки кольца, вызывает лишь

тангенциальные перемещения точек его оси, определяемые формулами

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{внеш}} &= 0; \\ v_{\text{внеш}} &= \frac{q_0 r^2}{E J} \frac{r+\rho}{r} \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

3) все остальные радиальные нагрузки кольца $q - q_0 - q_1 \cos \theta$ оказывает у кольца лишь изгиб, происходящий без растяжения нейтральной оси кольца и определяемый формулами

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{вн}} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_0 r^2}{E J} \frac{\cos k \theta}{k^2 - 1}; \\ v_{\text{вн}} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_0 r^2}{E J} \frac{\sin k \theta}{k(k^2 - 1)}. \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

4) перемещения от изгиба кольца, соответствующие формулам (39), удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} u_{\text{вн}}'' + 2u_{\text{вн}}' + u_{\text{вн}} &= \frac{r^2}{E J} (q - q_0 - q_1 \cos \theta); \\ v_{\text{вн}}'' &= u_{\text{вн}}'. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

5) суммой перемещений, определяемых формулами (36), (38) и (39), перемещения кольца определяются с точностью до слагаемого

$$\left. \begin{aligned} u_3 &= u_3 \cos \theta; \\ v_3 &= u_3 \sin \theta, \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

соответствующего поступательному, по направлению оси $\theta = \pi$ перемещению кольца, как целого.

6) в общий интеграл дифференциальных уравнений (40) решение, даваемое равенствами (41), входит, как частный интеграл соответствующей однородной системы.

7) из всех слагаемых полного перемещения точек нейтральной оси первого кольца жестких барабанов базенных артустановок, определяемых формулами:

$$\left. \begin{aligned} w &= w_0 + w_{\text{внеш}} + u_{\text{вн}} + u_3; \\ \varphi &= \varphi_0 + \varphi_{\text{внеш}} + v_{\text{вн}} + v_3, \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

на элементизазора в боковом штыре башки влияют лишь перемещения w_0 и φ_0 , определяемые равенствами (36) и (39). Поэтому при исследовании вопроса об изменении упомянутого зазора нет необходимости считаться со всеми остальными слагаемыми полного перемещения кольца, обрамляющего зерный срез жесткого барабана.

8) отношение окружности, с которой совпадает диаметр оболочки жесткого барабана, от геометрического места центра тя-

жести поперечных сечений кольца, отражается на величине одного лишь перемещения $v_{\text{внеш}}$, определяемого формулами (38), и никакого влияния на w , а следовательно, и на изменение зазора в боковом штыре башки не имеет.

§ 4. Решение для кругового кольца уравнений (40, 3) в замкнутом виде

Равенствами (39, 3) решение уравнений (40, 3) дается для кругового кольца в форме тригонометрических рядов. Как уже было упомянуто выше, иногда решение этих уравнений бывает интересно получить в замкнутом виде. Рассмотрим вопрос об интегрировании уравнения (40, 3) в замкнутом виде несколько подробнее. Ограничимся при этом, как и выше, рассмотрением только лишь частного случая, когда q задано в интервале $-\pi < \theta < \pi$ в виде любой функции, четной относительно сечения $\theta = 0$, и когда, следовательно, и искомое w может быть найдено в форме некоторой функции, четной относительно упомянутого сечения. Итак, допустим, что в интервале

$$-\pi < \theta < \pi \quad (1)$$

нагрузка q задана в виде произвольной функции такой, что при всяком θ , лежащем в пределах упомянутого интервала, имеет место условие:

$$q(-\theta) = q(\theta). \quad (2)$$

Определим постоянные q_0 и q_1 из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} (q - q_0 - q_1 \cos \theta) r d\theta &= 0 \\ \int_{-\pi}^{+\pi} (q - q_0 - q_1 \cos \theta) \cos \theta r d\theta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

можно считать, что главный вектор радиальной нагрузки

$$q - q_0 - q_1 \cos \theta$$

будет у рассматриваемого кругового кольца равен нулю.

Главный момент ее будет при этих условиях очевидно также равен нулю, ибо все элементарные силы, из которых нагрузка складывается, проходят через одну и ту же точку, а именно через центр кольца. Всякое решение первого из уравнений (40, 3) непрерывно в пределах $-\pi < \theta < \pi$ до своих третьих производных включительно не может при этих условиях не удовлетворять

условиями периодичности изгибающего момента и перерезывающей силы, т. е. условиями:

$$\left. \begin{aligned} M(+\pi) &= M(-\pi); \\ N(+\pi) &= N(-\pi). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Пусть $w_{\alpha, \beta}$ есть одно из таких решений уравнения

$$w'''' + 2w'' + w = \frac{r^2}{EJ} (g - g_0 - g_1 \cos \theta). \quad (5)$$

приним решение четное относительно θ , т. е. удовлетворяющее во всем интервале, где

$$-\pi < \theta < \pi,$$

взяв для него значение $\theta = \pm \pi$ получим

$$w_{\alpha, \beta}(-\theta) = w_{\alpha, \beta}(+\theta) \quad (6)$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} w'_{\alpha, \beta}(-\theta) &= -w'_{\alpha, \beta}(\theta); \\ M_{\alpha, \beta}(-\theta) &= M_{\alpha, \beta}(\theta); \\ N_{\alpha, \beta}(-\theta) &= -N_{\alpha, \beta}(\theta). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Всякое такое решение, как удовлетворяющее при $\theta = \pm \pi$, в силу (4), условию

$$N_{\alpha, \beta}(-\pi) = +N_{\alpha, \beta}(\pi),$$

в силу же (7), условию

$$M_{\alpha, \beta}(-\pi) = -N_{\alpha, \beta}(\pi)$$

должно, естественно, удовлетворять условиям

$$N_{\alpha, \beta}(-\pi) = N_{\alpha, \beta}(\pi) = 0, \quad (8)$$

как то и должно быть у искомого радиального перемещения для кругового кольца.

Общий интеграл уравнения (5) может быть выписан в форме равенства

$$w = w_{\alpha, \beta} + w_{\text{одн.}}, \quad (9)$$

где $w_{\alpha, \beta}$ упомянутое выше частное решение уравнения (5), удовлетворяющее в интервале $-\pi < \theta < \pi$ условиями (3), (6) и (7), а следовательно и (8), а $w_{\text{одн.}}$ есть общий интеграл однородного уравнения

$$w'''' + 2w'' + w = 0. \quad (10)$$

Последний дается равенством

$$w_{\text{одн.}} = C_1 \cos \theta + C_2 \theta \sin \theta + C_3 \sin \theta + C_4 \theta \cos \theta, \quad (11)$$

или, если отбросить нечетные функции, равенством

$$w_{\text{одн.}} = C_1 \cos \theta + C_2 \theta \sin \theta. \quad (12)$$

Решение (12) удовлетворяет, очевидно, в интервале $-\pi < \theta < \pi$ условиям:

$$\left. \begin{aligned} w_{\alpha, \beta}(-\theta) &= w_{\alpha, \beta}(+\theta); \quad M_{\alpha, \beta}(-\theta) = M_{\alpha, \beta}(+\theta); \\ w'_{\alpha, \beta}(-\theta) &= -w'_{\alpha, \beta}(+\theta); \quad N_{\alpha, \beta}(-\theta) = -N_{\alpha, \beta}(+\theta), \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

а следовательно, и условию

$$N_{\alpha, \beta}(-\pi) = N_{\alpha, \beta}(+\pi) = 0. \quad (14)$$

Поэтому решение

$$w = w_{\alpha, \beta} + C_1 \cos \theta + C_2 \theta \sin \theta, \quad (15)$$

где $w_{\alpha, \beta}$ есть упомянутое выше частное решение уравнения (5), можно считать подчиненное в интервале $-\pi < \theta < \pi$, помимо условий:

$$\left. \begin{aligned} w(\theta) &= w(-\theta); \quad M(\theta) = M(-\theta); \\ w'(\theta) &= -w'(-\theta); \quad N(\theta) = -N(-\theta), \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

еще условию

$$N(+\pi) = N(-\pi) = 0. \quad (17)$$

Распорядившись надлежащим образом постоянной C_2 , можно добиться того, что (15) будет удовлетворять, помимо условий (16) и (17), еще условию

$$w'(+\pi) = w'(-\pi) = 0 \quad (18)$$

и будет, следовательно, удовлетворять всем условиям периодичности решения четного относительно аргумента θ .

Постоянная C_1 остается в решении (15) неопределенной, как того и следовало ожидать по сказанному в предыдущем параграфе.

Что касается перемещения v , то согласно второму из уравнений (4.3), должно быть

$$v' = w. \quad (19)$$

Общий интеграл этого уравнения дается равенством

$$v = c_3 + \int_0^{\theta} w \, d\theta \quad (20)$$

и дает по подстановке в него w , найденного вышеуказанным образом, для v решение, нечетное относительно сечения $\theta = 0$, если мы положим в нем

$$c_3 = 0. \quad (21)$$

Отбросив в равенстве (20) постоянную c_3 , получаем

$$v = \int_0^{\theta} w \, d\theta. \quad (22)$$

Найденное решение удовлетворяет не только условию

$$\varphi = 0 \text{ при } \theta = 0, \quad (23)$$

как то должно иметь место для симметрично нагруженного и симметрично закрепленного кольца, которое мы рассматриваем, но и условие периодичности

$$\varphi(\pi) = \varphi(-\pi) = 0, \quad (24)$$

ибо постоянной q_2 в уравнении (5) мы распорядились так, что уравнение (3) удовлетворено.

Таким образом, поступая как то указано выше, можно всегда, если только q задано, разыскать перемещение симметрично нагруженного кругового кольца не только в форме тригонометрических рядов (39.5), но также и в замкнутом виде.

§ 5. Постановка задачи о влиянии деформации верхнего кольца жесткого барабана на диаграмму отпора пружинящих катков боевого штыря

1. Выведенная выше система основных дифференциальных уравнений упругой линии замкнутого кругового кольца:

$$\left. \begin{aligned} \omega^{(4)} + 2\omega'' + \omega &= \frac{q}{R^2} \left(q - q_1 \cos \theta + \frac{C_2}{R^2} \right); \\ \varphi' &= \omega + \frac{C_3 - q_1 r (r + a) \cos \theta}{R^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

[см. равенства (35. 2) и (3. 3)] позволяет осветить вопрос о влиянии деформации верхнего кольца жесткого барабана на диаграмму отпора пружинящих катков башенных артиллерийских установок.

Вопрос этот может быть поставлен так.

Допустим, что при некотором состоянии корабля и башни зазор в боевом штыре башни нами измерен, причем (см. рис. 7) отстояние вертикального пологона жесткого барабана от центра упомянутого пологона оказалось на уровне пружинящих катков башни равным величине

$$a_0 + \Delta,$$

где a_0 — радиус боевого штыря башни,
 Δ — радиальный зазор в боевом штыре, определяемый формулой

$$\Delta = \Delta_1 - \Delta_2 \cos 2\theta, \quad (2)$$

а Δ_1 и Δ_2 — некоторые определенные константы.

Допустим, что при этом состоянии корабля пружинящие катки жесткого барабана отрегулированы так, что все они, будучи до отказа выдвинуты их пружинами на своих гнездах, выступают

из боевого штыря в точности на $\Delta_0 - \Delta_0$, причем по диаметру башни $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ они без всякого зажатия касаются вертикального пологона жесткого барабана, на всех же прочих диаметрах башни они не касаются этого пологона.

Допустим для общности, что на уровне вертикального пологона башни верхнее кольцо барабана имеет несколько иную эллиптичность, чем на уровне катков башни, и радиальные зазоры между

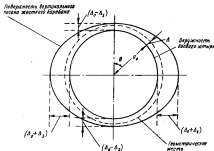


Рис. 7.

вертикальным пологоном боевого штыря башни и соответствующим пологоном жесткого барабана определяются формулой

$$\Delta^* = \Delta_0^* - \Delta_1^* \cos 2\theta, \quad (3)$$

так что на поперечном диаметре башни, где $\theta = 0$ радиальный зазор в боевом штыре башни, есть

$$\Delta_{\text{max}}^* = \Delta_0^* - \Delta_1^* \quad (4)$$

Представим себе теперь, что после указанной регулировки катков башни:

1) под влиянием общего кривизны корабля верхние концы стоек жесткого барабана получили тенденцию к уменьшению зазора и боевом штыре башни и, будь они освобождены от связи с верхним кольцом жесткого барабана, прошли бы по направлению к центру боевого штыря путь, определяемый формулой

$$\Delta = \Delta_0 + \Delta_4 \cos 2\theta, \quad (5)$$

2) верхнее кольцо жесткого барабана охладилось на t_1 градусом Цельсия;

3) башня нагрелась на t_2 градусом Цельсия.

Определим насколько уменьшится бы от всего этого зазор в боевом штыре башни, если бы жесткость пружинящих катков башни в их начальное поднятие были бы равны нулю.

Обозначим через k_{cr} отнесенную к единице длине параметра жесткого барабана башни жесткость его стоек, т. е. коэффициент пропорциональности между интенсивностью q_{cr} радиальной загрузки верхнего кольца, стойками жесткого барабана и радиальным перемещением стоек, но отнесенным к тому их состоянию, когда они реакциями рассчитываемого кольца не нагружены.

Пусть $w_{\text{кольца}}$ есть искомое перемещение верхнего кольца жесткого барабана. Тогда для интенсивности загрузки кольца реакциями стоек жесткого барабана можно записать:

$$q_{cr} = k_{cr} (A - w_{\text{кольца}}), \quad (6)$$

или, принимая во внимание (5),

$$q_{cr} = k_{cr} (A_1 + A_2 \cos 2\theta - w_{\text{кольца}}). \quad (7)$$

Но радиальное перемещение кольца складывается из: а) перемещения от охлаждения кольца и б) перемещения от внешней нагрузки $q_{\text{вн}}$.

Первое определяется величиной

$$a \alpha t_1$$

второе — уравнением (1), если в последнее мы подставим q_{cr} вместо q , положив в равенстве (7),

$$w_{\text{кольца}} = w + a \alpha t_1. \quad (8)$$

Сделаю эту подстановку, получаем для определения w :

$$w'''' + 2w'' + w = \frac{r^4}{EJ} [k_{cr} (A_1 + A_2 \cos 2\theta - a) - k_{cr} a \alpha t_1 - q_1 \sin \theta + \frac{C_1}{r^2}], \quad (9)$$

где по определению величины q_1 , данному выше в § 3, должно быть

$$q_1 = 0. \quad (10)$$

Принимая это во внимание, видим, что искомое второе слагаемое перемещения $w_{\text{кольца}}$ должно удовлетворять уравнению

$$k_{cr} w + \frac{r^4}{EJ} [w'''' + 2w'' + w] = k_{cr} (A_1 - a \alpha t_1) + \frac{C_1}{r^2} + k_{cr} A_2 \cos 2\theta \quad (11)$$

и, следовательно, определяется равенством:

$$w = \frac{1}{k_{cr} + \frac{r^4}{EJ}} \left[k_{cr} (A_1 - a \alpha t_1) + \frac{C_1}{r^2} \right] + \frac{k_{cr}}{k_{cr} + \frac{r^4}{EJ}} A_2 \cos 2\theta \quad (12)$$

Принимая во внимание (10) и (12), можно второе из уравнений (1) переписать в рассматриваемом случае так

$$a' = \frac{1}{k_{cr} + \frac{r^4}{EJ}} \left[k_{cr} (A_1 - a \alpha t_1) + \frac{C_1}{r^2} \right] + \frac{C_2}{EJ} + \frac{k_{cr}}{k_{cr} + \frac{r^4}{EJ}} A_2 \cos 2\theta, \quad (13)$$

что удовлетворит условию однозначности величины a' только в том случае, если

$$\frac{k_{cr} (A_1 - a \alpha t_1) + \frac{C_1}{r^2}}{k_{cr} + \frac{r^4}{EJ}} + \frac{C_2}{EJ} + \frac{1}{k_{cr} + \frac{r^4}{EJ}} = 0, \quad (14)$$

т. е., если

$$\frac{C_2}{r^2} = - \frac{k_{cr} (A_1 - a \alpha t_1) \frac{EJ}{r^4}}{k_{cr} + \frac{r^4}{EJ} + \frac{r^4}{EJ}} \quad (15)$$

и, следовательно,

$$w = \frac{k_{cr} (A_1 - a \alpha t_1)}{k_{cr} + \frac{r^4}{EJ} + \frac{r^4}{EJ}} + \frac{k_{cr}}{k_{cr} + \frac{r^4}{EJ}} A_2 \cos 2\theta. \quad (16)$$

Подставив эту величину в формулу (8), получаем для искомого полного перемещения кольца, вызываемого совместным действием общего изгиба корпуса и охлаждением кольца:

$$w_{\text{кольца}} = \frac{k_{cr} A_1}{k_{cr} + \frac{r^4}{EJ} + \frac{r^4}{EJ}} + \frac{\frac{r^4}{EJ} + \frac{r^4}{EJ}}{k_{cr} + \frac{r^4}{EJ} + \frac{r^4}{EJ}} a \alpha t_1 + \frac{k_{cr}}{k_{cr} + \frac{r^4}{EJ}} A_2 \cos 2\theta. \quad (17)$$

Если в дополнение к этой деформации кольца еще боевой штырь башни нагрелся на t_2 градусом, то при выведенных из действия пружинящих катков башни радиальный зазор в боевом штыре уменьшится в общем на величину $a(0)$, определяемую равенством

$$a(0) = a_0 + a_2 \cos 2\theta, \quad (18)$$

$$a_0 = \frac{k_{ct} A_0}{k_{ct} + \frac{KF}{\rho^2} + \frac{KJ}{\rho^2}} + \frac{\frac{KF}{\rho^2} + \frac{KJ}{\rho^2}}{k_{ct} + \frac{KF}{\rho^2} + \frac{KJ}{\rho^2}} a \alpha \xi + a \alpha \xi_0 \quad (19)$$

$$a_0 = \frac{k_{ct}}{k_{ct} + \frac{KF}{\rho^2}} \quad (20)$$

Допустим, что валитаны a_1 и a_2 определены. Спрашивается, как должен измениться зазор в боевом штыре башни, если подвижные катки ее не будут выведены из действия и одновременно на башню по направлению $\theta = \pi$ будет действовать некоторая сила K , величина которой задана.

На этот вопрос и достаточное ответить, предполагая, что начальное поджатие пружиной каждого катка есть Q' , жесткость каждого из них есть k_{pr} , расположении пружиницы катки на равных интервалах друг от друга, причем число их настолько велико, что жесткость катков можно считать распределенной вдоль периметра боевого штыря равномерно.

2. Обозначая через ϵ число катков на периметре боевого штыря башни, введем обозначение:

$$\left. \begin{aligned} q^0 &= \frac{Q'}{2\pi r} \epsilon; \\ m &= \frac{k_{pr}}{2\pi r} \epsilon. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Тогда, обозначая через w отстояние вертикального пояса катки от поверхности боевого штыря башни, можно будет для интенсивности радиальной нагрузки кольца отпором пружиницы катки написать

$$q_{кт} = - \{ q^0 + m [-w + (\Delta_0 - \Delta_1)] \}, \quad (22)$$

если $-w + (\Delta_0 - \Delta_1) > 0$,

$$q_{кт} = 0, \quad (23)$$

если $-w + (\Delta_0 - \Delta_1) < 0$,

ибо диаграмма отпора каждого отдельного катка предполагается по сказанному выше соответствующей рис. 8, на котором через $(\Delta_0 - \Delta_1)$ обозначена величина того отстояния крайних точек катки от поверхности боевого штыря, которое соответствует, согласно рис. 8, начальной регулировке их.

Условившись через w обозначать радиальные перемещения кольца, вызываемые действием отпора катков, и считывая их

от той упругой линии его, которая соответствует отсутствию нагрузки $q_{кт}$, можно для определения перемещений w воспользоваться уравнением

$$w'''' + 2w'' + w = \frac{r^4}{EJ} [q_{кт} + q_{ct} - q_1 \cos \theta + \frac{C_0}{\rho^2}], \quad (24)$$

где через q_{ct} обозначена интенсивность загрузки кольца дополнительными реакциями стоек жесткого барабана, определяющаяся формулой

$$q_{ct} = -k_{ct} w, \quad (25)$$

через q_1 константа, подбираемая из условия

$$\int_0^{2\pi} (q_{кт} + q_{ct} - q_1 \cos \theta) \cos \theta r d\theta = 0, \quad (26)$$

а через C_0 константа, определяемая из условия однозначности перемещения w , соответствующего перемещению w .

Что касается величины w , то по сказанному выше в п. 2 в момент регулировки катков башни она была согласно предположению равна величине Δ , определенной формулой (2). Под влиянием нагрева корабля, нагрева башни и охлаждения кольца, обрабатываемого верхним гребнем жесткого барабана, она уменьшилась, как сказано, на величину $\Delta \theta$, определяемую формулой (18), в которой a_1 и a_2 предполагаются известными. Наконец, под влиянием отпора пружиницы катков величина w по сказанному выше увеличивается еще на w , определяемое уравнением (24).

При интегрировании последнего мы должны, следовательно, принимать в формулах (22) и (23)

$$w = \Delta - \Delta \theta - w, \quad (27)$$

т.е. что то же

$$w = \Delta_0 - \Delta_1 \cos 2\theta - a_0 - a_1 \cos 2\theta - w, \quad (28)$$

где величины Δ_0 , a_0 , Δ_1 и a_1 предполагаются известными, а w поддается определению из уравнения (24).

Подставляя w из (28) в (22) и (23), получаем для определения $q_{кт}$, входящего в правую часть уравнения (24):

$$q_{кт} = - \{ q^0 + m [-\Delta_0 (1 - \cos 2\theta) + a_0 + a_1 \cos 2\theta + w] \} \quad (29)$$

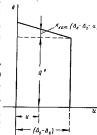


Рис. 8.

$$\begin{aligned} \text{при} & -A_1(1 - \cos 2\theta) + a_0 + a_1 \cos 2\theta + w > 0 \\ \text{и} & \quad \quad \quad \psi_{\text{кр}} = 0 \\ \text{при} & -A_1(1 - \cos 2\theta) + a_0 + a_1 \cos 2\theta + w < 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Принимая во внимание (29), (30), (24) и (25), видно, что основное дополнительное радиальное перемещение кольца от действия отпора пружинящих катков башни, обозначенное через w , определяется дифференциальными уравнениями:

$$\frac{EJ}{\rho^4} (w'''' + 2w'' + w) = -q^* + m [A_1(1 - \cos 2\theta) - a_0 - a_1 \cos 2\theta] - (k_{\text{кр}} + m)w - q_1 \cos \theta + \frac{C_2}{\rho} \quad (31)$$

на участках, где имеет место неравенство

$$-A_1(1 - \cos 2\theta) + a_0 + a_1 \cos 2\theta + w > 0$$

и

$$\frac{EJ}{\rho^4} (w'''' + 2w'' + w) = -k_{\text{кр}} w - q_1 \cos \theta + \frac{C_2}{\rho} \quad (32)$$

на участках, где

$$-A_1(1 - \cos 2\theta) + a_0 + a_1 \cos 2\theta + w < 0.$$

При этом в отношении констант q_1 и $\frac{C_2}{\rho}$ следует иметь в виду сказанное выше при пояснении обозначений, входящих в правую часть уравнения (24).

3. Уравнениями (31) и (32) радиальное перемещение кольца определяются до тех пор, пока при каком-либо значении радиального зазора и боювом штире не окажется выходящим. Так как после выбора зазора и боювом штире нельзя быть уверенным в достаточном исправном действии механизма горизонтального приведения башни, в основной целью внешнего частного исследования является выяснение вопроса о том, при каком крене хребта башни может закончиться, то для получения интересующей нас диаграммы отпора пружинящих катков башни нет необходимости рассматривать случаи, когда зазор и боювом штире башни оказываются выходящими и изгиб верхнего кольца жесткого барабана не может быть определен уравнениями (31) и (32).

Тангенциальное перемещение v определяется у интересующего нас кольца дифференциальным уравнением

$$v' = w + \frac{C_2}{\rho} \frac{r^2}{EJ} - \frac{q_1 r^2}{EJ} \frac{r + e}{r} \cos \theta. \quad (33)$$

4. Разберемся в физическом смысле уравнений (31), (32), которыми определяется радиальное по отношению к боювому штире

башня перемещение w исследуемого кольца, отсчитываемое от той упругой линии этого кольца, которая вела бы место в случае отсутствия у башни пружинящих катков и вообще какого-либо взаимодействия между боювом штирем башни и кольцом, образующим верхний срез его жесткого барабана.

Как видно из уравнения (31), на протяжении тех участков исследуемого кольца, где катки башни находятся в плотном соприкосновении с исследуемым кольцом, изгиб кольца определяется дифференциальным уравнением изгиба, лежащего на сплошном упругом основании жесткости $(k_{\text{кр}} + m)$ кольца, нагруженного внешней нагрузкой интенсивности:

$$-q^* + m [A_1(1 - \cos 2\theta) - a_0 - a_1 \cos 2\theta] - q_1 \cos \theta;$$

на протяжении же тех участков кольца, где плотного соприкосновения с катками башни у кольца нет, дифференциальным уравнением изгиба такого же кольца, но нагруженного внешней нагрузкой

$$-q_1 \cos \theta$$

и лежащего на сплошном упругом основании жесткости $k_{\text{кр}}$.

Величиной q_1 определяется, по сказанному выше, интенсивность касательной нагрузки являющейся реакцией оболочки жесткого барабана. Реакцией явным уравновешивается избыток проекции на направление $\theta = \pi$ равнодействующей давления катков башни на исследуемое кольцо по сравнению с проекцией на то же направление равнодействующей реакцией слоев упругого барабана. Варьируя величину q_1 , можно изменять величину обеих равнодействующих, а следовательно, и ту их знак, которой определяется кольцо давление башни на исследуемое кольцо.

5. Обозначив кольцо давление башни на жесткий барабан через R , можем найти R из условия

$$R = -2 \int_0^{\pi} q_{\text{кр}} \cos \theta r d\theta, \quad (34)$$

или, приняв во внимание равенства (29) и (30)

$$R = -2 \int_0^{\pi} [q^* + m[-A_1(1 - \cos 2\theta) + a_0 + a_1 \cos 2\theta + w]] r \cos \theta d\theta, \quad (35)$$

где интегрирование предполагается распространенным на все те значения угла θ , лежащие в интервале

$$0 = \theta = \pi, \quad (36)$$

где удовлетворено неравенство

$$[-A_1(1 - \cos 2\theta) + a_0 + a_1 \cos 2\theta + w] > 0. \quad (37)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{II} \quad & \frac{EJ}{r^3} (w'''' + 2w'' + w) + k_{\text{от}} w = -q_1 \cos \theta + \frac{C_2}{r^2} \\ & c_4 + c_5 \cos 2\theta + w < 0, \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$$\text{III} \quad f = w(x) - |w(x)|_{x=0} \quad (46)$$

$$\text{IV} \quad R = -2 \int_0^{\pi} [q^0 + w(c_4 + c_5 \cos 2\theta + w)] r \cos \theta d\theta, \quad (47)$$

где интегрирование предполагается распространенным на всю ту, лежащую в пределах $0 < \theta < \pi$ область угла θ , где

$$w > -c_4 - c_5 \cos 2\theta. \quad (48)$$

Равенствам (44) и (45) и используем для разыскания интересующей нас диаграммы отпора пружинящих катков башки.

§ 6. Интегрирование уравнений (44.5) и (45.5) применительно к частному случаю, когда жесткость пружинящих катков башки пренебрежимо мала.

1. Начальный радиальный зазор в башке штыре башки на радиусе $\theta = \pi$ не превышает обычно величин порядка 0,75—1,0 мм. Начальное же поджатие пружин, стремящихся вытолкнуть пружинящие катки башки из их гнезд, делается обычно не меньше чем 3,5—5,0 мм.



При этих условиях согласно формуле (42.5) максимальное значение величины $w(\pi)$ ограничено величиной порядка 1 мм, в то время как q^0 w составляет величину порядка 4—5 мм. Поэтому согласно формуле (29.5) величина $q_{\text{от}}$ w колеблется обычно (см. рис. 9) в довольно узких пределах от $|q_{\text{от}}|_{\text{от}} = 4—5$ мм при тех значениях θ , при которых реакция катков перестает быть отличной от нуля до $|q_{\text{от}}|_{\text{от}} \approx 5—6$ мм.

Неудобно поэтому очень большой огибающей, можно, следовательно, пренебречь изменчивостью величины $q_{\text{от}}$ на всем протяжении тех

участков окружности рассматриваемого кольца, где $q_{\text{от}} \neq 0$, приняв, что

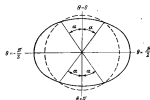
$$q_{\text{от}} = q^0 \quad (1)$$

на всем протяжении этих участков.

Переходя к формуле (22.5) обращаемся к равенству (1), если мы положим в ней w равным нулю. При

$$w = 0$$

уравнения (44.5) и (45.5), равно как и равенства (47.5), упро-



щаются, именно дифференциальные уравнения, которые определяются переписанные в уравнении

$$\left. \begin{aligned} \text{при} \quad & \frac{EJ}{r^3} (w'''' + 2w'' + w) + k_{\text{от}} w = -q^0 - q_1 \cos \theta + \frac{C_2}{r^2} \\ & w > -c_4 - c_5 \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{и} \quad & \frac{EJ}{r^3} (w'''' + 2w'' + w) + k_{\text{от}} w = -q_1 \cos \theta + \frac{C_2}{r^2} \\ \text{при} \quad & w < -c_4 - c_5 \cos 2\theta; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

формула для искомого отката катков R принимает вид

$$R = -2 \int_0^{\pi} q^0 r \cos \theta d\theta, \quad (4)$$

где интегрирование распространяется на всю ту область лежащих в материале $0 < \theta < \pi$ значений θ , где

$$w > -c_2 - c_3 \cos \theta. \quad (5)$$

Выражение для уменьшения минимального зазора в бортовом штире, обозначенное в § 4 через f , выражается формулой (46.5), т. е. зависимостью

$$f = w(\pi) - |w(\alpha)|_0 \rightarrow \alpha. \quad (6)$$

Дифференциальное уравнение для w также не изменится, вычисляясь (см. формулу (33.5)), как и в § 5, в виде равенства

$$w'' - w + \frac{c_2}{R^2} r + \frac{c_3}{r} \cos \theta = 0. \quad (7)$$

Уравнениями (2)–(7) и воспользуемся для приближенного построения диаграммы отпора катков башни, т. е. для приближенного определения связи между R и f .

2. Если сила R равна нулю, а величина $c_2 + c_3$ больше нуля, то рассматриваемое кольцо стремится обхватить катки башни на обоих бортах корабля (т. е. при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$) одинаково (см. рис. 10). Этор, распределенный вдоль периметра кольца отпора катков башни, должен быть симметричен по отношению к диаметральной плоскости корабля и иметь, следовательно, вид, изображенный на рис. 11.

Угол α , которым определяется длина загруженных отпором катков участков окружности кольца, должен быть функ-

цией от c_2 и c_3 и увеличиваться с увеличением обоих параметров.

Так как мы предполагаем, что на всем протяжении тех участков кольца, которые загружены отпором катков, интенсивность отпора этих катков постоянна, то катки могут приложить к рассматриваемому кольцу направленно по оси $\theta = \pi$ силу E , отличную от нуля, только в том случае, если в районе угла $\theta = \pi$ загруженный реактивный катков участок кольца будет больше, чем соответствующий участок на противоположном борту корабля, как то показано на рис. 12.

Поэтому в общем случае, когда сила $R \neq 0$, вид загрузки кольца отпором катков должен иметь вид, изображенный на рис. 12. Разлагая нагрузку кольца $q_{\text{кат}}$, изображенную на рис. 12, в ряд Фурье вида

$$q_{\text{кат}} = q_0 + \sum_{n=1}^{\infty} q_n^* \cos n\theta, \quad (8)$$

можно написать

$$q_0^* = -\frac{2E}{2\pi} \left(\int_0^{\alpha} d\theta + \int_{\pi-\beta}^{\pi} \cos n\theta d\theta \right) \quad (9)$$

и

$$q_n^* = -\frac{2E}{\pi} \left(\int_0^{\alpha} \cos n\theta d\theta + \int_{\pi-\beta}^{\pi} \cos n\theta d\theta \right) = -\frac{2E}{\pi n} (\sin n\alpha - \sin n(\pi - \beta)) \quad (10)$$

при $n = 1, 2, 3, \dots$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} q_0^* &= -\frac{\alpha + \beta}{\pi} E \\ q_n^* &= +\frac{2E}{\pi n} (\sin n\beta - \sin n\alpha) \quad \text{при } n = 1, 3, 5, 7, \dots \\ q_n^* &= -\frac{2E}{\pi n} (\sin n\beta + \sin n\alpha) \quad \text{при } n = 2, 4, 6, \dots \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Подставив $q_{\text{кат}}$ из равенства (8) в уравнения (2) и (3), попробуем разложить соответствующее w в форму ряда:

$$w = w_0 + \sum_{n=1}^{\infty} w_n \cos n\theta. \quad (12)$$

Тогда w будет определяться уравнением

$$\frac{EJ}{r^2} (w'''' + 2w'' + w) + k_2 w = q_0^* + \sum_{n=1}^{\infty} q_n^* \cos n\theta - q_1 \cos \theta + \frac{c_3}{r}. \quad (13)$$

при условии, что

$$w > -c_2 - c_1 \cos 2\theta \quad \text{при} \quad \begin{cases} 0 < \theta < \alpha \\ \pi - \beta < \theta < \pi \end{cases} \quad (14)$$

$$w < -c_2 - c_1 \cos 2\theta \quad \text{при} \quad \alpha < \theta < \pi - \beta \quad (15)$$

$$w = -c_2 - c_1 \cos 2\theta \quad \text{при} \quad \begin{cases} \theta = \alpha \\ \theta = \pi - \beta \end{cases} \quad (16)$$

Подставив w из (12) в уравнение (13) и приняв во внимание условие однозначности перемещения v , определяемого равенством (7), нетрудно видеть, что

$$w_0 = \frac{EJ}{\mu^2} + \frac{EJ}{\mu^2} + k_{cr} \quad \varphi_0 = -\frac{1}{\mu^2} \left(\frac{EJ}{\mu^2} + \frac{EJ}{\mu^2} + k_{cr} \right) \frac{\alpha + \beta}{\pi} \varphi' \quad (17)$$

$$w_1 = \frac{1}{k_{cr}} (\varphi_1' - \varphi_1) = \frac{1}{k_{cr}} \left[\frac{2(\sin \beta - \sin \alpha)}{\pi} \varphi' - \varphi_1 \right] \quad (18)$$

$$w_n = \frac{EJ}{\mu^2} \frac{q_n^2}{(\mu^2 - 1)^2 + k_{cr}} = \frac{2(\sin n\beta - \sin n\alpha)}{\pi n \left[\frac{EJ}{\mu^2} (\mu^2 - 1)^2 + k_{cr} \right]} \varphi' \quad \text{при } n = 3, 5, 7, \dots \quad (19)$$

$$w_n = \frac{EJ}{\mu^2} \frac{q_n^2}{(\mu^2 - 1)^2 + k_{cr}} = -\frac{2(\sin n\beta + \sin n\alpha)}{\pi n \left[\frac{EJ}{\mu^2} (\mu^2 - 1)^2 + k_{cr} \right]} \varphi' \quad \text{при } n = 2, 4, 6, 8, \dots \quad (20)$$

Подставив найденные w_n из равенств (17)–(20) в равенство (12), получаем для w

$$w = -\varphi' \left[\frac{1}{\pi} \left(\frac{EJ}{\mu^2} + \frac{EJ}{\mu^2} + k_{cr} \right) + \frac{2(\sin \alpha - \sin \beta)}{\pi k_{cr}} \cos \theta + \sum_{n=3,5,7,\dots}^{\infty} \frac{2(\sin n\alpha - \sin n\beta)}{\pi n \left[\frac{EJ}{\mu^2} (\mu^2 - 1)^2 + k_{cr} \right]} \cos n\theta + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{2(\sin n\alpha + \sin n\beta)}{\pi n \left[\frac{EJ}{\mu^2} (\mu^2 - 1)^2 + k_{cr} \right]} \cos n\theta \right] - \frac{1}{k_{cr}} \varphi_1 \cos \theta \quad (21)$$

Входящая в равенство (21) постоянная φ_1 является пока неопределенной. Разыскать ее можно из условий (16), разворачивая которые с помощью равенства (21), получаем

$$\left. \begin{aligned} w(\alpha) &= -\frac{EJ}{EJ} F_1(\alpha, \beta) - \frac{1}{k_{cr}} \varphi_1 \cos \alpha = -c_2 - c_1 \cos 2\alpha \\ w(\beta) &= -\frac{EJ}{EJ} F_2(\alpha, \beta) + \frac{1}{k_{cr}} \varphi_1 \cos \beta = -c_2 - c_1 \cos 2\beta \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где через $F_1(\alpha, \beta)$ и $F_2(\alpha, \beta)$ обозначим функции, определяемые рядом:

$$F_1(\alpha, \beta) = \left[\frac{1}{\pi} \left(\frac{EJ}{\mu^2} + \frac{EJ}{\mu^2} + k_{cr} \right) + \sum_{n=3,5,7,\dots}^{\infty} \frac{2(\sin n\alpha - \sin n\beta) \cos n\alpha}{\pi n \left[\frac{EJ}{\mu^2} (\mu^2 - 1)^2 + k_{cr} \right]} + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{2(\sin n\alpha + \sin n\beta) \cos n\alpha}{\pi n \left[\frac{EJ}{\mu^2} (\mu^2 - 1)^2 + k_{cr} \right]} \right] \frac{EJ}{\mu^2} \quad (23)$$

$$F_2(\alpha, \beta) = \left[\frac{1}{\pi} \left(\frac{EJ}{\mu^2} + \frac{EJ}{\mu^2} + k_{cr} \right) + \sum_{n=3,5,7,\dots}^{\infty} \frac{2(\sin n\beta - \sin n\alpha)}{\pi n \left[\frac{EJ}{\mu^2} (\mu^2 - 1)^2 + k_{cr} \right]} \cos n\beta + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{2(\sin n\alpha + \sin n\beta)}{\pi n \left[\frac{EJ}{\mu^2} (\mu^2 - 1)^2 + k_{cr} \right]} \cos n\beta \right] \frac{EJ}{\mu^2} \quad (24)$$

Из уравнений (22) заключаем, что

$$\frac{1}{k_{cr}} \varphi_1 = c_2 \frac{\cos 2\alpha - \cos 2\beta}{\cos \alpha + \cos \beta} + \frac{EJ}{EJ} \frac{F_1(\alpha, \beta) - F_2(\alpha, \beta)}{\cos \alpha + \cos \beta} \quad (25)$$

и что, следовательно,

$$w = -\frac{EJ}{EJ} \left[\frac{(\alpha + \beta) \frac{EJ}{\mu^2}}{\pi \left(\frac{EJ}{\mu^2} + \frac{EJ}{\mu^2} + k_{cr} \right)} + \sum_{n=3,5,7,\dots}^{\infty} \frac{2(\sin n\alpha - \sin n\beta) \frac{EJ}{\mu^2}}{\pi n \left[\frac{EJ}{\mu^2} (\mu^2 - 1)^2 + k_{cr} \right]} \cos n\theta + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{2(\sin n\alpha + \sin n\beta) \frac{EJ}{\mu^2}}{\pi n \left[\frac{EJ}{\mu^2} (\mu^2 - 1)^2 + k_{cr} \right]} \cos n\theta + \frac{F_1(\alpha, \beta) - F_2(\alpha, \beta)}{\cos \alpha + \cos \beta} \cos \theta \right] - c_2 \frac{\cos 2\alpha - \cos 2\beta}{\cos \alpha + \cos \beta} \cos \theta \quad (26)$$

2. В выражении (26) углы α и β остаются пока неопределенными. Очевидно, что чем больше обхват колеса, определяемое параметрами c_1 и c_2 , тем больше должны быть оба эти угла, чем больше же суммарный отпор катков R , тем больше набьет угол β над углом α . Поэтому углы α и β должны быть функциями от c_1 , c_2 и R .

Посмотрим, каким образом можно определить α и β , если c_1 , c_2 и R заданы.

Зависимость между R с одной стороны и углами α и β с другой дается равенством (4), равенству которое нетрудно видеть, что и рассматриваемом случае

$$R = +2q^2 r (-\sin \alpha + \sin \beta). \quad (27)$$

Для определения связи между c_1 и c_2 с одной стороны, и углами α и β , с другой, можно воспользоваться любым из уравнений (22). Воспользуемся вторым из них, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_1^2 q^2}{R^2} F_1(\alpha, \beta) + \frac{c_2^2 q^2}{R^2} \frac{F_2(\alpha, \beta) - F_1(\alpha, \beta)}{\cos \alpha + \cos \beta} \cos \beta = \\ = c_1 + c_2 \cos 2\beta + c_3 \frac{\cos 2\alpha - \cos 2\beta}{\cos \alpha + \cos \beta} \cos \beta, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

или, что то же

$$\frac{F_1(\alpha, \beta) \cos \alpha + F_2(\alpha, \beta) \cos \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} \frac{q^2 r^2}{R^2} = c_1 + c_2 \frac{\cos 2\beta \cos \alpha + \cos 2\alpha \cos \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}. \quad (29)$$

Равенства (29) и (27) или, что то же, равенство

$$\sin \alpha = \sin \beta - \frac{R}{2q^2 r} \quad (30)$$

и выражает некая связь между заданными c_1 , c_2 и R , с одной стороны, и искомыми углами α и β , с другой.

Для того чтобы определить по заданным c_1 , c_2 и R неизвестные α и β , можно поступить так.

Задавшись рядом значений угла β , определим для каждого из них соответствующее значение угла α из уравнения (30) или, что то же, из графического построения, даваемого рис. 13.

Определив таким образом α , как функцию от β , вычисляем затем функции:

$$H(\beta) = \frac{F_1(\alpha, \beta) \cos \alpha + F_2(\alpha, \beta) \cos \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} \quad (31)$$

$$G(\beta) = \frac{\cos 2\beta \cos \alpha + \cos 2\alpha \cos \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} \quad (32)$$

и, построив график для функции $H(\beta)$, занесем его кривой

$$\frac{c_1 R^2}{r^2 q^2} + \frac{c_2 R^2}{r^2 q^2} G(\beta).$$

Точка пересечения обеих кривых дает искомого значения угла β . Соответствующее ему значение α определяется после этого с помощью уравнения (30) или графического построения рис. 13, вытекающего из этого уравнения.

Задавшись рядом частных значений величины $\frac{R}{2q^2 r}$, можно определить для каждого из них углы β и α , а следовательно, и

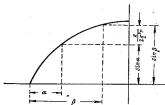


Рис. 13.

построить графики, дающие наглядное представление о зависимости от $\frac{c_1 R^2}{r^2 q^2}$ и $\frac{c_2 R^2}{r^2 q^2}$ заданных углов α и β как функции от $\frac{R}{2q^2 r}$. Когда это выполнено, можно легко определить с помощью равенства (27) значения величины K , соответствующие всем рассмотренным значениям величины $\frac{R}{2q^2 r}$, а следовательно, и построить диаграмму отпора катков башни, т. е. кривую, связывающую отпор катков R с уменьшением радиального по направлению $\theta = 0$ и затора в боковом штире башни. Это уменьшение затора легко определяется с помощью равенства (5) или, что то же, равенства

$$f = \kappa(\pi) - |\kappa(\pi)|_{\text{зад.}}, \quad (33)$$

где под $|\kappa(\pi)|_{\text{зад.}}$ надо подразумевать то значение переменной $\kappa(\pi)$, которое соответствует заданным значениям c_1 и c_2 при R равном нулю.

Что касается $\alpha(\pi)$, то согласно равенству (26)

$$\alpha(\pi) = -\frac{q^2 \rho^2}{EJ} \left[\frac{(\alpha + \beta) \frac{EJ}{\rho^2}}{\alpha \left(\frac{EJ}{\rho^2} + \frac{EJ}{\rho^2} + k_{cr} \right)} + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{2(\sin \alpha \beta - \sin \alpha \alpha) \frac{EJ}{\rho^2}}{n \pi \left[\frac{EJ}{\rho^2} (\alpha^2 - 1)^2 + k_{cr} \right]} + \right. \\ \left. + \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \frac{2(\sin n \beta + \sin n \alpha) \frac{EJ}{\rho^2}}{n \pi \left[\frac{EJ}{\rho^2} (\alpha^2 - 1)^2 + k_{cr} \right]} + \frac{F_0(\alpha, \beta) - F_0(\alpha, \beta)}{\cos \alpha + \cos \beta} \right] + \\ + c_1 \frac{\cos 2\alpha - \cos 2\beta}{\cos \alpha + \cos \beta}. \quad (34)$$

3. Зависимости, выведенные в п. 2, относятся к случаю, когда $\frac{R}{2q^2 \rho^2}$ достаточно мало и, следовательно, равенство (30) дает для $\sin \alpha$ некоторое положительное значение. При R достаточно большом эта основная предельная всех выкладок п. 2 отпадает и большинство зависимостей п. 2 теряет свою силу.

Посмотрим, какими зависимостями определяется связь между R и f . Разобраться в этом вопросе нетрудно. Действительно, так как α не может быть меньше нуля, то при значениях R больших, чем те, при коих $\sin \alpha$ обращается в нуль согласно равенству (30), следует считать рассматриваемое кольцо загруженным реакцией катков баши только в районе

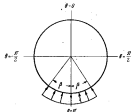


Рис. 14.

значений θ , близких к π , как то показано на рис. 14. При этом катки баши не обязаны соприкасаться с рассматриваемым кольцом в районе значений θ , близких к $\theta = 0$, и первое из равенств (22) отпадает.

Общее выражение для α , данное равенством (21), заменяется выражением

$$\alpha = -\frac{q^2 \rho^2}{EJ} \left[\frac{\beta \frac{EJ}{\rho^2}}{\alpha \left(\frac{EJ}{\rho^2} + \frac{EJ}{\rho^2} + k_{cr} \right)} + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{2 \sin \beta}{n \pi \left[\frac{EJ}{\rho^2} (\alpha^2 - 1)^2 + k_{cr} \right]} \cos n \theta + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \frac{2 \sin n \beta}{n \pi \left[\frac{EJ}{\rho^2} (\alpha^2 - 1)^2 + k_{cr} \right]} \cos n \theta - \frac{F_0}{k_{cr}} \cos \theta \right]. \quad (35)$$

Второе из равенств (22) принимает при этом вид:

$$\frac{q_0}{k_{cr}} = \frac{1}{\cos \beta} \left[-c_2 - c_2 \cos 2\beta + \frac{q^2 \rho^2}{EJ} F(\beta) \right]. \quad (36)$$

где

$$F(\beta) = \frac{EJ}{\rho^2} \left[\frac{\beta \frac{EJ}{\rho^2}}{\alpha \left(\frac{EJ}{\rho^2} + \frac{EJ}{\rho^2} + k_{cr} \right)} + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{2 \sin \beta \cos n \beta}{n \pi \left[\frac{EJ}{\rho^2} (\alpha^2 - 1)^2 + k_{cr} \right]} \right]. \quad (37)$$

давая по подстановке в (35):

$$\alpha = -\frac{q^2 \rho^2}{EJ} \left[\frac{\beta \frac{EJ}{\rho^2}}{\alpha \left(\frac{EJ}{\rho^2} + \frac{EJ}{\rho^2} + k_{cr} \right)} + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{2 \sin \beta \cos n \theta}{n \pi \left[\frac{EJ}{\rho^2} (\alpha^2 - 1)^2 + k_{cr} \right]} + \right. \\ \left. + \sum_{n=2,4,6}^{\infty} \frac{2 \sin n \beta \cos n \theta}{n \pi \left[\frac{EJ}{\rho^2} (\alpha^2 - 1)^2 + k_{cr} \right]} + \frac{F_0(\beta) \cos \theta}{\cos \beta} \right] + c_2 + c_2 \frac{\cos 2\theta}{\cos \beta} \cos \theta. \quad (38)$$

Уравнение (27) переходит при этом в уравнение

$$\sin \beta = \frac{R}{2q^2 \rho^2}. \quad (39)$$

Выражение для f [см. равенство (33)] не изменяется, выписывать, как и в случае, когда $\alpha \neq 0$, в форме

$$f = \alpha(\pi) - |\alpha(\pi)|_{\alpha=0}. \quad (40)$$

В равенстве (40) необходимо величину $\alpha(\pi)$ вычислять с помощью равенств (38), данного очевидно:

$$\alpha = -\frac{q^2 \rho^2}{EJ} \left[\frac{\beta \frac{EJ}{\rho^2}}{\alpha \left(\frac{EJ}{\rho^2} + \frac{EJ}{\rho^2} + k_{cr} \right)} + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} \frac{2 \sin \beta}{n \pi \left[\frac{EJ}{\rho^2} (\alpha^2 - 1)^2 + k_{cr} \right]} \right. \\ \left. - \frac{F_0(\beta)}{\cos \beta} \right] - c_2 + c_2 \frac{\cos 2\theta}{\cos \beta}. \quad (41)$$

Величину же $|\alpha(\pi)|_{\mu \rightarrow 0}$ — с помощью тех выражений для α , которые получаются из зависимостей п. 2 при $\alpha = \beta$ и, следовательно,

$$R = 0.$$

Таким образом в случае, если α пренебрежимо мало, определение зависимости между R и f требует лишь суммирования некоторых довольно хорошо сходящихся бесконечных рядов, и принципиальных затруднений не вызывает. Решение может быть, однако, получено в данном случае и в замкнутом виде. Каким образом это делается будет показано в следующем параграфе.

§ 7. Другое решение задачи предыдущего параграфа

1. В предыдущем параграфе мы искали для замкнутого кругового кольца интересующий нас интеграл уравнений (2.6), (3.6) в форме тригонометрического ряда. Попробуем теперь разыскать его в замкнутом виде. В остальном будем придерживаться того же общего плана решения задачи, что и в § 6, а именно: допустим, что

$$\left. \begin{array}{l} \text{при} \\ \text{и} \\ \text{и} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \omega > -c_4 - c_5 \cos 2\theta \\ 0 < \theta < \alpha \\ \pi - \beta < \theta < \pi, \end{array} \quad (1)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{при} \\ \text{и} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \omega < -c_4 - c_5 \cos 2\theta \\ \alpha < \theta < \pi - \beta \end{array} \quad (2)$$

и постараемся в соответствии с этим определить ω из уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{R}{\mu^2} (\omega'''' + 2\omega'' + \omega) + k_{cr} \omega = -q^0 - q_1 \sin \theta + \frac{C_2}{\mu^2} \\ \text{при } 0 < \theta < \alpha; \end{array} \right\} (3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{R}{\mu^2} (\omega'''' + 2\omega'' + \omega) + k_{cr} \omega = -q_1 \cos \theta + \frac{C_2}{\mu^2} \\ \text{при } \alpha < \theta < \pi - \beta \end{array} \right\} (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{R}{\mu^2} (\omega'''' + 2\omega'' + \omega) + k_{cr} \omega = -q^0 - q_1 \cos \theta + \frac{C_2}{\mu^2} \\ \text{при } \pi - \beta < \theta < \pi, \end{array} \right\} (5)$$

считая перемещение в четной функции угла θ , а величину q_1 подлежащей определению из условий совместности уравнений

$$\left. \begin{array}{l} \omega(\alpha) = -c_4 - c_5 \cos 2\alpha; \\ \omega(\beta) = -c_4 - c_5 \cos 2\beta, \end{array} \right\} (6)$$

где c_4 и c_5 заданные константы [см. равенства (4.3.5)]. C_2 подлежит определению из условия однозначности перемещения ω , определяемого уравнением

$$r' = \omega + \frac{C_2}{\mu^2} \frac{r^2}{R} - \frac{q_1 r^2}{R} \frac{r + c}{r} \cos \theta \quad (7)$$

[см. уравнение (3.3.5)], а углы α и β должны быть определены из условия

$$\sin \alpha = \sin \beta = \frac{R}{2q_1 r} \quad (8)$$

совместно с условиями (6).

Только что сказанное относится к случаю достаточно умеренных значений R , когда $\sin \alpha$, определяемый уравнением (8), выходит больше нуля. Если $\sin \alpha$ согласно равенству (8) оказывается отрицательным, то надо положить

$$\alpha = 0 \quad (9)$$

и в соответствии с этим отбросить первое из равенств (6), определяя угол β из условия

$$\sin \beta = \frac{R}{2q_1 r} \quad (10)$$

затем найти q_1 из второго из равенств (6).

Определив в обоих случаях ω путем интегрирования уравнений (3)–(5), нужно для определения искомого уменьшения зазора f подставить найденное ω в формулу

$$f = \alpha(\pi) - |\alpha(\pi)|_{\mu \rightarrow 0} \quad (11)$$

где $\omega(\pi)$ получается путем подстановки $\theta = \pi$ в общее выражение для ω , соответствующее рассматриваемому значению R , а $|\alpha(\pi)|_{\mu \rightarrow 0}$ получается путем интегрирования уравнений (3), (4) и (5) при условиях

$$\alpha = \beta; \quad (12)$$

$$q_1 = 0. \quad (13)$$

Угол α должен быть определен при $R = 0$ из условий (6), а в этом случае толкательных друг другу.

В соответствии со всем только что сказанным мы для выяснения интересующей нас зависимости между R и f , т. е. для построения интересующей нас диаграммы отпора пружинящих матов болтов, рассмотрим сначала (см. п. 3) общий случай, когда $\alpha = \beta$,

а E достаточно мало. Затем положим в полученных выражениях E равным нулю и этим путем найдем $w(\pi)$ (и w_0), а после всего рассмотрим дополнительно случай, когда E достаточно велико и, следовательно, $\alpha = 0$, и первое из равенств (6) отпадает.

2. Зависимость между E и $w(\pi)$ в общем случае, когда $\alpha, \beta, \beta \neq 0$.

При интегрировании уравнений (3)–(5), относящихся к общему случаю, когда E достаточно умеренно, но отлочно от нуля, воспользуемся тем, что согласно сказанному выше в § 3 растяжимость оси кольца отражается лишь на величине среднего (равномерного) растяжения кольца, на изгиб же его влияния не имеет. В соответствии с этим, заменим систему уравнений (3)–(5) уравнениям

$$\frac{EJ}{r^4} (w'''' + 2w'' + w) + k_{10} w = q_{\text{нат}} - q_0 \cos \theta + \frac{C_0}{r^2}, \quad (14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} q_{\text{нат}} &= -q^0 & \text{при } 0 < \theta < \alpha; \\ q_{\text{нат}} &= 0 & \text{при } \alpha < \theta < \pi - \beta; \\ q_{\text{нат}} &= -q^0 & \text{при } \pi - \beta < \theta < \pi, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

разделим нагрузку $q_{\text{нат}}$ на две части: на нагрузку $q_{\text{нат}}^+$ вызывающую только растяжение кольца, и на нагрузку $q_{\text{нат}}^-$ вызывающую только его изгиб.

Нагрузка $q_{\text{нат}}^+$ определяется, очевидно, зависимостью

$$q_{\text{нат}}^+ = -q^0 \frac{\alpha + \beta}{\pi}. \quad (16)$$

Нагрузка $q_{\text{нат}}^-$, как разность между фактической нагрузкой кольца растяжения катушек бошин, даваемой формулами (15), и ее средней величиной, определяемой формулами (16), дается, очевидно (см. рис. 15), зависимостью

$$\left. \begin{aligned} q_{\text{нат}}^- &= -q^0 \frac{\alpha - \alpha - \beta}{\pi} & \text{при } 0 < \theta < \alpha; \\ q_{\text{нат}}^- &= +q^0 \frac{\alpha + \beta}{\pi} & \text{при } \alpha < \theta < \pi - \beta; \\ q_{\text{нат}}^- &= -q^0 \frac{\pi - \alpha - \beta}{\pi} & \text{при } \pi - \beta < \theta < \pi. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

В соответствии с этим и перемещение кольца w будем считать складывающимся из двух частей w_1 и w_2 , полагая, что

$$w = w_1 + w_2. \quad (18)$$

где w_1 перемещение, вызываемое нагрузкой $q_{\text{нат}}^+$, а w_2 перемещение, вызываемое нагрузкой $q_{\text{нат}}^-$.

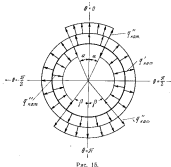
По сказанному в § 3 можем полагать

$$w_1 = -q^0 \frac{\alpha + \beta}{\pi} \frac{1}{\frac{EJ}{r^4} + \frac{EJ}{r^4} + k_{10}}. \quad (19)$$

Что же касается перемещений w_2 , то они определяются дифференциальным уравнением

$$\frac{EJ}{r^4} (w_2'''' + 2w_2'' + w_2) + k_{10} w_2 = q_{\text{нат}}^- - q_0 \cos \theta, \quad (20)$$

где $q_{\text{нат}}^-$ дается равенствами (17), а член $\frac{C_0}{r^2}$ отбрасываем, ибо среднее



значение нагрузки $q_{\text{нат}}^+$ для всего кольца равно нулю при граничных условиях:

$$\left. \begin{aligned} w_1' &= w_2' = 0 & \text{при } \theta = 0; \\ w_1' &= w_2' = 0 & \text{при } \theta = \pi. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Интересующий нас интеграл уравнения (20), удовлетворяющий граничным условиям (21) и условию непрерывности w_2 и его производных до третьей производной включительно, будем искать в форме равенства

$$w_2 = w_{21} + w_{22}, \quad (22)$$

где $w_{\alpha, \beta}$ — любое частное решение уравнения (20), а $w_{\alpha, \beta}$ — такое решение однородного уравнения

$$w'''' + 2w'' + w + \mu^4 w = 0, \quad (23)$$

где

$$\mu^4 = \frac{\pi^2 k_{\text{ср}}}{EJ}, \quad (24)$$

соответствующего уравнению (20), приближение которого к избранному выражению для $w_{\alpha, \beta}$, позволяет подчинить w_0 определенному равенству (22), как всем граничным условиям (21), так и условию непрерывности w_0 и его производных до третьего порядка включительно.

Принимая за $w_{\alpha, \beta}$ решение уравнения (20), даваемое равенством

$$w_{\alpha, \beta} = \frac{q_0 \alpha}{EJ} \frac{1}{\mu^2 + k_{\text{ср}}} - \frac{q_0}{k_{\text{ср}}} \cos \theta, \quad (25)$$

т. е. решение

$$\left. \begin{aligned} w_{\alpha, \beta} &= -\frac{\pi - \alpha - \beta}{\alpha} \frac{q_0}{EJ} \frac{1}{\mu^2 + k_{\text{ср}}} - \frac{q_0}{k_{\text{ср}}} \cos \theta \quad \text{при } 0 < \theta < \alpha; \\ w_{\alpha, \beta} &= +\frac{\alpha + \beta}{\alpha} \frac{q_0}{EJ} \frac{1}{\mu^2 + k_{\text{ср}}} - \frac{q_0}{k_{\text{ср}}} \cos \theta \quad \text{при } \alpha < \theta < \pi - \beta; \\ w_{\alpha, \beta} &= -\frac{\alpha - \alpha - \beta}{\pi} \frac{q_0}{EJ} \frac{1}{\mu^2 + k_{\text{ср}}} - \frac{q_0}{k_{\text{ср}}} \cos \theta \quad \text{при } \pi - \beta < \theta < \pi. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

мы должны за $w_{\alpha, \beta}$ принять такое решение уравнения (23), которое будучи непрерывно вместе со всеми своими производными всюду, кроме точек $\theta = \alpha$ и $\theta = \beta$, удовлетворяет условиям:

$$w'_{\alpha, \beta}(\alpha + 0) = w'_{\alpha, \beta}(\alpha - 0) = 0 \quad \text{при } \theta = 0 \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} w_{\alpha, \beta}(\alpha + 0) &= w_{\alpha, \beta}(\alpha - 0) + \frac{q_0}{EJ} \frac{1}{\mu^2 + k_{\text{ср}}}; \\ w'_{\alpha, \beta}(\alpha + 0) &= w'_{\alpha, \beta}(\alpha - 0); \\ w''_{\alpha, \beta}(\alpha + 0) &= w''_{\alpha, \beta}(\alpha - 0); \\ w'''_{\alpha, \beta}(\alpha + 0) &= w'''_{\alpha, \beta}(\alpha - 0); \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

$$\left. \begin{aligned} w_{\alpha, \beta}(\beta + 0) &= w_{\alpha, \beta}(\beta - 0) + \frac{q_0}{EJ} \frac{1}{\mu^2 + k_{\text{ср}}}; \\ w'_{\alpha, \beta}(\beta + 0) &= w'_{\alpha, \beta}(\beta - 0); \\ w''_{\alpha, \beta}(\beta + 0) &= w''_{\alpha, \beta}(\beta - 0); \\ w'''_{\alpha, \beta}(\beta + 0) &= w'''_{\alpha, \beta}(\beta - 0); \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\left. \begin{aligned} w'_{\alpha, \beta}(\beta + 0) &= w'_{\alpha, \beta}(\beta - 0); \\ w''_{\alpha, \beta}(\beta + 0) &= w''_{\alpha, \beta}(\beta - 0); \\ w'''_{\alpha, \beta}(\beta + 0) &= w'''_{\alpha, \beta}(\beta - 0); \\ w'_{\alpha, \beta}(\beta + 0) &= w'_{\alpha, \beta}(\beta - 0) \quad \text{при } \theta = \pi. \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Для того чтобы разыскать решение уравнения (23), удовлетворяющее граничным условиям (27)–(30), разыщем корни уравнения

$$\mu^4 + 2\mu^2 + 1 + \mu^4 = 0, \quad (31)$$

являющегося характеристическим по отношению к уравнению (23).

Принимая

$$\mu = \varrho (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad (32)$$

будем согласно формуле Муллара иметь

$$\mu^2 = \varrho^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi). \quad (33)$$

С другой стороны, как видно из (31)

$$\mu^2 = -1 \pm i \mu^2. \quad (34)$$

Сопоставляя равенства (34) и (33), видим, что

$$\left. \begin{aligned} \varrho^2 \cos 2\varphi &= -1; \\ \varrho^2 \sin 2\varphi &= \pm \mu^2 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

и, следовательно,

$$\varrho = \sqrt[4]{1 + \mu^4}, \quad (36)$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \pm \mu^2. \quad (37)$$

Но в силу (37)

$$\frac{1}{\cos^2 2\varphi} = 1 + \operatorname{tg}^2 2\varphi = 1 + \mu^4, \quad (38)$$

так что

$$\cos 2\varphi = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \mu^4}}.$$

Из двух решений, данных полученных только что равенством, первому из уравнений (35) удовлетворяет только то, которое меньше нуля. Отбрасывая решение, уравнению (35) не удовлетворяющее, получаем

$$\cos 2\varphi = -\sqrt{\frac{1}{1 + \mu^4}} \quad (39)$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 \varphi &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2\varphi) = \frac{1}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{1}{1 + \mu^4}} \right); \\ \cos^2 \varphi &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2\varphi) = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{1 + \mu^4}} \right), \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

так что согласно (36)

$$\left. \begin{aligned} \varrho^2 \cos^2 \varphi &= \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \mu^4} - 1); \\ \varrho^2 \sin^2 \varphi &= \frac{1}{2} (\sqrt{1 + \mu^4} + 1). \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Принимая это во внимание, можем на основании (32) положить

$$\delta = \pm \gamma \pm i\beta, \quad (42)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \sqrt{\frac{k}{2}(V+1+\mu^2-1)}; \\ \delta &= \sqrt{\frac{k}{2}(V+1+\mu^2+1)}; \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

таким образом, на четыре корня уравнения (31) можно принять

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \gamma + i\delta = \dots \\ \alpha_2 &= \gamma - i\delta = \dots \\ \alpha_3 &= -\gamma - i\delta = \dots \\ \alpha_4 &= -\gamma + i\delta = \dots \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Всякое реальное решение уравнения (23) можно написать в форме равенства

$$w_{\alpha, \beta} = B_1 e^{\alpha\theta} + \bar{B}_1 e^{i\beta} + B_2 e^{-\alpha\theta} + \bar{B}_2 e^{-i\beta}, \quad (45)$$

где B_1 и B_2 — две произвольные комплексные постоянные; \bar{B}_1 и \bar{B}_2 — две сопряженные с ними комплексные величины; α и β — определяются равенствами (44).

Функция $w_{\alpha, \beta}$, определяемая равенствами (45), равно как и все ее производные по θ непрерывна при всяком θ . Поэтому постоянные B_1 и B_2 равно как и сопряженные с ними величины \bar{B}_1 и \bar{B}_2 можно считать сохраняющими одну и ту же величину на протяжении только каждого отдельного из таких участков кольца, где известно $w_{\alpha, \beta}$, равно как и все его производные остаются непрерывными. При переходе же через каждое такое сечение кольца, где $w_{\alpha, \beta}$ или какая-либо из его производных до третьего порядка включительно претерпевают разрыв непрерывности, необходимо соответствующим образом изменить величину постоянных B_1 , \bar{B}_1 , B_2 и \bar{B}_2 .

Функция $w_{\alpha, \beta}$, которую необходимо разыскать претерпевает в интервале $0 < \theta < \pi$, как видно из условий (28) и (29), разрыв непрерывности дважды, а именно: один раз в сечении $\theta = \alpha$, при переходе через которое от значений θ меньших, чем α , к значениям θ большим, чем α ; и второе $w_{\alpha, \beta}$ скачкообразно увеличивается на $-\frac{EJ}{\mu^2 + k_{ct}}$ и второй раз в сечении $\theta = \beta$, где второе

$w_{\alpha, \beta}$ скачкообразно увеличивается на $+\frac{EJ}{\mu^2 + k_{ct}}$. Все производные $w_{\alpha, \beta}$ до третьего порядка включительно, остаются во всем

интервале значений θ лежащими в пределах $0 < \theta < \pi$ непрерывными.

Для того чтобы получить аналитическое выражение функции $w_{\alpha, \beta}$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению (23) и условиям сопряжения (28) и (29), введем и рассмотрим вспомогательную функцию $W(\theta, \alpha)$, определенную тем, что

$$W(\theta, \alpha) = \frac{1}{2(\mu^2 - \alpha^2)} [+ \alpha^2 e^{\mu\theta - \alpha} - \alpha^2 e^{i(\theta - \alpha)}] \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \text{при } \theta < \alpha \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

и

$$W(\theta, \alpha) = \frac{1}{2(\mu^2 - \alpha^2)} [- \alpha^2 e^{\mu(\theta - \alpha)} + \alpha^2 e^{i(\theta - \alpha)}] \quad \left. \begin{aligned} & \\ & \text{при } \theta > \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Функция эта, очевидно, непрерывна во всем интервале значений θ , лежащих в пределах $0 < \theta < \pi$, кроме лишь точки $\theta = \alpha$, в которой $W(\theta, \alpha)$ претерпевает разрыв непрерывности, переходя от значения

$$\left. \begin{aligned} W(\theta, \alpha) &= -\frac{1}{2} \quad \text{при } \theta = \alpha - 0 \\ & \text{к значению} \\ W(\theta, \alpha) &= +\frac{1}{2} \quad \text{при } \theta = \alpha + 0. \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Что касается производных функции $W(\theta, \alpha)$, определенных равенствами (46) и (47), то, как и том легко убедиться путем дифференцирования, все они остаются непрерывными во всем интервале значений θ , ограниченном пределами $0 < \theta < \pi$, за исключением и точки $\theta = \alpha$.

Поэтому приняв

$$\begin{aligned} w_{\alpha, \beta} &= B_1 e^{-\mu\theta} + \bar{B}_1 e^{-i\beta} + B_2 e^{-\mu(\theta - \alpha)} + \bar{B}_2 e^{-i(\theta - \alpha)} - \\ & - \frac{EJ}{\mu^2 + k_{ct}} W(\theta, \alpha) + \frac{EJ}{\mu^2 + k_{ct}} W(\theta, \pi - \beta). \end{aligned} \quad (49)$$

получим решение уравнения (23), удовлетворяющее всем условиям сопряжения, данным равенствами (28) и (29), но заключающим в себе еще четыре постоянных произвольных, входящих в равенство (49), две через реальную и мнимую части константы B_1 , две же остальные — через реальную и мнимую части константы B_2 . Распорядившись этими четырьмя константами, можно подменить $w_{\alpha, \beta}$, определенное равенством (49), граничным условием (27) и (30).

Разворачивая эти условия, приходим к следующим четырем уравнениям для определения неизвестных B_1, \bar{B}_1, B_2 и \bar{B}_2 :

$$\left. \begin{aligned} & -B_1 s - \bar{B}_1 \bar{s} + B_2 s e^{2\alpha} + \bar{B}_2 \bar{s} e^{2\alpha} + \\ & + \frac{g^2}{\mu^2 + k_{cr}} \frac{ss}{2(\beta^2 - \alpha^2)} (-\bar{s} e^{2\alpha} + s e^{2\alpha} + s e^{-\alpha} - s e^{-\alpha}) = 0; \\ & -B_1 s^2 - \bar{B}_1 \bar{s}^2 + B_2 s^2 e^{2\alpha} + \bar{B}_2 \bar{s}^2 e^{2\alpha} + \\ & + \frac{g^2}{\mu^2 + k_{cr}} \frac{(s\bar{s})^2}{2(\beta^2 - \alpha^2)} (-s e^{2\alpha} + \bar{s} e^{2\alpha} + s e^{-\alpha} - \bar{s} e^{-\alpha}) = 0; \\ & -B_1 s e^{2\alpha} - \bar{B}_1 \bar{s} e^{2\alpha} + B_2 s + \bar{B}_2 \bar{s} + \\ & + \frac{g^2}{\mu^2 + k_{cr}} \frac{ss}{2(\beta^2 - \alpha^2)} [-\bar{s} e^{2(\alpha-\beta)} + s e^{2(\alpha-\beta)} + \\ & + \bar{s} e^{2(\alpha-\beta)} - s e^{2(\alpha-\beta)}] = 0; \\ & -B_1 s^2 e^{2\alpha} - \bar{B}_1 \bar{s}^2 e^{2\alpha} + B_2 s^2 + \bar{B}_2 \bar{s}^2 + \\ & + \frac{g^2}{\mu^2 + k_{cr}} \frac{(s\bar{s})^2}{2(\beta^2 - \alpha^2)} [-s e^{2(\alpha-\beta)} + \bar{s} e^{2(\alpha-\beta)} + \\ & + s e^{2(\alpha-\beta)} - \bar{s} e^{2(\alpha-\beta)}] = 0; \end{aligned} \right\} (50)$$

или, что то же,

$$\left. \begin{aligned} & B_1 s + \bar{B}_1 \bar{s} = B_2 s e^{2\alpha} + \bar{B}_2 \bar{s} e^{2\alpha} + \\ & + A (-\bar{s} e^{2\alpha} + s e^{2\alpha} + \bar{s} e^{-\alpha} - s e^{-\alpha}); \\ & B_1 s^2 + \bar{B}_1 \bar{s}^2 = B_2 s^2 e^{2\alpha} + \bar{B}_2 \bar{s}^2 e^{2\alpha} + \\ & + A s \bar{s} (-s e^{2\alpha} + \bar{s} e^{2\alpha} + s e^{-\alpha} - \bar{s} e^{-\alpha}); \\ & B_1 s + \bar{B}_1 \bar{s} = B_2 s e^{2\alpha} + \bar{B}_2 \bar{s} e^{2\alpha} + \\ & + A [\bar{s} e^{2(\alpha-\beta)} - \bar{s} e^{2(\alpha-\beta)} - \bar{s} e^{2(\alpha-\beta)} + s e^{2(\alpha-\beta)}]; \\ & B_1 s^2 + \bar{B}_1 \bar{s}^2 = B_2 s^2 e^{2\alpha} + \bar{B}_2 \bar{s}^2 e^{2\alpha} + \\ & + A s \bar{s} [s e^{2(\alpha-\beta)} - \bar{s} e^{2(\alpha-\beta)} - s e^{2(\alpha-\beta)} + \bar{s} e^{2(\alpha-\beta)}]. \end{aligned} \right\} (51)$$

где для простоты письма введено обозначение:

$$A = \frac{g^2}{\mu^2 + k_{cr}} \frac{ss}{2(\beta^2 - \alpha^2)}. \quad (52)$$

Из уравнений (51) следует

$$\left. \begin{aligned} & B_1 s = B_2 s e^{2\alpha} + A (-s e^{2\alpha} + \bar{s} e^{-\alpha}); \\ & B_1 \bar{s} = \bar{B}_2 \bar{s} e^{2\alpha} + A (s e^{2\alpha} - s e^{-\alpha}); \end{aligned} \right\} (53)$$

из уравнений же (52) можно видеть, что

$$\left. \begin{aligned} & B_2 s = B_1 s e^{2\alpha} + A (\bar{s} e^{2(\alpha-\beta)} - \bar{s} e^{2(\alpha-\beta)}); \\ & \bar{B}_2 \bar{s} = B_1 \bar{s} e^{2\alpha} + A (-s e^{2(\alpha-\beta)} + s e^{2(\alpha-\beta)}). \end{aligned} \right\} (54)$$

Умножив первое уравнение группы (53) на $e^{-2\alpha}$, сложив его с первым уравнением группы (54). Тогда будет:

$$B_2 s = B_1 s e^{-2\alpha} + A [-\bar{s} (e^{2\alpha-\beta} - e^{2(\alpha-\beta)}) + \bar{s} (e^{-\alpha} - e^{-\alpha-\beta})],$$

или, что то же,

$$B_2 = \frac{g^2}{\mu^2 + k_{cr}} \frac{s^2}{2(\beta^2 - \alpha^2)} \frac{e^{-2\alpha} - e^{2(\alpha-\beta)} - e^{-\alpha} + e^{2(\alpha-\beta)}}{1 - e^{-2\alpha}}. \quad (55)$$

Аналогичным образом из второго уравнения группы (54) и такого же уравнения группы (53) заключаем, что

$$\bar{B}_2 \bar{s} = \bar{B}_1 \bar{s} e^{-2\alpha} + A (e^{2\alpha-\beta} - e^{2(\alpha-\beta)} - e^{-\alpha} + e^{2(\alpha-\beta)}),$$

откуда

$$\bar{B}_1 = \frac{g^2}{\mu^2 + k_{cr}} \frac{s^2}{2(\beta^2 - \alpha^2)} \frac{e^{2\alpha} - e^{2(\alpha-\beta)} - e^{-\alpha} + e^{2(\alpha-\beta)}}{1 - e^{2\alpha}}. \quad (56)$$

Для того чтобы разыскать B_2 складываем первое из уравнений группы (55) с результатом умножения первого уравнения группы (54) на $e^{-2\alpha}$. Это дает:

$$B_2 s = B_1 s e^{-2\alpha} + \bar{A} A [e^{2(\alpha-\beta)} - e^{2(\alpha-\beta)} - e^{2(\alpha-\beta)} + e^{2(\alpha-\beta)}],$$

откуда следует

$$B_2 = \frac{g^2}{\mu^2 + k_{cr}} \frac{s^2}{2(\beta^2 - \alpha^2)} \frac{e^{2(\alpha-\beta)} - e^{2(\alpha-\beta)} - e^{2(\alpha-\beta)} + e^{2(\alpha-\beta)}}{1 - e^{2\alpha}}. \quad (57)$$

Сложив же второе уравнение группы (55) со вторым уравнением группы (54), предварительно умноженным на $e^{-2\alpha}$, видим, что

$$\bar{B}_2 \bar{s} = \bar{B}_1 \bar{s} e^{-2\alpha} + A s [-e^{2(\alpha-\beta)} + e^{2(\alpha-\beta)} + e^{2(\alpha-\beta)} - e^{2(\alpha-\beta)}],$$

т. е.

$$\bar{B}_1 = \frac{g^2}{\mu^2 + k_{cr}} \frac{s^2}{2(\beta^2 - \alpha^2)} \frac{e^{2(\alpha-\beta)} - e^{2(\alpha-\beta)} - e^{2(\alpha-\beta)} + e^{2(\alpha-\beta)}}{1 - e^{2\alpha}}. \quad (58)$$

Подставив найденные B_1, \bar{B}_1, B_2 и \bar{B}_2 из равенств (56) — (59) в равенство (49), можем путем соответствующей перегруппировки членов придать найденному выражению для $w_{0,k}$ вид:

$$w_{0,k} = -\frac{g^2}{\mu^2 + k_{cr}} K(\beta, \alpha) + \frac{g^2}{\mu^2 + k_{cr}} K(\beta, \alpha - \beta). \quad (60)$$

где через $K(\theta, \alpha)$ обозначена вспомогательная функция, определенная равенством:

$$K(\theta, \alpha) = W(\theta, \alpha) + \frac{1}{2(\beta - \alpha)} \left[\frac{\beta^2 e^{-\alpha}}{1 - e^{-2\beta}} (e^{-\alpha} - e^{-2(\alpha-\beta)}) - \frac{\alpha^2 e^{-\beta}}{1 - e^{-2\alpha}} (e^{-\beta} - e^{-2(\beta-\alpha)}) - \frac{\beta^2 e^{-\beta(\alpha-\beta)}}{1 - e^{-2\beta\alpha}} (e^{-\beta(\alpha-\beta)} - e^{-\beta(\alpha+\beta)}) + \frac{\alpha^2 e^{-\alpha(\beta-\alpha)}}{1 - e^{-2\alpha\beta}} (e^{-\alpha(\beta-\alpha)} - e^{-\alpha(\beta+\alpha)}) \right], \quad (61)$$

а через $K(\theta, \pi - \beta)$ функция, получаемая из выражения (61) путем замены в последних углах α на угол $\pi - \beta$.

Принимая во внимание равенство (46), нетрудно видеть, что при $\theta < \alpha$ функция $K(\theta, \alpha)$ определяется реальной частью функции

$$\frac{\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left[\frac{e^{-\alpha(\beta-\theta)} + e^{-\beta(\theta+\alpha)} - e^{-2(\beta+\alpha+\theta)} - e^{-2(\alpha\beta-\theta-\alpha)} + e^{-2(\beta\alpha+\theta-\beta)}}{1 - e^{-2\beta\alpha}} \right].$$

т. е. что при $\theta < \alpha$:

$$K(\theta, \alpha) = \operatorname{Re} \frac{\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left[\frac{e^{-\alpha(\beta-\theta)} + e^{-\beta(\theta+\alpha)} - e^{-2(\beta+\alpha+\theta)} - e^{-2(\alpha\beta-\theta-\alpha)} + e^{-2(\beta\alpha+\theta-\beta)}}{1 - e^{-2\beta\alpha}} \right], \quad (62)$$

и, следовательно,

$$K'(\theta, \alpha) = \operatorname{Re} \frac{\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left[\frac{e^{-\alpha(\beta-\theta)} + \frac{-e^{-\alpha(\beta-\theta)} + e^{-\beta(\theta+\alpha)} - e^{-2(\beta+\alpha+\theta)} - e^{-2(\alpha\beta-\theta-\alpha)} + e^{-2(\beta\alpha+\theta-\beta)}}{1 - e^{-2\beta\alpha}} \right], \quad (63)$$

$$K''(\theta, \alpha) = \operatorname{Re} \frac{\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left[\frac{e^{-\alpha(\beta-\theta)} + \frac{-e^{-\alpha(\beta-\theta)} + e^{-\beta(\theta+\alpha)} - e^{-2(\beta+\alpha+\theta)} - e^{-2(\alpha\beta-\theta-\alpha)} + e^{-2(\beta\alpha+\theta-\beta)}}{1 - e^{-2\beta\alpha}} \right], \quad (64)$$

что, очевидно, удовлетворяет условиям

$$K(\theta, \alpha) = K''(\theta, \alpha) = 0, \quad (64)$$

как того и требуют равенства (27).

При $\theta > \alpha$ согласно равенствам (61) и (47):

$$K(\theta, \alpha) = \operatorname{Re} \frac{\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left[-e^{-\alpha(\beta-\theta)} + \frac{e^{-\alpha(\beta+\theta)} - e^{-\beta(\theta-\alpha+\beta)} - e^{-2(\beta-\alpha-\theta)} + e^{-2(\beta\alpha+\theta-\beta)}}{1 - e^{-2\beta\alpha}} \right], \quad (65)$$

и, следовательно, при этих значениях θ

$$\left. \begin{aligned} K'(\theta, \alpha) &= \operatorname{Re} \frac{\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left[e^{-\alpha(\beta-\theta)} + \frac{-e^{-\alpha(\beta+\theta)} + e^{-\beta(\theta-\alpha+\beta)} - e^{-2(\beta-\alpha-\theta)} + e^{-2(\beta\alpha+\theta-\beta)}}{1 - e^{-2\beta\alpha}} \right], \\ K''(\theta, \alpha) &= \operatorname{Re} \frac{\beta^2}{\beta^2 - \alpha^2} \left[e^{-\alpha(\beta-\theta)} + \frac{-e^{-\alpha(\beta+\theta)} + e^{-\beta(\theta-\alpha+\beta)} - e^{-2(\beta-\alpha-\theta)} + e^{-2(\beta\alpha+\theta-\beta)}}{1 - e^{-2\beta\alpha}} \right], \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

что удовлетворяет условиям

$$K'(\pi, \alpha) = K''(\pi, \alpha) = 0, \quad (67)$$

которым функция $K(\theta, \alpha)$ должна быть подчинена при $\theta = \pi$ в силу равенств (30).

Таким образом решение (60) или, что то же,

$$u_{\alpha, \beta} = \frac{g_{\alpha, \beta}}{r^2 + k_{cr}} [-K(\theta, \alpha) + K(\theta, \pi - \beta)], \quad (68)$$

где функция $K(\theta, \alpha)$ определяется равенствами (62) и (65), а $K(\theta, \beta)$ аналогичными равенствами, получаемыми из обоих выражений для $K(\theta, \alpha)$ путем замены в последних углах α на углы $\pi - \beta$, и действительно удовлетворяет всем тем условиям, которые от него должны быть, по сказанному выше, подчинены.

Теперь, когда известны как функции $u_{\alpha, \beta}$ [см. равенство (25)], так и функция $u_{\alpha, \alpha}$ [см. равенство (68)] мы можем обратиться к равенству (22), написать

$$u_{\alpha} = \frac{1}{r^2 + k_{cr}} [g_{\alpha, \alpha} - g^{\alpha} K(\theta, \alpha) + g^{\beta} K(\theta, \beta)] - \frac{g_{\alpha}}{k_{cr}} \cos \theta, \quad (69)$$

что совместно с равенствами (18) и (19) дает для искомого w

$$w = -\frac{KJ}{r^2} \frac{g^{\alpha}}{r^2 + k_{cr}} - \frac{\alpha + \beta}{r} +$$

$$+ \frac{1}{r^2 + k_{cr}} [g_{\alpha, \alpha} - g^{\alpha} K(\theta, \alpha) + g^{\beta} K(\theta, \pi - \beta)] - \frac{g^{\alpha}}{k_{cr}} \cos \theta, \quad (70)$$

где $g_{\alpha, \alpha}$ определяется равенствами (17).

Выражением (70) и воспользуемся для установления интересующей нас зависимости между K и f .

Уравнения (6) в развернутом виде выписываются так:

$$\begin{aligned} & -\frac{EF}{r^2} \frac{r^2}{r^2 + k_{ct}} \frac{\alpha + \beta}{\pi} + \frac{1}{EJ + k_{ct}} \left[\frac{r_{0ct}^2}{\sigma^2} - q^2 K(\alpha, \alpha) + \right. \\ & \left. + q^2 K(\alpha, \pi - \beta) \right] - \frac{\beta_1}{k_{ct}} \cos \alpha = -c_3 - c_2 \cos 2\alpha; \\ & -\frac{EF}{r^2} \frac{r^2}{r^2 + k_{ct}} \frac{\alpha + \beta}{\pi} + \frac{1}{EJ + k_{ct}} \left[\frac{r_{0ct}^2}{\sigma^2} (\pi - \beta) - \right. \\ & \left. - q^2 K(\pi - \beta, \alpha) + q^2 K(\pi - \beta, \pi - \beta) \right] + \frac{\beta_1}{k_{ct}} \cos \beta = \\ & = -c_3 - c_2 \cos 2\beta. \end{aligned} \quad (71)$$

Вычтя два эти уравнения друг из друга, получим

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_1}{k_{ct}} (\cos \alpha + \cos \beta) + \frac{q^2 r^2}{EJ + k_{ct} r^2} \left[\frac{r_{0ct}^2}{\sigma^2} (\pi - \beta) - K(\pi - \beta, \alpha) + \right. \\ & \left. + K(\pi - \beta, \pi - \beta) - \frac{r_{0ct}^2}{\sigma^2} \alpha \right] + K(\alpha, \alpha) - K(\alpha, \pi - \beta) = \\ & = c_2 (\cos 2\alpha - \cos 2\beta). \end{aligned} \quad (72)$$

Подставляя $\frac{\beta_1}{k_{ct}}$, определенное равенством (72), в уравнение, получаемое с помощью почленного складывания обеих уравнений группы (71), получим

$$\begin{aligned} & -\frac{2q^2 r^2}{r^2 EJ + EJ + k_{ct} r^2} \frac{(\alpha + \beta)}{\pi} + \frac{q^2 r^2}{EJ + k_{ct} r^2} \left[\frac{\cos \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} \left(\frac{r_{0ct}^2}{\sigma^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - K(\alpha, \alpha) + K(\alpha, \pi - \beta) \right) + \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha + \cos \beta} \left(\frac{r_{0ct}^2}{\sigma^2} - K(\pi - \beta, \alpha) + \right. \right. \\ & \left. \left. + K(\pi - \beta, \pi - \beta) \right) \right] = -2c_3 - c_2 (\cos 2\alpha + \cos 2\beta) + \\ & + c_2 \frac{\cos 2\alpha - \cos 2\beta}{\cos \alpha + \cos \beta} \cos \alpha - c_2 \frac{\cos 2\alpha - \cos 2\beta}{\cos \alpha + \cos \beta} \cos \beta = \\ & = -2c_3 - 2c_2 \frac{\cos 2\alpha \cos \beta + \cos 2\beta \cos \alpha}{\cos \alpha + \cos \beta}. \end{aligned} \quad (73)$$

Задавшись углом β и определив α из уравнения

$$\sin \alpha = \sin \beta - \frac{R}{2q^2 r}, \quad (*)$$

(см. равенство (8)) угол α , соответствующий рассматриваемым значениям R и β , можно определить из уравнения (73); значение c_3 соответствующее заданному значению α и избранному значению R и β и, наоборот график, дающий c_3 как функцию от β при заданном α и, наоборот значение R , дающий этот график заданным значением c_3 , будем иметь β , соответствующее заданным c_3

α и избранному R . Подставив найденное β в выражение (*), можно из него определять соответствующее α , а по нему с помощью равенства (70) и (1), соответствующее избранному нами значению R .

В частности, этим путем можно определить и то значение угла $\alpha = \beta$, которое соответствует заданным c_3 и c_2 при $R = 0$, т. е. величину, обозначенную выше через $|\alpha(\pi)|_{R=0}$. Для этого достаточно, очевидно, положить в уравнении (73) $\alpha = \beta$ и, задавшись в уравнении (73) заданным значением величин c_3 , провести β через ряд различных значений, определить каждый раз из уравнения (73) величину c_2 . Вычертив из полученных точек кривую, дающую c_2 как функцию от β при заданном c_3 , нужно засечь эту кривую заданным значением величины c_2 . Этим путем находится угол $\beta = \alpha$, который соответствует заданным c_3 и c_2 при R равном нулю.

Для определения величины $|\alpha(\pi)|_{R=0}$, входящего в равенство (11), достаточно, очевидно, положить в формуле (70) угол θ равным π , а углы α и β найденной из общей величины.

Вычисляя этим путем для заданных c_3 и c_2 величину $|\alpha(\pi)|_{R=0}$ раз навсегда и определяя затем величину $\alpha(\pi)$, соответствующую различным значениям R , можно по точкам построить кривую, дающую f , как функцию от R , если только величина условия R достаточно уверена и $\sin \alpha$ согласно формуле (11) выходит большим нулем или равным нулю.

3. Если заданное значение R настолько велико, что согласно формуле (8) $\sin \alpha$ выходит равным нулю, то согласно сказанному выше в п. 6 первое из уравнений (6) надо отбросить; в равенстве (8) угол α равен нулю.

Тогда для определения угла β будем иметь

$$\sin \beta = \frac{R}{2q^2 r}$$

[см. равенство (10)], для определения же величин $\frac{\beta_1}{k_{ct}}$ у нас останется изорие из уравнений (6).

Подставив в него π из равенства

$$\begin{aligned} \alpha = & -\frac{EF}{r^2 EJ + EJ + k_{ct}} \frac{\beta}{\pi} + \frac{q^2 r^2}{EJ + k_{ct} r^2} \left[\frac{r_{0ct}^2}{\sigma^2} + K(\beta, \pi - \beta) \right] - \\ & - \frac{\beta_1}{k_{ct}} \cos \beta, \end{aligned} \quad (74)$$

будем иметь для определения $\frac{\beta_1}{k_{ct}}$

$$\begin{aligned} & -\frac{EF}{r^2 EJ + EJ + k_{ct}} \frac{\beta}{\pi} + \\ & + \frac{q^2 r^2}{EJ + k_{ct} r^2} \left[\frac{r_{0ct}^2}{\sigma^2} (\pi - \beta) + K(\pi - \beta, \pi - \beta) \right] + \frac{\beta_1}{k_{ct}} \cos \beta = \\ & = -c_3 - c_2 \cos 2\beta \end{aligned} \quad (75)$$

$$w(\pi) = \frac{q^2 r^2}{E J^2 + E J + k_{cr} r^2} \beta \left(1 - \frac{1}{\cos \beta} \right) + \frac{q^2 r^2}{E J + k_{cr} r^2} \left[\frac{(y_{max})_{\theta=\alpha}}{q^2} + K(\pi, \pi - \beta) - \frac{(y_{max})_{\theta=\pi-\beta}}{q^2} - \frac{1}{\cos \beta} \right] - \frac{K(\alpha - \beta, \pi - \beta) - c_2 + c_1 \cos 2\beta}{\cos \beta} \quad (76)$$

Зависев в равенстве (76) различными значениями β , можно для каждого из них определить $w(\pi)$; R же с помощью равенства

$$R = 2q^2 r \sin \beta \quad (77)$$

и затем с помощью формулы (11) и значения $|w(\pi)|_{\pi=\pi}$ найденного, как указано в п. 2, найти и значение f , соответствующее полученному значению R .

Зависимости, приведенные только что, относятся к тому случаю, когда R достаточно велико.

4. При практическом использовании выражения (70), равно как и зависимостей, выведенных с помощью равенства (70), необходимо иметь в виду, что как функции \mathcal{L}_{max}^* претерпевают разрывы непрерывности при $\theta = \alpha$ и при $\theta = \pi - \beta$, но функция

$$\left[\frac{\partial w}{\partial \theta} - K(\theta, \alpha) + K(\theta, \pi - \beta) \right]$$

остается непрерывной при всех значениях θ , лежащих в интервале $0 < \theta < \pi$. Поэтому при размыкании скобки

$$\left[\frac{\partial w}{\partial \theta} - K(\theta, \alpha) + K(\theta, \pi - \beta) \right], \quad (78)$$

соответствующих значениям $\theta = \alpha$ и $\theta = \pi - \beta$, надо все члены этой скобки вычислить либо при меньших, чем $\theta = \alpha$, и соответственно $\theta = \pi - \beta$, либо же при θ , несильно больших, чем $\theta = \alpha$ и $\theta = \pi - \beta$. Для проверки лучше вычислить эту скобку как при $\theta = \alpha - 0$ и $\theta = \pi - \beta - 0$, так и при $\theta = \alpha + 0$ и соответственно $\theta = \pi - \beta + 0$, следя за тем, чтобы при переходе θ через значения $\theta = \alpha$ и $\theta = \pi - \beta$ скобка (78) не претерпевала разрыва непрерывности.

В том случае, когда вместо схемы п. 2 приходится при размыкании функциональной зависимости между R и f пользоваться схемой п. 3, полагая $\alpha = 0$, и замыкая скобку (78) скобкой

$$\left[\frac{\partial w}{\partial \theta} + K(\theta, \pi - \beta) \right], \quad (79)$$

необходимо следить за тем, чтобы скобка эта оставалась при $\theta = \pi - \beta$ непрерывной.

§ 8. О предельной величине отпора пружинящих катков

1. **Постановка вопроса.** Результаты, полученные в предыдущих двух параграфах, позволяют установить, какое влияние имеет деформация верхнего кольца жесткого барабана на то предельное значение силы R , при котором происходит волновая выборка зазора в боевом штыре. Это значение силы R является предельной величиной отпора пружинящих катков и обозначим через R_{max} . Она должна быть, очевидно, помимо устройства кольца, еще функцией от параметров c_1 и c_2 , характеризующих деформацию кольца после регуляции поджатия пружинящих катков, а также от величины начального зазора в боевом штыре, характеризующей величиной, обозначенной нами в § 5 через \mathcal{L}_{max} . Функциональную зависимость, связывающую R_{max} с c_1 , c_2 и \mathcal{L}_{max} , можно определить опираясь на формулу (42.5).

Действительно, как то было показано в § 5, зазор в боевом штыре по радиусу $\theta = \pi$ оказывается выбранным при том значении силы R , при котором перестает быть справедливым неравенство

$$w(\pi) = \mathcal{L}_{max} - a_2 - a_1 \quad (80)$$

[см. формулу (42.5)], где

\mathcal{L}_{max} — величина радиального зазора по направлению $\theta = \pi$ между вертикальными положениями боевого штыря и жесткого барабана, а a_1 и a_2 коэффициенты в формуле

$$w(\theta) = a_1 + a_2 \cos 2\theta \quad (81)$$

[см. равенства (18.5) + (20.5)], которой определяется то увеличение зазора в боевом штыре после регуляции катков, которое должно было бы иметь место, если бы катки башни не соприкасались с ее жестким барабаном.

Обозначив для краткости письма величину $\mathcal{L}_{max} - a_1 - a_2$ через Δ , т. е. положив

$$\Delta = \mathcal{L}_{max} - a_1 - a_2 \quad (82)$$

можно, следовательно, определить искомую предельную величину отпора катков, обозначенную нами через R_{max} из условия, что

$$w(\pi) = \Delta. \quad (83)$$

При этом, как то видно из связанного в двух предыдущих параграфах, могут представиться два случая, а именно:

Случай I, когда деформация кольца, характеризующаяся [см. формулы (43.5)] параметрами c_1 и c_2 , настолько невелика, что в момент выборки зазора по радиусу $\theta = \pi$ пружинящие катки по радиусу $\theta = 0$ к жесткому барабану не прижаты, т. е. когда при R , удовлетворяющей условию (83), имеет место условие

$$w(0) < -c_1 - c_2 \sin 2\theta. \quad (84)$$

Уравнение (13) позволяет весьма просто исследовать влияние, оказываемое на величину предельный отпор катков катком на трех параметрах, входящих в правую часть этого уравнения. Пользуясь уравнением (13) по смыслу его вывода можно, однако, лишь при тех значениях c_0 , Δ и c_1 , при которых β , определяемые из уравнения (13), удовлетворяют неравенству (5), выходящему в размерном виде так:

$$-\frac{q^2 r^2}{K F^2 + K J + k_{ct} r^2} \frac{\beta}{\pi} (1 + \cos \beta) + \frac{q^2 r^2}{K J + k_{ct} r^2} \left[\frac{(\sin \beta)^2}{q^2} + K(\beta, \pi - \beta) \cos \beta - \left[\frac{c_0 \alpha}{q^2} + K(\beta, \pi - \beta) \right]_{\beta = \pi - \beta} \right] - (c_1 + c_2 \cos 2\beta) (1 + \cos \beta), \quad (14)$$

или, что то же,

$$B(\beta) < -(c_1 + c_2 \cos 2\beta) (1 + \cos \beta), \quad (15)$$

где

$$B(\beta) = \frac{q^2 r^2}{K F^2 + K J + k_{ct} r^2} \frac{\beta}{\pi} (1 + \cos \beta) + \frac{q^2 r^2}{K J + k_{ct} r^2} \left[\frac{(\sin \beta)^2}{q^2} + K(\beta, \pi - \beta) \cos \beta - \left[\frac{c_0 \alpha}{q^2} + K(\beta, \pi - \beta) \right]_{\beta = \pi - \beta} \right]. \quad (16)$$

Так как исследовать влияние, оказываемое на величину R_{max} параметрами c_0 , Δ и c_1 с помощью формулы (7) и уравнения (13) можно при тех лишь значениях c_0 и c_1 , которые удовлетворяют уравнению (15), то, пользуясь уравнением (13), надо следить за тем, чтобы найденное β удовлетворяло условию (15).

3. В случае, когда c_0 и c_1 настолько велики, что β , удовлетворяющее уравнению (13), не удовлетворяет неравенству (15), предельный отпор катков R_{max} следует определять с помощью тех зависимостей, которые относятся к случаю, когда отпор реакций катков соответствует рис. 12.

В этом случае

$$R_{max} = 2q^2 r (\sin \beta - \sin \alpha), \quad (17)$$

где углы α и β по сказанному в п. 2 предыдущего параграфа должны быть определены путем совместного решения уравнения:

$$-\frac{2q^2 r^2}{K F + K J + k_{ct} r^2} \frac{\alpha + \beta}{\pi} + K J + k_{ct} r^2 \left[\frac{\cos \beta}{\cos \beta + \cos \alpha} \left(\frac{c_0 \alpha}{q^2} - K(\beta, \alpha) + K(\beta, \pi - \beta) \right)_{\beta = \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\cos \beta + \cos \alpha} \left(\frac{c_1 \alpha}{q^2} - K(\beta, \alpha) + K(\beta, \pi - \beta) \right)_{\beta = \pi - \beta} \right] = -2c_1 - c_2 \frac{\cos 2\alpha \cos \beta + \cos 2\beta \cos \alpha}{\cos \alpha + \cos \beta} \quad (18)$$

[см. равенство (73.7)] и уравнения (4), в размерном виде выходящего в силу равенств (70.7) и (72.7) так:

$$-\frac{q^2 r^2}{K F + K J + k_{ct} r^2} \frac{\alpha + \beta}{\pi} (\cos \alpha + \cos \beta) + \frac{q^2 r^2}{K J + k_{ct} r^2} \left\{ (\cos \alpha + \cos \beta) \left[\frac{c_0 \alpha (\alpha)}{q^2} - K(\alpha, \alpha) + K(\alpha, \pi - \beta) \right] - \left[\frac{c_1 \alpha}{q^2} - K(\beta, \alpha) + K(\beta, \beta) \right]_{\beta = \alpha} + \left[\frac{c_2 \alpha}{q^2} - K(\beta, \alpha) + K(\beta, \beta) \right]_{\beta = \pi - \beta} \right\} = -c_1 (\cos 2\alpha - \cos 2\beta) + \Delta (\cos \alpha + \cos \beta). \quad (19)$$

Непосредственное решение этих уравнений относительно α и β затруднительно. Поэтому исследовать связь между c_0 , c_1 и Δ , с одной стороны, и некоторым предельным отпором катков, с другой стороны, лучше путем решения уравнений (18) и (19) не относительно α и β при c_0 , c_1 и Δ заданных, а относительно c_0 и Δ при α , β и c_1 заданных.

При этом лучше всего начинать решение задачи с рассмотренного случая, когда $R \rightarrow 0$ и, следовательно, $\alpha = \beta$.

Положив в уравнении (18) угол α равным углу β , нужно провести β через ряд значений и приравнять для c_1 заданное значение определит c_0 , как функцию от β . Золотым соответствующим график заданным значениями c_0 будем иметь значения углов для случая, когда $R = 0$.

Положив в уравнении (19) углы α и β равными найденной их общей величине, следует затем найти из уравнения (19) те значения зазора Δ , при котором начальный зазор в боковом штыре оказывается выбранным уже при R равном нулю благодаря одному лишь совместному влиянию комбинации температуры исследуемой системы и общего нагнетения воздуха. Если полученное значение Δ превышает имеющую его величину, как равно ей, то для рассматриваемой башни $R_{max} = 0$. Если же полученное из уравнения (19) при $\alpha = \beta$ значение величин Δ не достигает того значения этой величины Δ , которая у данной башни имеется, то R для исследуемой башни отлится от нуля.

Для определения R_{max} для такой башни следует поэтому повторить все вычисления, задаваясь для α несколькими постепенно убывающими значениями, начиная с того значения этой величины, при котором уравнение (18) удовлетворяется в случае $\alpha = \beta$.

Проведя при каждом из этих значений угла α угол β последовательно через различные постепенно возрастающие значения, можно для каждого из этих значений α определить путем построения соответствующего графика для c_1 ту величину угла β , при котором удовлетворяется уравнение (18).

Для каждой из найденных таким образом удовлетворяющих уравнению (18) комбинаций значений углов α и β можно после

этого разыскать соответствующее значение с помощью равенства (19), соответствующее же Δ с помощью равенства

$$R = 2g^2 r (\sin \beta - \sin \alpha), \quad (20)$$

а по полученным точкам построить график зависимости R как функции от Δ . Когда такой график построен, можно найти искомого R_{\min} как минимальное из тех значений величины R , которые соответствуют соседнему значению разложения Δ , не превышающим заданной их величины.

Как видно из сказанного, разыскание искомого R_{\min} требует при относительно больших значениях величин c_1 и c_2 , вообще говоря, значительно большей вычислительной работы, чем разыскание той же величины, но при относительно малых значениях c_1 и c_2 . Работа эта настолько велика, что проследить таким путем влияние, которое могут иметь на величину произвольные вариации каждого из параметров c_1, c_2 и Δ , от которых данные величины зависят, затруднительно. Определить, однако, R_{\min} для любого заданного частного случая этим путем вполне возможно. Можно также приблизительно к каждому отдельному частному случаю вычислить, зависит ли от данного кольца величина R_{\min} , главным образом от величины среднего зазора и боевой шпигре на уровне катков, обозначенного нами через Δ_0 , или же в не меньшей мере также и от начальной эластичности кольца на этом уровне, характеризуемой величиной Δ_0 . Для того чтобы ответить на последний вопрос приблизительно к определяющей боевой установке, достаточно подсчитать величину R_{\min} сначала в предположении, что $\Delta_0 = 0$ и, следовательно, эластичности кольца на уровне катков боевой не имеет, затем же, не меняя остальных координатных параметров в предположении, что $\Delta_0 \neq 0$ и, следовательно, на уровне пружинящих катков боевой Δ_{\min} .

§ 9. Влияние упругости пружинящих катков

1. В последних трех параграфах мы интегрировали уравнения (44.5), (45.5) упругой дилжи исследуемого кольца, ориентируя в уравнениях (44.5) членами, пропорциональными m . Остановимся в заключение на рассмотрении случая, когда жесткость пружинящих катков боевой не настолько мала, а начальное поджатие их не настолько велико, чтобы отбрасывание этих членов могло быть допущено.

В указанном случае разыскание интеграла уравнений (44.5), (45.5) в форме бесконечных рядов, использованных в § 6, является значительно менее удобным, чем то мы видели выше, так как отдельные коэффициенты тригонометрического ряда (12.6) не определяются здесь каждый отдельно из своего алгебраического уравнения, а искать их все приходится из общей системы алгебраических линейных уравнений. Поэтому, если в уравнениях (44.5), (45.5) члены, пропорциональные m , отбросить нельзя, систему

уравнений, из которой определяются коэффициенты ряда (12.6), можно решать лишь численным образом в каждом частном случае особо.

Не останавливаясь на подробностях соответствующих выкладок, рассмотрим в этом случае расчетный прием § 7, т. е. интегрирование уравнений (44.5), (45.5) в замкнутом виде. Введя обозначения:

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{k_1 r + m_1 r^2}{E J} \omega'' &= \mu_1^2 \\ 1 + \frac{k_2 r^2}{E J} &= \mu_2^2 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

и, положив, что

$$\left. \begin{aligned} \alpha > -c_1 - c_2 \cos 2\theta & \text{ при } 0 < \theta < \alpha; \\ \alpha < -c_1 - c_2 \cos 2\theta & \text{ при } \alpha < \theta < \pi - \beta; \\ \alpha > -c_1 - c_2 \cos 2\theta & \text{ при } \pi - \beta < \theta < \pi, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

можно переписать уравнения (44.5) и (45.5) так:

$$\left. \begin{aligned} \frac{E J}{r^2} (\omega'''' + 2\omega'' + \mu_1^2 \omega) &= \\ = \frac{c_2}{r^2} - g_1 \cos \theta - g^2 - m (c_1 + c_2 \cos 2\theta) & \text{ при } 0 < \theta < \alpha; \\ & \text{ при } \alpha - \beta < \theta < \pi \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \frac{E J}{r^2} (\omega'''' + 2\omega'' + \mu_2^2 \omega) &= \frac{c_2}{r^2} - g_1 \cos \theta \\ & \text{ при } \alpha < \theta < \pi - \beta. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Определяемое уравнениями и должно быть в интервале

$$0 < \theta < \pi$$

непрерывно вместе со всеми своими производными до третьего порядка включительно, и в границах же данного интервала должны удовлетворять условиям симметричности относительно оси $\theta = 0$, $\theta = \pi$, т. е. условиям:

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= \omega'' = 0 & \text{ при } \theta = 0, \\ \omega' &= \omega'' = 0 & \text{ при } \theta = \pi. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Разыскивая такие решения уравнений (3) и (4), мы должны определить C_2 из условия однозначности перемещения v , определяемого уравнением

$$v' = v + \frac{C_2}{r} \frac{r^2}{E J} - \frac{g_1 r^2}{E J} \frac{1 + c}{r} \cos \theta; \quad (6)$$

величину же φ , из условия совместности уравнений:

$$\left. \begin{aligned} w(\alpha) &= -c_0 - c_1 \cos 2\alpha; \\ w(\pi - \beta) &= -c_0 - c_1 \cos 2\beta. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

После этого α как функцию от β можно определить из любого из уравнений (7), и следовательно, и из уравнения

$$w(\alpha) + w(\beta) = -2c_0 - c_1 (\cos 2\alpha + \cos 2\beta); \quad (8)$$

суммарный же отпор катков R с помощью выражения

$$\begin{aligned} R &= - \int_0^{\pi} [\varphi^2 + m(c_0 + c_1 \cos 2\theta - w)] \cos \theta \, d\theta - \\ &- \int_{\pi-\beta}^{\pi} [\varphi^2 + m(c_0 + c_1 \cos 2\theta - w)] \cos \theta \, d\theta, \end{aligned} \quad (9)$$

справедливого до тех пор, пока не выбран радиальный зазор между вертикальными логонами боевого штыря, т. е. пока имеет место равенство

$$w(\pi) = \Delta = \Delta_{\text{зад}} - a_0 - a_1 \quad (10)$$

(см. равенство (1.8)).

Определив φ как функцию от α и β из условия совместности уравнений (7), α как функцию от β из условия (8), R как функцию от β из условия (9), можно β , соответствующее полной выборке зазора в боевом штыре, найти из уравнения

$$w(\pi) = \Delta = \Delta_{\text{зад}} - a_0 - a_1 \quad (11)$$

После этого предельный отпор катков R получится путем подстановки β , найденного из уравнения (11) в выражение (9).

Эта расчетная схема принципиально не отличается от расчетной схемы § 7 и 8 и лишь в том смысле сложнее рассмотренной нами выше, что общие выражения для w , удовлетворяющие уравнениям (3) и (4) и граничным условиям, сформулированным выше при $\alpha \neq 0$, соответственно более сложны, чем в случае, когда $\alpha = 0$.

Если начальный зазор $\Delta_{\text{зад}}$ в боевом штыре настолько велик, а уменьшение его, характеризуемое параметрами c_0 и c_1 , достаточно мало, то угол α обращается в нуль при меньших значениях сумм R , чем удовлетворяющее уравнению (11). Поэтому при размыкании $R_{\text{зад}}$ следует вернуться из уравнений группы (7) отбросить, определить φ из второго из уравнений α , полагая в обоих выражениях для α и R угол α равным нулю, подсчитать величину $w(\alpha)$ для ряда частных значений β . Из уравнения (10) можно определить те значения угла β , которые при α , равном нулю, соответствуют полной выборке зазора в боевом штыре, и подстановкой найден-

ного β в равенство (9) размыкать искомое $R_{\text{зад}}$. Таким образом принципиальная схема размыкания предельного значения отпора катков остается той же, что и при α равном нулю. От ранее рассмотренного случая, когда $\alpha = 0$, решение отличается только большей сложностью выражений для α и R .

2. Не останавливаясь на всех подробностях выкладки, относящихся к размыканию $R_{\text{зад}}$ с помощью описанной только что расчетной схемы, рассмотрим лишь вопрос о нахождении такого интеграла уравнений (3) и (4), который, обладая должной непрерывностью во всем интервале значений θ , определенным неравенствами $0 < \theta < \pi$, удовлетворяет на границах этого интервала граничным условиям (5).

Искомое w можно размыкать в форме суммы

$$w = w_{\alpha, \beta} + w_{\alpha, \gamma} \quad (12)$$

где $w_{\alpha, \beta}$ есть любое частное решение уравнений (4) и (3), за которое можно, очевидно, принять:

$$\left. \begin{aligned} w_{\alpha, \beta} &= \frac{c_0}{\mu^2} \frac{r^{\mu}}{KJ\mu} - \frac{c_1}{KJ(\mu^2-1)} \cos \theta - \frac{c_2}{KJ\mu^2} - \\ &- \frac{m c_0 r^{\mu}}{KJ\mu^2} - \frac{m c_1 r^{\mu}}{KJ(\mu^2-1)} \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

при

$$0 < \theta < \alpha,$$

а также при

$$\pi - \beta < \theta < \pi$$

и

$$\left. \begin{aligned} w_{\alpha, \beta} &= \frac{c_0}{\mu^2} \frac{r^{\mu}}{KJ\mu^2} - \frac{c_1}{KJ(\mu^2-1)} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

при

$$\alpha < \theta < \pi - \beta,$$

а под $w_{\alpha, \beta}$ следует подразумевать общий интеграл однократных уравнений, соответствующих уравнениям (3) и (4).

На основании сказанного в § 7 можно написать

$$\left. \begin{aligned} w_{\alpha, \beta} &= A_1 e^{-i\theta} + \bar{A}_1 e^{i\theta} + A_2 e^{-i(\theta-\alpha)} + \bar{A}_2 e^{-i(\theta-\alpha)} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

при

$$0 < \theta < \alpha,$$

где A_1 и \bar{A}_1 одна пара комплексных сопряженных постоянных произвольных; A_2 и \bar{A}_2 другая такая же пара, а

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}} (\mu^2 - 1) + i \sqrt{\frac{1}{2}} (\mu^2 + 1); \\ \bar{A}_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}} (\mu^2 - 1) - i \sqrt{\frac{1}{2}} (\mu^2 + 1); \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

для остальных же двух интервалов значений θ

$$w_{\alpha, \pi} = B_1 e^{-\lambda(\theta-\alpha)} + B_2 e^{-\lambda(\pi-\theta)} + B_3 e^{-\lambda(\theta-\alpha-\beta)} + B_4 e^{-\lambda(\pi-\theta-\beta)} \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{w}_\alpha &= \sqrt{\frac{1}{2}(\bar{w}_1^2 - 1) + i \sqrt{\frac{1}{2}(\bar{w}_2^2 + 1)}}, \\ \bar{w}_\pi &= \sqrt{\frac{1}{2}(\bar{w}_1^2 - 1) - i \sqrt{\frac{1}{2}(\bar{w}_2^2 + 1)}} \end{aligned} \quad (18)$$

а B_1 и B_2 произвольные постоянные взаимно сопряженные с \bar{B}_1 и \bar{B}_2 и, наоборот,

$$w_{\pi, \alpha} = C_1 e^{-\lambda(\pi-\theta-\beta)} + C_2 e^{-\lambda(\theta-\alpha-\beta)} + C_3 e^{-\lambda(\theta-\alpha)} + C_4 e^{-\lambda(\pi-\theta)} \quad (19)$$

где C_1 и C_2 определяются равенствами (16), а C_3 и C_4 суть новые две комплексные произвольные константы, взаимно сопряженные с \bar{C}_3 и \bar{C}_4 .

Шесть комплексных произвольных постоянных достаточно для того, чтобы w , определенное равенством (12), могло быть подчинено четырем граничным условиям, данным равенствами (5), четырем условиям непрерывности w и его первых трех производных по θ при $\theta = \alpha$ и такому же числу аналогичных условий сопряженки при $\theta = \pi - \beta$.

Независимое разложение этих шести комплексных постоянных интегрирования из сформулированной выше совокупности граничных условий и условий сопряженки в числительном отделе крайне неудобно. К гораздо более простому выводу приводит в рассматриваемом случае метода угловых деформаций, основанная на разложении перемещения w и его производной по углу θ в сечениях $\theta = \alpha$ и $\theta = \pi - \beta$, совпадающих с границами тех отдельных участков рассматриваемого кольца, на протяжении которых жесткость упругого основания кольца остается постоянной.

Рассмотрим вычислительную схему, к которой приводится решение задачи этим вычислительным приемом.

Обозначим (рис. 16), как и во всем вышеизложенном, через 2α и 2β длину тех двух участков кольца, где в основных дифференциальных уравнениях его изгиба w нельзя считать равным нулю и вводим к этим двум основным обозначениям обозначение

$$2\gamma = \alpha - \alpha - \beta. \quad (20)$$

Тогда через 2γ будет обозначена угловая мера того участка кольца, на протяжении которого катушки балки с рассматриваемым кольцом не соприкасаются, в где, следовательно,

$$w = 0.$$

Если при раскрытии статической неопределенности рассматриваемого кольца примем* за основные неизвестные перемещения w и w' в сечениях $\theta = \alpha$ и $\theta = \pi$, то определить их величину можно из условия, что

$$M = \frac{EJ}{r^2} (w'' + w')$$

и

$$N = \frac{KJ}{r^2} (w' + w')$$

остаются непрерывными в сечениях $\theta = \alpha$ и $\theta = \pi$. Для того чтобы развернуть эти условия, достаточно для каждого из трех участков полукольца, на которые оно разбивается упомянутыми двумя его сечениями: а) разыскать какое-либо частное решение, учитывающее влияние той нагрузки кольца, которым определяется правая часть уравнений (44.5) и (45.5) и б) для свободно лежащей на сплошном упругом основании дуги определить отдельно влияние на величину опорных моментов и перемещающих сил, вызываемых единичными усилениями и раздвоениями смежными концевыми сечениями данного участка, когда он от влияния всякой поперечной нагрузки освобожден.

Положим в равенствах (13) и (14) для простоты письма

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_1 e^{\lambda\alpha}}{r^2 E J} &= \eta_1; \\ \frac{\eta_1 e^{\lambda\alpha}}{E J} &= \eta_2; \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

$$\frac{\eta_2 e^{\lambda\alpha}}{E J} = f. \quad (22)$$

* Угол поворота опорных точек определяется, как мы это видели выше, величиной $\frac{w}{r} + \frac{w'}{r}$. Так как, однако, в рассматриваемом непрерывном фундаменте от угла θ , то для обеспечения кольца непрерывности угловой деформации достаточно добиться непрерывности этой определяемой величиной w' . Мы можем поэтому ограничиться рассмотрением элементов лишь последней деформации.

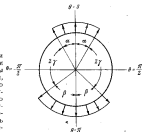


Рис. 16.

можно, учитывая обозначения (1), для искомого частного решения записать:

$$w_{\alpha, \beta} = \frac{1}{\mu_1^2} y_1 - \frac{1}{\mu_1^2 - 1} y_2 \cos \theta - \frac{1}{\mu_1^2} f - \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_1^2} c_0 - \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{8 + \mu_1^2} c_2 \cos 2\theta$$

при $0 < \theta < \alpha$ и $\pi - \beta < \theta < \pi$ (23)

и

$$w_{\alpha, \beta} = \frac{1}{\mu_1^2} y_1 - \frac{1}{\mu_1^2 - 1} y_2 \cos \theta$$

при $\alpha < \theta < \pi - \beta$, (24)

где c_0 , c_2 и f величинами заданы, а y_1 и y_2 направлены по диаметру [определяемые первая из условия однозначности перемещения w , вторая же из условий (7)].

Частное решение уравнений (45.5) и (44.5), данное равенствами (23) и (24), обладает должной непрерывностью всюду, кроме точек $\theta = \alpha$ и $\pi - \beta$, где согласно равенствам (23) и (24):

$$w_{\alpha, \beta}(\alpha - 0) = \frac{1}{\mu_1^2} y_1 - \frac{1}{\mu_1^2 - 1} y_2 \cos \alpha - \frac{1}{\mu_1^2} f - \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{8 + \mu_1^2} c_2 \cos 2\alpha;$$

(25)

$$w_{\alpha, \beta}(\alpha + 0) = \frac{1}{\mu_1^2} y_1 - \frac{1}{\mu_1^2 - 1} y_2 \cos \alpha;$$

$$w_{\alpha, \beta}(\alpha - 0) = \frac{1}{\mu_1^2} y_1 \sin \alpha + \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{8 + \mu_1^2} 2c_2 \sin \alpha;$$

$$w_{\alpha, \beta}(\alpha + 0) = \frac{1}{\mu_1^2 - 1} y_2 \sin \alpha;$$

(26)

$$w_{\alpha, \beta}(\alpha - 0) = \frac{1}{\mu_1^2} y_2 \cos \alpha - \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{8 + \mu_1^2} 4c_2 \cos 2\alpha;$$

$$w_{\alpha, \beta}(\alpha + 0) = \frac{1}{\mu_1^2 - 1} y_2 \cos \alpha;$$

(27)

$$w_{\alpha, \beta}(\alpha - 0) = -\frac{1}{\mu_1^2} y_2 \sin \alpha - \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{8 + \mu_1^2} 8c_2 \sin 2\alpha;$$

$$w_{\alpha, \beta}(\alpha + 0) = -\frac{1}{\mu_1^2} y_2 \sin \alpha;$$

(28)

$$w_{\alpha, \beta}(\pi - \beta - 0) = \frac{1}{\mu_1^2} y_1 + \frac{1}{\mu_1^2 - 1} y_2 \cos \beta;$$

$$w_{\alpha, \beta}(\pi - \beta + 0) = \frac{1}{\mu_1^2} y_1 + \frac{1}{\mu_1^2 - 1} y_2 \cos \beta - \frac{1}{\mu_1^2} f - \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{\mu_1^2} c_0 - \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{8 + \mu_1^2} c_2 \cos 2\beta;$$

(29)

$$w_{\alpha, \beta}(\pi - \beta - 0) = \frac{1}{\mu_1^2 - 1} y_2 \sin \beta;$$

$$w_{\alpha, \beta}(\pi - \beta + 0) = \frac{1}{\mu_1^2 - 1} y_2 \sin \beta + \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{8 + \mu_1^2} 2c_2 \sin 2\beta;$$

(30)

$$w_{\alpha, \beta}(\pi - \beta - 0) = -\frac{1}{\mu_1^2 - 1} y_2 \cos \beta;$$

$$w_{\alpha, \beta}(\pi - \beta + 0) = -\frac{1}{\mu_1^2 - 1} y_2 \cos \beta + \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{8 + \mu_1^2} 4c_2 \cos 2\beta;$$

(31)

$$w_{\alpha, \beta}(\pi - \beta - 0) = -\frac{1}{\mu_1^2 - 1} y_2 \sin \beta;$$

$$w_{\alpha, \beta}(\pi - \beta + 0) = -\frac{1}{\mu_1^2 - 1} y_2 \sin \beta - \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2}{8 + \mu_1^2} 8c_2 \sin 2\beta.$$

(32)

Для того чтобы добиться должной непрерывности радиальных перемещений кольца, достаточно подготовить такие частные решения однородных уравнений, соответствующих уравнениям (44.5) и (45.5), с помощью которых можно было бы по произволу керировать

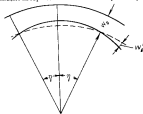


Рис. 17.

w и w' на обеих границах каждого отдельного участка рассматриваемого кольца.

Для упрощения выкладок, связанных с получением этих решений, рассмотрим сначала случай, когда деформация рассматриваемого участка кольца симметрична относительно его длины, затем случай, когда она антисимметрична, потом путем комбинации полученных двух решений случай, когда на одном конце рассматриваемого участка кольца w и w' равны нулю, на другом же принимают произвольные значения.

4. Допустим (см. рис. 17), что участок лежащий на сплюсненном упругом основании кольца, ограниченный сечением $\theta = \pm \theta$

загружен только усилиями M и N , приложенными к его концам сеченья.

Разниц для этого кольца связь между величинами $w(\pm\eta)$ и $w'(\pm\eta)$, с одной стороны, и $w''(\pm\eta)$ и $w'''(\pm\eta)$, с другой, состоит, что деформация рассматриваемого участка кольца симметрична относительно середины его длины и, следовательно,

$$\begin{aligned} w(+\eta) &= w(-\eta), \\ w'(+\eta) &= -w'(-\eta), \end{aligned} \quad (33)$$

Пусть для этого участка кольца основное дифференциальное уравнение изгиба имеет вид

$$w'''' + 2w'' + \mu^2 w = 0 \quad (34)$$

и, следовательно, общий интеграл дается равенством

$$w = A_1 e^{-\mu x} + A_2 e^{\mu x} + \bar{A}_1 e^{-i\mu x} + \bar{A}_2 e^{i\mu x}, \quad (35)$$

где

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}(\mu^2 - 1)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(\mu^2 + 1)}, \quad (36)$$

а A_1, A_2 две комплексные постоянные произвольные, а \bar{A}_1 и \bar{A}_2 две константы сопряженные соответственно с A_1 и A_2 .

Ограничиваясь рассмотрением лишь деформаций кольца, симметричных относительно сеченья $\theta = 0$, положим

$$2B_1 = A_1 = A_2; \quad (37)$$

$$2\bar{B}_1 = \bar{A}_1 = \bar{A}_2,$$

тогда будет

$$w = B_1 \operatorname{ch} x\theta + \bar{B}_1 \operatorname{ch} \bar{x}\theta, \quad (38)$$

Положим для определенности B_1

$$\begin{cases} w = w(\eta) \\ w' = w'(\eta) \end{cases} \quad \text{при } \theta = \eta. \quad (39)$$

будем иметь

$$\begin{cases} B_1 \operatorname{ch} x\eta + \bar{B}_1 \operatorname{ch} \bar{x}\eta = w(\eta) \\ x B_1 \operatorname{sh} x\eta + \bar{B}_1 \bar{x} \operatorname{sh} \bar{x}\eta = w'(\eta) \end{cases} \quad (40)$$

и, следовательно,

$$\begin{cases} B_1 = \frac{w(\eta) x \operatorname{sh} \bar{x}\eta - w'(\eta) \operatorname{ch} \bar{x}\eta}{x \operatorname{sh} x\eta \operatorname{ch} \bar{x}\eta - x \operatorname{sh} \bar{x}\eta \operatorname{ch} x\eta} \\ \bar{B}_1 = \frac{w(\eta) x \operatorname{sh} x\eta - w'(\eta) \operatorname{ch} x\eta}{x \operatorname{sh} x\eta \operatorname{ch} x\eta - x \operatorname{sh} \bar{x}\eta \operatorname{ch} \bar{x}\eta} \end{cases} \quad (41)$$

Подставив найденные B_1 и \bar{B}_1 в равенство (38), получим:

$$w = \frac{x \operatorname{sh} \bar{x}\eta \operatorname{ch} x\eta - x \operatorname{sh} x\eta \operatorname{ch} \bar{x}\eta}{x \operatorname{sh} x\eta \operatorname{ch} \bar{x}\eta - x \operatorname{sh} \bar{x}\eta \operatorname{ch} x\eta} w(\eta) - \frac{\operatorname{ch} \bar{x}\eta \operatorname{ch} x\eta - \operatorname{ch} x\eta \operatorname{ch} \bar{x}\eta}{x \operatorname{sh} x\eta \operatorname{ch} \bar{x}\eta - x \operatorname{sh} \bar{x}\eta \operatorname{ch} x\eta} w'(\eta) \quad (42)$$

и, следовательно,

$$w''(\eta) = w''(-\eta) = \frac{x^2 \operatorname{sh} \bar{x}\eta \operatorname{ch} x\eta - x^2 \operatorname{sh} x\eta \operatorname{ch} \bar{x}\eta}{x \operatorname{sh} x\eta \operatorname{ch} \bar{x}\eta - x \operatorname{sh} \bar{x}\eta \operatorname{ch} x\eta} w(\eta) - \frac{x^2 \operatorname{ch} \bar{x}\eta \operatorname{ch} x\eta - x^2 \operatorname{ch} x\eta \operatorname{ch} \bar{x}\eta}{x \operatorname{sh} x\eta \operatorname{ch} \bar{x}\eta - x \operatorname{sh} \bar{x}\eta \operatorname{ch} x\eta} w'(\eta), \quad (43)$$

$$w'''(\eta) = -w'''(-\eta) = \frac{x^2 \operatorname{sh} \bar{x}\eta \operatorname{ch} x\eta - x^2 \operatorname{sh} x\eta \operatorname{ch} \bar{x}\eta}{x \operatorname{sh} x\eta \operatorname{ch} \bar{x}\eta - x \operatorname{sh} \bar{x}\eta \operatorname{ch} x\eta} w(\eta) - \frac{x^2 \operatorname{ch} \bar{x}\eta \operatorname{ch} x\eta - x^2 \operatorname{ch} x\eta \operatorname{ch} \bar{x}\eta}{x \operatorname{sh} x\eta \operatorname{ch} \bar{x}\eta - x \operatorname{sh} \bar{x}\eta \operatorname{ch} x\eta} w'(\eta). \quad (44)$$

Члены, входящие в правую часть выражений (43) и (44) множимыми к $w(\eta)$ и $w'(\eta)$, являются в силу (36) функциями только от μ и η . Для всякого частного значения μ их можно проинтегрировать как функции от η . Предположим, что это для интересующих нас значений μ сделали.

Тогда, вводя обозначения:

$$F_1(\mu, \eta) = \frac{x^2 \operatorname{sh} \bar{x}\eta \operatorname{ch} x\eta - x^2 \operatorname{sh} x\eta \operatorname{ch} \bar{x}\eta}{x \operatorname{sh} x\eta \operatorname{ch} \bar{x}\eta - x \operatorname{sh} \bar{x}\eta \operatorname{ch} x\eta}; \quad (45)$$

$$G_1(\mu, \eta) = -\frac{x^2 \operatorname{ch} \bar{x}\eta \operatorname{ch} x\eta - x^2 \operatorname{ch} x\eta \operatorname{ch} \bar{x}\eta}{x \operatorname{sh} x\eta \operatorname{ch} \bar{x}\eta - x \operatorname{sh} \bar{x}\eta \operatorname{ch} x\eta};$$

$$H_1(\mu, \eta) = \frac{x^2 \operatorname{sh} \bar{x}\eta \operatorname{ch} x\eta - x^2 \operatorname{sh} x\eta \operatorname{ch} \bar{x}\eta}{x \operatorname{sh} x\eta \operatorname{ch} \bar{x}\eta - x \operatorname{sh} \bar{x}\eta \operatorname{ch} x\eta}; \quad (46)$$

$$K_1(\mu, \eta) = -\frac{x^2 \operatorname{ch} \bar{x}\eta \operatorname{ch} x\eta - x^2 \operatorname{ch} x\eta \operatorname{ch} \bar{x}\eta}{x \operatorname{sh} x\eta \operatorname{ch} \bar{x}\eta - x \operatorname{sh} \bar{x}\eta \operatorname{ch} x\eta},$$

можно написать

$$\begin{cases} w''(\eta) = w''(-\eta) = F_1(\mu, \eta) w(\eta) + G_1(\mu, \eta) w'(\eta); \\ w'''(\eta) = -w'''(-\eta) = H_1(\mu, \eta) w(\eta) + K_1(\mu, \eta) w'(\eta). \end{cases} \quad (47)$$

Как видно из (47), функциями, определяемыми равенствами (45) и (46), выражаются при симметричной деформации искомого коэффициенты влияния радиального перемещения $w(\eta) = w(-\eta)$ и углового перемещения $w'(\eta) = -w'(-\eta)$ конечных сечений рассматриваемого кольца на соответствующие тем же значениям угла θ значения второй и третьей производных w по θ .

5. При антисимметричной деформации (см. рис. 18) того же элемента кольца, что и рассмотренная в п. 4, можно положить

$$w = C_1 \operatorname{sh} x\theta + \bar{C}_1 \operatorname{sh} \bar{x}\theta, \quad (48)$$

где C_1 и \bar{C}_1 — некоторые пока неопределенные константы.

Для того чтобы (48) удовлетворяло граничным условиям

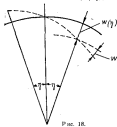


Рис. 18.

$$\left. \begin{aligned} w &= w(\eta) \\ w' &= w'(\eta) \end{aligned} \right\} \text{при } \theta = +\eta; \quad (49)$$

$$\left. \begin{aligned} w &= -w(-\eta) \\ w' &= w'(\eta) \end{aligned} \right\} \text{при } \theta = -\eta; \quad (50)$$

достаточно определить в равенстве (48) постоянные C_1 и \bar{C}_1 из условия

$$\left. \begin{aligned} C_1 \operatorname{sh} \delta \eta + \\ + \bar{C}_1 \operatorname{sh} \delta \eta &= w(\eta); \\ C_1 \operatorname{sch} \delta \eta + \\ + \bar{C}_1 \operatorname{sch} \delta \eta &= w'(\eta); \end{aligned} \right\} (51)$$

или

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{\bar{w} \operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta - w'(\eta) \operatorname{sh} \delta \eta}{\operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta - \operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta}; \\ \bar{C}_1 &= -\frac{w \operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta - w'(\eta) \operatorname{sh} \delta \eta}{\operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta - \operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta} \end{aligned} \right\} (52)$$

Подставив найденные C_1 и \bar{C}_1 в равенство (48), получаем

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{\operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta - \operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta}{\operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta - \operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta} w(\eta) - \\ - \frac{\operatorname{sh} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta - \operatorname{sh} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta}{\operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta - \operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta} w'(\eta) \end{aligned} \right\} (53)$$

и, следовательно,

$$\left. \begin{aligned} w'(\eta) - w'(-\eta) &= F_2(\mu, \eta) w(\eta) + G_2(\mu, \eta) w'(\eta); \\ w''(\eta) - w''(-\eta) &= H_2(\mu, \eta) w(\eta) + K_2(\mu, \eta) w'(\eta), \end{aligned} \right\} (54)$$

где через $F_2(\mu, \eta)$; $G_2(\mu, \eta)$; $H_2(\mu, \eta)$ и $K_2(\mu, \eta)$ обозначены вспомогательные функции.

$$\left. \begin{aligned} F_2(\mu, \eta) &= \frac{\bar{w} \operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta - \bar{w}' \operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta}{\operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta - \operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta}; \\ G_2(\mu, \eta) &= \frac{\bar{w} \operatorname{sh} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta - \bar{w}' \operatorname{sh} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta}{\operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta - \operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta}; \end{aligned} \right\} (55)$$

$$\left. \begin{aligned} H_2(\mu, \eta) &= \frac{\bar{w} \operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta - \bar{w}' \operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta}{\operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta - \operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta}; \\ K_2(\mu, \eta) &= \frac{\bar{w} \operatorname{sh} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta - \bar{w}' \operatorname{sh} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta}{\operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta - \operatorname{sch} \delta \eta \operatorname{ch} \delta \eta}. \end{aligned} \right\} (56)$$

Равенства (54) дают ясную связь между значением величин $w'(\eta)$ и $w''(\eta)$, с одной стороны, и $w(\eta)$ и $w'(\eta)$, с другой, при антисимметричной относительно сечения $\theta = 0$ деформации рассматриваемого элемента кольца.

6. Для того чтобы получить решение, удовлетворяющее (рис. 19) граничным условиям,

$$\left. \begin{aligned} w &= w_1 \\ w' &= w_1' \\ w &= w_2 \\ w' &= w_2' \end{aligned} \right\} \text{при } \theta = -\eta; \quad (57)$$

достаточно положить в выражении (42)

$$\left. \begin{aligned} w(\eta) &= \frac{w_1 + w_2}{2} = w(-\eta); \\ w'(\eta) &= -\frac{w_1' + w_2'}{2} = -w'(-\eta); \end{aligned} \right\} (58)$$

в выражении же (53)

$$\left. \begin{aligned} w(\eta) &= \frac{w_1 + w_2}{2} = -w(-\eta); \\ w'(\eta) &= \frac{w_1' + w_2'}{2} = w'(-\eta). \end{aligned} \right\} (59)$$

и затем сложить результаты, полученные этим путем. Выполняя это, будем иметь

$$\left. \begin{aligned} w_1' - w_2'(-\eta) &= F_2(\mu, \eta) \frac{w_1 + w_2}{2} - F_2(\mu, \eta) \frac{w_1' + w_2'}{2} + \\ &+ G_2(\mu, \eta) \frac{w_1' + w_2'}{2} - G_2(\mu, \eta) \frac{w_1 + w_2}{2}; \\ w_2' - w_1'(+\eta) &= F_2(\mu, \eta) \frac{w_1 + w_2}{2} + F_2(\mu, \eta) \frac{w_1' + w_2'}{2} + \\ &+ G_2(\mu, \eta) \frac{w_1' + w_2'}{2} + G_2(\mu, \eta) \frac{w_1 + w_2}{2}; \\ w_1'' - w_2''(-\eta) &= -H_2(\mu, \eta) \frac{w_1 + w_2}{2} + H_2(\mu, \eta) \frac{w_1' + w_2'}{2} - \\ &- K_2(\mu, \eta) \frac{w_1' + w_2'}{2} + K_2(\mu, \eta) \frac{w_1 + w_2}{2}; \\ w_2'' - w_1''(+\eta) &= H_2(\mu, \eta) \frac{w_1 + w_2}{2} + H_2(\mu, \eta) \frac{w_1' + w_2'}{2} + \\ &+ K_2(\mu, \eta) \frac{w_1' + w_2'}{2} + K_2(\mu, \eta) \frac{w_1 + w_2}{2}; \end{aligned} \right\} (60)$$

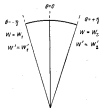


Рис. 19.

или, что то же

$$\left. \begin{aligned} w_1'' &= F_2(\mu, \eta) w_1 + F_3(\mu, \eta) w_2 - G_2(\mu, \eta) w_1' + \\ &\quad + G_3(\mu, \eta) w_2'; \\ w_2'' &= F_4(\mu, \eta) w_1 + F_5(\mu, \eta) w_2 - G_4(\mu, \eta) w_1' + \\ &\quad + G_5(\mu, \eta) w_2'; \\ w_1''' &= -H_1(\mu, \eta) w_1 - H_2(\mu, \eta) w_2 + K_1(\mu, \eta) w_1' - \\ &\quad - K_2(\mu, \eta) w_2'; \\ w_2''' &= H_3(\mu, \eta) w_1 + H_4(\mu, \eta) w_2 - K_3(\mu, \eta) w_1' + \\ &\quad + K_4(\mu, \eta) w_2'. \end{aligned} \right\} (51)$$

где

$$\left. \begin{aligned} F_2(\mu, \eta) &= \frac{1}{2} [F_1(\mu, \eta) + F_2(\mu, \eta)]; \\ F_3(\mu, \eta) &= \frac{1}{2} [F_1(\mu, \eta) - F_2(\mu, \eta)]; \\ G_2(\mu, \eta) &= \frac{1}{2} [G_1(\mu, \eta) + G_2(\mu, \eta)]; \\ G_3(\mu, \eta) &= \frac{1}{2} [G_1(\mu, \eta) - G_2(\mu, \eta)]; \\ H_1(\mu, \eta) &= \frac{1}{2} [H_3(\mu, \eta) + H_4(\mu, \eta)]; \\ H_2(\mu, \eta) &= \frac{1}{2} [H_3(\mu, \eta) - H_4(\mu, \eta)]; \\ K_1(\mu, \eta) &= \frac{1}{2} [K_3(\mu, \eta) + K_4(\mu, \eta)]; \\ K_2(\mu, \eta) &= \frac{1}{2} [K_3(\mu, \eta) - K_4(\mu, \eta)]. \end{aligned} \right\} (52)$$

7. Полученные общие уравнения для w_1'' ; w_2'' ; w_1''' и w_2''' как функций от w_1 ; w_2 ; w_1' и w_2' позволяют размернить уравнения, позволяющие разыскать радиальные перемещения кольца в точках сопряжения тех его участков, на протяжении каждого из которых жесткость упругого основания кольца остается неизменной. Уравнения эти даются условиями непрерывности радиального перемещения во известе с тремя первыми производными этой функции по θ .

Уравнения эти даются, очевидно, равенствами

$$\left. \begin{aligned} w_1'' &= w_{1,2}''(\alpha - 0) + F_1(\mu, \alpha) [w_1 - w_{1,2}(\alpha - 0)] + \\ &\quad + G_1(\mu, \alpha) [w_1' - w_{1,2}'(\alpha - 0)] = \\ &= w_{1,2}''(\alpha + 0) + F_1(\mu, \alpha, \gamma) [w_1 - w_{1,2}(\alpha + 0)] + \\ &\quad + F_2(\mu, \alpha, \gamma) [w_2 - w_{2,2}(\alpha - \beta - 0)] - \\ &- G_1(\mu, \alpha, \gamma) [w_1' - w_{1,2}'(\alpha + 0)] + \\ &\quad + G_2(\mu, \alpha, \gamma) [w_2' - w_{2,2}'(\alpha - \beta - 0)] \end{aligned} \right\} (53)$$

$$\left. \begin{aligned} w_2'' &= w_{2,2}''(\alpha - \beta - 0) + F_3(\mu, \alpha, \gamma) [w_2 - w_{2,2}(\alpha + 0)] + \\ &\quad + F_4(\mu, \alpha, \gamma) [w_2 - w_{2,2}(\alpha - \beta - 0)] - \\ &- G_3(\mu, \alpha, \gamma) [w_2' - w_{2,2}'(\alpha + 0)] + \\ &\quad + G_4(\mu, \alpha, \gamma) [w_2' - w_{2,2}'(\alpha - \beta - 0)] = \\ &= w_{2,2}''(\alpha - \beta + 0) + F_3(\mu, \alpha, \gamma) [w_2 - w_{2,2}(\alpha - \beta + 0)] - \\ &\quad - G_3(\mu, \alpha, \gamma) [w_2' - w_{2,2}'(\alpha - \beta + 0)]. \end{aligned} \right\} (54)$$

$$\left. \begin{aligned} w_1''' &= w_{1,2}'''(\alpha - 0) + H_1(\mu, \alpha) [w_1 - w_{1,2}(\alpha - 0)] + \\ &\quad + G_1(\mu, \alpha) [w_1' - w_{1,2}'(\alpha - 0)] = \\ &= w_{1,2}'''(\alpha + 0) - H_1(\mu, \alpha, \gamma) [w_1 - w_{1,2}(\alpha + 0)] - \\ &\quad - H_2(\mu, \alpha, \gamma) [w_2 - w_{2,2}(\alpha - \beta - 0)] + \\ &\quad + K_1(\mu, \alpha, \gamma) [w_1' - w_{1,2}'(\alpha + 0)] - \\ &\quad - K_2(\mu, \alpha, \gamma) [w_2' - w_{2,2}'(\alpha - \beta - 0)]. \end{aligned} \right\} (55)$$

$$\left. \begin{aligned} w_2''' &= w_{2,2}'''(\alpha - \beta - 0) + H_3(\mu, \alpha, \gamma) [w_2 - w_{2,2}(\alpha + 0)] + \\ &\quad + H_4(\mu, \alpha, \gamma) [w_2 - w_{2,2}(\alpha - \beta - 0)] - \\ &- K_3(\mu, \alpha, \gamma) [w_1' - w_{1,2}'(\alpha + 0)] + \\ &\quad + K_4(\mu, \alpha, \gamma) [w_2' - w_{2,2}'(\alpha - \beta - 0)] = \\ &= w_{2,2}'''(\alpha - \beta + 0) - H_3(\mu, \alpha, \gamma) [w_2 - w_{2,2}(\alpha - \beta + 0)] + \\ &\quad + K_3(\mu, \alpha, \gamma) [w_1' - w_{1,2}'(\alpha - \beta - 0)]. \end{aligned} \right\} (56)$$

Подставив в эти уравнения численные значения функций $F_1(\mu, \dots)$; $G_1(\mu, \dots)$; $H_1(\mu, \dots)$ и $K_1(\mu, \dots)$, соответствующие рассматриваемым значениям α , β и γ , значения в виде $w_{1,2}(\dots)$ и $w_{2,2}(\dots)$ их выражаем как из равенств (25) — (32), будем иметь четыре уравнения, позволяющие паразит неизвестные w_1 и w_2 как линейные функции от β ; β_1 ; β_2 ; β_3 и β_4 вида:

$$\left. \begin{aligned} w_1 &= a_{11} \beta_1 + a_{12} \beta_2 + a_{13} \beta_3 + a_{14} \beta_4 + a_{15} c_0 \\ w_2 &= a_{21} \beta_1 + a_{22} \beta_2 + a_{23} \beta_3 + a_{24} \beta_4 + a_{25} c_0 \\ w_1' &= a_{31} \beta_1 + a_{32} \beta_2 + a_{33} \beta_3 + a_{34} \beta_4 + a_{35} c_0 \\ w_2' &= a_{41} \beta_1 + a_{42} \beta_2 + a_{43} \beta_3 + a_{44} \beta_4 + a_{45} c_0 \end{aligned} \right\} (57)$$

Все коэффициенты a_{ij} этих выражений зависят естественно от того, чему мы положим равным величинам α и β при разложении уравнений (53) и (56).

8. Величина u_0 , входящая в правую часть равенства (67), определяется, как сказано, на условии однозначности перемещения v , определяемого равенством (7.7), из которого следует:

$$v(\pi) - v(0) = \int_0^\pi w d\theta + K \frac{J}{E^2} \pi = 0. \quad (68)$$

Для того чтобы развернуть уравнение (68), необходимо вычислять интеграл $\int_0^\pi w d\theta$.

Очевидно,

$$\int_0^\pi w d\theta = \int_0^\theta w d\theta + \int_\theta^{\pi-\theta} w d\theta + \int_{\pi-\theta}^\pi w d\theta. \quad (69)$$

Принимая во внимание, что на протяжении участка $0 < \theta < \alpha$ радиальной прогиб кольца не выражается равенством (42), можно написать

$$\int_0^\alpha w d\theta = L(\mu_0, \alpha) w_1 + M(\mu_0, \alpha) w_1', \quad (70)$$

где

$$\left. \begin{aligned} L(\mu, \eta) &= \frac{\frac{\pi}{2} \operatorname{sh} \eta \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \eta - \frac{\pi}{2} \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \eta \operatorname{sh} \eta}{\operatorname{sh} \eta \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \eta - \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \eta \operatorname{ch} \eta}; \\ M(\mu, \eta) &= \frac{\frac{1}{2} \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \eta \operatorname{sh} \eta - \frac{1}{2} \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \eta \operatorname{ch} \eta}{\operatorname{sh} \eta \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \eta - \operatorname{ch} \eta \operatorname{sh} \eta \operatorname{ch} \eta} \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Для участка $\pi - \beta < \theta < \pi$ можно, принимая во внимание, что для этого участка

$$\begin{aligned} w(\eta) &= w_2; \\ w'(\eta) &= -w_2' \end{aligned}$$

написать

$$\int_{\pi-\beta}^\pi w d\theta = L(\mu_0, \beta) w_2 - M(\mu_0, \beta) w_2'. \quad (72)$$

Наконец для участка $\alpha < \theta < \pi - \beta$, где w определяется, если отсчитывать θ от середины этого участка суммой выражений (42), а котором (см. равенство (58))

$$\left. \begin{aligned} w(\eta) &= \frac{w_1 + w_2}{2}; \\ w'(\eta) &= -\frac{w_1' + w_2'}{2} \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

и выражение (53), в котором $w(\eta)$ и $w'(\eta)$ определяются равенствами (59), можно написать

$$\int_\alpha^{\pi-\beta} w d\theta = 2L(\mu_0, \gamma) \frac{w_1 + w_2}{2} + M(\mu_0, \gamma) \frac{w_1' + w_2'}{2}, \quad (74)$$

ибо интеграл от нечетной функции, определяемой равенством (53), взятый в симметричных пределах, должен быть равен нулю.

Принимая все это во внимание, видно, что

$$\left. \begin{aligned} \int_0^\pi w d\theta &= [L(\mu_0, \alpha) + L(\mu_0, \gamma)] w_1 + \\ &+ [L(\mu_0, \gamma) + L(\mu_0, \beta)] w_2 + \\ &+ [M(\mu_0, \alpha) - M(\mu_0, \gamma)] w_1' + \\ &+ [M(\mu_0, \gamma) - M(\mu_0, \beta)] w_2' \end{aligned} \right\} \quad (75)$$

Вычисляя входящие в это выражение слагаемые, можно с помощью равенств (69) привести выражение (68) к виду

$$\int_0^\pi w d\theta = \alpha_{11} w_1 + \alpha_{12} w_2 + \alpha_{13} w_1' + \alpha_{14} w_2' + \alpha_{15} w_0. \quad (76)$$

где α_{ij} некоторые определенные числа, величина которых зависит как от α , так и от β . Определив все эти числа, можем из уравнения

$$\left(\alpha_{11} + \frac{J}{E^2} \pi \right) w_1 + \alpha_{12} w_2 + \alpha_{13} w_1' + \alpha_{14} w_2' + \alpha_{15} w_0 = 0, \quad (77)$$

являющегося развернутой формой уравнения (68), выразить w_1 через w_2, w_1', w_2' и w_0 , подставив найденное w_1 в равенство (67), приведем выражение для w_1 и w_1' к виду

$$\begin{aligned} w_1 &= \beta_{11} w_2 + \beta_{12} w_1' + \beta_{13} w_2' + \beta_{14} w_0; \\ w_1' &= \beta_{21} w_2 + \beta_{22} w_1' + \beta_{23} w_2' + \beta_{24} w_0 \end{aligned} \quad (78)$$

где β_{ij} число, зависящее от α и β .

Теперь можно обратиться к уравнению (7). Подставив в них $w(\alpha) = w_1$ и $w(\beta) = w_2$ из равенств (78) будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \beta_{11} w_2 + \beta_{12} w_1' + \beta_{13} w_2' + \beta_{14} w_0 &= -w_2 - w_2 \cos 2\alpha; \\ \beta_{21} w_2 + \beta_{22} w_1' + \beta_{23} w_2' + \beta_{24} w_0 &= -w_2 - w_2 \cos 2\beta. \end{aligned} \right\} \quad (79)$$

Для того чтобы эти два уравнения были совместными, надо положить

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{1}{\beta_{11} - \beta_{21}} [(\beta_{12} - \beta_{22}) w_1' + (\beta_{13} - \beta_{23}) w_2' + \\ &+ (\beta_{14} - \beta_{24}) w_0 \cos 2\alpha \cos 2\beta] w_2 \end{aligned} \quad (80)$$

Исключив w_0 из уравнений (79) с помощью равенства (80), можем привести уравнение (79) к виду

$$\gamma_1 w_1' + \gamma_2 w_2' + \gamma_3 w_2 = -2w_2 - w_2 (\cos 2\beta + \cos 2\alpha). \quad (81)$$

где u_1, u_2 и u_3 некоторые определенные числа, величина которых зависит от тех значений α и β , к которым относится наше численное.

В уравнении (81) величина f , как то видно из равенства (22), зависит от начального поджатия катушек. Уравнение (81) позволяет установить все те комбинации значений параметров c_1 и c_2 , при которых область плотного соприкосновения кольца жесткого барабана с катушками башни ограничена теми значениями углов α и β , которыми мы задались при разворотах уравнений (63) — (66) и во всех дальнейших выкладках, основанных на использовании этих уравнений.

Соответствующие значения суммарного отпора катушек можно определить подстановкой найденного m в выражение (9). Выбрав же как же выбрать при этом зазор в боковом штире можно установить с помощью условия (10).

Для того чтобы определить таким образом предельное значение B , соответствующее заданным значениям c_1 , c_2 и Δ , надо проанализировать вычисления для ряда частных значений α и β , т. е. выводить вычислительную работу столь сложную, что ее вряд ли можно признать соответствующей точности исходных данных всего расчета.

Поэтому в тех случаях, когда деформируемое кольцо, характеризуемое параметрами c_1 и c_2 , настолько велика, что B достигает предельного значения при α отличном от нуля, вряд ли можно рекомендовать определять величины B с учетом жесткости катушек, характеризуемой параметром m .

Несколько проще должны быть выкладки в том случае, если c_1 и c_2 настолько не велики, а Δ настолько велико, что при максимальном отворе катушек последние соприкасаются с кольцом лишь в районе дуги, ограниченной углами

$$(\alpha - \beta) < \theta < -(\alpha - \beta).$$

Интересно выяснить, с какими выкладками сопряжен учет жесткости катушек при определении B_{\max} в этом случае.

10. В случае, когда отпор катушек настолько велик, что зазор распределяется давления катушек соответствует см. рис. 13, а рис. 14, за пределами полуокружности кольца следует различать всего два участка, а именно:

участок 1, на протяжении которого $0 < \theta < \pi - \beta$, а

$$w_{c_1, c_2} = \frac{1}{\mu^2} \beta_1 - \frac{1}{\mu^2 - 1} \beta_2 \cos \theta, \quad (82)$$

и участок 2, где $\pi - \beta < \theta < \pi$ и

$$w_{c_1, c_2} = \frac{1}{\mu^2} \beta_1 - \frac{1}{\mu^2 - 1} \beta_2 \cos \theta - \frac{1}{\mu^2} f - \frac{\mu^2 - \mu^2}{\mu^2} a_2 - \frac{\mu^2 - \mu^2}{\mu^2 + 8} c_2 \cos 2\theta. \quad (83)$$

Частное решение уравнений (44.5) и (45.5), даваемое равенствами (82) и (83), непрерывно всюду, кроме точки

$$\theta = \gamma = \pi - \beta,$$

где имеет место разрыв непрерывности, определяемый условиями:

$$\left. \begin{aligned} w_{c_1, c_2}(\gamma - 0) &= \frac{1}{\mu^2} \beta_1 + \frac{1}{\mu^2 - 1} \beta_2 \cos \beta; \\ w_{c_1, c_2}(\gamma + 0) &= \frac{1}{\mu^2} \beta_1 + \frac{1}{\mu^2 - 1} \beta_2 \cos \beta - \frac{1}{\mu^2} f - \\ &\quad - \frac{\mu^2 - \mu^2}{\mu^2} a_2 - \frac{\mu^2 - \mu^2}{8 + \mu^2} c_2 \cos 2\beta; \\ w_{c_1, c_2}'(\gamma - 0) &= \frac{1}{\mu^2 - 1} \beta_2 \sin \beta; \\ w_{c_1, c_2}'(\gamma + 0) &= -\frac{1}{\mu^2 - 1} \beta_2 \sin \beta + \frac{\mu^2 - \mu^2}{8 + \mu^2} 2c_2 \sin 2\beta; \\ w_{c_1, c_2}''(\gamma - 0) &= -\frac{1}{\mu^2 - 1} \beta_2 \cos \beta; \\ w_{c_1, c_2}''(\gamma + 0) &= -\frac{1}{\mu^2 - 1} \beta_2 \cos \beta - \frac{\mu^2 - \mu^2}{8 + \mu^2} 4c_2 \cos 2\beta; \\ w_{c_1, c_2}'''(\gamma - 0) &= -\frac{1}{\mu^2 - 1} \beta_2 \sin \beta; \\ w_{c_1, c_2}'''(\gamma + 0) &= -\frac{1}{\mu^2 - 1} \beta_2 \sin \beta - \frac{\mu^2 - \mu^2}{8 + \mu^2} 8c_2 \sin 2\beta. \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Прибавляя к решению, даваемому равенствами (82) и (83), решение, даваемое при $-\gamma < \theta < \gamma$ [см. равенство (42)] зависимо

$$w = \frac{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \gamma \operatorname{ch} \bar{a}_1 \theta - \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \gamma \operatorname{ch} \bar{a}_2 \theta}{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \gamma \operatorname{ch} \bar{a}_1 \gamma - \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \gamma \operatorname{ch} \bar{a}_2 \gamma} [w_1 - w_{c_1, c_2}(\gamma - 0)] - \quad (85)$$

$$-\frac{\operatorname{ch} \bar{a}_1 \gamma \operatorname{ch} \bar{a}_2 \theta - \operatorname{ch} \bar{a}_1 \gamma \operatorname{ch} \bar{a}_3 \theta}{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \gamma \operatorname{ch} \bar{a}_1 \gamma - \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \gamma \operatorname{ch} \bar{a}_2 \gamma} [w_2 - w_{c_1, c_2}(\gamma - 0)]$$

на протяжении же участка $\gamma < \theta < 2\pi - \gamma$ зависимо

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 (\pi - \gamma) \operatorname{ch} \bar{a}_1 (\theta - \pi) - \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 (\pi - \gamma) \operatorname{ch} \bar{a}_2 (\theta - \pi)}{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 (\pi - \gamma) \operatorname{ch} \bar{a}_1 (\pi - \gamma) - \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 (\pi - \gamma) \operatorname{ch} \bar{a}_2 (\pi - \gamma)} \times \\ &\quad \times [w_3 - w_{c_1, c_2}(\gamma + 0)] - \\ &= \frac{\operatorname{ch} \bar{a}_1 (\pi - \gamma) \operatorname{ch} \bar{a}_2 (\theta - \pi) - \operatorname{ch} \bar{a}_1 (\pi - \gamma) \operatorname{ch} \bar{a}_3 (\theta - \pi)}{\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 (\pi - \gamma) \operatorname{ch} \bar{a}_1 (\pi - \gamma) - \bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 (\pi - \gamma) \operatorname{ch} \bar{a}_2 (\pi - \gamma)} \times \\ &\quad \times [-w_4 + w_{c_1, c_2}(\gamma + 0)]. \end{aligned} \right\} \quad (86)$$

получим решение уравнений (44.5) и (45.5), отличающееся должной непрерывностью как самого w_1 , так и всех трех его первых производных, если определяем w_1 и w_1' из условия:

$$w_1''(\gamma) = F_1(\mu_0, \gamma) [w_1 - w_{1,p}(\gamma - 0)] + G_1(\mu_0, \gamma) [w_1' - w_{1,p}'(\gamma - 0)] + w_{1,p}''(\gamma - 0) = w_{1,p}''(\gamma + 0) + F_1(\mu_0, \beta) [w_1 - w_{1,p}(\gamma + 0)] - G_1(\mu_0, \beta) [w_1' - w_{1,p}'(\gamma + 0)]; \quad (87)$$

$$w_1'''(\gamma) = H_1(\mu_0, \gamma) [w_1 - w_{1,p}(\gamma - 0)] + K_1(\mu_0, \gamma) [w_1' - w_{1,p}'(\gamma - 0)] + w_{1,p}'''(\gamma - 0) = w_{1,p}'''(\gamma + 0) - H_1(\mu_0, \beta) [w_1 - w_{1,p}(\gamma + 0)] + K_1(\mu_0, \beta) [w_1' - w_{1,p}'(\gamma + 0)]. \quad (88)$$

Протабулеровав приблизительно к данному конкретному кольцу функции $F_1(\mu_0, \gamma)$; $G_1(\mu_0, \gamma)$; $H_1(\mu_0, \gamma)$ и $K_1(\mu_0, \gamma)$ для различных значений угла γ , определяемого равенством

$$\gamma = \pi - \beta, \quad (89)$$

леммах в пределах

$$\frac{\pi}{2} < \gamma < \pi$$

и подсчитав для соответствующих этим γ значений угла β функции $F_1(\mu, \beta)$; $G_1(\mu, \beta)$; $H_1(\mu, \beta)$ и $K_1(\mu, \beta)$, равно как и функции $w_{1,p}(\gamma \pm 0)$; $w_{1,p}'(\gamma \pm 0)$; $w_{1,p}''(\gamma \pm 0)$ и $w_{1,p}'''(\gamma \pm 0)$ можно при каждом из рассматриваемых частных значений β привести результат решений уравнений (87) и (88) к виду:

$$\begin{cases} w_1 = a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + a_{13} f + a_{14} c_2 + a_{15} c_3, \\ w_1' = a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + a_{23} f + a_{24} c_2 + a_{25} c_3, \end{cases} \quad (90)$$

где a_{ij} будут числа, величина коих у заданного кольца зависит лишь от величины угла β . Вычисляя их для ряда частных значений угла β , можно построить для каждого из a_{ij} интерполяционную кривую, дающую наглядное представление о зависимости рассматриваемого коэффициента от угла β .

Когда это выколнено, можно приступить сначала к определению параметра y_1 , а затем и параметра y_2 .

Параметр y_1 должен быть определен, как то отмечено выше, из уравнения

$$\int_0^{\gamma} \left(\frac{1}{\mu^2} y_1 - \frac{1}{\mu^2 - 1} y_2 \cos \theta \right) d\theta + L_1(\mu_0, \gamma) [w_1 - w_{1,p}(\gamma - 0)] + M(\mu_0, \gamma) [w_1' - w_{1,p}'(\gamma - 0)] + \int_0^{\gamma} \left(\frac{1}{\mu^2} y_1 - \frac{1}{\mu^2 - 1} y_2 \cos \theta - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\mu^2} f - \frac{c_2^2 - \mu^2}{\mu^2} - \frac{\mu^2 - \mu^2}{\mu^2 + 8} c_3 \cos 2\theta \right) d\theta + L_2(\mu_0, \beta) [w_1 - w_{1,p}(\gamma + 0)] - M(\mu_0, \beta) [-w_1' + w_{1,p}'(\gamma + 0)] + \frac{f}{\gamma^2} = y_1 = 0. \quad (91)$$

Определив из этого уравнения y_1 , будем иметь

$$y_1 = a_{11} y_2 + a_{13} f + a_{14} c_2 + a_{15} c_3 \quad (92)$$

где a_{11} коэффициенты, величина коих зависит от β и для всякого β может быть найдена. Определив их, можем путем исключения y_1 из равенств (90), получить

$$\begin{cases} w_1 = \beta_{11} y_2 + \beta_{12} f + \beta_{13} c_2 + \beta_{14} c_3, \\ w_1' = \beta_{21} y_2 + \beta_{22} f + \beta_{23} c_2 + \beta_{24} c_3, \end{cases} \quad (93)$$

Для определения y_2 у нас имеется второе из уравнений (7), в силу которого должно быть

$$\beta_{12} y_2 + \beta_{13} f + \beta_{14} c_2 + \beta_{15} c_3 = -c_2 - c_3 \cos 2\beta. \quad (94)$$

Определив из него y_2 , можем с помощью равенств (9) подсчитать значение R , соответствующее рассматриваемому значению β , а с помощью равенств (86) и (84) соответствующее значение $w(\pi)$.

Построив график, дающий R как функцию от $w(\pi)$, можно по нему легко найти максимальное из тех значений R , при которых имеет место неравенство [см. равенство (11)]

$$w(\pi) = A;$$

этим будет определена величина R_{max} .

Все выкладки, только что изложенные, предполагают, что кольцо плотно соприкасается с катками башни лишь в районе, где $(\pi - \beta) < \theta < (\pi - \beta)$. Необходимо проверить, что при том значении β , которому соответствует найденное R_{max} , имеет место неравенство

$$w(0) < -c_2 - c_3,$$

как того требует условие (45.5).

§ 10. Заключение

В настоящей статье вопрос о влиянии деформируемости первого кольца жестких барабанов башенных артиллерийских установок на диаграмму отпора и величину предельного отпора пружинящих катков боевого яшара рассмотрен подробно с точки зрения предохранения башни от заклинания при взрыве корабля.

Намечены две расчетные схемы, из которых первая, требующая значительно более простых выкладок, чем вторая, предполагает, что диаграмма отпора каждого отдельного катка башни может быть с достаточной точностью представлена прямоугольником рис. 19, где черта σ обозначает состояние крайней точки катка от поверхности вертикального постка боевого ствола башни, а черта Q отпор катка.

Эта расчетная схема изложена в § 6—8 включительно и разработана в двух вариантах. Вариант § 6 основан на интегрировании основных дифференциальных уравнений равновесия кольца в форме бесконечного ряда и может быть рекомендован в том случае, когда жесткость стоек жесткого барабана относительно не велика и соответствующий ряд для радиального перемещения катка сходится быстро. При большой жесткости стоек жесткого барабана ряды для w , полученные в § 6, могут оказаться плохо сходящимися. Поэтому в § 7 замечен второй вариант решения задачи § 6, основанный на разложении w в замкнутом виде. Этот вариант решения задачи § 6 требует разложения меньшей части некоторых комплексных функций и может в некоторых случаях оказаться более простым в вычислительном отношении, чем вариант § 6. В § 8 разобран вопрос о нахождении предельного отпора всей совокупности пружинящих катков боевого щитра, т. е. той величины отпора, при которой зазор в боевом щитре оказывается наибольшим и вертикальный логон башни входит в плотное соприкосновение с жестким барабаном. Все рассуждения выполнены в этом параграфе применительно к выкладкам § 7, но легко могут быть распространены и на расчетную схему § 6.

В § 9 рассмотрена более сложная расчетная схема, относящаяся к случаю, когда диаграмму отпора отдельного катка башни, изображенную на рис. 20, нельзя с достаточной точностью заменить диаграммой рис. 19. Построить диаграмму отпора для всей совокупности пружинящих катков башни с помощью разложения интеграла основных уравнений деформации кольца в форме бесконечного ряда в этом случае неудобно. В § 9 особое внимание обращено на интегрирование этого уравнения в замкнутом виде. Разработанная вычислительная схема основана на использовании нескольких вспомогательных разрезов, относящихся к внутренней части крутового кольца, лежащего на сплошном упругом основании, дающем кольцу радиальный отпор. Она требует табулирования каждый раз особо ряда вспомогательных функций комплексного аргумента и приводит в случае, когда отпор катков достигает своей предельной величины ранее исчисления отпора катков на той полуокружности боевого щитра, куда направлен этот отпор, — к выкладкам настолько сложным, что эту расчетную схему вряд ли можно признать соответствующей точности исходных данных всего расчета. В случае же, когда заклинивание башни под влиянием давлений башни на ее катки происходит уже

после полного освобождения одной половиной кольца от реакций катков, учет увеличения отпора катков, в результате их вдавливания внутрь их гнезд, приводит к выкладкам значительно более простым. Эту расчетную схему можно поэтому рекомендовать

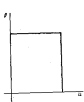


Рис. 20.

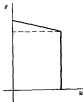
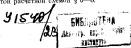


Рис. 21.

для практических расчетов в тех случаях, когда желательно почему-либо принять во внимание, что диаграмма отпора каждого отдельного катка дается не эпором рис. 19, а эпором рис. 21.

В большинстве случаев, однако можно, по-видимому, довольствоваться более простой расчетной схемой § 6—8.



Некоторые вопросы амортизации и стабилизации

22. Основы теории габитографа в применении к районировке заповней свободных затухающих колебаний	397
23. О рациональном методе измерения колебаний испытательной корабельной гребной установки в носовой	399
24. Об оптимальной величине внутреннего сопротивления амортизационных устройств	480
25. Об одном способе уменьшения вынужденной вибрации корабля	491
26. Теория жеромонического стабилизирования одностороннего наклона	516
27. К проекту одностороннего наклона для 400 пассажиров	601

СОДЕРЖАНИЕ

В. В. Екимов, Б. И. Славов. Работы П. Ф. Папковича в области динамических проблем кораблестроения	3
---	---

Раздел I

Некоторые вопросы теории колебаний

1. Об одной форме основных дифференциальных уравнений малых колебаний системы, не имеющих гиростатических членов	19
2. К вопросу об обобщенной формуле Лагранжа Б. Г. Галеркина на случай динамической задачи теории упругости	30
3. Об одном методе разложения ядер характеристикстического оператора	45
4. О выборе начальной заданной главной координаты	47
5. К вопросу о динамической нагрузке	54
6. О действии игольчатых сил на свободный негравитационный стержень	73
7. О неперечных колебаниях трубчатых систем	84
8. Одна задача исследования упругих колебаний стержневыми системами	102
9. О предельных колебаниях бруса равного сопротивления	133
10. Применение метода последовательных приближений к исследованию частот в форме круглых колебаний колебательных элементов	147
11. О круглых колебаниях круглого диска	187
12. Об основной проблеме деформирования упругих	192
13. О колебаниях тупой цепи, закрепленной в двух точках	174
14. Два главы неоконченного курса «Теория колебаний упругих систем»	188

Раздел II

Некоторые вопросы вибрации корабля

15. Обзор развития и современного состояния вопроса о вибрации судов	227
16. Вибрация корабля	262
17. Вибрация корабля	267
18. К вопросу о периоде свободных неперечных колебаний корабля	317
19. Заключение по вопросу о неперечной вибрации судов	325
20. Об упругих колебаниях некоторых судовых переборок	333
21. О свободных колебаниях переборок, состоящих из большого числа отдельных балок, лежащих неперечными в одной или нескольких перекрестных сечениях	371

Раздел IV

Некоторые вопросы динамического расчета корабельных конструкций

28. Элементарное рассмотрение вопроса об изгибе корабля силой подветтного ветра, приложенной к его крайней носовой оконечности	623
29. О действии кратковременного импульса на призматический стержень, свободно плавающий на поверхности воды	630
30. К вопросу об определении коэффициента динамичности для жестких барабанных балочных артиллерийских	646
31. О влиянии начального поджатия пружинящих катушек боевого штыря артиллерийской батареи на чувствительность этой батареи к колебаниям зазора в боевом штыре	677
32. О динамике отпора пружинящих катушек, установленных боевом штыре	683
33. О влиянии деформированности верхнего кольца жесткого барабана на динамике отпора пружинящих катушек боевого штыря балочных артиллерийских	690

Случай 2, когда деформации кольца, характеризуемые параметрами ϵ_1 и ϵ_2 , настолько велики, что для R , удовлетворяющего условию (4), катки баши в сечении $\theta = 0$ плотно соприкасаются с жестким барабаном, и, следовательно, при $\theta = 0$, имеет место условие

$$w(0) > -\epsilon_2 - \epsilon_1 \cos 2\theta. \quad (6)$$

Условием для краткости называть первый из этих случаев, когда равенство (4)

$$w(\pi) = \Delta$$

удовлетворяется при условии (5)

$$w(0) < -\epsilon_2 - \epsilon_1 \cos 2\theta$$

случаев ϵ_1 и ϵ_2 малы; второй же случай, т. е. случай, когда при R , удовлетворяющем условию (4)

$$w(\pi) = \Delta,$$

имеет место неравенство (6)

$$w(0) > \epsilon_2 - \epsilon_1 \cos 2\theta$$

случаев ϵ_1 и ϵ_2 велики.

В случае, когда ϵ_1 и ϵ_2 достаточно малы, в момент полной выборки и бегим штыре зазора, т. е. при $R = R_{\max}$, эпюр загрузки верхнего кольца жесткого барабана реакциями его катков соответствует рис. 14.

В случае, когда ϵ_1 и ϵ_2 достаточно велики, при $R = R_{\max}$ эпюр загрузки кольца реакциями катков соответствует рис. 12. Поэтому оба этих случая необходимо рассмотреть отдельно. Сделать это можно самым как на результатах § 6, так и на результатах § 7. Мы воспользуемся здесь результатами § 7.

2. Случай, когда ϵ_1 и ϵ_2 малы. В случае, когда ϵ_1 и ϵ_2 достаточно малы, в момент когда $R = R_{\max}$, реакции катков баши распределяются вдоль окружности жесткого барабана в соответствии с рис. 14. Поэтому

$$R_{\max} = 2q^2 r \sin \beta; \quad (7)$$

$$w(\pi) = \frac{-q^2 r^2}{E F r^2 + E J + k_{ct} r^2} \frac{\beta (1 + \cos \beta)}{\alpha} + \frac{q^2 r^2}{E J + k_{ct} r^2} \left[\frac{q_{ct}(\pi)}{q^2} + K(\pi, \pi - \beta) - \frac{1}{\cos \beta} \left[\frac{q_{ct}(\pi)}{q^2} + K(\theta, \pi - \beta) \right]_{\theta=\pi-\beta} \right] - \frac{\epsilon_2 + \epsilon_1 \cos 2\theta}{\cos \beta}. \quad (8)$$

$$w(0) = -\frac{q^2 r^2}{E F r^2 + E J + k_{ct} r^2} \frac{\beta (1 + \cos \beta)}{\alpha} + \frac{q^2 r^2}{E J + k_{ct} r^2} \left[\frac{q_{ct}(0)}{q^2} + K(0, \pi - \beta) - \frac{1}{\cos \beta} \left[\frac{q_{ct}(0)}{q^2} + K(\theta, \pi - \beta) \right]_{\theta=\pi-\beta} \right] - \frac{\epsilon_2 + \epsilon_1 \cos 2\theta}{\cos \beta}. \quad (9)$$

Условие (4) выполняется в разрывном виде в этом случае, следовательно, так:

$$-\frac{q^2 r^2}{E F r^2 + E J + k_{ct} r^2} \frac{\beta (1 + \cos \beta)}{\alpha} + \frac{q^2 r^2}{E J + k_{ct} r^2} \left[\frac{q_{ct}(\pi)}{q^2} + K(\pi, \pi - \beta) - \frac{1}{\cos \beta} \left[\frac{q_{ct}(\pi)}{q^2} + K(\theta, \pi - \beta) \right]_{\theta=\pi-\beta} \right] - \frac{\epsilon_2 + \epsilon_1 \cos 2\theta}{\cos \beta} = \Delta, \quad (10)$$

или, что то же,

$$-\frac{q^2 r^2}{E F r^2 + E J + k_{ct} r^2} \frac{\beta (1 + \cos \beta)}{\alpha} + \frac{q^2 r^2}{E J + k_{ct} r^2} \left[\frac{q_{ct}(\pi)}{q^2} + K(\pi, \pi - \beta) \right] \cos \beta - \left[\frac{q_{ct}(\pi)}{q^2} + K(\theta, \pi - \beta) \right]_{\theta=\pi-\beta} = \Delta \cos \beta + \epsilon_2 + \epsilon_1 \cos 2\theta. \quad (11)$$

Если величины $q^2 r^2$, $E F r^2$, $E J$ и $k_{ct} r^2$ известны, то проводя β через разрывные, постепенно увеличивающиеся значения, можно с помощью равенств (10, 7) и (6, 7), подсчитать для всех этих значений левую часть формулы (11), как функцию от β , построить график, дающий функцию

$$A(\beta) = -\frac{q^2 r^2}{E F r^2 + E J + k_{ct} r^2} \frac{\beta (1 + \cos \beta)}{\alpha} + \frac{q^2 r^2}{E J + k_{ct} r^2} \left[\frac{q_{ct}(\pi)}{q^2} + K(\pi, \pi - \beta) \right] \cos \beta - \left[\frac{q_{ct}(\pi)}{q^2} + K(\theta, \pi - \beta) \right]_{\theta=\pi-\beta} \quad (12)$$

как функцию от β , можно затем для определения величины β , определяющего собой согласно формуле (7) значение R_{\max} , построить этот график кривой, дающей $\epsilon_2 + \Delta \cos \beta + \epsilon_1 \cos 2\theta$ как функции от β . Определив таким образом β , удовлетворяющее равенству

$$A(\beta) = \epsilon_2 + \Delta \cos \beta + \epsilon_1 \cos 2\theta, \quad (13)$$

эквивалентному, очевидно, уравнению (11), можно найденное β подставить в формулу (7) и тем определить R_{\max} , соответствующее избранному значению величин ϵ_1 , Δ и ϵ_2 .