Г. Н. ДУБОШИН

НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА

ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ

Г. Н. ДУБОШИН

НЕБЕСНАЯ МЕХАНИКА
ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Допущено Министерством
высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника
для студентов университетов

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

Д 79
531
УДК 521.1 (075.8)

$\frac{2\text{-}6\text{-}2}{33\text{-}68}$

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее, второе издание учебника по небесной механике объединяет в себе два ранее вышедших учебных пособия, а именно «Теория притяжения» (Физматгиз, 1961) и «Небесная механика. Основные задачи и методы» (Физматгиз, 1963) под общим заглавием второй книги.

Накопленный значительный опыт использования этих двух книг в качестве учебников для студентов старших трех курсов Московского государственного университета показал, что книги нуждаются в некоторой переработке, сокращениях и дополнениях. Из книги «Теория притяжения» исключены, как имеющие второстепенное значение, следующие параграфы: в главе I — § 6. Дополнительные замечания о законе тяготения; в главе III — § 1. Притяжение материального гауссова кольца, § 2. Силовая функция притяжения двумерного кольца, и в § 4 главы V — разложение силовой функции сферического слоя и однородного сфероида.

В главе IV добавлены параграфы: § 3. Классификация сферических функций; § 10. Уравнение Ламе. Эллипсоидальные функции; § 11. Произведения Ламе и связь со сферическими функциями, а в главе V — § 7. О разложении силовой функции по функциям Ламе.

Эти дополнения имеют целью ознакомить учащихся с элементами теории эллипсоидальных функций и ее приложениями.

Из второй книги исключено приложение: «Историко-библиографический очерк развития небесной механики», так как автор считает совершенно достаточным его напечатание в издании 1963 г. В настоящее издание включена новая глава, посвященная задаче трех тел, как важнейшей после задачи двух тел из задач небесной механики по ее значению для приложений.

Остальные главы в ряде мест значительно переделаны, частью сокращены, частью дополнены; в некоторых местах изложение материала упрощено (не нарушая строгости), в других местах оно сделано более строгим, и везде автор старался сделать свою книгу соответствующей современному состоянию науки о движении небесных тел, как естественных, так и искусственных.

В настоящем издании книга разделена на четыре части.

Первая часть посвящена изложению теории притяжения и может рассматриваться и как самостоятельный учебник по соответствующему курсу и как необходимое введение к курсу собственно небесной механики.

Остальные три части содержат изложение основ небесной механики и представляют собой учебник по курсам «Теоретическая астрономия» и «Небесная механика».

В настоящем издании книга снабжена многочисленными рисунками и чертежами, которых было мало или совсем не было («Теория притяжения») в первых изданиях.

Наконец, исправлены многочисленные опечатки первых изданий и некоторые недочеты в изложении, происшедшие по вине автора.

ОСНОВНАЯ ЛИТЕРАТУРА ПО НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКЕ

На русском языке:

1. Субботин М. Ф., Курс небесной механики, т. 1, 2-е изд., 1941; т. 2, 1937; т. 3, 1949.
2. Субботин М. Ф., Введение в теоретическую астрономию, «Наука», 1968.
3. Чеботарев Г. А., Аналитические и численные методы небесной механики, «Наука», 1965.
4. Дубошин Г. Н., Введение в небесную механику, ОНТИ, 1938.
5. Дубошин Г. Н., Теория притяжения, Физматгиз, 1961.
6. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Основные задачи и методы, Физматгиз, 1963.
7. Дубошин Г. Н., Небесная механика, Аналитические и качественные методы, «Наука», 1964.
8. Мультон Ф. Р., Введение в небесную механику, перев. с англ., под ред. Г. Н. Дубошина, ОНТИ, 1935.
9. Брауэр Д., Клеменс Дж., Методы небесной механики, перев. с англ., под ред. Г. А. Чеботарева, «Мир», 1964.
10. Пуанкаре А., Лекции по небесной механике, перев. с франц., под ред. Г. Н. Дубошина, «Наука», 1965.
11. Смарт У. М., Небесная механика, перев. с англ., под ред. А. А. Орлова, «Мир», 1965.
12. Шарлье К., Небесная механика, перев. с немецк. под ред. Б. М. Щиголева, «Наука», 1966.
13. Зигель К. А., Лекции по небесной механике, перев. с нем., под ред. Г. Н. Дубошина, «Мир», 1959.
14. Уинтнер А., Аналитические основы небесной механики, перев. с англ., под ред. Г. Н. Дубошина, «Наука», 1967.
15. Штерн Т., Введение в небесную механику, перев. с англ., под ред. В. А. Сарычева, «Мир», 1964.

На иностранных языках:

1. Tisserand F., Traité de mécanique céleste, tt. I—IV, Paris, 1889.
2. Poincaré A., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, tt. I—III, Paris, 1892.
3. Stumpff, Himmelsmechanik, B. I—III, Berlin, 1959—1967.
4. Dziobek, Die Mathematischen Theorien der Planeten-Bewegungen, Berlin, 1888.
5. Andoyer H., Cours de mécanique céleste, tt. 1, 2, Paris, 1923.
6. Finlay-Freundlich E., Celestial Mechanics, London, 1958.
7. Plummer H. C., An introductory treatise on dynamical astronomy, Cambridge, 1918.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ТЕОРИЯ ПРИТЯЖЕНИЯ

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ПРИТЯЖЕНИЯ

§ 1. Закон притяжения Ньютона

1. Отправным пунктом теории притяжения является закон всемирного тяготения И. Ньютона (1643—1727), сформулированный великим ученым в его бессмертном сочинении «Математические начала натуральной философии» (1687 г.) и признающийся до сих пор одним из основных законов природы *).

Согласно этому закону всякие две материальные частицы взаимно притягиваются с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними.

Материальная частица — понятие физическое, под которым подразумевается весьма малое количество какого угодно вещества, газообразного, жидкого или твердого, занимающее весьма малый объем.

Абстрагируя и уточняя это несколько неопределенное понятие, мы придем к механическому понятию материальной точки, как геометрической точки пространства, т. е. объекту, не имеющему измерений, но обладающему конечной массой.

Рассмотрим в обычном евклидовом пространстве две материальные точки M и P, массы которых обозначим соответственно через m и μ, а через Δ — разделяющее их расстояние.

Согласно закону притяжения Ньютона каждая из этих двух материальных точек притягивается к другой с силой, направленной по прямой MP, величина которой определяется формулой

$$F = f\frac{m\mu}{\Delta^2}, \tag{1.1}$$

---

*) Превосходный перевод латинского текста сочинения И. Ньютона на русский язык был выполнен академиком А. Н. Крыловым (1863—1945). См. Собрание трудов А. Н. Крылова, т. VII, изд. АН СССР, 1936 г. Краткое изложение сочинения Ньютона можно найти в книге Г. Н. Дубошина «Небесная механика», Историко-библиографический очерк.

где f — коэффициент пропорциональности, называемый обычно постоянной притяжения (или постоянной тяготения).

Так как размерность силы равна размерности массы, умноженной на размерность ускорения, то размерность коэффициента f определится формулой

$$[f]=m^{-1}l^3t^{-2}.$$

Численное значение постоянной притяжения зависит от выбора основных единиц длины, массы и времени. В системе CGS

$$f=6{,}670\cdot 10^{-8}.$$

Если принять основные астрономические единицы (среднее расстояние Земли от Солнца, масса Солнца, средние солнечные сутки), то f будет иметь следующее численное значение:

$$f=0{,}000295912.$$

Можно, очевидно, выбрать основные единицы и каким-нибудь другим образом; в частности, всегда возможно выбрать основные единицы так, чтобы численное значение постоянной притяжения было равно единице, что удобно для теоретических исследований.

Вообще, выбор основных единиц определяется условиями рассматриваемой задачи и в различных задачах осуществляется по-разному, подчиняясь обычно требованию, чтобы величины, имеющие в данной задаче основное значение, выражались и не очень большими и не очень маленькими числами.

В то же время астрономические величины определяются из наблюдений и измерений, точность которых постоянно возрастает с течением времени, вследствие чего и числовое значение постоянной притяжения f не остается неизменным и делается все более и более точным. Поэтому приведенные выше числа являются приближенными и всегда могут быть заменены более точными и более современными.

В нашей книге основные единицы большей частью оставляются произвольными и численное значение постоянной f остается также неопределенным.

Вместо постоянной притяжения f в астрономии часто употребляется другая величина, называемая постоянной Гаусса, связанная с f формулой

$$f=k^2.$$

В основных астрономических единицах

$$k=0{,}01720209895.$$

Заметим, что если за единицу времени принять вместо средних солнечных суток — $1/k=58{,}13244087$ средних солнечных суток, то коэффициент пропорциональности в формуле закона Ньютона сделается равным единице.

2. Формула (1.1) совершенно симметрична относительно точек M и P, и роли этих обеих точек, очевидно, также совершенно одинаковы. Однако нам будет удобнее разграничить роли этих точек, а именно, мы будем считать, что центром притяжения является точка M, которую будем называть притягивающей, а точка P, которую будем называть притягиваемой, является объектом приложения силы притяжения. Таким образом, мы будем рассматривать силу притяжения как вектор, приложенный к точке P и направленный к точке M по прямой PM.

Для сокращения дальнейших формул мы будем в ряде случаев предполагать, что $\mu=1$, т. е. будем тогда рассматривать притяжение, которое оказывает материальная точка M на точку P единичной массы.

В этом случае вместо формулы (1.1) будем иметь

$$F=\frac{fm}{\Delta^2}. \tag{1.2}$$

Формула (1.2), так же как и формула (1.1), не зависит от выбора системы координат, однако в приложениях обычно приходится рассматривать составляющие (или компоненты) силы притяжения по каким-либо определенным направлениям в пространстве, что удобнее всего сделать при помощи метода координат.

Рассмотрим некоторую систему прямоугольных декартовых координат с началом в произвольной точке пространства O и с неизменными направлениями осей. Обозначим координаты притягиваемой точки P через x, y, z, а координаты притягивающей точки M через x', y', z'. Тогда

$$\Delta=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2},$$

а направляющие косинусы α, β, γ силы притяжения, т. е. направляющие косинусы вектора, приложенного к точке P, определятся формулами

$$\alpha=\frac{x'-x}{\Delta}, \quad \beta=\frac{y'-y}{\Delta}, \quad \gamma=\frac{z'-z}{\Delta}.$$

Обозначая составляющие силы притяжения по осям координат (или проекции этой силы на координатные оси) соответственно через X, Y, Z, мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} X &= \alpha F = fm\frac{x'-x}{\Delta^3}, \\ Y &= \beta F = fm\frac{y'-y}{\Delta^3}, \\ Z &= \gamma F = fm\frac{z'-z}{\Delta^3}. \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Рассматривая в этих формулах x', y', z' как величины постоянные, а x, y, z как текущие координаты, мы получаем три функции от координат точки P, определяющие величину и направление силы притяжения, действующей на материальную точку единичной массы.

Действительно, формулы (1.3) дают

$$F = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$$

и

$$\alpha = \frac{X}{F}, \quad \beta = \frac{Y}{F}, \quad \gamma = \frac{Z}{F}.$$

Иными словами, формулы (1.3) определяют поле сил притяжения, вызываемое (или возбуждаемое) наличием притягивающей точечной массы, находящейся в заданной точке пространства M.

3. Зная величины (1.3), можно также найти проекцию силы притяжения на любое заданное направление. Действительно, пусть дано некоторое направление L, т. е. заданы в системе $(Oxyz)$ его направляющие косинусы

$$\alpha' = \cos(L, x), \quad \beta' = \cos(L, y), \quad \gamma' = \cos(L, z).$$

Обозначая через F_L проекцию силы F на направление L, мы имеем

$$F_L = F\cos(F, L),$$

но

$$\cos(F, L) = \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma',$$

а поэтому при помощи формул (1.3) найдем

$$F_L = \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z. \tag{1.4}$$

В частности, по формуле (1.4) можем вычислить проекцию силы притяжения, действующей на точку P, на направление радиуса-вектора r этой точки. В этом случае

$$\alpha' = \frac{x}{r}, \quad \beta' = \frac{y}{r}, \quad \gamma' = \frac{z}{r} \qquad \left(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\right),$$

и мы имеем

$$F_r = \frac{1}{r}(xX + yY + zZ).$$

§ 2. Силовая функция

1. Заметим теперь, что величины (1.3), рассматриваемые, как было условлено, как функции координат точки P, являются частными производными от некоторой функции координат этой точки.

Действительно, введем в рассмотрение следующую функцию:

$$U\,(x,\,y,\,z) = U(P) = \frac{fm}{\Delta}. \tag{1.5}$$

Дифференцируя (1.5) частным образом по x, например, мы получим

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{fm}{\Delta^2}\,\frac{\partial \Delta}{\partial x},$$

но

$$\frac{\partial \Delta}{\partial x} = -\frac{x' - x}{\Delta},$$

вследствие чего

$$X = \frac{\partial U}{\partial x},\quad Y = \frac{\partial U}{\partial y};\quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{1.6}$$

Теперь формула (1.4) дает*)

$$F_L = \alpha'\,\frac{\partial U}{\partial x} + \beta'\,\frac{\partial U}{\partial y} + \gamma'\,\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial L}$$

и, в частности,

$$F_r = \frac{1}{r}\left(x\,\frac{\partial U}{\partial x} + y\,\frac{\partial U}{\partial y} + z\,\frac{\partial U}{\partial z}\right).$$

Таким образом, функция U определяет однозначно составляющие силы притяжения, действующие на точку P единичной массы, а следовательно, и все силовое поле, возбуждаемое притягивающей точечной массой m.

По этой причине U называется силовой функцией массы m, или функцией сил, или еще потенциалом точечной массы m **).

2. Отметим простые свойства силовой функции, непосредственно вытекающие из формул (1.5) и (1.6):

---

*) $\frac{\partial U}{\partial L}$ называется в математическом анализе производной от функции точки $U(P)$ по направлению L.

**) Собственно говоря, потенциал массы (как следует из его физического определения) есть силовая функция, взятая с обратным знаком. В литературе, однако, часто встречается это неточное название для силовой функции. В этой книге используется более правильная терминология.

Определение понятия «потенциал» см. в любом учебнике физики или теоретической механики.

1) силовая функция $U(P)$ конечна, однозначна и непрерывна во всем пространстве, за исключением точки M, где U обращается в бесконечность;

2) когда точка P неограниченно удаляется от точки M, функция U, оставаясь положительной, безгранично убывает, притом так, что

$$\lim_{\Delta\to\infty}(\Delta\cdot U)=\lim_{r\to\infty}(rU)=fm$$

($\lim(r/\Delta)=1$, когда $P\to\infty$);

3) все частные производные любого порядка от функции U по координатам точки P (и по любому другому направлению) также суть функции конечные, однозначные и непрерывные во всем пространстве, за исключением точки M, где все они обращаются в бесконечность*);

4) когда точка $P\to\infty$, то любая частная производная функции U имеет своим пределом нуль, причем, в частности,

$$\lim_{r\to\infty}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial x}\right)=\lim_{r\to\infty}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial y}\right)=\lim_{r\to\infty}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial z}\right)=-fm$$

(т. е. функция U регулярна на бесконечности);

5) во всем пространстве, за исключением точки M, функция U удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0, \tag{1.7}$$

которое называется уравнением Лапласа.

Для проверки последнего свойства вычислим вторые частные производные от функции U. Мы имеем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\frac{\partial X}{\partial x}=fm\left\{-\frac{1}{\Delta^3}+\frac{3(x'-x)^2}{\Delta^5}\right\},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\frac{\partial Y}{\partial y}=fm\left\{-\frac{1}{\Delta^3}+\frac{3(y'-y)^2}{\Delta^5}\right\},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\frac{\partial Z}{\partial z}=fm\left\{-\frac{1}{\Delta^3}+\frac{3(z'-z)^2}{\Delta^5}\right\},$$

откуда находим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\equiv 0,$$

что и требовалось показать.

Если мы введем в рассмотрение оператор Лапласа, полагая

$$\nabla=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

---

*) Это свойство легко проверяется путем непосредственного дифференцирования функции U.

то уравнение (1.7) может быть написано более кратко в виде

$$\nabla U = 0. \qquad (1.7')$$

С другой стороны,

$$\nabla U = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = \operatorname{div} F,$$

что называется в механике расходимостью (или дивергенцией) вектора F.

Отметим еще, что геометрическое место точек пространства, в которых силовая функция U имеет одно и то же значение C, есть поверхность, определяемая уравнением

$$U(x,\ y,\ z) = C$$

и называемая поверхностью уровня (или изопотенциальной поверхностью). В рассматриваемом здесь случае силовой функции притягивающей точечной массы m поверхность уровня есть, очевидно, сфера с центром в точке M.

3. Примечание. Мы условились разграничить роли материальных точек M и P, считая, что точка M фиксирована, а точка P может занимать какое угодно положение в пространстве. Поэтому силовая функция U является функцией координат точки P (или функцией точки P).

Однако в некоторых случаях необходимо рассматривать обе точки как равноправные.

Обозначая тогда эти точки буквами M_1 и M_2, а их массы через m_1, m_2, введем в рассмотрение функцию, определяемую формулой

$$U = f\frac{m_1 m_2}{\Delta}, \qquad (1.5')$$

где

$$\Delta = \overline{M_1 M_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Таким образом, U является функцией всех шести координат двух точек M_1 и M_2, так что

$$U = U(x_1,\ y_1,\ z_1,\ x_2,\ y_2,\ z_2).$$

Нетрудно видеть, что проекции на координатные оси сил притяжения, действующих на точки M_1 и M_2, определятся соответственно формулами

$$X_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = f m_1 m_2 \frac{x_2 - x_1}{\Delta^3}, \quad Y_1 = \ldots, \quad Z_1 = \ldots,$$

$$X_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2} = f m_1 m_2 \frac{x_1 - x_2}{\Delta^3}, \quad Y_2 = \ldots, \quad Z_2 = \ldots$$

Поэтому функция U, определяемая формулой (1.5′), называется силовой функцией взаимного притяжения двух точечных масс m_1 и m_2, или, просто, силовой функцией двух масс.

Силовая функция двух масс, очевидно, всегда положительна *), конечна, непрерывна и однозначна при любых не совпадающих положениях точек M_1 и M_2. Если эти точки стремятся к одной и той же точке пространства M, так что $M_1 \to M$ и $M_2 \to M$, то функция U неограниченно возрастает.

Если, наоборот, точки M_1 и M_2 неограниченно удаляются друг от друга, так что $\Delta \to \infty$, то U стремится к нулю, причем

$$\lim_{\Delta \to \infty} (\Delta \cdot U) = \lim_{\Delta \to \infty} \left| \Delta^2 \frac{\partial U}{\partial x_1} \right| = \ldots = f m_1 m_2.$$

§ 3. Силовая функция системы материальных точек

1. Рассмотрим теперь систему, состоящую из конечного числа n материальных точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$, которые будем считать притягивающими центрами. Пусть m_i, x'_i, y'_i, z'_i — масса и координаты в той же системе $Oxyz$ точки M_i $(i=1, 2, \ldots, n)$. Пусть, далее $P(x, y, z)$ есть материальная точка единичной массы $(\mu=1)$, не совпадающая ни с одной из точек M_i. Положим

$$\Delta_i = \sqrt{(x-x'_i)^2 + (y-y'_i)^2 + (z-z'_i)^2}$$

и рассмотрим притяжение, испытываемое точкой P со стороны заданной системы материальных точек M_i.

Согласно § 1 точка M_i притягивает точку P с силой, проекции которой X_i, Y_i, Z_i на координатные оси суть

$$f m_i \frac{x'_i - x}{\Delta_i^3}, \quad f m_i \frac{y'_i - y}{\Delta_i^3}, \quad f m_i \frac{z'_i - z}{\Delta_i^3}.$$

Следовательно, проекции равнодействующей всех сил притяжения, действующих на точку P, определятся формулами

$$\left.\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^{n} X_i = f \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i (x'_i - x)}{\Delta_i^3}, \\ Y &= \sum_{i=1}^{n} Y_i = f \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i (y'_i - y)}{\Delta_i^3}, \\ Z &= \sum_{i=1}^{n} Z_i = f \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i (z'_i - z)}{\Delta_i^3}. \end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

---

*) Имея в виду конкретные задачи механики, мы будем предполагать массы материальных точек величинами положительными, а их координаты — вещественными числами. Впрочем, многие результаты теории притяжения будут справедливы и в более общих случаях.

Подобным же образом проекция этой равнодействующей на произвольно заданное направление $L(\alpha', \beta', \gamma')$ будет равна

$$F_L = \sum_{i=1}^{n} F_{iL} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha' X_i + \beta' Y_i + \gamma' Z_i).$$

Величины, определяемые формулами (1.8), рассматриваемые как функции координат точки P (координаты притягивающих центров M_i считаются постоянными), являются частными производными от некоторой функции $U(P)$, которую снова назовем силовой функцией (силовой функцией системы n точечных масс).

Действительно, полагая

$$U = \sum_{i=1}^{n} U_i, \quad U_i = \frac{fm_i}{\Delta_i}, \tag{1.9}$$

мы найдем так же, как в § 1,

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad F_L = \frac{\partial U}{\partial L}.$$

Силовая функция системы материальных точек M_i (1.9) обладает свойствами, аналогичными свойствам силовой функции одного притягивающего центра. Нужно только иметь в виду, что свойства 1) и 3) остаются в силе всюду, кроме точек M_i, так как в каждой из этих точек функции U, X, Y, Z терпят разрывы, обращаясь в бесконечность.

Свойство 2) сохраняется, но теперь

$$\lim_{r\to\infty} (rU) = \sum_{i=1}^{n} \lim_{r\to\infty} (rU_i) = f \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Точно так же в свойстве 4) имеем

$$\lim_{r\to\infty} (r^2 U) = \ \ldots \ = -f \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

Свойство 5), очевидно, также сохраняется, так как

$$\nabla U = \sum_{i=1}^{n} \nabla U_i = 0,$$

т. е. силовая функция системы притягивающих центров также удовлетворяет уравнению Лапласа во всем пространстве, за исключением точек M_i.

Поверхность уровня

$$U(x, y, z) = C,$$

даже для системы, состоящей только из двух притягивающих центров, имеет весьма сложный вид, но обладает одним весьма простым свойством, которое можно сформулировать следующим образом:

Направление равнодействующей сил притяжения, действующих на точку P, совпадает с направлением нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку.

Действительно, направляющие косинусы нормали к поверхности $U(x, y, z)=C$ суть *)

$$\frac{1}{N}\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{1}{N}\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{1}{N}\frac{\partial U}{\partial z},$$

где

$$N=\pm\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2},$$

а направляющие косинусы равнодействующей F всех сил притяжения суть

$$\frac{X}{F}, \quad \frac{Y}{F}, \quad \frac{Z}{F},$$

где

$$F=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2},$$

так что свойство очевидно.

2. Рассмотрим теперь систему свободных материальных точек $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i=1, 2, \ldots)$, взаимно притягивающихся по закону Ньютона. Тогда каждая точка M_i этой системы притягивается ко всем остальным точкам, и составляющие равнодействующей сил притяжения, действующих на M_i, определятся формулами

$$\left.\begin{aligned} X_i&=f\sum_{j=1}^{n}{}' m_i m_j \frac{x_j-x_i}{\Delta_{ij}^3},\\ Y_i&=f\sum_{j=1}^{n}{}' m_i m_j \frac{y_j-y_i}{\Delta_{ij}^3},\\ Z_i&=f\sum_{j=1}^{}{}' m_i m_j \frac{z_j-z_i}{\Delta_{ij}^3}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.10)$$

где

$$\Delta_{ij}=\sqrt{(x_i-x_j)^2+(y_i-y_j)^2+(z_i-z_j)^2},$$

есть взаимное расстояние между точками M_i и M_j, а знак «штрих» при знаке суммы указывает, что при суммировании должен быть пропущен член, для которого $j=i$.

---

*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 1 (любое издание).

Полагая теперь

$$U = \frac{1}{2} f \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \qquad (1.11)$$

мы легко убедимся, что

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}, \quad Y_i = \frac{\partial U}{\partial y_i}, \quad Z_i = \frac{\partial U}{\partial z_i}.$$

Таким образом, функция U определяет все силы притяжения, действующие в системе материальных точек и поэтому называется силовой функцией системы.

Силовая функция (1.11) системы свободных материальных точек принципиально отличается от силовой функции (1.9) системы притягивающих центров. В самом деле, функция (1.9) зависит только от трех координат точки P, так как координаты притягивающих центров рассматриваются в формуле (1.9) как величины постоянные. Наоборот, функция (1.11) содержит $3n$ координат, которые все являются независимыми переменными, а постоянными величинами в ее выражении являются только массы точек системы.

Но вместе с тем функции (1.9) и (1.11) имеют и некоторые общие черты, главной из которых является независимость от выбора системы координат, а также то, что и та и другая функции полностью определяют силовое поле, обусловленное наличием притягивающих масс.

Наконец, что также весьма существенно, каждая из этих функций есть простая алгебраическая функция от прямоугольных декартовых координат притягиваемых точек.

Однако последнее свойство может исчезнуть при переходе к каким-либо другим координатам.

§ 4. Цилиндрические и сферические координаты

В приложениях часто приходится пользоваться вместо прямоугольных координат какими-нибудь другими, часто криволинейными, координатами. Наиболее употребительными являются полярные координаты — цилиндрические и сферические, которые мы здесь и рассмотрим.

1. Введем сначала вместо прямоугольных координат в плоскости xy полярные координаты ρ и v, определяемые формулами преобразования

$$x = \rho \cos v, \quad y = \rho \sin v,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2, \quad v = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

и оставляя третью прямоугольную координату, аппликату, неизмененной.

Тогда взаимные расстояния определятся формулами

$$\Delta_i^2 = \rho^2 + \rho_i'^2 - 2\rho\rho_i' \cos(v - v_i') + (z - z_i')^2,$$
$$\Delta_{ij}^2 = \rho_i^2 + \rho_j^2 - 2\rho_i\rho_j \cos(v_i - v_j) + (z_i - z_j)^2,$$

и силовые функции (1.9) и (1.11) уже не будут алгебраическими относительно полярных углов.

Зная частные производные от U по полярным координатам ρ и v, мы можем найти проекции силы притяжения на некоторые специально выбранные направления.

Действительно, рассмотрим составляющую силы притяжения F_ρ, действующей на точку P, по направлению проекции радиуса-вектора этой точки на плоскость xy и составляющую F_T по направлению, перпендикулярному к этой проекции и лежащему в плоскости xy.

Согласно предыдущему, будем иметь

$$F_\rho = X\cos(\rho, x) + Y\cos(\rho, y) + Z\cos(\rho, z),$$
$$F_T = X\cos(T, x) + Y\cos(T, y) + Z\cos(T, z).$$

Но очевидно, что

$$\cos(\rho, x) = \frac{x}{\rho} = \frac{\partial\rho}{\partial x}, \quad \cos(T, x) = -\frac{y}{\rho} = \rho\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\cos(\rho, y) = \frac{y}{\rho} = \frac{\partial\rho}{\partial y}, \quad \cos(T, y) = \frac{x}{\rho} = \rho\frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\cos(\rho, z) = 0, \quad \cos(T, z) = 0.$$

С другой стороны,

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial\rho}\cos(\rho, x) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial v}\cos(T, x),$$
$$Y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial\rho}\cos(\rho, y) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial v}\cos(T, y),$$

откуда немедленно получим

$$\left.\begin{aligned} F_\rho &= X\cos(\rho, x) + Y\cos(\rho, y) = \frac{\partial U}{\partial\rho}, \\ F_T &= X\cos(T, x) + Y\cos(T, y) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial v}. \end{aligned}\right\} \qquad (1.12)$$

Точно так же для случая системы взаимно притягивающихся точек имеем

$$F_{i\rho} = \frac{\partial U}{\partial\rho_i}, \quad F_{iT} = \frac{1}{\rho_i}\frac{\partial U}{\partial v_i}.$$

2. Рассмотрим теперь вместо прямоугольных декартовых координат полярные сферические r, λ, θ, определяемые формулами преобразования

$$x = r\cos\lambda\sin\theta, \quad y = r\sin\lambda\sin\theta, \quad z = r\cos\theta,$$
$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 + z^2, \quad \rho^2 = x^2 + y^2,$$
$$\lambda = \operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \quad \theta = \operatorname{arc\,tg}\frac{\rho}{z},$$

так что r есть радиус-вектор точки, λ — ее долгота и θ — дополнение широты до 90°.

Расстояния между точками выразятся следующим образом:

$$\Delta_i^2 = r^2 + r_i^2 - 2rr_i\cos\gamma_i,$$

где

$$\cos\gamma_i = \cos\theta\cos\theta_i + \sin\theta\sin\theta_i\cos(\lambda - \lambda_i)$$

и, аналогично,

$$\Delta_{ij}^2 = r_i^2 + r_j^2 - 2r_ir_j\cos\gamma_{ij},$$

где

$$\cos\gamma_{ij} = \cos\theta_i\cos\theta_j + \sin\theta_i\sin\theta_j\cos(\lambda_i - \lambda_j).$$

Таким образом, силовая функция, а также составляющие силы притяжения будут функциями сферических координат. Нетрудно выразить составляющие силы через частные производные силовой функции по сферическим координатам. В самом деле, мы имеем

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x},$$
$$Y = \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y},$$
$$Z = \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial z} + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial z}.$$

Введем теперь в рассмотрение следующие три составляющие силы притяжения F, действующей на точку P: составляющую F_r по радиусу-вектору r точки; составляющую F_T по направлению, перпендикулярному к r и лежащему в плоскости, перпендикулярной к оси Oz и составляющую F_W по направлению, перпендикулярному к r и лежащему в плоскости, проходящей через ось Oz.

Направляющие косинусы этих трех взаимно перпендикулярных направлений в системе $Oxyz$ будут:

$$\cos(r,\ x)=\frac{x}{r}=\frac{\partial r}{\partial x};\quad \cos(r,\ y)=\frac{y}{r}=\frac{\partial r}{\partial y};\quad \cos(r,\ z)=\frac{z}{r}=\frac{\partial r}{\partial z};$$

$$\cos(T,\ x)=-\frac{y}{\rho}=\rho\frac{\partial\lambda}{\partial x};\quad \cos(T,\ y)=\frac{x}{\rho}=\rho\frac{\partial\lambda}{\partial y};\quad \cos(T,\ z)=0;$$

$$\cos(W,\ x)=\frac{xz}{r\rho}=r\frac{\partial\theta}{\partial x};\quad \cos(W,\ y)=\frac{yz}{r\rho}=r\frac{\partial\theta}{\partial y};$$

$$\cos(W,\ z)=-\frac{\rho}{r}=r\frac{\partial\theta}{\partial z}.$$

Используя эти и предыдущие формулы, найдем без труда

$$\left.\begin{aligned} F_r&=X\cos(r,\ x)+Y\cos(r,\ y)+Z\cos(r,\ z)=\frac{\partial U}{\partial r},\\ F_T&=X\cos(T,\ x)+Y\cos(T,\ y)+Z\cos(T,\ z)=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\lambda},\\ F_W&=X\cos(W,\ x)+Y\cos(W,\ y)+Z\cos(W,\ z)=\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}.\end{aligned}\right\}\qquad(1.13)$$

Для системы свободных материальных точек имеем аналогично

$$F_{ir}=\frac{\partial U}{\partial r_i},\quad F_{iT}=\frac{1}{r_i\sin\theta_i}\frac{\partial U}{\partial\lambda_i},\quad F_{iW}=\frac{1}{r_i}\frac{\partial U}{\partial\theta_i}.$$

Нетрудно вычислить частные производные, входящие в формулы (1.12) и (1.13). Для случая системы свободных материальных точек имеем:

$$\frac{\partial U}{\partial\rho_i}=-fm_i{\sum_{j=1}^{n}}{}'\,m_j\frac{\rho_i-\rho_j\cos(v_i-v_j)}{\Delta_{ij}^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial v_i}=-fm_i\rho_i{\sum_{j=1}^{n}}{}'\,m_j\rho_j\frac{\sin(v_i-v_j)}{\Delta_{ij}^3},$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial r_i}=-fm_i{\sum_{j=1}^{n}}{}'\,m_j\frac{r_i-r_j\cos\gamma_{ij}}{\Delta_{ij}^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial\lambda_i}=-fm_ir_i\sin\theta_i{\sum_{j=1}^{n}}{}'\,m_jr_j\sin\theta_j\frac{\sin(\lambda_i-\lambda_j)}{\Delta_{ij}^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial\theta_i}=-fm_ir_i{\sum_{j=1}^{n}}{}'\,m_jr_j\frac{\sin\theta_i\cos\theta_j-\cos\theta_i\sin\theta_j(\lambda_i-\lambda_j)}{\Delta_{ij}^3},$$

§ 5. Притяжение материальной точки материальным телом

До сих пор мы рассматривали силу притяжения, с которой система конечного числа изолированных материальных точек действует на материальную точку единичной массы. Теперь мы будем рассматривать более сложные случаи, когда притягивающая материальная система состоит из бесчисленного множества материальных частиц (материальных точек), т. е. представляет собой непрерывно протяженное материальное тело.

1. Рассмотрим некоторое материальное тело T (твердое, жидкое или газообразное*)), занимающее определенную область пространства D. Эта область D может быть ограничена одной или несколькими замкнутыми поверхностями, т. е. может быть как односвязной, так и многосвязной. В последнем случае тело T будет иметь внутри себя пустые (т. е. не заполненные материей) полости.

Отнесем тело T к некоторой декартовой системе прямоугольных координат $Oxyz$ с началом в произвольно выбранной точке O и с неизменными направлениями осей. Эта система координат может быть, в частности, неизменно связана с телом, но в общем случае остается совершенно произвольной.

Пусть $M(x', y', z')$ есть какая-либо точка, принадлежащая области D или ее границе и составляющая, таким образом, часть тела T. Обозначим через $\delta(M)=\delta(x', y', z')$ пространственную плотность материи, образующей рассматриваемое тело, в точке M. Если тело однородно, то $\delta=\text{const}$, а вообще $\delta(M)$ есть некоторая функция точки M, определенная в области D и на ее границе, где по своему смыслу она неотрицательна и однозначна. Мы будем предполагать, сверх того, что функция $\delta(M)$ интегрируема в области D, или даже, что она непрерывна в этой области.

Пусть, далее, $P(x, y, z)$ есть любая точка пространства, в которой помещена материальная точка единичной массы. Наша задача заключается теперь в определении величины и направления силы притяжения, с которой данное материальное тело действует на материальную точку P или, иначе говоря, в определении силового поля, вызываемого (или возбуждаемого) наличием тела.

Чтобы определить силу притяжения тела T на точку P, нужно применить обычный прием интегрального исчисления, разбивая мысленно область D на весьма большое число весьма малых областей, любую из которых будем называть элементарной областью или элементарным объемом.

---

*) Независимо от физического состояния тела мы будем предполагать, что его частицы не перемещаются относительно друг друга, т. е. что тело может быть рассматриваемо как абсолютно твердое.

Такое разбиение можно произвести, очевидно, бесчисленным множеством способов, например, воображая три семейства плоскостей соответственно параллельных координатным плоскостям. Тогда элементарные области будут прямоугольными параллелепипедами с ребрами, параллельными координатным осям.

Пусть M — какая-либо точка, принадлежащая элементарной области, объем которой обозначим через $d\tau$. Вообразим, что элементарный объем заполнен однородной материей с плотностью $\delta(x', y', z')$. Тогда

$$dm = \delta\, d\tau$$

будем называть элементом массы тела T.

Заметим, что если элементарными областями являются параллелепипеды, то

$$d\tau = dx'\, dy'\, dz'.$$

Так как элементарные области предполагаются имеющими весьма малый объем и плотность $\delta(M)$ всюду конечна в области, занимаемой телом T, то элемент массы можно рассматривать как материальную точку, помещенную в точке M и обладающую массой dm. Эта материальная точка притягивает материальную точку P единичной массы с силой, проекции которой на координатные оси будут соответственно

$$f\frac{x'-x}{\Delta^3}\,dm,\quad f\frac{y'-y}{\Delta^3}\,dm,\quad f\frac{z'-z}{\Delta^3}\,dm.$$

Заменяя каждый элементарный объем подобной же материальной точкой, мы получим систему конечного (но очень большого!) числа фиксированных материальных точек, каждая из которых притягивает точку P. Проекции равнодействующей всех сил притяжения, действующих на точку P, согласно § 3 будут суммами весьма большого числа слагаемых такого же вида.

Переходя затем к пределу в предположении, что число элементарных областей неограниченно возрастает, а объем каждой элементарной области неограниченно уменьшается, согласно принципам интегрального исчисления мы перейдем от конечных сумм к определенным интегралам, взятым по всей области D.

Обозначая полученные таким образом проекции силы притяжения тела T на точку P через $X(x, y, z)$, $Y(x, y, z)$, $Z(x, y, z)$, мы имеем

$$\left.\begin{aligned} X(x, y, z) &= f\iiint\limits_{(D)} \frac{\delta(x', y', z')\cdot(x'-x)}{\Delta^3}\,d\tau,\\ Y(x, y, z) &= f\iiint\limits_{(D)} \frac{\delta(x', y', z')\cdot(y'-y)}{\Delta^3}\,d\tau,\\ Z(x, y, z) &= f\iiint\limits_{(D)} \frac{\delta(x', y', z')\cdot(z'-z)}{\Delta^3}\,d\tau. \end{aligned}\right\} \qquad (1.14)$$

В последующем мы часто будем писать эти и подобные им формулы более кратко, например, в виде

$$X = f \iiint\limits_{(D)} \frac{\delta(x'-x)}{\Delta^3} d\tau,$$

или даже, заменяя три знака интеграла одним, следующим образом:

$$X = f \int\limits_{(D)} \frac{x'-x}{\Delta^3} dm.$$

Тройные интегралы в этих формулах распространены на всю область D, занимаемую притягивающей материей, и для их вычисления необходимо знать форму тела T и его положение в системе $Oxyz$. Координаты притягиваемой точки P остаются постоянными в процессе интегрирования, а поэтому составляющие силы притяжения суть некоторые функции точки P.

2. Рассмотрим теперь, по аналогии с предыдущим, функцию от координат точки P, определяемую формулой

$$U(x, y, z) = f \iiint\limits_{(D)} \frac{\delta(x', y', z')\, d\tau}{\Delta} = f \int\limits_{(D)} \frac{dm}{\Delta}, \qquad (1.15)$$

где областью интегрирования является та же область D, что и в формулах (1.14).

Предположим сначала, что точка P является внешней для тела T, т. е. не составляет часть его массы.

Далее, допустим, что область D конечна и что функция $\delta(M)$ непрерывна всюду в области D. Тогда подынтегральная функция в формуле (1.15) непрерывна всюду (по условию Δ не обращается в нуль нигде в области D) в области интегрирования и интеграл является собственным.

Следовательно, при дифференцировании функции U по x, y, z мы можем применить правило дифференцирования определенного интеграла по параметру, каковым и является соответствующая координата точки P, входящая под знаком интеграла в расстояние Δ, определяемое формулой

$$\Delta = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}.$$

Применяя теперь правило дифференцирования интеграла, имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = f \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{(D)} \frac{dm}{\Delta} = f \int\limits_{(D)} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\Delta}\right) dm = f \int\limits_{(D)} \frac{x'-x}{\Delta^3} dm = X,$$

так что будем иметь

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (1.16)$$

т. е. составляющие силы притяжения, действующей на точку P, равны частным производным от силовой функции тела по координатам этой точки. Очевидно, что, как и ранее, составляющая силы притяжения тела по любому направлению $L(\alpha', \beta', \gamma')$ будет равна производной от функции точки U по направлению L и определится формулой

$$F_L = \frac{\partial U}{\partial L} = \alpha' \frac{\partial U}{\partial x} + \beta' \frac{\partial U}{\partial y} + \gamma' \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (1.16')$$

Следует отметить, что справедливость формул (1.16) и (1.16′) установлена пока только для случая, когда точка P является внешней точкой для тела T. Но в следующей главе дополнительно будет доказано, что эти формулы остаются справедливыми и для того случая, когда точка P находится внутри тела, так что эти формулы пригодны во всем пространстве.

Итак, функция U полностью определяет величину и направление силы притяжения, действующей на точку P и вызываемой присутствием тела T.

Поэтому будем называть функцию U, так же как и в предыдущих параграфах, силовой функцией тела T, или функцией сил, или (хотя и не совсем правильно!) гравитационным потенциалом тела T, или, просто, потенциалом тела.

3. Выражение силовой функции, так же как и составляющих силы притяжения, зависит от формы тела, от его внутреннего строения, а также от положения тела относительно избранной системы координат.

Действительно, внутреннее строение тела определяется заданием функции $\delta(x', y', z')$, явно входящей под знак интеграла, а форма и положение тела определяют область интегрирования D, т. е., в конечном счете, значения пределов определенного интеграла в формулах (1.14) и (1.15).

Положение и ориентация тела относительно осей координат могут быть определены заданием координат какой-либо выбранной точки тела и тремя эйлеровыми углами, определяющими ориентацию собственной системы осей, неизменно связанных с телом, с началом в упомянутой точке. Поэтому и функция U и составляющие силы притяжения X, Y, Z, являясь функциями от координат x, y, z точки P, зависят еще, вообще, от шести параметров, определяющих положение и ориентацию тела в системе координат $Oxyz$.

Заметим, что за упомянутые параметры можно взять (но не обязательно!) координаты центра инерции тела и эйлеровы углы главных центральных осей инерции.

Если, как это часто случается, за систему $Oxyz$ принята собственная система координат, то выражение силовой функции не содержит параметров положения и ориентации и зависит только от параметров, определяющих форму и строение тела (кроме, само собой разумеется, координат притягиваемой точки P).

Для конкретного определения силового поля, возбуждаемого телом T, нужно вычислить или три интеграла (1.14) или один-единственный интеграл (1.15). Если бы эти интегралы всегда вычислялись в конечном (и притом удобном для пользования) виде, то все было бы очень просто, и области науки, называемой теорией притяжения или теорией потенциала, заведомо не существовало бы.

Но интегралы (1.14) и (1.15) вычисляются в элементарных функциях только в некоторых исключительных случаях, а вообще оказываются совершенно невычисляемыми. Поэтому возникает необходимость изучения свойств и характера функции, определяемой таким невычисляемым интегралом, а также разработки методов, дающих ее приближенное выражение и способов для ее вычисления.

Решение этих задач и составляет предмет теории притяжения, основы которой излагаются в первой части книги.

Сложность выражения для силовой функции, обусловленная необходимостью выполнения трех последовательных интегрирований, заставляет искать случаи, в которых число интегрирований было бы меньше трех. Такие случаи действительно существуют. Это, например, имеет место, когда $\delta=\text{const}$, т. е. когда тело T однородно. Тогда, как будет показано в следующей главе, силовая функция и составляющие силы притяжения выражаются не тройными, а двойными интегралами, что представляет все же некоторое упрощение.

Реальные тела природы, конечно, строго говоря всегда неоднородны. Однако во многих случаях эта неоднородность оказывается очень слабой, так что рассматриваемое тело можно с достаточной степенью точности считать однородным, что облегчает задачу.

Кроме того, иногда рассматриваемое тело таково, что одно или даже два из трех его измерений весьма малы по сравнению с третьим, что опять-таки позволяет заменить тело более простой моделью и опять уменьшить число необходимых интегрирований.

§ 6. Притяжение материальной точки материальной поверхностью и материальной линией

1. Рассмотрим случаи, когда тройной интеграл превращается в двойной, взятый по некоторой поверхности, или в обыкновенный, криволинейный. Это будет иметь место, когда данное тело

представляет собой материальную поверхность, называемую простым слоем, или же материальную линию.

Рассмотрим сначала первый случай. Вообразим, что одно из трех измерений тела T весьма мало́ по сравнению с двумя другими, так что тело представляет собой нечто вроде большого, но очень тонкого листа или слоя. Тогда в ряде задач оказывается возможным пренебречь малой толщиной листа и рассматривать тело как идеальную (геометрическую) поверхность, по которой как бы размазана бесконечно тонким слоем притягивающая масса. Пусть дана такая поверхность S (замкнутая или не замкнутая, безразлично), в каждой точке которой определена некоторая функция точки $\delta(M)=\delta(x', y', z')$, которую будем называть поверхностной плотностью простого слоя. Так как точка $M(x', y', z')$ принадлежит некоторой поверхности, то три координаты x', y', z' связаны уравнением этой поверхности вида

$$\Phi(x', y', z')=0 \quad \text{или} \quad z'=\Phi(x', y'),$$

или выражаются в функции двух независимых переменных u' и v' (криволинейные координаты на поверхности), так что

$$x'=\varphi(u', v'), \qquad y'=\psi(u', v'), \qquad z'=\chi(u', v').$$

Пусть точка M является «центром» весьма малой части поверхности S, которую будем называть элементом площади поверхности и которую обозначим через $d\sigma$. Величину $\delta\, d\sigma$ естественно назвать элементом массы нашей материальной поверхности и положить

$$dm=\delta(M)\, d\sigma.$$

Рассматривая dm как массу материальной точки, помещенной в точке M поверхности, мы, подобно тому как это было сделано выше для трехмерного тела, получим проекции силы притяжения материальной поверхности или простого слоя T, действующей на любую точку пространства $P(x, y, z)$ в виде

$$X=f\iint\limits_{(S)}\frac{\delta(x'-x)\,d\sigma}{\Delta^3}=f\int\limits_{(S)}\frac{x'-x}{\Delta^3}\,dm,$$

$$Y=f\iint\limits_{(S)}\frac{\delta(y'-y)\,d\sigma}{\Delta^3}=f\int\limits_{(S)}\frac{y'-y}{\Delta^3}\,dm,$$

$$Z=f\iint\limits_{(S)}\frac{\delta(z'-z)\,d\sigma}{\Delta^3}=f\int\limits_{(S)}\frac{z'-z}{\Delta^3}\,dm,$$

где интегрирование распространено на всю поверхность S, несущую на себе притягивающую материю. Вводя опять функцию

$$U(x, y, z)=f\iint\limits_{(S)}\frac{\delta(M)\,d\sigma}{\Delta}=f\int\limits_{(S)}\frac{dm}{\Delta}, \qquad (1.17)$$

мы покажем, совершенно так же как и выше, что если точка P не лежит на поверхности S, то будут справедливы формулы

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y=\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z=\frac{\partial U}{\partial z}, \quad F_L=\frac{\partial U}{\partial L}.$$

Поэтому функцию U, определенную формулой (1.17), назовем силовой функцией материальной поверхности S или силовой функцией простого слоя T, или, наконец, потенциалом простого слоя, лежащего на поверхности S.

Потенциалом простого слоя приходится пользоваться в различных областях знания, в частности, в астрономии и в гравиметрии.

Действительно, известно, например, что кольца Сатурна имеют крайне незначительную толщину (ее оценивают в 15 *км*, в то время как наружный диаметр кольца составляет около 275 000 *км*). Поэтому в небесной механике при изучении движений близких спутников Сатурна, когда необходимо учитывать и притягивающее влияние кольца, последнее можно рассматривать с достаточной степенью точности как плоское материальное круглое кольцо и его притяжение определять силовой функцией вида (1.17).

Точно так же, изучая гравитационное поле нашей Галактики и учитывая малость ее толщины по сравнению с ее диаметром, можно моделировать эту галактику плоским круглым диском и опять воспользоваться потенциалом простого слоя типа (1.17).

Наконец, если в гравиметрии рассматривается рудный пласт, толщина которого мала по сравнению с длиной и шириной, то часто бывает возможно пренебречь этой малой толщиной и рассчитывать притяжение пласта как притяжение куска материальной поверхности, потенциал которой определяется формулой (1.17).

Приведенные примеры показывают, что чисто математическое понятие простого слоя, или материальной поверхности, имеет реальный смысл и с успехом может быть использовано в различных приложениях.

2. Теперь рассмотрим второй случай, когда притягивающее тело представляет собой некоторую материальную линию.

Пусть в системе $Oxyz$ дана некоторая математическая пространственная линия C или некоторый кусок такой линии, и пусть в каждой точке $M(x', y', z')$ линии C определена некоторая функция точки $\delta(M)=\delta(x', y', z')$, которую будем называть линейной плотностью линии. Так как точка M принадлежит пространственной линии, то три ее координаты связаны уравнениями этой линии, которые можно написать в виде

$$\Phi(x', y', z')=0, \quad \Psi(x', y', z')=0,$$

или, в параметрической форме,

$$x'=\varphi(\tau), \quad y'=\psi(\tau), \quad z'=\chi(\tau),$$

где τ — криволинейная координата на линии, за которую мы можем принять длину дуги s, отсчитываемую от некоторой точки линии M_0, принятой за начальную.

Вообразим, что точка M есть центр весьма малой дуги линии, которую будем называть элементом дуги и которую обозначим через ds. Величину $\delta\, ds$ естественно опять-таки назвать элементом притягивающей массы материальной линии и положить

$$dm=\delta(M)\, ds.$$

Рассматривая опять dm как массу материальной точки, помещенной в точке M линии, мы, совершенно так же как и выше, составим выражения для составляющих силы притяжения материальной линии, действующей на любую точку $P(x, y, z)$, в виде

$$X=f\int\limits_{(C)}\frac{x'-x}{\Delta^3}\,dm, \quad Y=f\int\limits_{(C)}\frac{y'-y}{\Delta^3}\,dm, \quad Z=f\int\limits_{(C)}\frac{z'-z}{\Delta^3}\,dm,$$

где интегрирование распространено на всю линию C, занятую притягивающей материей. Теперь, так же как и выше, введем в рассмотрение функцию

$$U(x, y, z)=f\int\limits_{(C)}\frac{dm}{\Delta} \tag{1.18}$$

и покажем, опять так же как и ранее, что если точка P не принадлежит линии C, то имеем

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y=\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z=\frac{\partial U}{\partial z}, \quad F_L=\frac{\partial U}{\partial L}.$$

Эту функцию U назовем поэтому силовой функцией (или потенциалом) материальной линии C.

Понятие материальной линии кажется сначала также чисто математическим, абстрактным понятием, так как реальные тела природы заведомо имеют три, а не одно, измерения. Однако часто приходится рассматривать тела, два измерения которых весьма малы по сравнению с третьим. Таковы, например, длинные тонкие стержни или длинные куски тонкой проволоки и т. п. В гравиметрии можно встретить рудные образования в виде длинных жил, поперечные сечения которых весьма малы по сравнению с длиной. Каждое такое тело, имеющее вид длинной «кишки», начиненной материей, можно приближенно рассматривать как материальную линию и определять потенциал такого тела с помощью однократного криволинейного интеграла, что позволяет значительно упростить рассматриваемую задачу.

Силовой функцией материальной линии приходится пользоваться также и в небесной механике при изучении движений небесных тел, как естественных, так и искусственных.

Так, в методе Гаусса вычисления вековых возмущений от планет, движущихся по эллиптическим или круговым орбитам, показывается, что действие притяжения такой движущейся планеты иногда можно заменить действием притяжения неподвижного материального эллиптического или кругового кольца, сконструированного надлежащим образом *).

Наконец, космическую ракету, имеющую вид длинного цилиндра, можно уподобить при изучении ее вращательного движения вокруг ее центра масс — материальному отрезку прямой линии и определить ее потенциал формулой типа (1.18) **).

§ 7. Дополнительные замечания

1. Мы рассмотрели три основные понятия теории притяжения, а именно: силовую функцию трехмерного тела, или, иначе, объемный потенциал; силовую функцию материальной поверхности, или потенциал простого слоя, и силовую функцию материальной линии, или линейный потенциал. Все эти три силовые функции, определяемые соответственно формулами (1.15), (1.17) и (1.18), можно представить одной-единственной формулой

$$U = f\int\limits_{(T)} \frac{dm}{\Delta}, \tag{1.19}$$

где знак интеграла показывает, что интегрирование распространено на всю притягивающую массу, а

$$\Delta = \overline{PM} = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2}$$

есть расстояние притягиваемой точки P единичной массы от притягивающего элемента массы, помещенного в точке M. Обозначая элемент области интегрирования (т. е. элемент объема, или элемент площади поверхности, или элемент дуги кривой) через dT, мы будем иметь во всех случаях

$$dm = \delta(M)\,dT.$$

Составляющие силы притяжения, действующей на точку P, также можно записать во всех трех случаях одинаковым

---

*) М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, т. 2, ОНТИ, 1937.

**) Г. Н. Дубошин, Об одном частном случае задачи о поступательно-вращательном движении двух тел, Астрон. журн., т. XXXVI, 1959.

образом:

$$X = f\int\limits_{(T)} \frac{(x'-x)\,dm}{\Delta^3}, \quad Y = f\int\limits_{(T)} \frac{(y'-y)\,dm}{\Delta^3}, \quad Z = f\int\limits_{(T)} \frac{(z'-z)\,dm}{\Delta^3}. \tag{1.20}$$

Если нужно найти составляющую силы притяжения по какому-либо другому направлению, не совпадающему с направлениями координатных осей, то мы можем воспользоваться приведенными выше формулами (1.4), (1.12) и (1.13). Входящие в последние две формулы частные производные без труда могут быть вычислены, в случае, когда точка P не составляет часть притягивающей массы, при помощи правила дифференцирования собственного определенного интеграла по параметру.

Легко проверить, что для этих производных получаются следующие формулы:

в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial U}{\partial \rho} = -f\int\limits_{(T)} \frac{\rho - \rho'\cos(v-v')}{\Delta^3}\,dm,$$

$$\frac{\partial U}{\partial v} = -f\rho\int\limits_{(T)} \frac{\rho'\sin(v-v')}{\Delta^3}\,dm,$$

где

$$\Delta = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos(v-v') + (z-z')^2};$$

в сферической системе координат:

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -f\int\limits_{(T)} \frac{r - r'\cos\gamma}{\Delta^3}\,dm,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = -fr\sin\theta\int\limits_{(T)} \frac{r'\sin\theta'\sin(\lambda-\lambda')}{\Delta^3}\,dm,$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -fr\int\limits_{(T)} \frac{r'[\sin\theta\cos\theta' - \cos\theta\sin\theta'\cos(\lambda-\lambda')]}{\Delta^3}\,dm,$$

где

$$\Delta = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\gamma}$$

и

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda-\lambda').$$

2. Элемент массы равен произведению плотности (объемной, поверхностной или линейной) на элемент области интегрирования, который также должен быть выражен в соответствующих координатах. Например, элемент объема $d\tau$ в цилиндрических координатах выражается формулой

$$d\tau = \rho'\,d\rho'\,dv'\,dz',$$

а в сферических координатах имеем

$$d\tau = r'^2 \sin\theta'\, dr'\, d\lambda'\, d\theta'.$$

Нужно еще всегда иметь в виду, что выражения для U, X, Y, Z, определяемые формулами (1.19) и (1.20), являясь функциями координат точки P, зависят также от величин, определяющих форму и физическое строение притягивающей массы, а также от параметров, определяющих ее положение и ориентацию относительно осей $Oxyz$.

Отметим еще, что полная масса притягивающей материи во всех случаях может быть определена одной и той же формулой

$$m = \int\limits_{(T)} \delta\, dT,$$

где интеграл берется по всей области, занятой притягивающим веществом.

Если масса притягиваемой точки не равна единице, как мы до сих пор предполагали, то в формулы (1.19) и (1.20) нужно ввести дополнительный множитель и писать эти формулы в следующем виде:

$$U = f\mu \int\limits_{(T)} \frac{dm}{\Delta}, \tag{1.19'}$$

и соответственно

$$X = f\mu \int\limits_{(T)} \frac{(x'-x)\,dm}{\Delta^3}, \quad Y = f\mu \int\limits_{(T)} \frac{(y'-y)\,dm}{\Delta^3}, \quad Z = f\mu \int\limits_{(T)} \frac{(z'-z)\,dm}{\Delta^3}. \tag{1.20'}$$

§ 8. Потенциал двойного слоя

1. Перейдем теперь к рассмотрению понятия, которое не имеет непосредственного отношения к теории притяжения, но является удобным вспомогательным математическим инструментом.

Это — понятие потенциала двойного слоя, которое играет важную роль в теоретической физике, но для рассматриваемой здесь теории притяжения является только некоторым чисто математическим понятием.

Сделаем прежде всего одно замечание. Рассматривая в § 6 понятие простого слоя, мы предполагали, разумеется, что поверхностная плотность, или плотность простого слоя, есть функция заведомо неотрицательная.

Здесь, наоборот, мы будем рассматривать простые слои, плотности которых могут иметь любые вещественные значения, как положительные, так и отрицательные.

Пусть мы имеем некоторую поверхность или кусок поверхности S, на которой распределен простой слой с плотностью δ, удовлетворяющей принятому условию.

Предполагая поверхность S гладкой*), отложим на каждой нормали к этой поверхности в одну и ту же определенную сторону отрезок постоянной длины ε. Геометрическое место концов этих нормалей образует вторую поверхность S', «параллельную» поверхности S. Пусть M' есть точка поверхности S', лежащая на нормали, проведенной в точке M поверхности S.

Распределим теперь на поверхности S' простой слой с плотностью δ' так, чтобы масса элемента поверхности S' с центром в M' была равна по величине, но противоположна по знаку массе соответствующего элемента поверхности S с центром в M.

Пусть P — произвольная точка пространства, а $U(P)$ и $U'(P)$ — потенциалы двух простых слоев, лежащих соответственно на S и S'.

Потенциалом двойного слоя, распределенного на поверхности S, назовем предел, к которому стремится при $\varepsilon \to 0$ сумма $U+U'$, при условии, что $\delta \cdot \varepsilon$ стремится к определенному, конечному, не равному вообще нулю пределу.

Обозначая потенциал двойного слоя **) на точку P через $W(P)$, имеем, по определению,

$$W = \lim_{\varepsilon \to 0} (U + U').$$

Пусть x', y', z' суть координаты текущей точки M поверхности S и x'_ε, y'_ε, z'_ε — координаты соответствующей точки M' поверхности S'.

Мы имеем

$$U(P) = f \iint\limits_{(S)} \frac{dm}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

---

*) «Гладким» куском поверхности или «гладкой» поверхностью мы будем называть для сокращения такую часть поверхности, в каждой точке которой существует определенная касательная плоскость (а следовательно, и определенная нормаль), непрерывно изменяющая свое положение при непрерывном перемещении точки по поверхности. См., например, В. Бляшке, Введение в дифференциальную геометрию, Гостехиздат, 1957.

**) Таким образом, «двойной слой» представляет собой совокупность двух простых слоев, плотности которых равны по величине и противоположны по знаку, и которые распределены соответственно с двух сторон одной и той же поверхности S так, что каждая ее точка является одновременно точкой и той и другой стороны.

и соответственно

$$U'(P)=f\iint\limits_{(S')}\frac{dm'}{\Delta'},$$

где

$$\Delta'=\sqrt{(x-x'_\varepsilon)^2+(y-y'_\varepsilon)^2+(z-z'_\varepsilon)^2},$$

причем по условию

$$dm=\delta'\,d\sigma'=-dm=-\delta\,d\sigma.$$

Так как каждой текущей точке M' поверхности S' соответствует текущая точка M на S, то в выражении для U' интегрирование можно перенести с S' на S, вследствие чего можем написать

$$U+U'=f\iint\limits_{(S)}\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{1}{\Delta'}\right)\delta\,d\sigma.$$

Пусть α', β', γ' суть направляющие косинусы выбранного направления нормали к поверхности S. Тогда для координат точки M' имеем

$$x'_\varepsilon=x'+\alpha'\varepsilon,\quad y'_\varepsilon=y'+\beta'\varepsilon,\quad z'_\varepsilon=z'+\gamma'\varepsilon,$$

так что получим

$$\frac{1}{\Delta'}=\frac{1}{\sqrt{(x-x'-\alpha'\varepsilon)^2+(y-y'-\beta'\varepsilon)^2+(z-z'-\gamma'\varepsilon)^2}}.$$

Разлагая эту функцию в ряд Тейлора по степеням малой величины ε, найдем

$$\frac{1}{\Delta'}=\frac{1}{\Delta}+\varepsilon\left[\alpha'\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\Delta}\right)+\beta'\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\Delta}\right)+\gamma'\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\Delta}\right)\right]+\ldots,$$

и, следовательно,

$$U+U'=-f\iint\limits_{(S)}\varepsilon\delta\left[\alpha'\frac{\partial\frac{1}{\Delta}}{\partial x'}+\beta'\frac{\partial\frac{1}{\Delta}}{\partial y'}+\gamma'\frac{\partial\frac{1}{\Delta}}{\partial z'}\right]d\sigma+\ldots,$$

где невыписанные члены имеют порядок выше первого относительно малого ε. Переходя теперь к пределу при $\varepsilon\to0$, получим

$$W(x,y,z)=-f\iint\limits_{(S)}\left[\alpha'\frac{\partial\frac{1}{\Delta}}{\partial x'}+\beta'\frac{\partial\frac{1}{\Delta}}{\partial y'}+\gamma'\frac{\partial\frac{1}{\Delta}}{\partial z'}\right]\mu\,d\sigma,\qquad(1.21)$$

где

$$\mu(M)=\mu(x',y',z')=\lim_{\varepsilon\to0}(\varepsilon\delta)$$

по условию есть конечная величина, называемая плотностью двойного слоя.

2. Для выражения потенциала двойного слоя можно получить и другие формулы. Преобразуем с этой целью подынтегральное выражение в формуле (1.21) следующим образом:

$$\alpha' \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial z'} = -\frac{1}{\Delta^2}\left(\alpha' \frac{x'-x}{\Delta} + \beta' \frac{y'-y}{\Delta} + \gamma' \frac{z'-z}{\Delta}\right) =$$
$$= -\frac{1}{\Delta^2}(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = -\frac{\cos\varphi}{\Delta^2},$$

где φ есть угол между направлением нормали к S и направлением $\overrightarrow{PM}$, идущим от притягиваемой точки к текущей точке поверхности S, на которой распределен двойной слой.

Теперь выражение потенциала двойного слоя представится в следующем виде:

$$W(P) = f \iint\limits_{(S)} \mu \frac{\cos\varphi}{\Delta^2} d\sigma. \tag{1.22}$$

Далее, замечая, что величина, стоящая в скобках под знаком интеграла в формуле (1.21), есть производная от обратного расстояния Δ^{-1} по направлению нормали к S, можем написать

$$W = -f \iint\limits_{(S)} \mu \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial n} d\sigma. \tag{1.23}$$

Наконец, так как

$$\frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x'} = -\frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x}, \ldots$$

и α', β', γ' не зависят от координат точки P, то имеем

$$\alpha' \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial \frac{1}{\Delta}}{\partial z'} = -\frac{\partial \frac{\alpha'}{\Delta}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{\beta'}{\Delta}}{\partial y} - \frac{\partial \frac{\gamma'}{\Delta}}{\partial z}.$$

Предполагая, что точка P не лежит на S и что функция $\mu(M)$ непрерывна на этой поверхности, мы можем из (1.21) вывести следующую формулу:

$$W(P) = f \iint\limits_{(S)} \left[\frac{\partial \frac{\alpha'}{\Delta}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{\beta'}{\Delta}}{\partial y} + \frac{\partial \frac{\gamma'}{\Delta}}{\partial z}\right] \mu\, d\sigma =$$
$$= f\left\{\frac{\partial}{\partial x} \iint\limits_{(S)} \frac{\alpha'\mu}{\Delta} d\sigma + \frac{\partial}{\partial y} \iint\limits_{(S)} \frac{\beta'\mu}{\Delta} d\sigma + \frac{\partial}{\partial z} \iint\limits_{(S)} \frac{\gamma'\mu}{\Delta} d\sigma\right\}.$$

Но интегралы, стоящие под знаками частных производных, можно рассматривать, если угодно, как потенциалы трех простых слоев соответственно с плотностями $\alpha'\mu$, $\beta'\mu$, $\gamma'\mu$, лежащих на одной и той же поверхности S. Обозначая эти потенциалы соответственно через U_1, U_2, U_3, мы можем написать

$$W = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial U_2}{\partial y} + \frac{\partial U_3}{\partial z}. \tag{1.24}$$

§ 9. Притяжение материального тела материальной точкой

В §§ 5, 6 мы рассматривали силу притяжения, с которой некоторое материальное тело (трехмерное, двумерное или одномерное) действует на материальную точку P единичной, или любой, массы. Теперь мы будем рассматривать более сложный, но более близкий к действительности случай взаимного притяжения двух произвольных материальных тел.

1. Это рассмотрение начнем со случая, который представляет собой, так сказать, «обращение» случая, которым мы занимались ранее, и который получится, если мы обменяем роли точки P и тела T. Иными словами, будем рассматривать теперь точку P как притягивающую, а произвольно расположенное относительно системы координат $Oxyz$ тело T как притягиваемое.

Непосредственно кажется очевидным, что силовая функция, введенная в §§ 5, 6, при таком обмене ролей не изменится, и поэтому может рассматриваться как взаимная силовая функция (взаимный потенциал) тела и материальной точки. Отсюда следует, что если бы мы интересовались только силовой функцией притяжения, то добавить к §§ 5, 6 было бы почти нечего. Однако возникает вопрос, как определить величину и направление силы, действующей на тело со стороны материальной точки, а так же как найти неизбежно возникающий здесь момент силы притяжения относительно какой-либо заданной точки. Поэтому приходится рассмотреть поставленный вопрос более обстоятельно.

Пусть дана в системе $Oxyz$ точка $P(x, y, z)$, в которой сосредоточена притягивающая точечная масса μ.

Пусть задано также некоторое материальное тело T (или материальная поверхность, или материальная линия) с непрерывной (или хотя бы только интегрируемой) плотностью δ (объемной, поверхностной или линейной). Чтобы определить положение и ориентацию тела T относительно осей $Oxyz$, выберем некоторую точку G, неизменно связанную с телом, координаты которой обозначим через ξ, η, ζ и которую будем называть «центром приведения». Точка G может быть выбрана совершенно произвольно и может даже не принадлежать телу T, но, во всяком случае, должна быть неизменно с ним связана *).

В частности, точка G может быть центром инерции (центром масс) тела T, а тогда ее координаты определяются известными формулами

$$\xi=\frac{1}{m}\int\limits_{(T)} x'\,dm,\qquad \eta=\frac{1}{m}\int\limits_{(T)} y'\,dm,\qquad \zeta=\frac{1}{m}\int\limits_{(T)} z'\,dm, \tag{1.25}$$

где интегрирование распространено на всю массу тела.

Вообразим теперь прямоугольную декартову систему координат с началом в точке G, неизменнно связанную с телом T.

Оси $G\xi'$, $G\eta'$, $G\zeta'$ этой «собственной» системы координат также можно выбрать совершенно произвольно, лишь бы они были жестко связаны с телом.

В частности, за эти оси можно взять направления осей эллипсоида инерции тела, соответствующего точке G, а если эта точка есть центр инерции, то за оси собственной системы координат можно взять направления главных центральных осей инерции тела, которые однозначно определяются формой и структурой тела T.

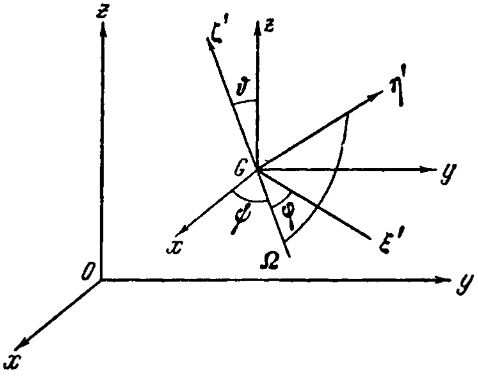


Рис. 1.

Ориентация тела T в системе $Oxyz$ определяется ориентацией собственной системы координат $G\xi'\eta'\zeta'$ относительно системы $Oxyz$, а ориентация собственной системы однозначно определяется тремя независимыми углами, через которые выражаются девять направляющих косинусов осей $G\xi'$, $G\eta'$, $G\zeta'$ в системе $Oxyz$.

За эти три независимых угла можно выбрать, например, три угла Эйлера: угол прецессии ψ, т. е. угол между направлением Gx, проходящим через G параллельно оси Ox, и направлением линии узлов плоскости $G\xi'\eta'$ на плоскости, параллельной плоскости Oxy; угол собственнного вращения φ, т. е. угол между направлением упомянутой линии узлов и

---

*) Например, если тело T есть шаровой или эллипсоидальный слой, то за начало собственной системы координат удобно принять центр слоя, который вовсе не принадлежит телу, но, очевидно, неизменно с ним связан.

направлением оси $G\xi'$, и угол нутации, т. е. угол между направлением оси Oz и направлением оси $G\zeta'$ (рис. 1).

Итак, положение и ориентация тела T в системе координат $Oxyz$ однозначно определяется шестью независимыми параметрами

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta, \quad \psi, \quad \varphi, \quad \vartheta,$$

которые остаются постоянными, если тело T неподвижно, и изменяются со временем, если это тело движется *).

2. Возьмем теперь любую точку пространства M. Пусть в системе $Oxyz$ ее координаты будут x', y', z', а в системе $G\xi'\eta'\zeta'$ — ξ', η', ζ'. Эти шесть величин связаны, как известно, формулами преобразования координат в пространстве, так что мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \xi + a_{11}\xi' + a_{12}\eta' + a_{13}\zeta', \\ y' &= \eta + a_{21}\xi' + a_{22}\eta' + a_{23}\zeta', \\ z' &= \zeta + a_{31}\xi' + a_{32}\eta' + a_{33}\zeta', \end{aligned}\right\} \tag{1.26}$$

где a_{ik} суть направляющие косинусы собственных осей тела в системе $Oxyz$. Эти направляющие косинусы связаны с углами Эйлера известными формулами:

$$\left.\begin{aligned} a_{11} &= \cos(\xi', x) = \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\vartheta, \\ a_{21} &= \cos(\xi', y) = \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\vartheta, \\ a_{31} &= \cos(\xi', z) = \sin\varphi\sin\vartheta, \\ a_{12} &= \cos(\eta', x) = -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\vartheta, \\ a_{22} &= \cos(\eta', y) = -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\vartheta, \\ a_{32} &= \cos(\eta', z) = \cos\varphi\sin\vartheta, \\ a_{13} &= \cos(\zeta', x) = \sin\psi\sin\vartheta, \\ a_{23} &= \cos(\zeta', y) = -\cos\psi\sin\vartheta, \\ a_{33} &= \cos(\zeta', z) = \cos\vartheta. \end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

3. Рассмотрим теперь элемент массы dm тела T, сосредоточенный в точке $M(x', y', z')$. Материальная точка $P(x, y, z)$ притягивает этот элемент с силой, проекции которой на оси системы $Oxyz$ суть

$$f\mu\frac{x-x'}{\Delta^3}\,dm, \quad f\mu\frac{y-y'}{\Delta^3}\,dm, \quad f\mu\frac{z-z'}{\Delta^3}\,dm,$$

---

*) Параметры, определяющие положение и ориентацию тела T, можно, разумеется, выбирать различными способами. Например, можно вместо прямоугольных координат взять полярные, а вместо эйлеровых углов какие-либо другие эквивалентные величины.

и проекции момента которой относительно центра приведения равны соответственно

$$f\mu\,\frac{(y'-\eta)(z-z')-(z'-\zeta)(y-y')}{\Delta^3}\,dm,$$

$$f\mu\,\frac{(z'-\zeta)(x-x')-(x'-\xi)(z-z')}{\Delta^3}\,dm,$$

$$f\mu\,\frac{(x'-\xi)(y-y')-(y'-\eta)(x-x')}{\Delta^3}\,dm,$$

где по-прежнему

$$\Delta=\overline{PM}=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

Поэтому проекции Ξ, H, Z равнодействующей сил притяжения, действующих на элементы массы тела T, приложенной к точке G, будут

$$\left.\begin{aligned}\Xi&=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{x-x'}{\Delta^3}\,dm,\\ \mathrm{H}&=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{y-y'}{\Delta^3}\,dm,\\ \mathrm{Z}&=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{z-z'}{\Delta^3}\,dm,\end{aligned}\right\}\tag{1.28}$$

а проекции L_x, L_y, L_z момента этой равнодействующей относительно центра приведения G определятся формулами *)

$$\left.\begin{aligned}L_x&=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{(y'-\eta)(z-z')-(z'-\zeta)(y-y')}{\Delta^3}\,dm,\\ L_y&=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{(z'-\zeta)(x-x')-(x'-\xi)(z-z')}{\Delta^3}\,dm,\\ L_z&=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{(x'-\xi)(y-y')-(y'-\eta)(x-x')}{\Delta^3}\,dm.\end{aligned}\right\}\tag{1.29}$$

Введем еще в рассмотрение составляющие момента силы притяжения, действующей на тело T и приложенной в G, L_φ, L_ψ, L_θ по осям: собственного вращения $G\zeta'$, прецессии Gz и нута-

---

*) Все приведенные здесь формулы можно найти в курсах теоретической механики. См., например, Г. К. Суслов, Теоретическая механика, изд. 3-е, 1944, и последующие; А. И. Лурье, Аналитическая механика, 1961.

ции $G\Omega$ (рис. 2). Нетрудно проверить, что

$$L_\varphi = \sin\psi \sin\vartheta L_x - \cos\psi \sin\vartheta L_y + \cos\vartheta L_z,$$
$$L_\psi = L_z,$$
$$L_\vartheta = \cos\psi L_x + \sin\psi L_y.$$

Теперь рассмотрим силовую функцию U, отличающуюся от (1.19) только множителем μ (см. формулу (1.19′)),

$$U = f\mu \int\limits_{(T)} \frac{dm}{\Delta}. \qquad (1.30)$$

Если в формулах (1.28), (1.29) и (1.30) перейти от переменных интегрирования x', y', z' к новым переменным ξ', η', ζ' при помощи формул преобразования координат (1.26), то U и все проекции силы притяжения и ее момента относительно центра приведения G сделаются явными функциями независимых параметров ξ, η, ζ, ψ, φ, ϑ, оставаясь в то же время явными функциями координат x, y, z точки P.

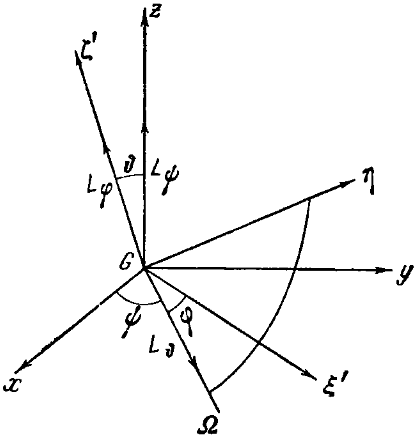


Рис. 2.

Покажем теперь, что если точка P — внешняя по отношению к телу T, то имеют место равенства

$$\Xi = \frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \mathrm{H} = \frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \mathrm{Z} = \frac{\partial U}{\partial \zeta} \qquad (1.31)$$

и

$$L_\varphi = \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad L_\psi = \frac{\partial U}{\partial \psi}, \quad L_\vartheta = \frac{\partial U}{\partial \vartheta}. \qquad (1.32)$$

Формулы (1.31) делаются очевидными, если заметить, например, что в силу формул (1.26) имеем

$$\frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial \xi} = \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x'} = \frac{x - x'}{\Delta^3}.$$

Далее, очевидно, что

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}. \qquad (1.33)$$

Проверим теперь формулы (1.32), например, первую из них.

Так как

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \varphi} = -\frac{x-x'}{\Delta}\frac{\partial x'}{\partial \varphi} - \frac{y-y'}{\Delta}\frac{\partial y'}{\partial \varphi} - \frac{z-z'}{\Delta}\frac{\partial z'}{\partial \varphi},$$

то

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = f\mu \int\limits_{(T)} \left(\frac{x-x'}{\Delta^3}\frac{\partial x'}{\partial \varphi} + \frac{y-y'}{\Delta^3}\frac{\partial y'}{\partial \varphi} + \frac{z-z'}{\Delta^3}\frac{\partial z'}{\partial \varphi}\right) dm.$$

Но производные от координат x', y', z' по углу φ найдутся непосредственным дифференцированием формул (1.26) и выразятся через производные от направляющих косинусов a_{ik}. Из формул (1.27) имеем

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial \varphi} = a_{12}, \quad \frac{\partial a_{12}}{\partial \varphi} = -a_{11}, \quad \frac{\partial a_{13}}{\partial \varphi} = 0,$$
$$\frac{\partial a_{21}}{\partial \varphi} = a_{22}, \quad \frac{\partial a_{22}}{\partial \varphi} = -a_{21}, \quad \frac{\partial a_{23}}{\partial \varphi} = 0,$$
$$\frac{\partial a_{31}}{\partial \varphi} = a_{32}, \quad \frac{\partial a_{32}}{\partial \varphi} = -a_{31}, \quad \frac{\partial a_{33}}{\partial \varphi} = 0,$$

а поэтому

$$\frac{\partial x'}{\partial \varphi} = a_{12}\xi' - a_{11}\eta', \quad \frac{\partial y'}{\partial \varphi} = a_{22}\xi' - a_{21}\eta', \quad \frac{\partial z'}{\partial \varphi} = a_{32}\xi' - a_{31}\eta'.$$

Подставляя сюда вместо ξ' и η' их выражения из формул

$$\left.\begin{aligned} \xi' &= a_{11}(x'-\xi) + a_{21}(y'-\eta) + a_{31}(z'-\zeta), \\ \eta' &= a_{12}(x'-\xi) + a_{22}(y'-\eta) + a_{32}(z'-\zeta), \\ \zeta' &= a_{13}(x'-\xi) + a_{23}(y'-\eta) + a_{33}(z'-\zeta), \end{aligned}\right\} \qquad (1.26')$$

соответствующих обратному преобразованию, мы получим

$$\frac{\partial x'}{\partial \varphi} = a_{23}(z'-\zeta) - a_{33}(y'-\eta),$$
$$\frac{\partial y'}{\partial \varphi} = a_{33}(x'-\xi) - a_{13}(z'-\zeta),$$
$$\frac{\partial z'}{\partial \varphi} = a_{13}(y'-\eta) - a_{23}(x'-\xi).$$

Подставляя, наконец, эти производные в выражение для $\frac{\partial U}{\partial \varphi}$, найдем, что

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi} = a_{13}L_x + a_{23}L_y + a_{33}L_z = L_\varphi.$$

Подобным же образом проверяются и две остальные формулы (1.32).

Таким образом, функция U полностью определяет и силу, с которой тело T притягивает точку P, и силу, с которой точка P притягивает тело T.

Поэтому функцию U, определенную формулой (1.30), будем называть силовой функцией взаимного притяжения материальной точки P и материального тела T или (хотя и не совсем правильно!) их взаимным потенциалом.

§ 10. Взаимное притяжение материальных тел

1. Рассмотрим теперь два материальных тела T_1 и T_2, каждое из которых имеет определенную структуру и может быть трехмерным телом или простым слоем или материальной линией.

Пусть ξ_i, η_i, ζ_i суть координаты в системе $Oxyz$ (произвольно выбранной, но с неизменными направлениями осей) точки G_i ($i=1$, 2), неизменно связанной с телом T_i, а ψ_i, φ_i, ϑ_i — эйлеровы углы, определяющие ориентацию относительно $Oxyz$ собственной системы отсчета, жестко связанной с телом T_i и с началом в точке G_i.

Пусть, далее, $M_i(x'_i, \; y'_i, \; z'_i)$ — произвольная точка тела T_i, в которой сосредоточена элементарная масса dm_i.

Точка M_i ($i=1$, 2) притягивается точкой M_j другого тела ($j=2$, 1) с силой, проекции которой на оси основной системы координат $Oxyz$ суть

$$f\frac{x'_j-x'_i}{\Delta^3_{ij}}\,dm_i\,dm_j, \quad f\frac{y'_j-y'_i}{\Delta^3_{ij}}\,dm_i\,dm_j, \quad f\frac{z'_j-z'_i}{\Delta^3_{ij}}\,dm_i\,dm_j,$$

а проекции момента этой силы относительно центра приведения G_i на те же оси выражаются так:

$$f\frac{(y'_i-\eta_i)(z'_j-z'_i)-(z'_i-\zeta_i)(y'_j-y'_i)}{\Delta^3_{ij}}\,dm_i\,dm_j,$$

$$f\frac{(z'_i-\zeta_i)(x'_j-x'_i)-(x'_i-\xi_i)(z'_j-z'_i)}{\Delta^3_{ij}}\,dm_i\,dm_j,$$

$$f\frac{(x'_i-\xi_i)(y'_j-y'_i)-(y'_i-\eta_i)(x'_j-x'_i)}{\Delta^3_{ij}}\,dm_i\,dm_j,$$

где

$$\Delta_{ij}=\Delta_{12}=\sqrt{(x'_1-x'_2)^2+(y'_1-y'_2)^2+(z'_1-z'_2)^2}.$$

Поэтому проекции равнодействующей всех сил притяжения, действующих на тело T_i ($i=1$, 2) со стороны другого тела, и приложенной к центру приведения G_i, будут

$$\left.\begin{aligned}
\Xi_{ij} &= f\int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{x'_j - x'_i}{\Delta^3_{ij}}\, dm_j,\\
\mathrm{H}_{ij} &= f\int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{y'_j - y'_i}{\Delta^3_{ij}}\, dm_j,\\
\mathrm{Z}_{ij} &= f\int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{z'_j - z'_i}{\Delta^3_{ij}}\, dm_j,
\end{aligned}\right\} \qquad (1.28')$$

а проекции на те же оси $Oxyz$ момента этой равнодействующей относительно центра приведения G_i выразятся следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}
L_x^{(i,\,j)} &= f\int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{(y'_i - \eta_i)(z'_j - z'_i) - (z'_i - \zeta_i)(y'_j - y'_i)}{\Delta^3_{ij}}\, dm_j,\\
L_y^{(i,\,j)} &= f\int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{(z'_i - \zeta_i)(x'_j - x'_i) - (x'_i - \xi_i)(z'_j - z'_i)}{\Delta^3_{ij}}\, dm_j,\\
L_z^{(i,\,j)} &= f\int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{(x'_i - \xi_i)(y'_j - y'_i) - (y'_i - \eta_i)(x'_j - x'_i)}{\Delta^3_{ij}}\, dm_j.
\end{aligned}\right\} \qquad (1.29')$$

Интегралы в формулах (1.28′) и (1.29′) распространены на массы обоих тел и порядок этих интегралов может быть любым от второго (когда каждое тело есть материальная линия) до шестого (когда каждое тело имеет три измерения), в зависимости от структуры каждого из рассматриваемых тел.

2. Введем теперь в рассмотрение функцию

$$U_{ij} = f\int\limits_{(T_i)} dm_i \int\limits_{(T_j)} \frac{dm_j}{\Delta_{ij}} \qquad (i,\ j = 1,\ 2). \qquad (1.30')$$

Эта функция, так же как и функции (1.28′), (1.29′), в силу формул преобразования к собственным системам координат*) будут функциями двенадцати независимых параметров: ξ_i, η_i, ζ_i, ψ_i, φ_i, ϑ_i, ξ_j, η_j, ζ_j, ψ_j, φ_j, ϑ_j $(i = 1,\ j = 2)$.

---

*) Эти формулы пишутся так же как и формулы (1.26) и (1.27), где все буквы нужно только отметить соответствующими значками, относящимися к телам T_i и T_j $(i=1,\ j=2)$.

Совершенно так же как и выше, покажем, что

$$\Xi_{ij} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi_i}, \quad \mathrm{H}_{ij} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \eta_i}, \quad \mathrm{Z}_{ij} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \zeta_i}, \tag{1.31'}$$

$$L_{\varphi_i}^{(i,\,j)} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \varphi_i}, \quad L_{\psi_i}^{(i,\,j)} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \psi_i}, \quad L_{\vartheta_i}^{(i,\,j)} = \frac{\partial U_{ij}}{\partial \vartheta_i}, \tag{1.32'}$$

где три новые составляющие момента силы определяются формулами

$$L_{\varphi_i}^{(i,\,j)} = \sin\psi_i \sin\vartheta_i L_x^{(i,\,j)} - \cos\psi_i \sin\vartheta_i L_y^{(i,\,j)} + \cos\vartheta_i L_z^{(i,\,j)},$$

$$L_{\psi_i}^{(i,\,j)} = L_z^{(i,\,j)},$$

$$L_{\vartheta_i}^{(i,\,j)} = \cos\psi_i L_x^{(i,\,j)} + \sin\psi_i L_y^{(i,\,j)}.$$

Нужно отметить, что справедливость формул (1.31′) и (1.32′) установлена только для того случая, когда тела T_1 и T_2 не имеют общей части, так как только в этом случае можно применять к (1.30′) правило дифференцирования определенного интеграла по параметру без специального исследования.

Функция (1.30′) называется силовой функцией взаимного притяжения двух тел или их взаимным потенциалом.

Полученные результаты немедленно распространяются на случай системы, состоящей из любого конечного числа материальных тел T_i ($i=1, 2, \ldots, n$), каждое из которых может быть трехмерным, двумерным или одномерным.

Определяя взаимную силовую функцию любой пары тел T_i и T_j ($i, j=1, 2, \ldots, n, i \neq j$) той же формулой (1.30′), введем силовую функцию всей материальной системы тел $T_1, T_2, \ldots, T_n$ формулой

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} U_{ij}. \tag{1.30''}$$

Эта функция U будет функцией $6n$ независимых параметров $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \psi_i, \varphi_i, \vartheta_i$ ($i=1, 2, \ldots, n$).

Тогда, если только никакие два из n тел T_i не имеют общей части, для составляющих силы, действующей на тело T_i, и ее момента относительно центра приведения G_i, будут справедливы формулы *)

$$\Xi_i = \sum_{j=1}^{n}{}' \Xi_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad L_{\psi_i}^{(i)} = \sum_{j=1}^{n}{}' L_{\psi_i}^{(i,\, j)} = \frac{\partial U}{\partial \psi_i},$$

$$\mathrm{H}_i = \sum_{j=1}^{n}{}' \mathrm{H}_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad L_{\varphi_i}^{(i)} = \sum_{j=1}^{n}{}' L_{\varphi_i}^{(i,\, j)} = \frac{\partial U}{\partial \varphi_i},$$

$$\mathrm{Z}_i = \sum_{j=1}^{n}{}' \mathrm{Z}_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \quad L_{\vartheta_i}^{(i)} = \sum_{j=1}^{n}{}' L_{\vartheta_i}^{(i,\, j)} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i}.$$

Если вместо прямоугольных координат какой-либо из точек G_i ввести ее цилиндрические или полярные сферические координаты, как мы делали в § 4, то соответствующие частные производные от функции U определят составляющие силы притяжения соответственно по трем другим направлениям. Такие составляющие выразятся теми же формулами, что и в § 4, но вместо U нужно брать ее общее выражение (1.30'').

Заметим притом, что вовсе не обязательно определять все точки G_i координатами одного и того же рода. Таким образом, вполне возможно (если это оказывается удобным) для одних точек взять прямоугольные координаты, для других — цилиндрические или сферические и т. д.

---

*) Штрих при знаке суммы означает, так же как и выше, что при суммировании нужно пропустить член, для которого $j=i$.

ГЛАВА II

СВОЙСТВА СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ

§ 1. Свойства силовой функции взаимного притяжения тела и точки во внешнем пространстве

В начале первой главы мы указали на некоторые очевидные свойства силовой функции ньютоновского притяжения материальной точки другой материальной точкой или системой конечного числа материальных точек.

Здесь будет показано, что эти свойства распространяются без всякого затруднения и на общий случай, когда одна из двух притягивающихся масс образует непрерывно протяженное тело (одного, двух или трех измерений — безразлично).

1. Рассмотрим некоторое материальное тело T конечных размеров с непрерывной (или хотя бы с интегрируемой) плотностью $\delta(M)$ и материальную точку P конечной массы μ.

Тогда силовая функция взаимного притяжения тела T и точки P определится формулой

$$U = f\mu \int\limits_{(T)} \frac{dm}{\Delta}, \tag{2.1}$$

где

$$dm = \delta(M)\, dT$$

— элемент притягивающей массы, сосредоточенной в точке тела $M(x', y', z')$,

$$\Delta = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

— расстояние от точки $P(x, y, z)$ до точки M, и интеграл (однократный, двойной или тройной) распространен на всю массу тела T.

Силовая функция U есть некоторая определенная функция координат x, y, z точки P и шести величин, определяющих положение и ориентацию тела T относительно неизменной системы координат $Oxyz$ *).

За эти величины можно принять, например, прямоугольные координаты ξ, η, ζ какой-либо произвольно выбранной точки G, жестко связанной с телом, и эйлеровы углы ψ, φ, ϑ, определяющие ориентацию «собственной» системы осей, неизменно связанных с телом и имеющих начало в точке G.

Кроме того, функция U зависит от параметров, определяющих форму, размеры и структуру тела T, которые могут быть постоянными величинами (когда тело T рассматривается в данной задаче как твердое) и, вообще говоря, некоторыми функциями времени.

В этой книге упомянутые параметры всегда будут подразумеваться как величины постоянные, так что функция U рассматривается как функция девяти независимых между собой переменных.

При этом может случиться, что мы можем рассматривать тело T как неподвижное. Тогда координаты точки G и эйлеровы углы будут величинами постоянными и U будет функцией только от трех координат точки P. В других случаях, наоборот, можно рассматривать точку P как неподвижную и тогда U будет функцией от шести независимых переменных, определяющих положение и ориентацию тела T в пространстве.

Так как функция U выражается некоторым определенным интегралом, в котором координаты точки P и тела T играют роль параметров **), то вид и аналитическая структура этой функции могут быть весьма сложными.

Действительно, интеграл в формуле (2.1) зависит, как было отмечено, и от формы тела T и от его физического строения и в конечном виде выражается чрезвычайно редко. Но даже в тех немногих случаях, когда интеграл (2.1) вычисляется до конца при помощи известных функций, его выражение оказывается обычно столь сложным и громоздким, что усмотреть непосредственно свойства функции, им определяемой, оказывается чрезвычайно затруднительным.

Поэтому представляет значительный интерес (и теоретический и практический) исследовать, насколько это возможно, свойства функции, определяемой формулой (2.1), не связывая это исследование с возможностью вычисления интеграла в конечном виде.

---

*) Под неизменной системой координат мы подразумеваем систему отсчета, никак не связанную с притягивающими массами. Наоборот, «собственной» системой координат является система отсчета, жестко связанная с телом.

**) То есть эти величины остаются неизменными во время процесса интегрирования, когда переменными являются координаты «текущей» точки x', y', z'.

2. Перейдем к рассмотрению этих свойств, предполагая в этом параграфе, что точка P находится во внешнем относительно тела T пространстве, т. е. что материальная частица μ не составляет части притягивающей массы, образующей наше тело.

Тогда расстояние $\Delta=\overline{PM}$ не обращается в нуль ни для какого положения точки P в указанной области, а так как плотность тела $\delta(M)$ непрерывна, или интегрируема, и область, занимаемая телом (т. е. область интегрирования) конечна, то интеграл в формуле (2.1) будет заведомо собственным, а из этого обстоятельства сразу вытекают следующие свойства*):

Свойство 1. Силовая функция U, рассматриваемая как функция координат точки P, конечна, непрерывна и однозначна во всем внешнем пространстве.

Свойство 2. Силовая функция U, рассматриваемая как функция координат центра приведения G и эйлеровых углов, определяющих ориентацию тела T, также конечна, непрерывна и однозначна, пока точка P остается во внешнем относительно тела пространстве.

Свойство 3. Силовая функция U, рассматриваемая как функция всех девяти независимых между собою переменных x, y, z, ξ, η, ζ, ψ, φ, ϑ, остается конечной, непрерывной и однозначной, пока точка P не составляет часть массы тела T.

Свойство 4. Частные производные от силовой функции U любого порядка, вычисленные по любым координатам точки P и тела T и рассматриваемые или как функции точки P, или как функции координат тела T, или как функции всех девяти независимых переменных, также все конечны, непрерывны и однозначны, пока точка P находится во внешнем относительно тела T пространстве.

Рассмотрим теперь составляющие силы притяжения, действующей на точку P, а также составляющие силы, действующей на тело T, и ее момента относительно центра приведения G.

Мы имеем

$$X=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{x'-x}{\Delta^3}\,dm,\quad Y=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{y'-y}{\Delta^3}\,dm,\quad Z=f\mu\int\limits_{(T)}\frac{z'-z}{\Delta^3}\,dm. \tag{2.2}$$

---

*) Эти свойства просто являются следствиями свойств определенного интеграла.

Заметим, кроме того, что формулы (1.28) для составляющих силы, действующей на тело (и приложенной к центру приведения G), и формулы (1.29) для составляющих момента этой силы могут быть переписаны в виде

$$\left.\begin{aligned} \Xi &= -X, & L_x &= (z-\zeta)Y-(y-\eta)Z, \\ \mathrm{H} &= -Y, & L_y &= (x-\xi)Z-(z-\zeta)X, \\ \mathrm{Z} &= -Z, & L_z &= (y-\eta)X-(x-\xi)Y. \end{aligned}\right\} \qquad (2.3)$$

Отсюда непосредственно следует:

Свойство 5. Составляющие силы притяжения, действующей на точку P, так же как и составляющие силы притяжения, действующей на тело T, и ее момента относительно центра приведения G, рассматриваемые либо как функции координат точки P, либо как функции координат тела T, либо как функции тех и других величин одновременно, все конечны, непрерывны и однозначны, когда точка P находится во внешнем для тела T пространстве.

Результаты § 9 главы I позволяют также сформулировать следующее свойство:

Свойство 6. Формулы

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x}, & Y &= \frac{\partial U}{\partial y}, & Z &= \frac{\partial U}{\partial z}, \\ \Xi &= \frac{\partial U}{\partial \xi}, & \mathrm{H} &= \frac{\partial U}{\partial \eta}, & \mathrm{Z} &= \frac{\partial U}{\partial \zeta}, \\ L_\psi &= \frac{\partial U}{\partial \psi}, & L_\varphi &= \frac{\partial U}{\partial \varphi}, & L_\vartheta &= \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

остаются справедливыми, пока точка P находится во внешнем относительно тела T пространстве.

3. Посмотрим теперь, как ведут себя силовая функция U и ее частные производные первого порядка, если расстояние

$$R = \overline{PG} = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}$$

между точкой P и точкой G, неизменно связанной с телом, неограниченно увеличивается.

Обозначим через R' расстояние от текущей точки M тела T до точки G (рис. 3), а через $\overline{R}$ — наибольшее из всех возможных расстояний R' (разумеется, предполагается, что R' есть величина конечная). Предполагая, что $R > \overline{R}$, имеем по свойству треугольника

$$R-\overline{R}<R-R'<\Delta<R+R'<R+\overline{R},$$

откуда

$$\frac{R}{R+\overline{R}} < \frac{R}{\Delta} < \frac{R}{R-\overline{R}}.$$

Умножая все части этого неравенства на положительную величину $f\mu\, dm$ и интегрируя по всей массе тела, имеем *)

$$\frac{f\mu m R}{R+\overline{R}} < f\mu R \int\limits_{(T)} \frac{dm}{\Delta} < \frac{f\mu m R}{R-\overline{R}},$$

откуда

$$\lim_{R\to\infty} (R\cdot U) = f\mu m, \tag{2.5}$$

что можно сформулировать как

Свойство 7. Когда расстояние R между точкой P и точкой G, жестко связанной с телом T, неограниченно растет, то произведение $R\cdot U$ стремится к определенному, конечному пределу, равному $f\mu m$, где m есть полная масса тела.

Из этого свойства выводится весьма важное следствие, а именно: если расстояние R весьма велико по сравнению с наибольшим из расстояний точек тела до центра приведения G, то взаимная силовая функция точки P и тела T весьма мало отличается от взаимной силовой функции материальной точки с массой μ и материальной точки G, в которой сосредоточена вся масса m тела T.

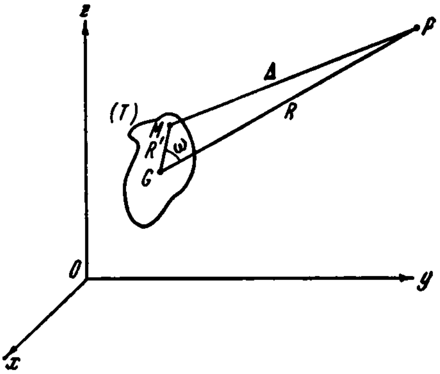


Рис. 3.

Положим теперь

$$F = f\mu \int\limits_{(T)} \frac{dm}{\Delta^2}.$$

Тогда, точно так же как и выше, найдем

$$\lim_{R\to\infty} (R^2 F) = f\mu m.$$

---

*) Предполагается, что плотность $\delta(M)$ тела T есть неотрицательная функция текущей точки M, так что масса тела m есть величина заведомо положительная.

Обращаясь затем к формулам (2.2), выводим

$$R^2|X| \leqslant f\mu R^2 \int\limits_{(T)} \left|\frac{x'-x}{\Delta}\right| \frac{dm}{\Delta^2} \leqslant R^2F,$$

откуда

$$\lim_{R\to\infty} |R^2X| \leqslant f\mu m, \quad \lim_{R\to\infty} |R^2Y| \leqslant f\mu m, \quad \lim_{R\to\infty} |R^2Z| \leqslant f\mu m;$$

кроме того, из первой группы формул (2.3) имеем также

$$\lim_{R\to\infty} |R^2\Xi| \leqslant f\mu m, \quad \lim_{R\to\infty} |R^2\mathrm{H}| \leqslant f\mu m, \quad \lim_{R\to\infty} |R^2\mathrm{Z}| \leqslant f\mu m,$$

а вторая группа формул (2.3) дает

$$\lim_{R\to\infty} L_x = \lim_{R\to\infty} L_y = \lim_{R\to\infty} L_z = 0.$$

Выведем еще одно предельное соотношение. Из треугольника MGP (см. рис. 3) имеем

$$\Delta^2 = R^2 + R'^2 - 2RR' \cos\omega,$$

где ω есть угол, образованный $\overline{GM}$ и $\overline{GP}$.

Отсюда находим

$$\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial R} = -\frac{R - R'\cos\omega}{\Delta^3},$$

и, следовательно,

$$R^2\frac{\partial U}{\partial R} = -f\mu \int\limits_{(T)} \frac{R^3}{\Delta^3}\,dm + f\mu \int\limits_{(T)} \frac{R^2R'\cos\omega}{\Delta^3}\,dm,$$

откуда, имея в виду, что

$$\lim_{R\to\infty} \frac{R}{\Delta} = 1, \quad \lim_{R\to\infty} \frac{R'}{\Delta} = 0,$$

найдем

$$\lim_{R\to\infty} \left(R^2\frac{\partial U}{\partial R}\right) = -f\mu m.$$

Выведенные предельные соотношения дают следующее свойство:

Свойство 8. Силовая функция взаимного притяжения материальной точки P и тела T, рассматриваемая как функция координат точки P или как функция координат точки G, жестко связанной с телом, есть функция, регулярная на бесконечности*).

---

*) См., например, Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала, Гостехиздат, 1946, а также В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. III (любое издание).

Из полученных результатов вытекает, что когда расстояние R достаточно велико по сравнению с линейными размерами тела, то имеют место приближенные равенства

$$U \approx f\frac{\mu m}{R}, \quad \frac{\partial U}{\partial R} \approx -f\frac{\mu m}{R^2}, \tag{2.6}$$

которые приводят к формулировке следующего следствия:

Следствие. Тело T любой формы и любой структуры и весьма удаленная от него материальная точка P взаимно притягиваются так, как будто вся масса тела сконцентрирована в точке G.

4. Перейдем теперь к рассмотрению вторых частных производных от силовой функции взаимного притяжения тела и материальной точки. Дифференцируя для этого первую группу формул (2.4), мы имеем

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial X}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial Y}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial Y}{\partial z},$$

откуда с помощью формул (2.2), предполагая по-прежнему, что точка P не составляет части тела T, находим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = f\mu \int\limits_{(T)} \left\{-\frac{1}{\Delta^3} + \frac{3(x'-x)^2}{\Delta^5}\right\} dm,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = f\mu \int\limits_{(T)} \left\{-\frac{1}{\Delta^3} + \frac{3(y'-y)^2}{\Delta^5}\right\} dm,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = f\mu \int\limits_{(T)} \left\{-\frac{1}{\Delta^3} + \frac{3(z'-z)^2}{\Delta^5}\right\} dm.$$

Складывая эти три равенства, имеем

$$\nabla U(x, y, z) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{2.7}$$

Далее, в силу соотношений (2.3) и (2.4), находим

$$\nabla U(\xi, \eta, \zeta) = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = 0. \tag{2.7'}$$

В результате имеем следующее свойство:

Свойство 9. В любой области пространства, не включающей в себя точек, принадлежащих телу T, силовая функция U, рассматриваемая как функция координат точки P или как функция координат точки G, жестко связанной с телом T, удовлетворяет уравнению Лапласа.

Примечание 1. Мы можем также сказать, что силовая функция взаимного притяжения точки и тела есть гармоническая функция координат точки P (при постоянных значениях координат G), а также есть гармоническая функция координат точки G (при постоянных значениях P). При этом в обоих случаях эйлеровы углы ψ, φ, ϑ рассматриваются как величины постоянные.

Примечание 2. Если рассматривать U как функцию девяти независимых переменных, то остается неизвестным, удовлетворяет ли эта функция какому-либо уравнению, обобщающему уравнение Лапласа или нет.

Примечание 3. Легко видеть, что потенциал двойного слоя W, распределенного на некоторой гладкой поверхности S с непрерывной или только интегрируемой плотностью $\mu(M)$, есть функция координат точки P, единичной массы, удовлетворяющая автоматически свойствам 1), 4) и 9). Действительно, по формуле (1.24) § 8, главы I функция W составляется из первых производных трех потенциалов простых слоев, лежащих на той же поверхности S. Так как потенциал любого простого слоя заведомо удовлетворяет свойствам 1), 4) и 9), то и W удовлетворяет этим же свойствам. Далее, очевидно, что

$$\nabla W=\frac{\partial}{\partial x}\nabla U_1+\frac{\partial}{\partial y}\nabla U_2+\frac{\partial}{\partial z}\nabla U_3,$$

а так как

$$\nabla U_1=0,\quad \nabla U_2=0,\quad \nabla U_3=0,$$

то имеем также

$$\nabla W=\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}=0,$$

т. е. потенциал двойного слоя также удовлетворяет уравнению Лапласа в любой области пространства, не содержащей в себе точек поверхности S.

§ 2. Свойства силовой функции взаимного притяжения двух конечных тел

1. Все результаты, полученные в § 1, легко распространяются также на случай двух произвольных притягивающих тел, каждое из которых имеет конечные размеры, обладает непрерывной, или интегрируемой, плотностью и может быть одномерным, двумерным или трехмерным.

В этом случае, как мы видели выше, силовая функция взаимного притяжения двух тел определяется формулой

$$U=f\int\limits_{(T_1)}\int\limits_{(T_2)}\frac{dm_1\,dm_2}{\Delta},\tag{2.8}$$

где интеграл (наименьшая кратность которого есть 2, а наибольшая равна 6) берется и по всей массе тела T_1 и по всей массе тела T_2. В общем случае U есть функция 12 независимых между собою переменных

$$\left.\begin{matrix} \xi_1, & \eta_1, & \zeta_1, & \psi_1, & \varphi_1, & \vartheta_1, \\ \xi_2, & \eta_2, & \zeta_2, & \psi_2, & \varphi_2, & \vartheta_2, \end{matrix}\right\} \qquad (2.9)$$

но число переменных может быть в некоторых случаях и меньше 12.

Например, если одно из тел рассматривается как неподвижное, то U будет функцией только шести координат другого тела. Если одно тело неподвижно, а другое сохраняет неизменную ориентацию в пространстве, то U есть функция только трех координат центра приведения другого тела и т. д.

В любой области пространства, не включающей в себя точек тел T_1 и T_2, интеграл в формуле (2.8) есть собственный и функция U (так же как и всякая ее частная производная по любым из координат тел T_1 и T_2), конечна, непрерывна и однозначна.

Формулы, определяющие составляющие сил притяжений и их моментов,

$$\left.\begin{matrix} \Xi_1 = \dfrac{\partial U}{\partial \xi_1}, & \mathrm{H}_1 = \dfrac{\partial U}{\partial \eta_1}, & \mathrm{Z}_1 = \dfrac{\partial U}{\partial \zeta_1}, \\ L^{(1)}_{\psi_1} = \dfrac{\partial U}{\partial \psi_1}, & L^{(1)}_{\varphi_1} = \dfrac{\partial U}{\partial \varphi_1}, & L^{(1)}_{\vartheta_1} = \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta_1}, \\ \Xi_2 = \dfrac{\partial U}{\partial \xi_2}, & \mathrm{H}_2 = \dfrac{\partial U}{\partial \eta_2}, & \mathrm{Z}_2 = \dfrac{\partial U}{\partial \zeta_2}, \\ L^{(2)}_{\psi_2} = \dfrac{\partial U}{\partial \psi_2}, & L^{(2)}_{\varphi_2} = \dfrac{\partial U}{\partial \varphi_2}, & L^{(2)}_{\vartheta_2} = \dfrac{\partial U}{\partial \vartheta_2} \end{matrix}\right\} \qquad (2.10)$$

справедливы во всем пространстве, за исключением общих точек тел T_1 и T_2.

2. Рассмотрим теперь взаимное притяжение двух тел, когда расстояние между ними весьма велико по сравнению с их линейными размерами.

Пусть $G_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ и $G_2(\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ суть точки, жестко связанные с T_1 и T_2 соответственно (центры приведения), а $M_1(x'_1, y'_1, z'_1)$ и $M_2(x'_2, y'_2, z'_2)$—текущие точки этих тел. Положим

$$\overline{G_1G_2} = R, \quad \overline{G_1M_1} = R'_1, \quad \overline{G_2M_2} = R'_2,$$
$$\overline{G_1M_2} = R_1, \quad \overline{G_2M_1} = R_2,$$

тогда из треугольников $G_1M_1M_2$, $G_1M_1G_2$, $G_2M_2M_1$ и $G_2M_2G_1$ (рис. 4) имеем

$$R_1 - R_1' < \Delta < R_1 + R_1',$$
$$R_2 - R_2' < \Delta < R_2 + R_2',$$
$$R_2 - R_1' < R < R_2 + R_1',$$
$$R_1 - R_2' < R < R_1 + R_2',$$

откуда находим

$$R - R_1' - R_2' < \Delta < R + R_1' + R_2'.$$

Обозначая теперь через $\overline{R}$ наибольшее из всех возможных расстояний R_1' и R_2', перепишем последнее неравенство в следующем виде:

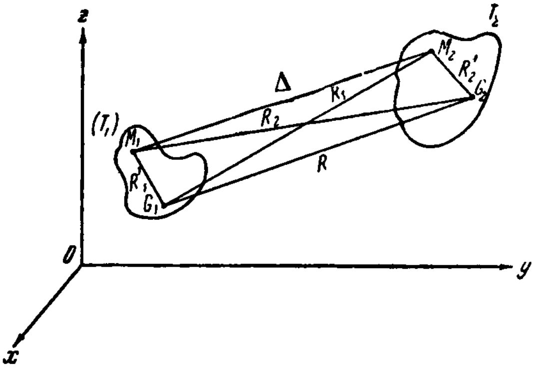


Рис. 4.

$$R - 2\overline{R} < \Delta < R + 2\overline{R},$$

откуда следует, что *)

$$\frac{R}{R+2\overline{R}} < \frac{R}{\Delta} < \frac{R}{R-2\overline{R}}.$$

Умножая все части последнего неравенства на положительную величину $f\,dm_1\,dm_2$ и интегрируя по всей массе тела T_1 и по всей массе тела T_2, получим неравенство

$$\frac{fRm_1m_2}{R+2\overline{R}} < RU < \frac{fRm_1m_2}{R-2\overline{R}},$$

откуда выводим

$$\lim_{R\to\infty} (RU) = fm_1m_2. \qquad (2.5')$$

---

*) Предполагается, конечно, что $R \gg \overline{R}$, т. е. что тела весьма удалены друг от друга.

Далее, так же как и выше, найдем

$$\lim_{R\to\infty}\left|R^2\frac{\partial U}{\partial \xi_1}\right| \leqslant fm_1m_2, \ \ldots,$$

$$\lim_{R\to\infty}\left|R^2\frac{\partial U}{\partial \xi_2}\right| \leqslant fm_1m_2, \ \ldots$$

Теперь из треугольников $G_1M_1M_2$ и $G_1G_2M_2$ имеем

$$\Delta^2 = R_1^2 + R_1'^2 - 2R_1R_1'\cos\omega_1; \qquad \omega_1 = \angle M_1G_1M_2,$$

$$R_1^2 = R^2 + R_2'^2 - 2RR_2'\cos\omega_2; \qquad \omega_2 = \angle G_1G_2M_2,$$

откуда выводим

$$R^2\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial R} = -\frac{R^2}{\Delta^2}\cdot\frac{R - R_2'\cos\omega_2}{\Delta}\left(1 + \frac{R_1'}{R_1}\cos\omega_1\right),$$

с помощью чего получим

$$\lim_{R\to\infty}\left(R^2\frac{\partial U}{\partial R}\right) = \lim_{R\to\infty}\left\{fR^2\int\limits_{(T_1)}\int\limits_{(T_2)}\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial R}\,dm_1\,dm_2\right\} = -fm_1m_2.$$

Из полученных соотношений вытекает следующее важное следствие:

Следствие. Если расстояние R достаточно велико по сравнению с линейными размерами обоих тел T_1 и T_2, то имеем следующие приближенные равенства:

$$U \approx f\frac{m_1m_2}{R}, \quad \frac{\partial U}{\partial R} \approx -f\frac{m_1m_2}{R^2}, \tag{2.6'}$$

которые показывают, что два достаточно удаленных друг от друга, совершенно произвольных по форме и структуре тела T_1 и T_2 притягиваются взаимно почти так же, как две материальные точки, массы которых равны массам тел m_1 и m_2 и расстояние между которыми равно R.

Этот чрезвычайно важный результат показывает, что в ряде случаев можно совершенно отвлечься от формы и структуры взаимно притягивающихся тел и рассматривать эти тела просто как материальные точки, повинующиеся в точности закону притяжения Ньютона.

Заметим, что этот вывод будет справедлив также и для случая системы какого угодно конечного числа взаимно притягивающихся тел, лишь бы все их взаимные расстояния были достаточно велики по сравнению с линейными размерами каждого из них.

Поэтому, например, все большие планеты и Солнце, образующие основную часть нашей солнечной системы и находящиеся, как известно, на очень больших расстояниях друг от друга (значительно больших, чем диаметр самого Солнца), могут рассматриваться в небесной механике как материальные точки, что значительно упрощает постановку задачи о движении этих тел.

С другой стороны, следует всегда иметь в виду, что в случаях, когда расстояние между телами сравнимо с их линейными размерами, то замена тел материальными точками недопустима, так как может привести к весьма значительным ошибкам при изучении их движений.

Так, например, при изучении движений близких спутников планет, или близких искусственных спутников Земли, Луны и т. п., невозможно рассматривать центральное тело как материальную точку и необходимо принимать во внимание его форму и структуру.

3. Отметим, наконец, что, рассматривая силовую функцию U, определенную формулой (2.8), где

$$\Delta = \sqrt{(x_1' - x_2')^2 + (y_1' - y_2')^2 + (z_1' - z_2')^2},$$

как функцию только координат точки G_1 или как функцию только координат точки G_2, мы получим в силу формул, подобных формулам (1.26), следующие равенства:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta_1^2} = 0$$

и

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta_2^2} = 0.$$

Действительно, по формулам (1.26), в которых нужно только все координаты снабдить нижними индексами 1 или 2, а все направляющие косинусы такими же верхними индексами, мы будем иметь, например,

$$\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial \xi_1^2} = \frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial x_1'^2}$$

и аналогично по двум другим координатам. Но

$$\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial y_1'^2} + \frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial z_1'^2} = 0,$$

а поэтому

$$\nabla U(\xi_1, \eta_1, \zeta_1) = f \int\limits_{(T_1)} \int\limits_{(T_2)} \left[\frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial \eta_1^2} + \frac{\partial^2 \Delta^{-1}}{\partial \zeta_1^2} \right] dm_1\, dm_2 = 0$$

Полученные равенства показывают, что $U(G_1)$ и $U(G_2)$ суть гармонические функции во всем внешнем относительно тел T_1 и T_2 пространстве *).

§ 3. Свойства притяжения вблизи и внутри притягивающей массы

1. Рассматривая в § 1 этой главы свойства притяжения во внешнем относительно притягивающих масс пространстве, мы имели возможность не обращать внимания на число измерений притягивающего тела или притягивающихся тел. Действительно, мы показали, что силовое поле любого материального тела (одномерного, двумерного или трехмерного) обладает во внешнем пространстве одними и теми же общими свойствами, не зависящими вдобавок от формы и физического строения тела.

Переходя теперь к рассмотрению свойств притяжения в непосредственной близости от притягивающей материи и внутри нее, мы должны уже принимать во внимание размерность тела, так как последняя, как мы увидим, весьма существенно влияет на свойства силовой функции и ее производных.

Мы будем рассматривать только простейший случай, когда одно из двух притягивающихся тел есть безразмерная материальная частица (материальная точка!), а другое — произвольное материальное тело конечных размеров и с непрерывной плотностью (линейной, поверхностной или объемной).

Исследование будет заключаться в изучении поведения силовой функции взаимного притяжения тела и точки, а также составляющих силы притяжения, когда точка, находясь сначала во внешнем пространстве, неограниченно приближается к телу, а затем и проникает внутрь тела, делаясь частью его массы, но не утрачивая своей собственной индивидуальности. Иными словами, мы будем исследовать силовое поле притягивающего тела в непосредственной окрестности и внутри тела, так как силовое поле вне тела в существенных чертах уже известно.

Поэтому здесь мы будем преимущественно рассматривать тело T как притягивающее, а материальную точку P, массу которой примем для упрощения равной единице, как притягиваемую. Таким образом, мы можем предполагать, что тело T неподвижно относительно некоторой неизменной системы координат $Oxyz$, которую будем выбирать иногда для большей простоты каким-либо особым образом. Следовательно, силовая функция и составляющие силы притяжения будут рассматриваться как

---

*) Гармонической функцией в бесконечной области трехмерного пространства называется функция, правильная в этой области, регулярная на бесконечности и удовлетворяющая во всех точках области уравнению Лапласа.

функции только от координат притягиваемой точки P, хотя будут зависеть также от параметров, характеризующих форму тела, его размеры и его физическое строение.

В этом параграфе мы рассмотрим случаи, когда тело T есть материальная линия или материальная поверхность (простой слой).

Пусть C — заданная дуга пространственной кривой, «нагруженная» притягивающей материей с линейной плотностью δ, которая есть непрерывная функция точки M дуги C. Силовая функция притяжения этой материальной линии и материальной точки P, единичной массы, определится, как уже известно, формулой

$$U(P)=f\int\limits_{(C)}\frac{\delta(M)\,ds}{\Delta}$$

и является некоторой определенной функцией координат x, y, z притягиваемой точки P.

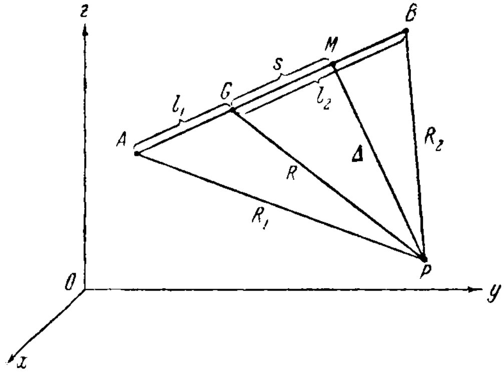


Рис. 5.

Для изучения свойств этой функции, когда точка P, оставаясь вне линии C, стремится к некоторой определенной ее точке, разберем сначала наипростейший частный случай.

Пусть C есть отрезок прямой линии $\overrightarrow{AB}$ с началом в точке A, а плотность δ есть величина постоянная.

Пусть $G(\xi,\ \eta,\ \zeta)$ есть произвольная внутренняя точка отрезка $\overrightarrow{AB}$, а α_1, α_2, α_3 — его направляющие косинусы (рис. 5). Положим

$$\overline{MG}=s,\quad \overline{AG}=l_1,\quad \overline{GB}=l_2,$$
$$\overline{PG}^2=R^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2,$$
$$\nu=\cos(\overrightarrow{PG},\ \overrightarrow{AB})=\alpha_1\frac{\xi-x}{R}+\alpha_2\frac{\eta-y}{R}+\alpha_3\frac{\zeta-z}{R},$$

тогда

$$\Delta=\sqrt{R^2+s^2+2R\nu s},$$

и силовая функция материального отрезка $\overline{AB}$ на точку P определится формулой $[m=\delta(l_1+l_2)]$

$$U=\frac{fm}{l_1+l_2}\int\limits_{-l_1}^{l_2}\frac{ds}{\sqrt{R^2+s^2+2R\nu s}}\,.$$

Этот интеграл легко вычисляется, так что U может быть представлена в конечном виде *):

$$U = \frac{fm}{l_1 + l_2} \ln \frac{R_2 + l_2 + R\nu}{R_1 - l_1 + R\nu},$$

где положено, сверх того,

$$R_1^2 = \overline{PA}^2 = R^2 + l_1^2 - 2Rl_1\nu,$$
$$R_2^2 = \overline{PB}^2 = R^2 + l_2^2 + 2Rl_2\nu.$$

Дифференцируя U, например, по координате x, мы получим выражение для составляющей X силы притяжения, действующей на точку P:

$$X = \frac{fm}{l_1 + l_2} \left\{ \frac{x - \xi - \alpha_1 (R_2 + l_2)}{R_2 (R_2 + l_2 + R\nu)} - \frac{x - \xi - \alpha_1 (R_1 - l_1)}{R_1 (R_1 - l_1 + R\nu)} \right\},$$

и аналогичные выражения для двух других составляющих.

Пусть теперь точка P приближается по любому пути к точке G. Тогда

$$R \to 0, \quad R_1 \to l_1, \quad R_2 \to l,$$

и мы имеем

$$U \to \ln(\infty), \quad RU \to 0, \quad |X| \to \infty.$$

Таким образом, внутренние точки отрезка $\overline{AB}$ (включая его концы A и B) являются особыми точками силового поля материального отрезка. Силовая функция U, а также составляющие силы притяжения неограниченно растут, когда точка P приближается к отрезку $\overline{AB}$. Следует отметить, впрочем, что функция U растет как логарифм, т. е. весьма медленно, а функция X растет как обратное расстояние, т. е. также медленнее, чем растет составляющая силы притяжения материальной точки G, масса которой равна m.

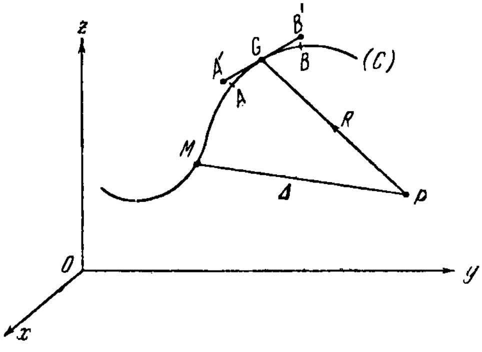


Рис. 6.

Вернемся теперь к формуле, определяющей силовую функцию произвольной материальной линии.

Пусть G — любая внутренняя точка дуги C. Допустим, далее, что линия C имеет в точке G определенную касательную. Выделим весьма малый кусок дуги $\overset{\frown}{AB}$ линии C (рис. 6), содержащий

---

*) Обратим внимание на то, что здесь мы имеем один из немногих случаев, когда силовая функция выражается в конечном виде и притом достаточно простой формулой.

внутри себя точку G. Благодаря малости куска дуги $\overset{\frown}{AB}$ и непрерывности линейной плотности δ этот кусок можно заменить весьма малым куском касательной, проведенной в точке G, и считать, что этот малый материальный отрезок имеет постоянную плотность.

Представляя U в виде ($\hat{C} = C - \overset{\frown}{AB}$)

$$U = f \int\limits_{(\hat{C})} \frac{dm}{\Delta} + f \int\limits_{(\overset{\frown}{AB})} \frac{dm}{\Delta},$$

мы видим, что первый интеграл остается конечным, когда точка P приближается к G, так как G есть внешняя точка области интегрирования $\hat{C}$, а второй интеграл неограниченно растет.

Отсюда непосредственно следует, что когда точка P приближается по любому пути к точке G линии C, то и силовая функция U, и составляющие силы притяжения, действующей на точку P, неограниченно растут, но рост этот весьма медленный, так же как и в случае однородного материального отрезка.

Если точка G есть угловая точка линии C, то в ней можно провести две различные касательные. Рассматривая любую из этих двух касательных, убедимся, так же как и выше, что эта угловая точка также является особой точкой силового поля материальной линии.

2. Перейдем к рассмотрению материальной поверхности. Пусть на поверхности S распределен простой слой непрерывной плотности $\delta(M)$. Силовая функция U этого простого слоя на точку $P(x, y, z)$ единичной массы определится формулой

$$U(P) = f \iint\limits_{(S)} \frac{\delta(M)\, d\sigma}{\Delta}.$$

Чтобы исследовать свойства функции $U(P)$, когда точка P приближается к какой-либо точке M_0 поверхности S, рассмотрим сначала, так же как мы это делали выше, наипростейший случай однородного простого слоя, распределенного на круглом плоском диске радиуса a. Однако в этом случае уже не удается получить конечное выражение для силовой функции диска на произвольную точку P пространства, и мы вынуждены внести в наше рассмотрение дополнительные упрощения.

А именно, мы будем рассматривать силовую функцию диска на точку P, лежащую где-нибудь на перпендикуляре к плоскости диска, проходящем через его центр (рис. 7).

Выберем систему координат $Oxyz$ специальным образом, а именно—возьмем начало координат в центре диска и ось аппликат направим по перпендикуляру к его плоскости. Пусть M—

текущая точка на диске, а ρ и v — ее полярные координаты. Тогда

$$d\sigma = \rho\, d\rho\, dv$$

и силовая функция диска на точку $P(z)$, лежащую на оси аппликат, определится очевидной формулой

$$U(z) = f\delta \int_0^{2\pi} dv \int_0^a \frac{d\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}.$$

Выполняя интегрирование, мы получим

$$U(z) = 2\pi f\delta \left[\sqrt{a^2+z^2} - \sqrt{z^2}\right].$$

Из найденного выражения следует, что составляющие силы притяжения, действующей на точку P, будут

$$X = Y = 0, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z} = 2\pi f\delta \left[\frac{z}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2}}\right].$$

Рассматривая полученные выражения, мы видим, что силовая функция U остается конечной и непрерывной, когда точка P, оставаясь на оси Oz, приближается к диску, т. е. к началу координат. В самом деле,

$$\lim_{z\to 0} U(z) = 2\pi f\delta a = U(0).$$

Таким образом, силовая функция простого однородного слоя, лежащего на круглом диске, конечна, непрерывна и однозначна во всем пространстве.

Следовательно, материальная линия и материальная поверхность резко отличаются друг от друга по свойствам силовой функции.

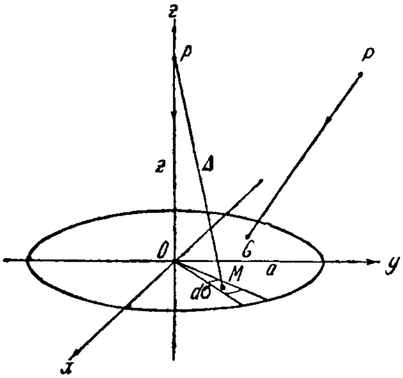


Рис. 7.

Рассматривая теперь составляющую силы притяжения по нормали к плоскости диска (т. е. производную от $U(z)$ по z), мы немедленно убеждаемся, что эта составляющая также конечна во всем пространстве, но терпит разрыв первого рода в начале координат.

Действительно, когда z остается положительным, то $\sqrt{z^2} = z$, и, вычисляя предел составляющей Z при $z \to +0$, мы получим

$$\lim_{z\to +0} Z = \lim_{z\to +0} \frac{\partial U}{\partial z} = -2\pi f\delta.$$

Наоборот, когда z остается отрицательным, то $\sqrt{z^2}=-z$, и мы найдем

$$\lim_{z\to -0} Z=\lim_{z\to -0}\frac{\partial U}{\partial z}=+2\pi f\delta.$$

Следовательно, составляющая силы притяжения по нормали к плоскости диска, или нормальная производная силовой функции, имеет разрыв первого рода в центре диска и величина «скачка» равна

$$d=\lim_{z\to +0} Z-\lim_{z\to -0} Z=-4\pi f\delta.$$

Две остальные составляющие, разумеется, остаются непрерывными.

Подобный же результат, только более длинным и сложным образом, можно получить и для случая любого положения точки P, приближающейся к какой-либо точке G диска по любому пути. Составляющие силы притяжения по любым направлениям, параллельным плоскости диска, остаются конечными, непрерывными и однозначными, когда точка $P\to G$, а составляющая по нормали к плоскости диска терпит скачок, когда точка P проходит через слой, лежащий на диске.

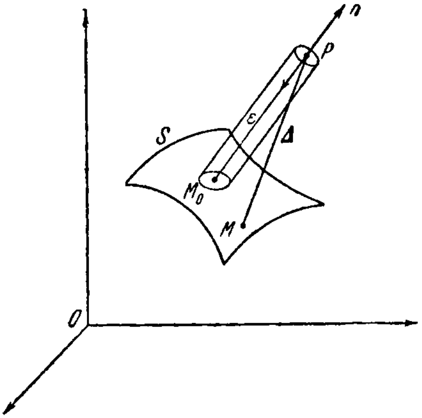


Рис. 8.

Возвратимся теперь к силовой функции произвольного простого слоя непрерывной плотности, распределенного на куске гладкой поверхности S, и покажем при помощи простых рассуждений, что и в этом случае силовая функция и ее нормальная производная ведут себя так же, как в случае однородного диска.

Пусть M_0 — любая внутренняя точка поверхности S и $\delta_0=\delta(M_0)$ — плотность слоя в этой точке. Проведем к поверхности S касательную плоскость и нормаль, на которой установим положительное направление (см. рис. 8, на котором положительное направление нормали n обозначено стрелкой). Пусть притягиваемая точка P лежит на этой нормали и ее расстояние до M_0 есть ε. Вообразим, далее, прямой круглый цилиндр малого радиуса a, осью которого является нормаль, проведенная в точке M_0. Обозначим через S_1 и $\bar{S}_1$ части поверхности и касательной плоскости, вырезаемые этим цилиндром, а через S_2 — остальную часть поверхности S.

Обозначим, далее, через U_1, U_2, $\overline{U}_1$ соответственно силовые функции слоев, лежащих на S_1 и S_2 и однородного слоя с плотностью δ_0, лежащего на круглом диске $\overline{S}_1$ с центром в точке M_0. Тогда

$$U(P)=U_1(P)+U_2(P),$$

а полагая

$$\overline{U}(P)=\overline{U}_1(P)+\overline{U}_2(P),$$

будем иметь, очевидно,

$$\lim_{a\to 0}\overline{U}(P)=U(P).$$

Найдем предел, к которому стремится $U(P)$, когда точка P, перемещаясь по положительной или по отрицательной нормали, неограниченно приближается к точке M_0.

Мы можем написать

$$\lim_{\varepsilon\to\pm 0}U(P)=\lim_{\varepsilon\to\pm 0}\left[\lim_{a\to 0}\overline{U}(P)\right]=\lim_{a\to 0}\left[\lim_{\varepsilon\to\pm 0}\overline{U}(P)\right].$$

Но точка M_0 есть центр диска $\overline{S}_1$ и одновременно является внешней точкой для слоя, лежащего на S_2. Поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to\pm 0}\overline{U}(P)=2\pi f\,\delta_0 a+U_2(M_0),$$

и, следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to\pm 0}U(P)=\lim_{a\to 0}\left[2\pi f\,\delta_0 a+U_2(M_0)\right]=U(M_0),$$

отсюда следует, что силовая функция $U(P)$ остается конечной и непрерывной, когда точка P приближается к точке M_0 поверхности S.

Обозначая теперь через $N=\frac{\partial U}{\partial n}$ составляющую силы притяжения слоя по нормали к поверхности S, мы найдем подобным же образом, что

$$\lim_{\varepsilon\to\pm 0}N(P)=\lim_{\varepsilon\to\pm 0}\left[\lim_{a\to 0}\overline{N}(P)\right]=\lim_{a\to 0}\left[\lim_{\varepsilon\to\pm 0}\overline{N}(P)\right].$$

Учитывая выведенное выше свойство силовой функции однородного диска и помня, что M_0 есть внешняя точка для S_2, мы имеем

$$\lim_{\varepsilon\to\pm 0}\overline{N}(P)=\mp 2\pi f\delta_0+N_2(M_0),$$

откуда, следовательно, получим

$$\lim_{\varepsilon\to\pm 0}N(P)=\lim_{a\to 0}\left[\mp 2\pi f\,\delta_0+N_2(M_0)\right]=\mp 2\pi f\,\delta_0+N(M_0).$$

Таким образом, нормальная составляющая силы притяжения слоя имеет разрыв первого рода в точке M_0 поверхности S, причем величина «скачка» равна

$$d = \lim_{\varepsilon \to +0} N(P) - \lim_{\varepsilon \to -0} N(P) = -4\pi f\delta_0.$$

Величина $N(M_0)$ определяется по формуле

$$N(M_0) = f \iint\limits_{(S)} \delta(M) \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial n} d\sigma$$

и называется прямым значением нормальной составляющей силы притяжения или нормальной производной от силовой функции.

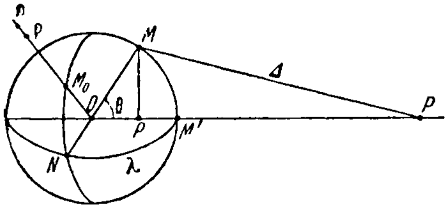


Рис. 9.

Примечание. Можно показать, на чем мы, однако, не будем останавливаться, что составляющие X, Y, Z силы притяжения простого слоя, действующей на точку P, также разрывны в точке M_0 поверхности S и величины их «скачков» равны соответственно *)

$$d_x = \lim_{\varepsilon \to +0} X(P) - \lim_{\varepsilon \to -0} X(P) = -4\pi f\delta_0\alpha_1,$$

$$d_y = \lim_{\varepsilon \to +0} Y(P) - \lim_{\varepsilon \to -0} Y(P) = -4\pi f\delta_0\alpha_2,$$

$$d_z = \lim_{\varepsilon \to +0} Z(P) - \lim_{\varepsilon \to -0} Z(P) = -4\pi f\delta_0\alpha_3,$$

где α_1, α_2, α_3 — направляющие косинусы положительной нормали к поверхности S в точке M_0.

3. Для иллюстрации свойств силовой функции простого слоя рассмотрим однородный простой слой, лежащий на сфере Σ радиуса a. Пусть O — центр сферы, M — текущая точка его поверхности и P—притягиваемая точка, не лежащая на Σ (рис. 9). Обозначим угол между $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OP}$ через θ, а через λ — угол, образованный плоскостью OMP с плоскостью некоторого меридиана сферы, принимаемого за начальный **). Тогда элемент поверхности сферы в точке M будет

$$d\sigma = a^2 \sin\theta \, d\theta \, d\lambda$$

---

*) См., например, Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала.

**) На рис. 9 точки M и P лежат в плоскости чертежа.

и силовая функция определится формулой

$$U(P)=fa^2\delta\int_0^{2\pi}d\lambda\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{\Delta}=2\pi fa^2\delta\int_0^{\pi}\frac{\sin\theta\,d\theta}{\Delta}.$$

Для вычисления интеграла введем вместо переменной интегрирования θ новую переменную Δ. Обозначая расстояние точки P до O через R, имеем из треугольника OMP

$$\Delta^2=R^2+a^2-2aR\cos\theta,$$

откуда выводим

$$\frac{\sin\theta\,d\theta}{R}=\frac{d\Delta}{aR}.$$

Если точка P находится во внутренней полости слоя, то $0\leqslant R<a$, и мы найдем

$$U(P)=\frac{2\pi fa^2\delta}{aR}\int_{a-R}^{a+R}d\Delta=\frac{fm}{a};$$

если же точка P лежит вне сферы Σ, т. е. если $R>a$, то получим

$$U(P)=\frac{2\pi fa^2\delta}{aR}\int_{R-a}^{R+a}d\Delta=\frac{fm}{R},$$

где $m=4\pi a^2\delta$ есть полная масса слоя.

Будем теперь приближать точку P к некоторой фиксированной точке M_0 сферы Σ *).

Если P приближается к M_0, оставаясь внутри сферы Σ, то $U(P)$ остается постоянной и ее предельное значение равно той же самой постоянной.

Если P приближается к M_0, оставаясь вне сферы, то $R\to a$ и мы получим тот же предел.

Таким образом, в обоих случаях

$$\lim_{P\to M_0}U(P)=\frac{fm}{a}=4\pi f\delta a,$$

т. е. силовая функция остается непрерывной, когда точка P пересекает поверхность Σ, на которой лежит слой.

Далее, примем за положительную нормаль к сфере ее внешнюю нормаль. Тогда направление этой нормали совпадает с направлением $\overrightarrow{OP}$, и мы найдем

$$\frac{\partial U}{\partial R}=0\qquad(0\leqslant R\leqslant a)$$

---

*) На рис. 9 для упрощения чертежа точка M_0 помещена на начальном меридиане сферы, или, если угодно, начальный меридиан проведен через данную точку M_0.

и

$$\frac{\partial U}{\partial R} = -\frac{fm}{R^2} \qquad (R > a),$$

откуда получим

$$\lim_{R \to a-0} \frac{\partial U}{\partial R} = 0, \qquad \lim_{R \to a+0} \frac{\partial U}{\partial R} = -\frac{fm}{a^2} = -4\pi f \delta.$$

Таким образом, нормальная (или радиальная) составляющая силы притяжения слоя действительно имеет разрыв первого рода в точке сферы M_0 и величина «скачка» равна $-4\pi f \delta$.

Легко проверить прямым вычислением производной $\frac{\partial U}{\partial R}$, что ее прямое значение в точке M_0 сферы равно нулю.

Полученные результаты показывают, что когда точка P находится внутри сферы Σ (т. е. во внутренней полости слоя), то она вовсе не испытывает притяжения со стороны слоя *), а когда точка P находится вне сферы Σ, то слой, лежащий на сфере, притягивает эту точку так, как будто вся масса слоя была сконцентрирована в его центре.

§ 4. Свойства потенциала двойного слоя

1. Рассмотрим поведение потенциала двойного слоя непрерывной плотности, распределенного на некоторой гладкой поверхности, в каждой точке которой существует, следовательно, определенная касательная плоскость.

Пусть P — точка, не лежащая на поверхности S. Потенциал двойного слоя, распределенного на этой поверхности с плотностью $\mu(M)$, определяется формулой

$$W(P) = f \iint_{(S)} \mu(M) \frac{\cos\varphi}{\Delta^2} \, d\sigma.$$

Рассмотрим сначала частный случай двойного слоя, распределенного на круглом диске с постоянной плотностью, и пусть точка P лежит на перпендикуляре к плоскости диска, проведенном через его центр (см. опять рис. 7). Считая, что положительная нормаль к плоскости диска совпадает с направлением оси $\overrightarrow{Oz}$, мы имеем

$$\Delta^2 = \rho^2 + z^2, \qquad \cos\varphi = -\frac{z}{\Delta},$$

---

*) Этот результат представляет теорему Ньютона в ее частной формулировке для сферического слоя. Более общая теорема Ньютона будет рассмотрена в гл. III.

а поэтому формула для $W(P)$ дает

$$W(P) = -f\mu z \int_0^{2\pi} dv \int_0^a \frac{2\rho\, d\rho}{(z^2+\rho^2)^{3/2}},$$

откуда находим

$$W(P) = 2\pi f\mu z\left[\frac{1}{\sqrt{z^2+\rho^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2}}\right],$$

что совпадает с точностью до постоянного множителя с выражением нормальной производной потенциала простого слоя, лежащего на том же диске. Следовательно, и конечный результат будет тот же, а именно, что функция W терпит разрыв первого рода, когда точка P, перемещаясь по нормали к диску, пересекает его плоскость.

Мы придем к такому же результату и в общем случае, повторяя рассуждения, относящиеся к произвольному простому слою и используя рис. 8.

2. Рассмотрим еще случай *однородного* двойного слоя, распределенного на некоторой *замкнутой* поверхности S.

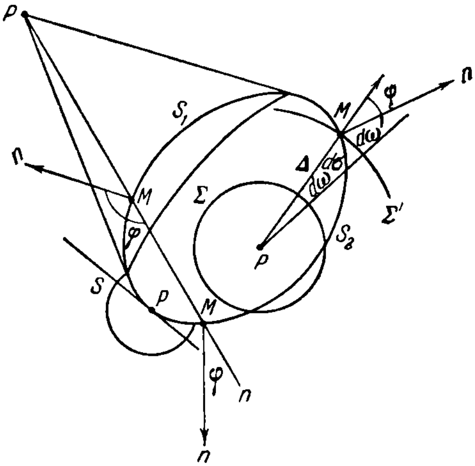


Рис. 10.

Тогда имеет место следующая важная теорема, впервые доказанная Гауссом.

Теорема Гаусса. *Потенциал двойного слоя постоянной плотности μ, лежащего на гладкой замкнутой поверхности S, равен нулю, когда точка P лежит вне поверхности S, равен $4\pi f\mu$, когда P лежит внутри S, и равен $2\pi f\mu$, когда P лежит на S.*

Докажем сначала эту теорему чисто геометрическим путем. Пусть P есть внутренняя точка (рис. 10). Вообразим сферу Σ единичного радиуса с центром в P и обозначим через $d\omega$ элемент поверхности этой сферы. Построим затем бесконечно тонкий конус с вершиной в P, направляющей которого служит контур элемента $d\omega$ на сфере Σ. Площадь куска поверхности S, вырезаемого этим конусом, обозначим через $d\sigma$ и примем за элемент поверхности S.

Величина $d\omega$ будет вместе с тем телесным углом, под которым из точки P виден элемент $d\sigma$, принадлежащий S и соответствующий текущей точке M. Вообразим еще другую сферу Σ', также с центром в P, но с радиусом, равным расстоянию точки P от точки M, которое есть Δ. Элемент поверхности сферы Σ' можно рассматривать как проекцию элемента $d\sigma$ поверхности S на сферу Σ'. Обозначая величину этой проекции через $d\omega'$, имеем $d\omega' = \pm\cos\varphi d\sigma$, где φ — угол между направлением внешней нормали к S и направлением $\overrightarrow{PM}$, а знак выбирается так, чтобы элемент $d\omega'$ был положителен. С другой стороны, $d\omega' = \Delta^2 d\omega$, поэтому

$$d\omega = \frac{d\omega'}{\Delta^2} = \pm \frac{\cos\varphi}{\Delta^2} d\sigma. \tag{2.11}$$

Если точка P лежит, как предположено, внутри S и поверхность S выпукла по отношению к этой точке*), то (как это видно и на рис. 10) $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $\cos\varphi \geqslant 0$. Перенося теперь в выражении для W интегрирование с S на Σ, имеем с помощью (2.11)

$$W(P) = f\mu \int\limits_{(\Sigma)}\int d\omega = 4\pi f\mu.$$

Пусть теперь точка P лежит вне поверхности S и пусть всякая прямая, проходящая через P, пересекает S только в двух точках (см. рис. 10). Опишем вокруг поверхности S касательный конус с вершиной в P. Линия касания этого конуса с поверхностью разделит S на две части, одна из которых ближе к P, а другая дальше от P и которые обозначим через S_1 и S_2.

Тогда

$$W(P) = f\mu \int\limits_{(S_1)}\int \frac{\cos\varphi}{\Delta^2} d\sigma + f\mu \int\limits_{(S_2)}\int \frac{\cos\varphi}{\Delta^2} d\sigma.$$

Но, как легко видеть, в точках S_1 угол φ тупой, а в точках S_2 угол φ — острый. Так как каждый из двух интегралов численно равен телесному углу, под которым из точки P видна вся поверхность S, то оба слагаемых в выражении для W будут равны по величине и противоположны по знаку, а поэтому интеграл, взятый по всей поверхности S, равен нулю.

Пусть, наконец, точка P лежит на поверхности S (см. рис. 10). Отметим прежде всего, что $W(P)$ имеет конечное значение. Действительно, подынтегральная функция равна, согласно формуле (2.11), элементарному телесному углу $d\omega$, под кото-

---

*) То есть всякая прямая, проведенная через точку P, пересекает поверхность S только в одной точке.

рым из точки P поверхности S виден произвольный элемент $d\sigma$ этой же поверхности, соответствующий текущей точке M.

Поэтому интеграл равен в этом случае тому телесному углу, под которым из точки P поверхности видна вся эта поверхность S. Так как, по условию, поверхность S гладкая, то в точке P существует определенная касательная плоскость и, следовательно, упомянутый телесный угол равен 2π, а значит, $W(P)=2\pi f\mu$.

Нетрудно рассмотреть таким же образом и случаи, когда поверхность S не является выпуклой относительно внутренней точки или когда некоторые прямые, проходящие через внешнюю точку, встречают поверхность более чем в двух точках.

Мы не будем рассматривать эти случаи, так как они включаются в другое доказательство теоремы Гаусса, которое можно назвать аналитическим и к которому мы сейчас переходим.

3. Определим потенциал однородного двойного слоя, лежащего на замкнутой поверхности S, формулой (1.21), т. е. ($\mu=\text{const}$)

$$W(P)=-f\mu\iint\limits_{(S)}\left(\alpha'\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x'}+\beta'\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y'}+\gamma'\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z'}\right)d\sigma$$

и рассмотрим здесь сначала случай, когда точка P лежит вне S. Тогда функции

$$\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x'}=\frac{x-x'}{\Delta^3},\quad \frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y'}=\frac{y-y'}{\Delta^3},\quad \frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z'}=\frac{z-z'}{\Delta^3},$$

рассматриваемые как функции координат текущей точки M, конечны, непрерывны и однозначны в области D, ограниченной поверхностью S и на самой поверхности. Поэтому мы можем применить к нашему двойному интегралу известную в анализе формулу Остроградского и преобразовать с помощью этой формулы двойной интеграл в тройной, взятый по всей области D *).

Таким образом, получим

$$W(P)=-\iiint\limits_{(D)}\left[\frac{\partial^2\frac{f\mu}{\Delta}}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\frac{f\mu}{\Delta}}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2\frac{f\mu}{\Delta}}{\partial z'^2}\right]d\tau.$$

---

*) Формула Остроградского пишется в следующем виде:

$$\iiint\limits_{(D)}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)d\tau=$$
$$=\iint\limits_{(S)}[P\cos(n,\ x)+Q\cos(n,\ y)+R\cos(n,\ z)]\,d\sigma,$$

где P, Q, R суть функции конечные, непрерывные и однозначные вместе со своими частными производными первого порядка в области D и на ее границе S, а $\cos(n,x)$, $\cos(n,y)$, $\cos(n,z)$ суть направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

Но согласно изложенному в § 2 функция $\frac{f\mu}{\Delta}$, рассматриваемая как функция координат точки M (текущей точки области D), удовлетворяет в области D уравнению Лапласа, так что

$$\frac{\partial^2 \frac{f\mu}{\Delta}}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 \frac{f\mu}{\Delta}}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 \frac{f\mu}{\Delta}}{\partial z'^2}=0.$$

Следовательно, $W(P)=0$ вне поверхности S. Пусть теперь точка P лежит внутри S. Тогда непосредственно применить формулу Остроградского нельзя, так как функции $\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x'}$, $\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y'}$, $\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z'}$ обращаются в бесконечность в точке P.

Окружим тогда точку P сферой Σ малого радиуса ε и рассмотрим интеграл

$$W'(P)=-f\mu\int\limits_{(S+\Sigma)}\int\left(\alpha'\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x'}+\beta'\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y'}+\gamma'\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z'}\right)d\sigma,$$

взятый по совокупности двух замкнутых поверхностей S и Σ. В области D', заключенной между этими двумя поверхностями, для которой P есть внешняя точка, функции $\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial x'}$, $\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial y'}$, $\frac{\partial\Delta^{-1}}{\partial z'}$ удовлетворяют условиям теоремы Остроградского и, следовательно, интеграл $W'(P)$ равен нулю. Но мы имеем

$$W'(P)=W(P)+W_\varepsilon(P),$$

где $W_\varepsilon(P)$ есть интеграл, взятый по поверхности сферы Σ с центром в точке P, который легко вычислить. Действительно,

$$W_\varepsilon(P)=f\mu\int\limits_{(\Sigma)}\int\frac{\cos\varphi}{\Delta^2}\,d\sigma,$$

но на сфере Σ имеем $\cos\varphi=-1$ и $\Delta=\varepsilon$, следовательно,

$$W_\varepsilon(P)=-\frac{f\mu}{\varepsilon^2}\int\limits_{(\Sigma)}\int d\sigma=-4\pi f\mu,$$

откуда

$$W(P)=4\pi f\mu.$$

Пусть, наконец, точка P лежит на поверхности S. Построим опять сферу Σ с центром в точке P и радиуса ε и рассмотрим область D', заключенную между поверхностью S и частью сферы Σ, погруженной в область D. Пусть S' есть та часть поверхности S, которой не принадлежит точка P, и Σ' — та часть поверхности сферы Σ, которая погружена в область D. Тогда, так же как и выше, найдем

$$W'(P) = -f\mu \iint\limits_{(S'+\Sigma')} \left(\alpha' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial z'}\right) d\sigma = 0$$

при всяком, достаточно малом ε. Поэтому также

$$\lim_{\varepsilon \to 0} W'(P) = 0,$$

но

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ -f\mu \iint\limits_{(S')} \left(\alpha' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial z'}\right) d\sigma \right\} = W(P),$$

а

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ -f\mu \iint\limits_{(\Sigma')} \left(\alpha' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x'} + \beta' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial y'} + \gamma' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial z'}\right) d\sigma \right\} = -2\pi f\mu,$$

следовательно,

$$W(P) = 2\pi f\mu$$

и теорема Гаусса доказана полностью.

Заметим, что при этом доказательстве мы не делали никаких частных предположений относительно свойств поверхности S и наше доказательство остается справедливым во всех тех случаях, когда имеет место теорема Остроградского.

§ 5. Силовая функция однородного шара

В § 3 мы рассмотрели свойства притяжения для случая, когда притягиваемая точка неограниченно приближается к какой-либо точке притягивающей материальной линии или материальной поверхности.

Мы показали, что в точках материальной линии и силовая функция и составляющие силы притяжения имеют разрыв второго рода, а во внутренних точках материальной поверхности силовая функция остается непрерывной, в то время как составляющие силы притяжения вообще претерпевают разрыв первого рода.

Теперь мы перейдем к подробному изучению наиболее важного для астрономии и, в частности, для небесной механики, случая, когда притягивающее тело имеет три измерения, т. е. является «телом» в собственном смысле этого слова.

1. В этом параграфе мы разберем сначала простой частный случай, когда притягивающее тело есть однородный шар T радиуса a с центром в точке $O(\xi, \eta, \zeta)$.

Нетрудно найти силовую функцию шара, используя результаты, полученные в конце § 3. Действительно, рассмотрим внутри шара T сферу Σ переменного радиуса r, с центром в точке O. Тогда силовая функция простого слоя, лежащего на этой сфере, определится формулой § 3, где вместо a нужно написать r, а под δ надо подразумевать объемную плотность шара.

Рассматривая весь шар как «расслоенный» на бесчисленное множество концентрических сферических слоев, мы получим силовую функцию всего шара, произведя еще одно интегрирование по r.

Пусть точка P находится вне шара, т. е. $R>a$. Тогда имеем

$$U(P)=\frac{4\pi f\delta}{R}\int_0^a r^2 dr=\frac{fm}{R},$$

где m — масса всего шара, т. е. $m={}^4/_3\pi a^3\delta$.

Пусть, далее, точка P находится внутри шара T, т. е. $0\leqslant R<a$. Разбивая промежуток интегрирования по r, т. е. $(0, a)$ на два промежутка $(0, R)$ и (R, a), мы будем иметь

$$U(P)=4\pi f\delta\left\{\frac{1}{R}\int_0^R r^2\,dr+\int_R^a r\,dr\right\}=\frac{fm}{2a^3}(3a^2-R^2).$$

Отсюда видно, что силовая функция шара на **внутреннюю точку** остается конечной и непрерывной, причем свойство непрерывности сохраняется и при переходе точки P из внешнего пространства во внутреннее или наоборот.

Найдем теперь радиальную составляющую силы притяжения шара на точку P. Непосредственное вычисление или же дифференцирование силовой функции по R дает

$$\frac{\partial U}{\partial R}=-\frac{fm}{a^3}R \qquad (0\leqslant R<a)$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial R}=-\frac{fm}{R^2} \qquad (R>a).$$

Отсюда видно, что радиальная составляющая силы притяжения также остается конечной и непрерывной внутри шара и на его поверхности. Этим свойством обладают также проекции силы притяжения по любому направлению. Действительно, примем это направление за направление оси абсцисс системы координат $O'xyz$ с началом в заданной точке O'. Тогда

$$R^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2,$$

и так как

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial R}\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{x-\xi}{R}\frac{\partial U}{\partial R},$$

то составляющая X по оси $O'x$ также конечна и непрерывна внутри шара и на его поверхности.

Из полученных результатов следует, между прочим, что однородный шар притягивает внешнюю точку P так, как будто бы вся масса шара сконцентрирована в его центре; если же точка P находится внутри шара, то она притягивается к его центру с силой, прямо пропорциональной расстоянию до центра (закон Гука).

2. Чтобы закончить исследование притяжения однородного шара, вычислим еще оператор Лапласа для силовой функции U, когда точка P находится внутри шара.

Согласно предыдущему, мы имеем при $0 \leqslant R \leqslant a$

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{fm}{a^3}(x-\xi),$$

откуда

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial z} = -\frac{fm}{a^3},$$

и, следовательно,

$$\nabla U = -\frac{3fm}{a^3} = -4\pi f\delta.$$

Таким образом, силовая функция уже не удовлетворяет внутри шара уравнению Лапласа, а является решением некоторого другого уравнения, которое имеет вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4\pi f\delta$$

и называется уравнением Пуассона.

Мы видим на этом простом примере, что свойства силовой функции трехмерного тела на внутреннюю точку отличаются от таких же свойств материальной линии или материальной поверхности.

§ 6. Свойства притяжения внутри произвольного трехмерного тела

Перейдем теперь к рассмотрению общего случая, когда тело имеет произвольную форму и произвольную структуру.

Мы будем предполагать только, что плотность тела $\delta(M)$ есть непрерывная функция текущей точки M, но и это допущение не всегда будет являться существенным и в ряде случаев его можно заменить несколько более общим предположением.

1. Итак, рассмотрим силовую функцию ньютоновского притяжения некоторого трехмерного тела T, линейные размеры которого конечны и плотность которого $\delta(x', y', z')$ есть непрерывная функция координат x', y', z' точки M.

Тогда силовая функция U на точку $P(x, y, z)$ единичной массы*) и составляющие X, Y, Z по осям произвольно выбранной,

---

*) Если масса точки есть μ, то нужно ввести множитель.

но неизменной системы координат определятся формулами *) (см. § 5 гл. I)

$$U(P)=f\iiint\limits_{(T)}\frac{\delta(M)\,d\tau}{\Delta}, \tag{2.12}$$

и

$$X(P)=f\iiint\limits_{(T)}\frac{\delta(M)(x'-x)\,d\tau}{\Delta^3}, \tag{2.13}$$

где

$$\Delta=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}.$$

Интегралы в формулах (2.12) и (2.13) оказываются несобственными, когда точка P является частью тела, а поэтому прежде всего необходимо исследовать эти интегралы на сходимость, т. е. выяснить, имеют ли они конечные значения во внутренних точках рассматриваемого тела.

В предыдущем параграфе было показано, что в случае однородного шара выражения (2.12) и (2.13) действительно остаются конечными и непрерывными, когда точка P находится внутри шара. Эти результаты без труда устанавливаются также и для случая произвольного тела, что сразу же делается ясным при помощи следующих простых соображений.

Пусть точка P есть внутренняя точка тела T. Вообразим сферу Σ с центром в P и настолько малого (но конечного!) радиуса ρ, что вся эта сфера целиком погружена в область пространства, занимаемую телом.

По непрерывности плотности δ значения функции U и X в точке P будут весьма мало отличаться от их значений при постоянной плотности в сфере Σ. Но силовая функция и составляющие силы притяжения, как было показано в § 5, конечны и непрерывны внутри однородного шара. А так как для остальной части тела T точка P является внешней, то силовая функция и составляющая силы притяжения этой остальной части заведомо конечны и непрерывны. Следовательно, и для всего тела функции U и X также будут конечны и непрерывны.

Приведенное рассуждение носит скорее описательный характер и хотя обладает наглядностью, все же не может заменить строгого доказательства, к которому теперь мы и переходим.

Обозначая, как и ранее, через α, β, γ направляющие косинусы прямой, выходящей из точки P и идущей к точке M, имеем

$$x'=x+\alpha\Delta,\quad y'=y+\beta\Delta,\quad z'=z+\gamma\Delta. \tag{2.14}$$

Эти направляющие косинусы можно, очевидно, рассматривать как координаты точки M' на сфере Ω единичного радиуса с центром в точке P, в которой прямая PM пересекает эту

---

*) Здесь и далее мы будем для сокращения рассматривать только одну из трех составляющих силы притяжения, например, $X(P)$.

сферу, а формулы (2.14) — как формулы перехода от текущих координат x', y', z' к новым переменным интегрирования α, β, γ, Δ, причем

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1.$$

Переходя к этим новым переменным, мы представим U и X в следующем виде ($d\tau=\Delta^2 d\Delta d\omega$):

$$U(P)=f\int\limits_{(\Omega)}\int d\omega\int\limits_0^R\delta(x+\alpha\Delta,\ y+\beta\Delta,\ z+\gamma\Delta)\,\Delta\,d\Delta \qquad (2.15)$$

и

$$X(P)=f\int\limits_{(\Omega)}\int d\omega\int\limits_0^R\delta(x+\alpha\Delta,\ y+\beta\Delta,\ z+\gamma\Delta)\,\alpha\,d\Delta, \qquad (2.16)$$

где $d\omega$ есть элемент площади сферы Ω единичного радиуса, а R — переменное расстояние от точки P до точек поверхности S, ограничивающей тело (рис. 11).

В формулах (2.15) и (2.16) подынтегральные функции не содержат множителем Δ^{-1}, а поэтому остаются конечными во всех точках области интегрирования. Так как область интегрирования также конечна (тело имеет конечные размеры!), то функции U и X, Y, Z имеют конечные значения в каждой внутренней точке тела.

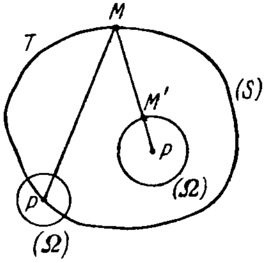


Рис. 11.

Если точка P лежит на поверхности S тела, то все эти функции также имеют конечные значения, которые определяются теми же формулами (2.15) и (2.16), но областью интегрирования в двойном интеграле будет теперь не вся сфера Ω, а только ее часть, погруженная в тело T *).

---

*) Заметим, что если тело T является однородным, т. е. если

$$\delta(M)=\text{const},$$

то формула (2.15) даст сразу

$$U(P)=\frac{1}{2}f\int\limits_{(\Omega)}\int R^2\,d\omega,$$

откуда, перенося интегрирование обратно на поверхность S, получаем следующую формулу, называемую формулой Гаусса:

$$U(P)=\frac{1}{2}f\int\limits_{(S)}\int\cos\varphi\,d\sigma,$$

представляющую силовую функцию однородного тела двойным интегралом, распространенным по поверхности тела.

Замечательное применение этой формулы можно найти в мемуаре С. В. Ковалевской, посвященному вопросу об устойчивости кольца Сатурна. См. сборник: С. В. Ковалевская, Научные работы, 1948.

Примечание. Нетрудно заметить, что функции $U(P)$ и $X(P)$ остаются также конечными и в том случае, когда плотность $\delta(M)$ не непрерывна внутри тела T, а имеет точки, линии или поверхности разрыва первого рода.

2. Покажем теперь, возвращаясь к предположению непрерывности плотности $\delta(M)$, что силовая функция U и составляющие силы притяжения X, Y, Z изменяются непрерывно при непрерывном перемещении точки P внутри тела, или когда точка P переходит из внешнего пространства внутрь тела либо наоборот.

Пусть точка P лежит внутри тела или на его поверхности S. Обозначим через P' точку, близкую к точке P и лежащую либо внутри, либо вне тела, либо на его поверхности. Мы хотим доказать, что

$$\lim_{P' \to P} U(P') = U(P)$$

и

$$\lim_{P' \to P} X(P') = X(P).$$

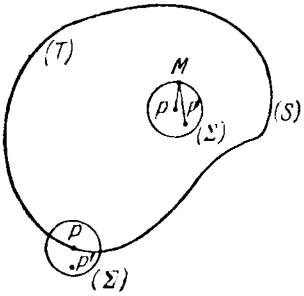


Рис. 12.

Для доказательства вообразим сферу Σ с центром в точке P малого радиуса ρ и допустим, что точка P' находится внутри этой сферы (рис. 12).

Обозначим через T_1 ту часть тела T, которая заключена внутри сферы Σ, а через T_2 — остальную часть тела T. Далее, обозначим через U_1 и X_1 силовую функцию и составляющую силы притяжения тела T_1, а через U_2 и X_2 — такие же величины, относящиеся к телу T_2. Тогда имеем

$$U(P) = U_1(P) + U_2(P), \qquad X(P) = X_1(P) + X_2(P)$$

и, следовательно, можем написать

$$U(P) - U(P') = U_1(P) - U_1(P') + U_2(P) - U_2(P') \tag{2.17}$$

и

$$X(P) - X(P') = X_1(P) - X_1(P') + X_2(P) - X_2(P'). \tag{2.18}$$

Переходим теперь к оценкам числовых значений отдельных слагаемых в этих формулах.

Применяя формулы (2.15) и (2.16) к телу T_1, имеем, обозначая через $\bar{\delta}$ наибольшее значение функции δ в сфере Σ, следующие неравенства:

$$U_1(P) < f\bar{\delta} \int\int_{(\Omega)} d\omega \int_0^{\rho} \Delta\, d\Delta = \frac{1}{2} f\rho^2\bar{\delta} \int\int_{(\Omega)} d\omega$$

и

$$|X_1(P)| < f\delta \iint\limits_{(\Omega)} d\omega \int\limits_0^\rho |\alpha|\, d\Delta < f\rho\bar{\delta} \iint\limits_{(\Omega)} d\omega.$$

Но

$$\iint\limits_{(\Omega)} d\omega \leqslant 4\pi$$

(интеграл равен 4π, если точка P лежит внутри тела, и меньше 4π, если точка P лежит на поверхности S). Поэтому

$$U_1(P) < 2\pi f\bar{\delta}\rho^2, \quad |X_1(P)| < 4\pi f\bar{\delta}\rho.$$

Точно так же найдем

$$U_1(P') < f\bar{\delta} \iint\limits_{(\Omega)} d\omega \int\limits_0^R \Delta\, d\Delta = \frac{1}{2} f\bar{\delta}R^2 \iint\limits_{(\Omega)} d\omega < 8\pi f\bar{\delta}\rho^2$$

и

$$|X_1(P')| < f\bar{\delta} \iint\limits_{(\Omega)} d\omega \int\limits_0^R |\alpha|\, d\Delta < f\bar{\delta}R \iint\limits_{(\Omega)} d\omega < 8\pi f\bar{\delta}\rho,$$

так как R не превосходит диаметра сферы 2ρ.

Пусть теперь ε — любое, сколь угодно малое положительное число. Выберем радиус сферы ρ (внутри которой находится точка P') согласно условию

$$\rho^2 < \rho < \frac{\varepsilon}{24\pi f\bar{\delta}}.$$

Тогда для всех точек P', лежащих внутри сферы Σ, будут выполняться неравенства

$$U_1(P) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad U_1(P') < \frac{\varepsilon}{3}$$

и

$$|X_1(P)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |X_1(P')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Теперь обратим внимание на то, что точки P и P', находясь внутри сферы Σ, лежат вне тела T_2, где и силовая функция и составляющие силы притяжения непрерывны, как показано в § 1 этой главы. Поэтому можно указать такую сферу Σ' с центром в точке P и содержащуюся внутри сферы Σ, что для всех точек P', лежащих внутри Σ', будут выполняться следующие неравенства:

$$|U_2(P) - U_2(P')| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |X_2(P) - X_2(P')| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Обращаясь затем к формулам (2.17) и (2.18) и имея в виду полученные оценки, мы найдем

$$|U(P)-U(P')|<\varepsilon, \quad |X(P)-X(P')|<\varepsilon,$$

что, в сущности, и требовалось доказать.

Таким образом, мы установили следующие свойства притяжения:

Свойство 1. Силовая функция тела конечных размеров и непрерывной плотности остается конечной, однозначной и непрерывной, когда притягиваемая точка находится внутри тела или на его поверхности.

Свойство 2. Составляющие силы притяжения тела конечных размеров и непрерывной плотности также остаются конечными, однозначными и непрерывными, когда притягиваемая точка находится внутри тела или на его поверхности.

3. Перейдем к рассмотрению следующего свойства и докажем, что проекция на любую ось силы притяжения, действующей на внутреннюю точку тела, равна соответствующей частной производной от силовой функции (т. е. производной по направлению взятой оси).

Принимая ось проекций за ось абсцисс системы координат $Oxyz$, покажем, что

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Пусть $P(x, y, z)$ есть внутренняя точка тела, в которой попрежнему сосредоточена единичная точечная масса.

Вообразим опять сферу Σ с центром в P, настолько малого радиуса ρ, что вся эта сфера целиком погружена в тело T. Возьмем теперь точку $P'(x+h, y, z)$ тела, лежащую внутри сферы Σ; нужно доказать, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{U(P')-U(P)}{h}=X(P),$$

или (так как X не зависит от h) что

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{U'(P)-U(P)}{h}-X(P)\right]=0.$$

Положим для сокращения

$$H=\frac{U'(P)-U(P)}{h}-X(P)$$

и покажем, что H (величина которой, очевидно, не зависит от ρ) стремится к нулю при $h\to 0$.

Используя те же обозначения, что и выше, можем представить величину H в виде

$$H = H_1 + H_2,$$

где H_1 есть значение H для части T_1 тела, а H_2 — для части T_2, т. е.

$$H_1 = \frac{U_1(P') - U_1(P)}{h} - X_1(P)$$

и

$$H_2 = \frac{U_2(P') - U_2(P)}{h} - X_2(P).$$

Рассмотрим каждое слагаемое величины H в отдельности. Прежде всего имеем

$$|H_1| \leqslant \left| \frac{U_1(P') - U_1(P)}{h} \right| + |X_1(P)|.$$

Так как оценка для $|X_1(P)|$ уже получена выше, то остается оценить первое слагаемое. Но мы имеем

$$\frac{U_1(P') - U_1(P)}{h} = f \iiint_{(T_1)} \left(\frac{1}{\Delta'} - \frac{1}{\Delta} \right) \frac{\delta\, d\tau}{h},$$

где Δ' — расстояние точки P' до текущей точки M тела T_1. С помощью неравенств *)

$$|\Delta' - \Delta| < h, \qquad \frac{2}{\Delta\Delta'} \leqslant \frac{1}{\Delta'^2} + \frac{1}{\Delta^2}$$

находим

$$\left| \frac{U_1(P') - U_1(P)}{h} \right| < \frac{1}{2} \left\{ f \iiint_{(T_1)} \frac{\delta\, d\tau}{\Delta^2} + f \iiint_{(T_1)} \frac{\delta\, d\tau}{\Delta'^2} \right\} = \frac{I + I'}{2}$$

(через I и I' обозначены для краткости первое и второе слагаемые в скобках).

Так как I отличается от X только отсутствием множителя α под знаком интеграла, то, рассуждая так же, как и выше при получении оценки для $|X(P)|$, найдем

$$I < 4\pi f \bar{\delta} \rho, \quad I' < 8\pi f \bar{\delta} \rho.$$

Следовательно, будем иметь

$$|H_1| < 10\pi f \bar{\delta} \rho.$$

Назначая теперь сколь угодно малое положительное число ε, выберем радиус сферы ρ из условия

$$\rho < \frac{\varepsilon}{20\pi f \bar{\delta}}.$$

---

*) Первое из этих неравенств очевидно, а второе легко вывести. В самом деле, из $(\Delta' - \Delta)^2 > 0$ выводим $2\Delta\Delta' < \Delta'^2 + \Delta^2$, деля которое на $\Delta'^2\Delta^2$, мы получим требуемое неравенство.

Тогда для всякой точки P', для которой $|h|<\rho$, будем иметь

$$|H_1|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Переходя затем к оценке H_2, заметим, что точки P и P' являются внешними для тела T_2, следовательно, вследствие непрерывности силовой функции во внешнем пространстве, H_2 заведомо стремится к нулю при $P'\to P$, т.е. мы можем указать такую сферу Σ' с центром в P и содержащуюся внутри сферы Σ, что для всех точек P', лежащих внутри Σ', будем иметь $|H_2|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Теперь находим

$$|H|\leqslant|H_1|+|H_2|<\varepsilon$$

и это неравенство будет справедливо для всякой точки P', достаточно близкой к P, а поэтому

$$\lim_{P'\to P} H=0,$$

что и требовалось доказать.

При доказательстве мы предполагали, что точка P лежит внутри тела T, но очевидно, что доказанное будет справедливо и в том случае, когда точка P находится на поверхности S тела. В результате мы можем сформулировать следующее свойство:

Свойство 3. Если тело имеет конечные размеры и плотность его непрерывна, то проекция силы притяжения на любое направление равна производной от силовой функции по этому направлению. В частности, формулы

$$X=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y=\frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z=\frac{\partial U}{\partial z}$$

остаются справедливыми, когда притягиваемая точка лежит внутри или на поверхности тела.

4. До сих пор мы рассматривали силовую функцию U и составляющие силы притяжения как функции только координат точки P, предполагая таким образом, что параметры, определяющие положение и ориентацию тела, суть величины постоянные. Но, разумеется, что установленные свойства будут справедливы и в общем случае, так как координаты точки P и параметры тела T суть величины, не зависящие друг от друга.

Свойства, нами установленные, будут справедливы также и для составляющих силы притяжения, действующей на тело T, и ее момента. Это вытекает непосредственно из формул (2.3) и (2.4), в которых нужно рассматривать ξ, η, ζ, ψ, φ, ϑ как переменные независимые. Поэтому будут справедливы также следующие свойства.

Свойство 4. Если тело T имеет конечные размеры и непрерывную плотность, то составляющие силы притяжения материальной точки, действующей на это тело, и составляющие момента силы притяжения относительно произвольно взятого центра приведения остаются конечными, однозначными и непрерывными, когда точка P находится внутри или на поверхности тела.

Свойство 5. Формулы

$$\Xi=\frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad \mathrm{H}=\frac{\partial U}{\partial \eta}, \quad \mathrm{Z}=\frac{\partial U}{\partial \zeta},$$
$$L_\psi=\frac{\partial U}{\partial \psi}, \quad L_\varphi=\frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad L_\vartheta=\frac{\partial U}{\partial \vartheta}$$

остаются справедливыми, когда притягивающая точка P находится внутри или на поверхности притягиваемого тела T.

Вообразим теперь два произвольных трехмерных тела T_1 и T_2, которые имеют некоторую общую часть T. Каждую точку M, принадлежащую этой общей части, можно рассматривать и как внутреннюю точку для обоих тел, и как внешнюю точку для тел T_1-T и T_2-T. И в том и в другом случае взаимная силовая функция и составляющие сил притяжения, и составляющие моментов этих сил будут оставаться конечными, однозначными и непрерывными функциями параметров, определяющих положения и ориентации этих тел.

Формулы (2.10), выражающие составляющие сил, действующих на тела T_1 и T_2, и составляющие моментов этих сил относительно произвольно выбранных центров приведения (но жестко связанных с телами T_1 и T_2 соответственно), будут справедливы и в том случае, когда тела T_1 и T_2 имеют некоторую общую часть.

§ 7. Уравнение Пуассона. Формулы Римана

В конце § 5 этой главы было показано, что силовая функция однородного шара удовлетворяет во внутренних точках шара уравнению, называемому уравнением Пуассона.

Мы покажем теперь, что это свойство сохраняется и для достаточно произвольного трехмерного тела.

Для этого выведем сначала некоторые вспомогательные формулы.

1. Пусть имеем тело T с конечными размерами и с непрерывной плотностью $\delta(x', y', z')$. Предположим, сверх того, что

функция δ имеет непрерывные частные производные первого порядка по переменным x', y', z'.

Тогда мы можем написать

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\delta}{\Delta}\right)=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\delta}{\partial x'}-\frac{\delta}{\Delta^2}\frac{\partial\Delta}{\partial x'}=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\delta}{\partial x'}-\delta\frac{x'-x}{\Delta^3},$$

и составляющая силы притяжения тела, действующей на точку единичной массы, представится формулой

$$X=f\int\int\limits_{(T)}\int\delta\frac{x'-x}{\Delta^3}d\tau=$$
$$=-f\int\int\limits_{(T)}\int\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\delta}{\Delta}\right)d\tau+f\int\int\limits_{(T)}\int\frac{\partial\delta}{\partial x'}\cdot\frac{d\tau}{\Delta}.$$

Если точка P лежит вне тела T, то функция δ/Δ удовлетворяет в области D, занимаемой телом, всем условиям теоремы Остроградского *), а поэтому, применяя формулу Остроградского к первому интегралу правой части последнего равенства, мы имеем

$$\int\int\limits_{(D)}\int\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\delta}{\Delta}\right)d\tau=\int\limits_{(S)}\int\frac{\delta\alpha'}{\Delta}d\sigma,$$

где α' — косинус угла, образованного направлением внешней нормали к поверхности S с положительным направлением оси абсцисс. Теперь выражение для X напишется в виде

$$X=-f\int\limits_{(S)}\int\frac{\delta\alpha'}{\Delta}d\sigma+f\int\int\limits_{(T)}\int\frac{\partial\delta}{\partial x'}\cdot\frac{d\tau}{\Delta}.$$

Пусть затем точка P лежит внутри области интегрирования D. В этом случае мы уже не можем непосредственно применить формулу Остроградского, так как функция δ/Δ обращается в бесконечность в точке P области D.

Чтобы иметь возможность применить формулу Остроградского, вообразим опять сферу Σ с центром в P, настолько малого радиуса ρ, что вся эта сфера целиком находится в области D. Тогда в области D_2, заключенной между поверхностью S тела и поверхностью сферы Σ, функция δ/Δ удовлетворяет условиям теоремы Остроградского, и мы можем написать

$$\int\int\limits_{(D_2)}\int\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\delta}{\Delta}\right)d\tau=\int\limits_{(S)}\int\frac{\delta\alpha'}{\Delta}d\sigma+\int\limits_{(\Sigma)}\int\frac{\delta\overline{\alpha}}{\Delta}d\sigma,$$

где $\overline{\alpha}$ — направляющий косинус внешней по отношению к области D_2 нормали сферы Σ.

---

*) См. сноску на стр. 67.

Перенося во втором интеграле интегрирование на поверхность сферы Ω единичного радиуса с центром в P, мы имеем $d\sigma=\rho^2 d\omega$, и поэтому

$$\iint\limits_{(\Sigma)} \frac{\delta\bar{\alpha}}{\Delta}\, d\sigma = \rho \iint\limits_{(\Omega)} \delta\bar{\alpha}\, d\omega.$$

Правая часть этого равенства имеет пределом нуль при $\rho\to 0$. Так как одновременно $D_2\to D$, то мы получим в пределе

$$\iiint\limits_{(D)} \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\delta}{\Delta}\right) d\tau = \iint\limits_{(S)} \frac{\delta\alpha'}{\Delta}\, d\sigma,$$

что дает для X такую же формулу, как и в случае внешней точки. Так как эти рассуждения справедливы и для двух других составляющих силы притяжения, то мы можем написать

$$\left.\begin{aligned} X &= -f \iint\limits_{(S)} \frac{\delta\alpha'}{\Delta}\, d\sigma + f \iiint\limits_{(T)} \frac{\partial\delta}{\partial x'}\cdot\frac{d\tau}{\Delta},\\ Y &= -f \iint\limits_{(S)} \frac{\delta\beta'}{\Delta}\, d\sigma + f \iiint\limits_{(T)} \frac{\partial\delta}{\partial y'}\cdot\frac{d\tau}{\Delta},\\ Z &= -f \iint\limits_{(S)} \frac{\delta\gamma'}{\Delta}\, d\sigma + f \iiint\limits_{(T)} \frac{\partial\delta}{\partial z'}\cdot\frac{d\tau}{\Delta}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

Эти формулы, одинаково справедливые и для внешней и для внутренней точки, называются **формулами Римана**.

Заметим, что интегралы, стоящие в правых частях этих формул, можно рассматривать, если угодно, как силовые функции тел, обладающих соответственно плотностями $\frac{\partial\delta}{\partial x'}$, $\frac{\partial\delta}{\partial y'}$, $\frac{\partial\delta}{\partial z'}$, и как силовые функции простых слоев, лежащих на поверхности S, с плотностями $-\delta\alpha'$, $-\delta\beta'$, $-\delta\gamma'$ соответственно. Поэтому каждая составляющая силы притяжения может рассматриваться как сумма силовой функции некоторого трехмерного тела и силовой функции некоторой материальной поверхности *).

2. Применим формулы Римана для вычисления вторых частных производных от силовой функции U и составления оператора Лапласа ∇U.

---

*) Заметим, что если тело T однородно, т. е. $\delta(M)=\mathrm{const}$, то формулы (2.19) дают

$$X = -f \iint\limits_{(S)} \frac{\delta\alpha'}{\Delta}\, d\sigma, \quad Y = -f \iint\limits_{(S)} \frac{\delta\beta'}{\Delta}\, d\sigma, \quad Z = -f \iint\limits_{(S)} \frac{\delta\gamma'}{\Delta}\, d\sigma.$$

Эти формулы называются **формулами Гаусса**

Заметим, что мы можем дифференцировать интегралы в формулах (2.19) по координатам точки P обычным образом, так как для любого положения этой точки в пространстве все эти интегралы (как представляющие силовые функции!) суть интегралы сходящиеся. Имея, кроме того, в виду, что для любой точки пространства $X = \frac{\partial U}{\partial x}$, мы можем написать

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial X}{\partial x} = -f \int\limits_{(S)}\int \delta\alpha' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x} d\sigma + f \int\int\limits_{(T)}\int \frac{\partial \delta}{\partial x'} \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x} d\tau$$

и аналогично для двух других составляющих. Поэтому оператор Лапласа для функции U определится формулой

$$\nabla U = -f \int\limits_{(S)}\int \delta \left\{ \alpha' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x} + \beta' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial y} + \gamma' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial z} \right\} d\sigma +$$

$$+ f \int\int\limits_{(T)}\int \left\{ \frac{\partial \delta}{\partial x'} \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial y'} \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial y} + \frac{\partial \delta}{\partial z'} \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial z} \right\} d\tau.$$

Так как

$$\frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x} = \frac{\alpha}{\Delta^2}, \quad \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial y} = \frac{\beta}{\Delta^2}, \quad \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial z} = \frac{\gamma}{\Delta^2},$$

где α, β, γ суть направляющие косинусы прямой $\overrightarrow{PM}$, то

$$\alpha' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x} + \beta' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial y} + \gamma' \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial z} = \frac{\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma'}{\Delta^2} = \frac{\cos\varphi}{\Delta^2},$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial x'} \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial x} + \frac{\partial \delta}{\partial y'} \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial y} + \frac{\partial \delta}{\partial z'} \frac{\partial \Delta^{-1}}{\partial z} = \frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial \delta}{\partial \Delta},$$

где φ, как и ранее, есть угол, образованный внешней нормалью к поверхности S с направлением $\overrightarrow{PM}$, а $\frac{\partial \delta}{\partial \Delta}$ есть производная от функции $\delta(M)$ по направлению прямой, выходящей из точки P и идущей к M.

Теперь имеем

$$\nabla U = -f \int\limits_{(S)}\int \delta \frac{\cos\varphi}{\Delta^2} d\sigma + f \int\int\limits_{(T)}\int \frac{\partial \delta}{\partial \Delta} \frac{d\tau}{\Delta^2};$$

переходя во втором интеграле к системе координат с началом в точке P, получим по формуле, подобной (2.15),

$$\int\int\limits_{(T)}\int \frac{\partial \delta}{\partial \Delta} \frac{d\tau}{\Delta^2} = \int\limits_{(\Omega)}\int d\omega \int\limits_0^R \frac{\partial \delta}{\partial \Delta} d\Delta,$$

причем R обозначает расстояние от точки P до текущей точки M поверхности тела. Так как при $R=0$ точка M совпадает с точкой P, то

$$\int_0^R \frac{\partial\delta}{\partial\Delta}\,d\Delta=\delta(M)-\delta(P).$$

Так как, с другой стороны,

$$\int_{(S)}\int \delta\frac{\cos\varphi}{\Delta^2}\,d\sigma=\int_{(\Omega)}\int \delta\,d\omega,$$

то в результате получим

$$\nabla U=-f\delta(P)\int_{(\Omega)}\int d\omega.$$

Если P — внешняя точка, то (см. § 5) $\int_{(\Omega)}\int d\omega=0$ и оператор Лапласа также равен нулю, что нам уже известно.

Если же P есть внутренняя точка, то $\int_{(\Omega)}\int d\omega=4\pi$ и мы получаем

$$\nabla U=-4\pi f\delta(P).$$

Таким образом, действительно, функция $U(P)$ удовлетворяет внутри тела уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=-4\pi f\delta(x,\ y,\ z) \tag{2.20}$$

и мы можем сформулировать следующее

Свойство 6. Если плотность тела $\delta(M)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка, то в каждой внутренней точке P тела T силовая функция U удовлетворяет уравнению Пуассона.

Примечание. Последнее свойство доказано при довольно жестких допущениях относительно плотности тела, которая должна быть не только сама непрерывной, но должна также иметь и непрерывные частные производные первого порядка.

Оказывается, что последнее условие не является обязательным и может быть заменено другим, менее стеснительным условием.

Наиболее известным является так называемое условие Гольдера, которое заключается в следующем.

Пусть D есть область пространства, занятая притягивающим телом, а $M(x,\ y,\ z)$ и $M_1(x_1',\ y_1',\ z_1')$ — две произвольные точки этой области. По определению, плотность тела удовлетворяет условию Гольдера, если существуют такие две положительные постоянные $p \leqslant 1$ и C, что неравенство

$$\left|\delta(x_1', y_1', z_1') - \delta(x, y, z)\right| < C(\overline{MM_1})^p$$

выполняется во всей области D.

Это условие ограничивает в известном отношении быстроту изменения плотности тела при переходе от одной его точки к другой. При соблюдении условия Гольдера плотность $\delta(M)$ есть заведомо непрерывная функция координат, а с другой стороны, это условие, несомненно, выполняется, если частные производные первого порядка от плотности суть функции, ограниченные в области D.

Гольдер доказал, что если плотность тела удовлетворяет указанному условию, то силовая функция U притяжения такого тела также удовлетворяет уравнению Пуассона внутри тела. Приводить здесь это доказательство мы не будем *).

§ 8. Характеристические свойства силовой функции. Теорема Дирихле

1. Соберем теперь вместе все выведенные нами свойства силовой функции трехмерного тела и сформулируем их следующим образом:

1) Силовая функция тела непрерывной плотности есть функция конечная, однозначная и непрерывная во всем пространстве, обращающаяся в нуль в бесконечности, причем

$$\lim_{R\to\infty} (RU) = fm,$$

где m есть вся масса тела, а R — расстояние притягиваемой точки до начала координат **).

2) Частные производные первого порядка от силовой функции также конечны, однозначны и непрерывны во всем пространстве и обращаются в нуль в бесконечности, причем

$$\lim_{R\to\infty} \left|R^2 \frac{\partial U}{\partial x}\right| \leqslant fm, \quad \lim_{R\to\infty} \left|R^2 \frac{\partial U}{\partial y}\right| \leqslant fm, \quad \lim_{R\to\infty} \left|R^2 \frac{\partial U}{\partial z}\right| \leqslant fm.$$

---

*) Доказательство можно найти в книгах: Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала; Н. М. Гюнтер, Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики.

**) Предполагается, что тело отнесено к некоторой неизменной, но произвольно выбранной системе декартовых координат $Oxyz$, расстояния от начала которой до точек тела все конечны.

3) Равенства

$$X=\frac{\partial U}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial U}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z}$$

имеют место во всем пространстве.

4) Во всем внешнем относительно тела пространстве силовая функция U удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. $\nabla U=0$ во всем внешнем пространстве.

5) Если плотность тела непрерывна и имеет непрерывные частные производные первого порядка, то внутри тела силовая функция удовлетворяет уравнению Пуассона, т. е. $\nabla U=-4\pi f\delta$ во всей области пространства, занятой притягивающей материей.

Перечисленные свойства называются характеристическими свойствами силовой функции, так как они вполне определяют силовую функцию притяжения трехмерным телом материальной точки (единичной массы!), а поэтому эти свойства могут быть использованы для фактического нахождения силовой функции, чем мы в дальнейшем и воспользуемся.

Чтобы оправдать сказанное, мы докажем одну замечательную теорему, принадлежащую Дирихле, но сначала выведем одну вспомогательную формулу, данную Пуанкаре.

2. Рассмотрим формулу Остроградского (см. сноску на стр. 67) и положим в ней $P=U\frac{\partial V}{\partial x'}$, $Q=U\frac{\partial V}{\partial y'}$, $R=U\frac{\partial V}{\partial z'}$, где U и V суть две функции, определенные в области D и на ее границе, конечные, однозначные и непрерывные вместе со своими частными производными первого и второго порядков. Тогда получим следующую формулу, называемую формулой Грина:

$$\iiint\limits_{(D)}\left[U\nabla V+\frac{\partial U}{\partial x'}\frac{\partial V}{\partial x'}+\frac{\partial U}{\partial y'}\frac{\partial V}{\partial y'}+\frac{\partial U}{\partial z'}\frac{\partial V}{\partial z'}\right]d\tau=\iint\limits_{(S)}U\frac{\partial V}{\partial n}\,d\sigma. \tag{2.21}$$

Предположим, далее, что каждая из функций U и V определена во всем пространстве и регулярна на бесконечности, т. е. существует такая положительная постоянная A, что для достаточно больших значений R имеют место неравенства

$$|U|\leqslant\frac{A}{R}\cdot\left|\frac{\partial U}{\partial x'}\right|\leqslant\frac{A}{R^2},\ \ldots,\ |V|\leqslant\frac{A}{R},\ \left|\frac{\partial V}{\partial x'}\right|\leqslant\frac{A}{R^2},\ \ldots$$

Пусть в предыдущей формуле S есть сфера радиуса R с центром в начале координат. В силу приведенных неравенств мы будем иметь

$$\left|\frac{\partial V}{\partial n}\right|=\left|\frac{\partial V}{\partial x'}\frac{x'}{R}+\frac{\partial V}{\partial y'}\frac{y'}{R}+\frac{\partial V}{\partial z'}\frac{z'}{R}\right|\leqslant\frac{3A}{R^2},$$

и поэтому

$$\left|\iint\limits_{(S)} U\frac{\partial V}{\partial n}\,d\sigma\right| < \frac{12\pi A^2}{R},$$

т. е. этот интеграл стремится к нулю при $R\to\infty$. Переходя в формуле Грина к пределу при $R\to\infty$ и обозначая через E область всего пространства, мы найдем

$$\iiint\limits_{(E)}\left[U\nabla V+\frac{\partial U}{\partial x'}\frac{\partial V}{\partial x'}+\frac{\partial U}{\partial y'}\frac{\partial V}{\partial y'}+\frac{\partial U}{\partial z'}\frac{\partial V}{\partial z'}\right]d\tau=0, \qquad (2.21')$$

где интеграл берется по всему пространству. Формула (2.21′) и называется *формулой Пуанкаре*.

Переходим к теореме Дирихле, которая формулируется следующим образом:

Теорема Дирихле. *Пусть тело T обладает непрерывной плотностью, частные производные первого порядка которой также непрерывны. Тогда, если каким-либо способом найдена функция $\overline{U}(x, y, z)$, обладающая всеми характеристическими свойствами силовой функции, эта найденная функция совпадает во всем пространстве с силовой функцией тела.*

Для доказательства обозначим, как и прежде, через U силовую функцию тела T, а через $\overline{U}$ — некоторую функцию, обладающую всеми характеристическими свойствами силовых функций. Положим

$$V=\overline{U}-U.$$

Эта функция конечна, однозначна и непрерывна во всем пространстве, регулярна на бесконечности и во всем пространстве удовлетворяет уравнению Лапласа. Поэтому к этой функции можно применить формулу Пуанкаре, полагая в ней $U=V$, что дает

$$\iiint\limits_{(E)}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial V}{\partial z'}\right)^2\right]d\tau=0,$$

где интеграл берется по всему пространству E.

Так как подынтегральная функция существенно положительна во всей области E, то последнее равенство может быть выполнено только при условии

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{\partial V}{\partial y}=\frac{\partial V}{\partial z},$$

откуда следует, что

$$V=\text{const}.$$

Но так как функции U и $\overline{U}$ обращаются обе в нуль на бесконечности, то этим же свойством обладает и V, откуда следует, что const = 0, а значит,

$$\overline{U} \equiv U,$$

и теорема Дирихле доказана.

Примечание. Функция U, которую мы здесь рассматривали, является функцией координат x, y, z притягиваемой точки P, которая может быть также и притягивающей. Но параметры, определяющие положение и ориентацию тела в системе $Oxyz$, здесь рассматриваются как постоянные. Когда функция U уже найдена, обычно бывает нетрудно выразить ее явным образом и через упомянутые параметры.

Однако общие свойства силовой функции взаимного притяжения материальной частицы (материальной точки) и произвольного трехмерного тела, рассматриваемой как функция девяти независимых переменных, совершенно не известны.

Можно только отметить, что функция U, рассматриваемая как функция трех независимых переменных — координат ξ, η, ζ точки G, неизменно связанной с телом (центра приведения), также удовлетворяет уравнению Пуассона, если точка $P(x, y, z)$ находится внутри тела и если, конечно, плотность тела δ удовлетворяет условию Гольдера или более слабому условию, о котором шла речь выше.

Сказанное является, очевидно, следствием равенств

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

выводимых немедленно из равенств (2.3).

Итак, можем написать

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = -4\pi f \delta(x, y, z),$$

однако координаты x, y, z в этом равенстве нужно уже рассматривать как величины постоянные. Что же касается вторых частных производных от силовой функции U по эйлеровым углам ψ, φ, ϑ, то неизвестно, существует ли уравнение, аналогичное уравнению Пуассона, связывающее эти производные!

Точно так же неизвестно, удовлетворяет ли силовая функция взаимного притяжения двух тел какому-либо уравнению, когда эти тела имеют некоторую общую часть.

§ 9. Формула Гаусса и теорема Стокса

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые важные дополнительные свойства силовой функции притяжения материальным трехмерным телом материальной точки. Эти новые свойства не относятся к числу характеристических, но имеют значение для некоторых приложений, особенно в теории фигуры Земли. К ним относятся свойства, выражаемые теоремой Гаусса и вытекающими из нее следствиями, касающимися экстремальных свойств силовой функции и свойств поверхностей уровня.

1. Выведем сначала формулу Гаусса. Пусть в некоторой области D пространства заданы две функции U_1 и U_2, регулярные в этой области, т. е. конечные, однозначные и непрерывные вместе со своими частными производными первого и второго порядка.

Тогда справедлива следующая формула, являющаяся следствием формулы Остроградского и называемая иногда **формулой Грина** *):

$$\iiint\limits_{(D)} (U_1 \nabla U_2 - U_2 \nabla U_1) d\tau = \iint\limits_{(\bar{S})} \left(U_1 \frac{\partial U_2}{\partial n} - U_2 \frac{\partial U_1}{\partial n} \right) d\sigma, \quad (2.22)$$

где производные $\frac{\partial U_1}{\partial n}$ и $\frac{\partial U_2}{\partial n}$ берутся по внешней нормали к поверхности $\bar{S}$, ограничивающей область D. Положим в этой формуле $U_1 = 1$ и $U_2 = U$, где U есть некоторая правильная в области D функция **). Тогда формула (2.22) примет следующий частный вид:

$$\iiint\limits_{(D)} \nabla U d\tau = \iint\limits_{(\bar{S})} \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma. \quad (2.22')$$

Рассмотрим теперь некоторое трехмерное тело (с конечными размерами), плотность которого $\delta(M)$ непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка, или, во всяком случае, удовлетворяет условию Гольдера.

Допустим, что некоторая область D пространства, ограниченная поверхностью $\bar{S}$, полностью содержит в себе это тело. Пусть, далее, U есть силовая функция притяжения телом T материальной точки P единичной массы.

Функция U конечна, однозначна и непрерывна во всей области D вместе со своими частными производными первого порядка. Но вторые частные производные от U разрывны на поверхности S тела T и поэтому функция U не является правильной в области D, как это требуется для применения фор-

---

*) Эта формула получается из формулы (2.21). Действительно, полагая в (2.21) $U = U_1$, $V = U_2$, затем $U = U_2$ и $V = U_1$ и вычитая затем из одного полученного равенства другое, мы и получим формулу (2.22). В некоторых учебниках формула (2.22) называется первой формулой Грина, а формула (2.21) — предварительной формулой Грина.

**) «Правильная функция»=«регулярная функция». Здесь употребляется и та и другая терминология.

мулы (2.22′). Чтобы можно было применить эту формулу, разобьем область D на две части, одна из которых есть тело T, ограниченное поверхностью S, а другая, которую обозначим через $D-T$, ограничена двумя поверхностями S и $\bar{S}$. Применяя формулу (2.22′) к каждой из этих двух частей в отдельности (что, очевидно, законно), мы будем иметь

$$\int\int\int_{(T)} \nabla U\,d\tau = \int\int_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma$$

и

$$\int\int\int_{(D-T)} \nabla U\,d\tau = \int\int_{(\bar{S})} \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma - \int\int_{(S)} \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma,$$

где производные берутся соответственно по внешним нормалям к поверхностям S и $\bar{S}$. Складывая эти два равенства и имея в виду, что в области T оператор Лапласа ∇U равен $-4\pi f\delta$, а в области $D-T$ он равен нулю, мы получим

$$-4\pi f \int\int\int_{(T)} \delta\,d\tau = \int\int_{(\bar{S})} \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma.$$

Но интеграл в левой части равенства есть полная масса m притягивающего тела T, и мы находим окончательно

$$\int\int_{(\bar{S})} \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma = -4\pi f m. \qquad (2.23)$$

Эта формула и называется *формулой Гаусса*.

2. Из формулы (2.23) легко вывести одно экстремальное свойство силовой функции, которое можно сформулировать следующим образом:

Принцип максимума. *Силовая функция трехмерного тела, рассматриваемая как функция координат притягиваемой точки, не может иметь минимума внутри притягивающей массы, но может иметь максимум.*

Действительно, допустим, что силовая функция U тела T имеет минимум в некоторой внутренней точке тела, которую назовем P. Вообразим сферу Σ с центром в P настолько малого радиуса, чтобы вся сфера целиком находилась внутри тела. Применяя тогда к сфере Σ формулу (2.23), мы получим

$$\int\int_{(\Sigma)} \frac{\partial U}{\partial n}\,d\sigma = -4\pi f \bar{m},$$

где $\bar{m}$ обозначает часть массы, заключенную внутри сферы.

Если, как это предположено, функция U имеет в точке P минимум, то вблизи точки P всякое значение функции U будет больше, чем значение функции в самой точке P. Проведем через точку P любой луч. Значение U в любой точке этого луча будет больше, чем значение ее в точке P. Поэтому мы можем указать такую сферу Σ' с центром в P и заключенную внутри Σ, что во всех точках поверхности Σ' производная $\frac{\partial U}{\partial n}$, взятая по направлению от точки P, будет положительной. Поэтому левая часть формулы Гаусса, примененной к сфере Σ', даст величину положительную, что приводит к противоречию, так как правая часть равенства заведомо отрицательна.

Таким образом, первая часть высказанного свойства доказана. Что же касается второй части, то ее справедливость достаточно показать на каком-либо примере. Этот пример доставляет нам случай однородного шара, рассмотренный в § 5, так как легко видеть, что в этом примере силовая функция имеет максимум в центре шара.

Второе экстремальное свойство относится к внешнему пространству и формулируется так:

Принцип экстремума. Вне притягивающей массы силовая функция не может иметь ни максимума, ни минимума.

Это свойство силовой функции является следствием того, что вне притягивающей массы эта функция является гармонической*), но может быть также доказано непосредственно, совершенно так же, как и принцип максимума.

Действительно, пусть P есть какая угодно внешняя по отношению к телу точка. Вообразим опять сферу Σ с центром в P и достаточно малого радиуса. Так как во всем внешнем пространстве $\nabla U = 0$, то, применяя формулу (2.22′) к сфере Σ, мы найдем

$$\iint\limits_{(\Sigma)} \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma = 0.$$

Допустим теперь, что в точке P функция U имеет максимум (минимум). Тогда во всех точках поверхности Σ мы будем иметь $\frac{\partial U}{\partial n} < 0 \left(\frac{\partial U}{\partial n} > 0\right)$, а значит, интеграл в последнем равенстве есть величина существенно отрицательная (положительная), что приводит к противоречию.

Полученное противоречие доказывает, что ни в одной внешней точке пространства силовая функция U не может иметь ни максимума, ни минимума.

---

*) См., например, Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала.

3. Применим теперь формулу Гаусса (2.23) для доказательства важной теоремы, называемой теоремой Стокса.

Пусть T — притягивающее тело, плотность которого δ удовлетворяет тем же условиям, что и ранее. Рассмотрим семейство поверхностей уровня (изопотенциальных поверхностей)

$$U(x,\ y,\ z)=C,$$

и пусть $\bar S$ — одна из этих поверхностей, заключающая внутри себя всю притягивающую массу (рис. 13).

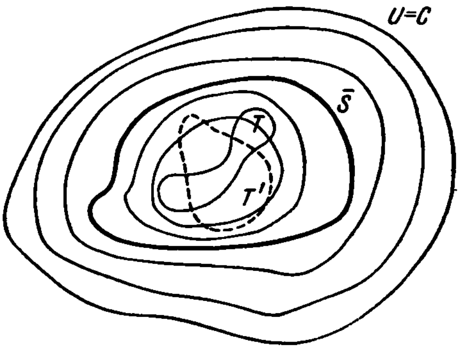


Рис. 13.

Предположим, что притягивающую материю можно перераспределить таким образом, что ее масса m при этом не изменится и что поверхность $\bar S$ по-прежнему останется поверхностью уровня. Пусть T' есть тело, образованное перераспределенной материей. Ясно, что тело T' отличается от тела T либо формой, либо по структуре, а поэтому силовая функция тела T' также будет, вообще говоря, отличаться от силовой функции тела T.

Пусть U' — силовая функция нового тела T'. Тогда уравнение поверхности $\bar S$ мы можем написать также в виде

$$U'(x,\ y,\ z)=C'.$$

Рассмотрим теперь функцию

$$V=U'-U.$$

Вне поверхности $\bar S$, как легко видеть,

$$\nabla V=0,$$

а на поверхности $\bar S$ имеем

$$V=C'-C=\text{const}.$$

С другой стороны, по формуле Гаусса мы имеем для тела T

$$\iint\limits_{(\bar S)} \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma=-4\pi f m,$$

а точно так же для тела T'

$$\iint\limits_{(\bar S)} \frac{\partial U'}{\partial n}\, d\sigma=-4\pi f m,$$

поэтому

$$\iint\limits_{(\bar{S})} \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = 0.$$

Докажем теперь, что функция V тождественно равна нулю во всем пространстве, внешнем по отношению к поверхности $\bar{S}$.

Для этого рассмотрим область $\bar{E}$, заключающуюся между поверхностью $\bar{S}$ и поверхностью сферы $\bar{\Sigma}$ настолько большого радиуса R, что вся поверхность $\bar{S}$ заведомо лежит внутри этой сферы. Применяя к функции V, регулярной в области $\bar{E}$, формулу Грина (2.21), мы можем написать, полагая в этой формуле $U = V$:

$$\iiint\limits_{(\bar{E})} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z'}\right)^2\right] d\tau + \\ + \iint\limits_{(\bar{S})} V \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma + \iint\limits_{(\bar{\Sigma})} V \frac{\partial V}{\partial n}\, d\sigma = 0.$$

Так как на $\bar{S}$ функция V равна постоянной величине, то второй интеграл равен нулю. Рассмотрим третий интеграл. Так как U и U' регулярны на бесконечности, то можно указать две такие положительные постоянные, что при достаточно большом R будем иметь неравенства

$$|V| < \frac{A}{R}, \quad \left|\frac{\partial V}{\partial n}\right| < \frac{B}{R^2}.$$

Следовательно,

$$\left|\iint\limits_{(\bar{\Sigma})} V \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma\right| < \frac{AB}{R^3} \iint\limits_{(\bar{\Sigma})} d\sigma = \frac{4\pi AB}{R^2},$$

т. е. стремится к нулю при $R \to \infty$. Поэтому, переходя к пределу при $R \to \infty$ и обозначая через E все пространство, внешнее по отношению к поверхности $\bar{S}$, мы найдем

$$\iiint\limits_{(E)} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z'}\right)^2\right] d\tau = 0,$$

откуда следует, что во всякой точке E должны выполняться условия

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial z} = 0;$$

отсюда следует, что

$$V = \text{const}$$

во всех точках области E. Так как, очевидно, V равна нулю в бесконечности, то эта постоянная есть нуль, и мы находим

$$V = U' - U \equiv 0,$$

откуда

$$U' \equiv U,$$

что и позволяет сформулировать следующую теорему:

Теорема Стокса. Если некоторая поверхность уровня $\bar{S}$ заключает внутри себя всю притягивающую материю, то при всяком перераспределении этой материи, при котором величина ее массы остается неизменной, а поверхность $\bar{S}$ остается поверхностью уровня, силовая функция притягивающей массы во внешнем относительно поверхности $\bar{S}$ пространстве также остается без изменения.

Иллюстрацией этой теоремы может служить силовая функция однородного шара, для которой поверхности уровня суть сферы, центр которых совпадает с центром шара. Если взять какую-либо из этих сфер, заключающую внутри себя шар, то при любом изменении размеров и плотности шара, при которых его масса остается неизменной, поверхность уровня остается той же сферой. Можно даже сосредоточить всю массу шара в его центре, т. е. превратить шар в материальную точку той же массы.

Это показывает, что если мы знаем силовую функцию вне поверхности уровня, то еще не можем сказать ничего определенного ни о форме притягивающего тела, ни о его внутреннем строении.

ГЛАВА III

ПРИТЯЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ПРОСТЕЙШИХ ТЕЛ

§ 1. Оператор Лапласа в криволинейных координатах

1. Мы видели в предыдущей главе, что силовая функция ньютоновского притяжения, рассматриваемая как функция трех прямоугольных координат притягиваемой точки, удовлетворяет некоторому линейному уравнению в частных производных второго порядка, называемому уравнением Лапласа или уравнением Пуассона.

Такое уравнение, левую часть которого составляет выражение, именуемое оператором Лапласа, играет значительную роль в теории притяжения, а так как оно часто встречается и во многих других вопросах математического естествознания, то представляет интерес рассмотреть подробнее некоторые его свойства.

Далее нам придется пользоваться уравнением Лапласа, а также уравнением Пуассона, не только в декартовых, но и в некоторых других координатах, например, в цилиндрических, в полярных сферических и т. д.

По этой причине мы рассмотрим в этом параграфе, как преобразуется оператор Лапласа при переходе к другим координатам, причем займемся сначала наиболее общим преобразованием такого рода, из которого уже нетрудно будет вывести и различные частные случаи.

Для большей простоты и симметрии рассмотрим какую-либо функцию от трех независимых переменных x_1, x_2, x_3, являющихся тремя прямоугольными декартовыми координатами точки в пространстве.

Обозначая эту функцию через V, определим оператор Лапласа над этой функцией уже известной формулой

$$\nabla V = \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x_3^2} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2}. \tag{3.1}$$

Рассмотрим общее ортогональное преобразование координат *). Пусть

$$\Phi_i(x_1, x_2, x_3) = \rho_i \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{3.2}$$

суть уравнения трех семейств поверхностей, образующих тройную ортогональную систему, так что две какие-нибудь поверхности, принадлежащие к двум различным семействам, пересекаются всюду под прямым углом. Так как

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_3}$$

суть угловые коэффициенты нормали к поверхности $\Phi_i = \rho_i$, то условия ортогональности поверхностей (3.2) имеют вид

$$\sum_{s=1}^{3} \frac{\partial \rho_i}{\partial x_s} \frac{\partial \rho_j}{\partial x_s} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j). \tag{3.3}$$

Решая уравнения (3.2) относительно величин x_i, мы выразим эти величины в функции параметров ρ_1, ρ_2, ρ_3, называемых вообще **криволинейными координатами** точки в пространстве

$$x_i = \varphi_i(\rho_1, \rho_2, \rho_3) \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{3.2'}$$

Ясно, что уравнения (3.2′) суть уравнения тех же поверхностей, что и уравнения (3.2), только написанные в другом виде, а поэтому условия ортогональности будут теперь иметь вид

$$\sum_{s=1}^{3} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \rho_i} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \rho_j} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3;\ j \neq i). \tag{3.3'}$$

Посмотрим, какой вид примет оператор Лапласа при переходе к криволинейным координатам ρ_i.

Непосредственное вычисление дает

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial V}{\partial \rho_k} \frac{\partial \rho_k}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

и затем

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} = \sum_{k=1}^{3} \left\{ \frac{\partial \rho_k}{\partial x_i} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_k \partial \rho_j} \frac{\partial \rho_j}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial \rho_k} \frac{\partial^2 \rho_k}{\partial x_i^2} \right\}.$$

---

*) См., например, Э. Гурса, Курс математического анализа, т. 1, перев. с франц., ГТТИ, 1933. Другой способ преобразования оператора Лапласа можно найти, например, в книге Л. Н. Сретенского, Теория ньютоновского потенциала, или в книге Н. П. Грушинского, Теория фигуры Земли, Физматгиз, 1963.

Складывая эти три выражения, получим с помощью соотношений ортогональности (3.3) выражение для оператора Лапласа в новых переменных:

$$\nabla V = \sum_{k=1}^{3} \left\{ \Delta_1(\rho_k) \frac{\partial^2 V}{\partial \rho_k^2} + \Delta_2(\rho_k) \frac{\partial V}{\partial \rho_k} \right\}, \tag{3.4}$$

где

$$\Delta_1(\rho_k) = \sum_{s=1}^{3} \left(\frac{\partial \rho_k}{\partial x_s} \right)^2; \quad \Delta_2(\rho_k) = \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial^2 \rho_k}{\partial x_s^2} \tag{3.4'}$$

— так называемые дифференциальные параметры Ламе первого и второго порядка *).

Дифференциальные параметры первого порядка вычисляются без всякого затруднения. Действительно, дифференцируя формулы (3.2′), мы получим соотношения вида

$$\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho_k} \frac{\partial \rho_k}{\partial x_s} = 1_i^s,$$

где введено для сокращения обозначение

$$1_i^s = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad s = i, \\ 0 & \text{при} \quad s \neq i. \end{cases}$$

Решая полученные уравнения относительно производных от новых переменных по старым, мы найдем

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial x_s} = H_k^{-1} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \rho_k},$$

где положено

$$H_k = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho_k} \right)^2, \tag{3.5}$$

откуда имеем

$$\Delta_1(\rho_k) = H_k^{-1}.$$

Чтобы получить выражение для $\Delta_2(\rho_k)$ через криволинейные координаты, положим в (3.4) последовательно $V = x_1, x_2, x_3$, что даст три соотношения

$$\sum_{k=1}^{3} \left\{ H_k^{-1} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \rho_k^2} + \Delta_2(\rho_k) \frac{\partial \varphi_i}{\partial \rho_k} \right\} = 0,$$

которые остается только разрешить относительно $\Delta_2(\rho_k)$.

---

*) Дифференциальный параметр второго порядка для величины ρ_k совпадает, очевидно, с выражением оператора Лапласа для этой величины.

Умножая для этого последние равенства на $\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_k}$, складывая и имея в виду условия ортогональности (3.3′), мы найдем

$$H_k\Delta_2(\rho_k)+\sum_{s=1}^{3}H_s^{-1}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_k}\,\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\rho_s^2}=0.$$

Но из (3.5) выводим дифференцированием

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_k}\,\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\rho_k^2}=\frac{1}{2}\,\frac{\partial H_k}{\partial\rho_k},$$

а дифференцирование условий (3.3′) дает

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_k}\,\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\rho_s^2}+\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\rho_k\,\partial\rho_s}\,\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_s}\right)=0 \qquad (s\neq k),$$

откуда имеем

$$\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_k}\,\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\rho_s^2}=-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi_i}{\partial\rho_s}\,\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial\rho_k\,\partial\rho_s}=-\frac{1}{2}\,\frac{\partial H_s}{\partial\rho_k} \qquad (s\neq k).$$

Поэтому

$$\Delta_2(\rho_k)=-\frac{1}{2}\,H_k^{-2}\,\frac{\partial H_k}{\partial\rho_k}+\frac{1}{2}\,H_k^{-1}\,{\sum_{s=1}^{3}}'\,H_s^{-1}\,\frac{\partial H_s}{\partial\rho_k} \qquad (s\neq k),$$

а полагая еще

$$h_k^2=H_k^{-1}, \qquad (3.5')$$

мы представим $\Delta_2(\rho_k)$ в следующем виде:

$$\Delta_2(\rho_k)=h_k\,\frac{\partial h_k}{\partial\rho_k}-h_k^2\,{\sum_{s=1}^{3}}'\,\frac{1}{h_s}\,\frac{\partial h_s}{\partial\rho_k} \qquad (s\neq k).$$

Подставляя теперь полученные выражения для $\Delta_1(\rho_k)$ и $\Delta_2(\rho_k)$ в формулу (3.4), получим окончательно

$$\nabla V=h_1h_2h_3\left[\frac{\partial}{\partial\rho_1}\left(\frac{h_1}{h_2h_3}\,\frac{\partial V}{\partial\rho_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\rho_2}\left(\frac{h_2}{h_3h_1}\,\frac{\partial V}{\partial\rho_2}\right)+\frac{\partial}{\partial\rho_3}\left(\frac{h_3}{h_1h_2}\,\frac{\partial V}{\partial\rho_3}\right)\right], \qquad (3.6)$$

что и дает искомое выражение для оператора Лапласа в произвольных криволинейных координатах.

Последнюю формулу можно записать более кратко в виде

$$\nabla V = h_1 h_2 h_3 \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial}{\partial \rho_s}\left(\frac{h_s}{h_{s+1} h_{s+2}} \frac{\partial V}{\partial \rho_s}\right),$$

если условиться брать $s+j-3$ вместо $s+j$, когда $s+j>3$.

Величины h_1, h_2, h_3, определяемые формулами (3.5′), называются коэффициентами Ламе.

2. Вычислим по формуле (3.6) оператор Лапласа для некоторых частных случаев криволинейных координат.

Введем сначала вместо декартовых координат x_i цилиндрические координаты ρ, v, z — формулами

$$x_1 = \rho \cos v, \quad x_2 = \rho \sin v, \quad x_3 = z.$$

Полагая в формулах (3.5′) $\rho_1 = \rho$, $\rho_2 = v$, $\rho_3 = z$, найдем без труда

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{\rho}, \quad h_3 = 1,$$

и выражение для оператора Лапласа примет вид

$$\nabla V = \frac{\partial^2 V}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}. \tag{3.7}$$

Рассмотрим теперь случай полярных сферических координат

$$x_1 = r \cos \lambda \sin \theta, \quad x_2 = r \sin \lambda \sin \theta, \quad x_3 = r \cos \theta.$$

Полагая в формулах (3.5′) $\rho_1 = r$, $\rho_2 = \lambda$, $\rho_3 = \theta$, получим

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \frac{1}{r \sin \theta}, \quad h_3 = \frac{1}{r},$$

и оператор Лапласа примет вид

$$\nabla V = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin^2 \theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\sin \theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right)\right]. \tag{3.8}$$

Рассмотрим, далее, преобразование оператора Лапласа к эллипсоидальным координатам Ламе. Пусть формулы, связывающие старые декартовы координаты x_i и новые переменные ρ_i, имеют вид

$$x_i^2 = \frac{(a_i^2 + \rho_1)(a_i^2 + \rho_2)(a_i^2 + \rho_3)}{(a_i^2 - a_{i+1}^2)(a_i^2 - a_{i+2}^2)} \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

где, как и выше, нужно писать $i+j-3$ вместо $i+j$, когда $i+j>3$ ($j=1,2$). Величины ρ_i называются эллипсоидальными координатами точки в пространстве *).

---

*) См. ниже, § 4 этой главы. См. также В. И. Смирнов, Курс высшей математики.

Громоздкое, но не сложное вычисление по формулам (3.5′) дает для коэффициентов Ламе следующие выражения:

$$h_1 = \frac{2R_i}{\sqrt{(\rho_i - \rho_{i+2})(\rho_i - \rho_{i+2})}},$$

где положено, для сокращения,

$$R_i = \sqrt{(a_1^2 + \rho_i)(a_2^2 + \rho_i)(a_3^2 + \rho_i)} \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{3.9}$$

и сохраняется условие относительно индексов.

Подставляя полученные выражения для коэффициентов Ламе в формулу (3.6), мы найдем окончательно

$$\nabla V = \frac{4}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_2 - \rho_3)(\rho_3 - \rho_1)} \sum_{i=1}^{3} (\rho_{i+1} - \rho_{i+2}) R_i \frac{\partial}{\partial \rho_i}\left(R_i \frac{\partial V}{\partial \rho_i}\right). \tag{3.10}$$

В заключение рассмотрим так называемое преобразование обратными радиусами-векторами, определяемое формулами

$$x_i = x_i' r'^{-2} \qquad (i = 1, 2, 3),$$

где

$$r'^2 = x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2.$$

Полагая в формулах (2.28) $\rho_i = x_i$ $(i = 1, 2, 3)$, найдем

$$h_1 = h_2 = h_3 = r'^2,$$

откуда

$$\nabla V = r'^6 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i'}\left(\frac{1}{r'^2} \frac{\partial V}{\partial x_i'}\right).$$

Это выражение может быть написано так же, как нетрудно проверить, в виде

$$\nabla V = r'^5 \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i'^2}\left(\frac{V}{r'}\right),$$

откуда вытекает известная теорема Кельвина:

Теорема Кельвина. Если $V(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, то функция $r^{-1}V(xr^{-2}, yr^{-2}, zr^{-2})$, где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ также удовлетворяет этому уравнению.

§ 2. Притяжение сферических тел

1. Рассмотрим область пространства D, заключенную между двумя концентрическими сферами Σ_1 и Σ_2 с общим центром в точке O и с радиусами a_1 и $a_2 > a_1$. Вообразим, что область D заполнена притягивающей материей, плотность которой δ есть

заданная функция от расстояния r' до центра O, определенная в промежутке от a_1 до a_2.

Полученное таким образом материальное тело T мы будем называть шаровым слоем, обладающим сферическим распределением плотностей или обладающим сферической структурой.

В частности, при $a_1=0$, $a_2=a$ шаровой слой превращается в полный шар, а если плотность δ есть величина постоянная, то мы имеем случай однородного шарового слоя или, соответственно, однородного шара.

Мы уже нашли в § 5 гл. II силовую функцию однородного шара путем непосредственного вычисления интеграла. Подобным же образом можно найти силовую функцию шара, обладающего сферическим распределением плотностей, а также силовую функцию и шарового слоя такой же структуры.

Мы не будем повторять эти вычисления, а применим для нахождения силовой функции шара характеристические свойства, установленные в § 8 предыдущей главы.

Предположим, что функция $\delta(r')$ непрерывна в промежутке от a_1 до a_2 и имеет в этом промежутке непрерывную производную $\delta'(r')$. Тогда искомая силовая функция должна удовлетворять уравнению Лапласа вне притягивающей массы и уравнению Пуассона — внутри нее и должна обладать, сверх того, и остальными характеристическими свойствами.

Чтобы написать уравнения, которым должна удовлетворять искомая силовая функция U шарового слоя, заметим, что по соображениям симметрии эта функция должна зависеть только от расстояния r притягиваемой точки до общего центра O.

Поэтому формула (3.8) немедленно даст оператор Лапласа для функции $U(r)$ в виде

$$\nabla U(r)=\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right)=\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dU}{dr}. \qquad (3.8')$$

Следовательно, в промежутках $0\leqslant r\leqslant a_1$ и $a_2\leqslant r<\infty$ (т. е. вне притягивающей материи) функция U должна удовлетворять уравнению

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dU}{dr}=0, \qquad (3.11)$$

а в промежутке $a_1\leqslant r\leqslant a_2$ — уравнению

$$\frac{d^2U}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dU}{dr}=-4\pi f\delta(r). \qquad (3.12)$$

Легко видеть, что линейно независимые функции

$$U_1 = 1, \quad U_2 = \frac{1}{r}$$

— решения уравнения (3.11), а поэтому

$$U = C_1 + \frac{C_2}{r}, \tag{3.11$'$}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, является общим решением этого уравнения.

Применяя затем к уравнению (3.12) способ изменения произвольных постоянных, мы можем написать общее решение этого уравнения в следующем виде:

$$U = \overline{C}_1 + \frac{\overline{C}_2}{r} + \frac{4\pi f}{r} \int\limits_{a_1}^{r} r'^2 \delta(r')\,dr' - 4\pi f \int\limits_{a_1}^{r} r'\delta(r')\,dr', \tag{3.12$'$}$$

где $\overline{C}_1$ и $\overline{C}_2$ — две другие произвольные постоянные.

Дифференцируя далее (3.11′) и (3.12′), найдем

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{C_2}{r} \tag{3.11$''$}$$

и

$$\frac{dU}{dr} = -\frac{\overline{C}_2}{r^2} - \frac{4\pi f}{r^2} \int\limits_{a_1}^{r} r'^2 \delta(r')\,dr'. \tag{3.12$''$}$$

Перейдем к определению произвольных постоянных, для чего и используем остальные характеристические свойства силовой функции. В промежутке $0 \leqslant r \leqslant a_1$ функция U определяется формулой (3.11′) и должна быть **конечной** в этом промежутке. Отсюда следует, что должно быть $C_2 = 0$, и мы имеем

$$\left.\begin{aligned} U &= C_1 \\ U' &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (0 \leqslant r \leqslant a_1). \tag{3.13}$$

Далее, в промежутке $a_2 \leqslant r < \infty$ функция U опять определяется формулой (3.11′), но произвольные постоянные должны иметь уже другие значения. Эти постоянные определятся из условия $\lim\limits_{r\to\infty}(rU) = fm$, откуда имеем, очевидно, $C_1 = 0$ и $C_2 = fm$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{fm}{r}, \\ U' &= -\frac{fm}{r^2} \end{aligned}\right\} \quad (a_2 \leqslant r < \infty). \tag{3.14}$$

Далее, так как функции U и U' должны быть непрерывны при $r=a_1$, то равенства (3.11′), (3.12′) и (3.13) дают условия

$$C_1=\bar{C}_1+\frac{\bar{C}_2}{a_1}, \quad -\frac{\bar{C}_2}{a_1^2}=0,$$

откуда находим

$$C_1=\bar{C}_1, \quad \bar{C}_2=0.$$

Теперь условия непрерывности функций U и U' при $r=a_2$ дают

$$\frac{fm}{a_2}=\bar{C}_1+\frac{4\pi f}{a_2}\int_{a_1}^{a_2} r'^2\delta(r')\,dr'-4\pi f\int_{a_1}^{a_2} r'\delta(r')\,dr'.$$

Так как вся масса слоя

$$m=4\pi\int_{a_1}^{a_2} r'^2\delta(r')\,dr',$$

то

$$\bar{C}_1=C_1=4\pi f\int_{a_1}^{a_2} r'\delta(r')\,dr'$$

и все постоянные, таким образом, определены.

Итак, силовая функция шарового слоя, сферической структуры, определяется следующими формулами:

в промежутке $0\leqslant r\leqslant a_1$:

$$\left.\begin{aligned} U(r)&=4\pi f\int_{a_1}^{a_2} r'\delta(r')\,dr', \\ U'(r)&=0, \end{aligned}\right\} \tag{3.13′}$$

т. е. материальная точка, находящаяся во внутренней полости слоя, вовсе не испытывает притяжения. Мы опять получаем теорему Ньютона, доказанную ранее для однородного сферического слоя;

в промежутке $a_1\leqslant r\leqslant a_2$:

$$\left.\begin{aligned} U(r)&=\frac{4\pi f}{r}\int_{a_1}^{r} r'^2\delta(r')\,dr'+4\pi f\int_{r}^{a_2} r'\delta(r')\,dr', \\ U'(r)&=-\frac{4\pi f}{r}\int_{a_1}^{r} r'^2\delta(r')\,dr'=-\frac{fm(r)}{r^2}, \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

т. е. точка P, находящаяся внутри слоя на расстоянии r от его центра, притягивается по закону Ньютона материальной точкой O, масса которой есть

$$m(r) = 4\pi \int_{a_1}^{r} r'^2 \delta(r')\, dr',$$

т. е. равна массе шарового слоя, ограниченного сферой Σ_1 и концентрической сферой радиуса r; наконец, в промежутке $a_2 \leqslant r < \infty$ имеем

$$\left.\begin{aligned} U(r) &= \frac{fm}{r}, \\ U'(r) &= -\frac{fm}{r^2}, \end{aligned}\right\} \tag{3.14'}$$

т. е. внешняя материальная точка притягивается шаровым слоем так, как будто бы вся его масса была сосредоточена в его центре.

Для сплошного шара $a_1 = 0$, и мы имеем, заменяя a_2 через a, в промежутке $0 \leqslant r \leqslant a$:

$$\left.\begin{aligned} U(r) &= \frac{4\pi f}{r} \int_0^r r'^2 \delta(r')\, dr' + 4\pi f \int_r^a r' \delta(r')\, dr', \\ U'(r) &= -\frac{4\pi f}{r^2} \int_0^r r'^2 \delta(r')\, dr'. \end{aligned}\right\} \tag{3.15'}$$

Наконец, если $\delta = \text{const}$, то для шарового слоя имеем в промежутке $a_1 \leqslant r \leqslant a_2$:

$$U(r) = 4\pi f \delta \left[\frac{r^3 - a_1^3}{3r} + \frac{a_2^2 - r^2}{2}\right],$$

$$U'(r) = -4\pi f \delta \frac{r^3 - a_1^3}{3r^2},$$

и для сплошного шара — в промежутке $0 \leqslant r \leqslant a$:

$$U(r) = \frac{2\pi f \delta}{3}(3a^2 - r^2),$$

$$U'(r) = -\frac{4}{3}\pi f \delta r,$$

что было уже найдено непосредственным вычислением.

Составляющие силы притяжения в прямоугольной системе координат с началом в центре слоя (или шара) и с произвольными направлениями осей найдутся по очевидным формулам

$$X = \frac{x}{r} U'(r), \quad Y = \frac{y}{r} U'(r), \quad Z = \frac{z}{r} U'(r).$$

Теперь заметим, что если центр шара (или слоя) находится в точке $G(\xi, \eta, \zeta)$ прямоугольной системы координат с началом в произвольно выбранной точке O, то все приведенные выше формулы сохранятся без изменения, но вместо r нужно везде поставить

$$R=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

Тогда формулы (3.13′), (3.14′), (3.15) определят силовую функцию взаимного притяжения шарового слоя (или полного шара) и материальной точки P единичной массы *).

Эта силовая функция зависит только от расстояния R точки P до центра G слоя (или шара), а следовательно, вовсе не зависит от углов Эйлера, определяющих ориентацию собственной системы координат. Поэтому составляющие сил притяжения, действующих на точку P и на тело T (с центром приведения в точке G), найдутся по очевидным формулам:

$$X=\frac{x-\xi}{R}U'(R), \quad Y=\frac{y-\eta}{R}U'(R), \quad Z=\frac{z-\zeta}{R}U'(R),$$
$$\Xi=\frac{\xi-x}{R}U'(R), \quad \mathrm{H}=\frac{\eta-y}{R}U'(R), \quad \mathrm{Z}=\frac{\zeta-z}{R}U'(R),$$

а составляющие момента силы притяжения, действующей на тело T (относительно точки G), очевидно, равны нулю **).

2. Пусть теперь имеем два тела T_1 и T_2, каждое из которых есть либо шаровой слой со сферическим распределением плотностей либо полный шар такой же структуры.

Обозначим, как и ранее, через M_i $(i=1,2)$ текущую точку тела T_i, в которой сосредоточена элементарная масса dm_i, и через Δ расстояние между M_1 и M_2. Тогда силовая функция взаимного притяжения этих двух трехмерных тел определится, как мы знаем, следующей общей формулой:

$$U=f\int\int\limits_{(T_1)}\int\int\int\limits_{(T_2)}\int\frac{dm_1\,dm_2}{\Delta}. \tag{3.16}$$

Обозначим через $U_2(M_1)$ силовую функцию тела T_2 на точку M_1, в которой сосредоточена единичная масса, а через $U_1(M_2)$ — такую же функцию тела T_1 на точку M_2.

Тогда, очевидно, формула (3.16) может быть написана двояким образом:

$$U=\int\int\limits_{(T_1)}\int U_2(M_1)\,dm_1=\int\int\limits_{(T_2)}\int U_1(M_2)\,dm_2. \tag{3.16′}$$

---

*) Если масса точки есть μ, то во всех предыдущих формулах нужно ввести дополнительный множитель μ.

**) См. формулы (2.3) гл. II.

Пусть шаровые слои T_1 и T_2 являются внешними друг для друга. Тогда $U_2(M_1)$ есть силовая функция шарового слоя на внешнюю точку M_1 единичной массы, и по формуле (3.14) мы будем иметь (рис. 14)

$$U_2(M_1) = f \iiint\limits_{(T_2)} \frac{dm_2}{\Delta} = \frac{fm_2}{\Delta_2},$$

где Δ_2 — расстояние точки M_1 до центра G_2 слоя T_2, а масса слоя T_2 есть m_2.

Аналогично можем написать также

$$U_1(M_1) = f \iiint\limits_{(T_1)} \frac{dm_1}{\Delta} = \frac{fm_1}{\Delta_1},$$

где Δ_1 есть расстояние точки M_2 до центра G_1 тела T_1, а m_1 — масса этого слоя.

Поэтому формулы (3.16′) напишутся теперь в виде

$$U = fm_2 \iiint\limits_{(T_1)} \frac{dm_1}{\Delta_2} = fm_1 \iiint\limits_{(T_2)} \frac{dm_2}{\Delta_1}.$$

Но каждый из этих двух интегралов есть опять, очевидно, силовая функция слоя T_1 (слоя T_2) на внешнюю материальную точку G_2 с массой m_2 (G_1 с массой m_1), а следовательно, опять по формуле (3.14) мы будем иметь

$$U = f\frac{m_1 m_2}{R}, \qquad (3.17)$$

где R обозначает расстояние между центрами G_1 и G_2.

Но формула (3.17) определяет силовую функцию взаимного притяжения двух материальных точек G_1 и G_2 с массами m_1 и m_2, а следовательно, два шаровых слоя, каждый из которых обладает сферической структурой, внешние по отношению друг к другу, притягиваются взаимно с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между их центрами.

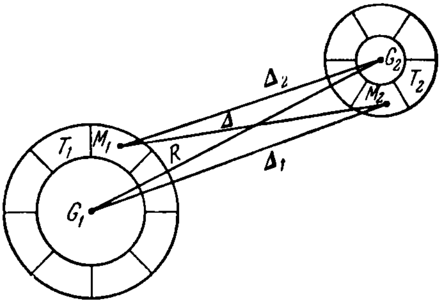


Рис. 14.

Можно также сказать, что два внешних шаровых слоя взаимно притягиваются так же, как притягивались бы две материальные точки, помещенные в центрах слоев и обладающих их массами.

Многие естественные небесные тела (звезды, большие планеты, некоторые их спутники, шаровые звездные скопления) имеют форму, весьма близкую к сферической, а распределение материи внутри них, вероятно, близко к сферическому закону.

Отсюда следует, что такие небесные тела взаимно притягиваются почти как материальные точки даже на достаточно близких расстояниях между ними. Ранее, во второй главе, было показано, что два совершенно произвольных тела, находящихся на весьма значительном расстоянии, также притягиваются как материальные точки. Взаимное действие этих двух причин и позволяет в астрономии, а в частности в небесной механике, широко пользоваться законом Ньютона в его простейшей форме. Сказанное относится также и к искусственным небесным телам, когда рассматривается задача о их поступательном движении.

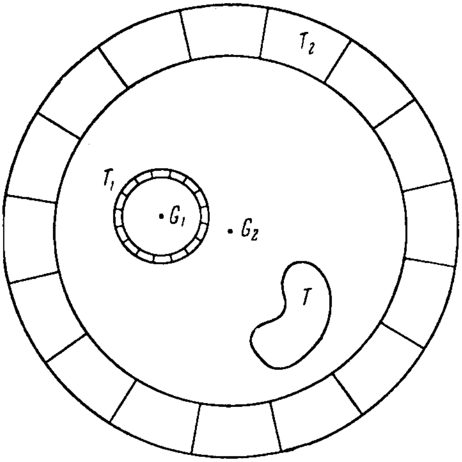


Рис. 15.

Составляющие сил притяжения, действующих на слои T_1 и T_2, находятся также как и для материальных точек, а составляющие моментов этих сил относительно центров G_1 и G_2 соответственно, очевидно, равны нулю.

Допустим теперь, что одно из тел расположено целиком во внутренней полости другого. Пусть, например, тело T_2 есть шаровой слой, а тело T_1 есть слой, или шар, находящийся во внутренней полости слоя T_2 (рис. 15). Рассмотрим какую угодно частицу тела T_1. По теореме Ньютона (формулы (3.13)) эта частица не притягивается слоем и, разумеется, сама его не притягивает.

Так как все тело T_1 может рассматриваться как бесчисленное собрание таких частиц, каждая из которых не притягивается телом T_2, то и все тело T_1 целиком не притягивается телом T_2 и, конечно, само его не притягивает.

Заметим, что сказанное будет также, очевидно, справедливо и по отношению к любому телу T, находящемуся целиком во внутренней полости шарового слоя T_2, обладающего сферической структурой (см. рис. 15), а два таких тела будут вести себя так, как если бы они находились в абсолютно пустом пространстве.

§ 3. Некоторые свойства эллипсоидов

В этом параграфе мы рассмотрим отдельно некоторые геометрические свойства эллипсоидов, которые будут нужны нам в дальнейшем при нахождении силовой функции эллипсоидального тела.

1. Пусть E обозначает некоторый эллипсоид, полуоси которого суть a, b, c. Мы всегда, для определенности, будем считать, что c есть наименьшая полуось, а a — наибольшая, т. е. что

$$c \leqslant b \leqslant a.$$

Примем главные оси эллипсоида E за оси декартовой системы координат с началом в его центре O. Тогда уравнение поверхности E запишется в виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{3.18}$$

В частности, если $b=a$, то уравнение имеет вид

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

и E есть эллипсоид вращения вокруг оси Oz, т. е. вокруг наименьшей из осей эллипсоида. Такой эллипсоид мы будем называть сжатым эллипсоидом вращения.

Если $b=c$, то уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$

и E есть эллипсоид вращения вокруг оси Ox, т. е. вокруг наибольшей из осей эллипсоида. Такой эллипсоид мы будем называть вытянутым эллипсоидом вращения.

Наконец, если $c=b=a$, то эллипсоид E превращается в сферу

$$x^2+y^2+z^2=a^2$$

радиуса a с центром в начале координат.

Отметим, что если некоторая точка $P(x_0,\ y_0,\ z_0)$ лежит на поверхности эллипсоида E, то ее координаты удовлетворяют уравнению (3.18), т. е.

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1.$$

Если точка P лежит внутри эллипсоида E, то

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}<1,$$

а для внешней точки имеем

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}>1.$$

Рассмотрим теперь второй эллипсоид E' с полуосями a', b', c', концентрический с E и определяемый уравнением

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1.$$

Два эллипсоида E и E' называются подобными, если их соответственные оси пропорциональны, т. е. если

$$a'=ka, \quad b'=kb, \quad c'=kc.$$

Поэтому уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=k^2 \tag{3.19}$$

есть уравнение семейства подобных и подобно расположенных эллипсоидов и k есть параметр этого семейства (рис. 16).

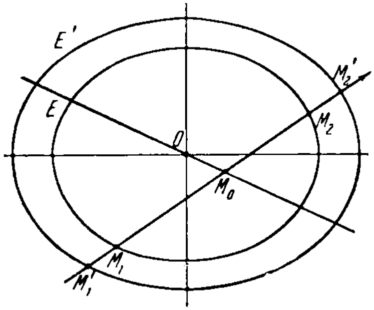


Рис. 16.

Пусть, далее, имеем семейство параллельных прямых, общее направление которых определяется угловыми коэффициентами m, n, p. Уравнения этих прямых можно написать в виде

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Каждая из прямых этого семейства пересекает эллипсоид в двух точках, действительных или мнимых. Отрезок прямой, заключенный между двумя действительными точками пересечения с поверхностью E, называется, как известно, хордой поверхности; геометрическое место середин всех таких параллельных хорд есть плоскость, проходящая через центр эллипсоида и определяемая уравнением

$$\frac{mx}{a^2}+\frac{ny}{b^2}+\frac{pz}{c^2}=0.$$

Эта плоскость называется диаметральной плоскостью эллипсоида, сопряженной прямым с угловыми коэффициентами m, n, p.

Очевидно, что все подобные и подобно расположенные эллипсоиды (3.19) имеют общую диаметральную плоскость, сопряженную данному направлению.

Докажем теперь одно простое свойство подобных эллипсоидов. Пусть E' есть эллипсоид, внешний по отношению к E $(k>1)$, и пусть P есть любая точка, лежащая внутри E (а следовательно, и внутри E'; см. рис. 16). Проведем через эту точку произвольную прямую $L(m, n, p)$ и обозначим точки пересечения этой прямой с поверхностью E через M_1 и M_2 и с поверхностью E' через M_1' и M_2' соответственно. Тогда

$$\overline{M_1M_1'}=\overline{M_2M_2'}, \tag{3.20}$$

какова бы ни была прямая L.

Действительно, как уже было отмечено, эллипсоиды E и E' имеют одну и ту же диаметральную плоскость, сопряженную направлению L. Следовательно, хорды $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1'M_2'}$ имеют общую середину M_0. Таким образом,

$$\overline{M_0M_1}=\overline{M_0M_2}, \quad \overline{M_0M_1'}=\overline{M_0M_2'},$$

откуда и следует равенство (3.20).

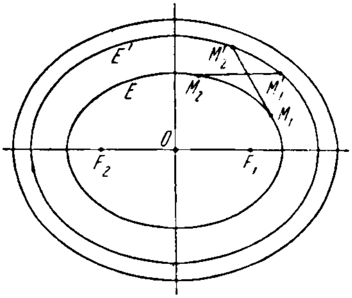


Рис. 17.

2. Пусть теперь полуоси эллипсоида E', концентрического с E, определяются формулами

$$a'^2=a^2+\lambda, \quad b'^2=b^2+\lambda,$$
$$c'^2=c^2+\lambda.$$

Тогда эллипсоиды E и E' называются **софокусными**, а уравнение *)

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1 \tag{3.21}$$

есть уравнение семейства софокусных эллипсоидов с параметром λ, который считается положительным (рис. 17).

Заметим, что если параметр λ может принимать какие угодно вещественные значения, то среди поверхностей (3.12) будут не только эллипсоиды $(\lambda>-c^2)$, но также и гиперболоиды, однополостные $(-b^2<\lambda<-c^2)$ и двуполостные $(-a^2<\lambda<b^2)$, а поэтому уравнение (3.21) вообще есть уравнение софокусных поверхностей второго порядка (центральных!).

---

*) Поверхности (3.21) называются софокусными, так как главные сечения этих поверхностей имеют общие фокусы. Действительно, рассмотрим для примера сечения этих поверхностей плоскостью $z=0$. Эти сечения будут эллипсами или гиперболами, фокальные расстояния которых равны $\pm\sqrt{a^2-b^2}$ Так как эти расстояния не зависят от λ, то эти сечения имеют общие фокусы, что и надо было показать.

Пусть E' есть эллипсоид, софокусный эллипсоиду E и внешний по отношению к нему $(\lambda>0)$.

Возьмем на E произвольную точку $M(x, y, z)$ и поставим ей в соответствие точку $M'(x', y', z')$ на E', координаты которой определяются из условий

$$x'=\frac{a'}{a}x, \quad y'=\frac{b'}{b}y, \quad z'=\frac{c'}{c}z. \tag{3.22}$$

Ясно, что каждой точке M на E соответствует одна-единственная точка M' на E' *). Докажем теперь следующую теорему:

Теорема Айвори. Если M_1 и M_2 суть точки эллипсоида E, а M_1' и M_2' — соответствующие им точки эллипсоида E', то

$$\overline{M_1M_2'}=\overline{M_2M_1'},$$

каковы бы ни были точки M_1 и M_2.

Действительно, пусть x_1, y_1, z_1 суть координаты M_1, и x_2, y_2, z_2 — координаты M_2. Координаты соответствующих точек, лежащих на E', обозначим также, но со штрихами, так что

$$x_1'=\frac{a'}{a}x_1, \quad y_1'=\frac{b'}{b}y_1, \quad z_1'=\frac{c'}{c}z_1,$$
$$x_2'=\frac{a'}{a}x_2, \quad y_2'=\frac{b'}{b}y_2, \quad z_2'=\frac{c'}{c}z_2.$$

Для расстояний $\overline{M_1M_2'}$ и $\overline{M_2M_1'}$ имеем

$$(\overline{M_1M_2'})^2=(x_1-x_2')^2+(y_1-y_2')^2+(z_1-z_2')^2=$$
$$=\left(x_1-\frac{a'}{a}x_2\right)^2+\left(y_1-\frac{b'}{b}y_2\right)^2+\left(z_1-\frac{c'}{c}z_2\right)^2,$$
$$(\overline{M_2M_1'})^2=(x_2-x_1')^2+(y_2-y_1')^2+(z_2-z_1')^2=$$
$$=\left(x_2-\frac{a'}{a}x_1\right)^2+\left(y_2-\frac{b'}{b}y_1\right)^2+\left(z_2-\frac{c'}{c}z_1\right)^2,$$

откуда

$$(\overline{M_1M_2'})^2-(\overline{M_2M_1'})^2=\left(1-\frac{a'^2}{a^2}\right)x_1^2+\left(\frac{a'^2}{a^2}-1\right)x_2^2+$$
$$+\left(1-\frac{b'^2}{b^2}\right)y_1^2+\left(\frac{b'^2}{b^2}-1\right)y_2^2+\left(1-\frac{c'^2}{c^2}\right)z_1^2+\left(\frac{c'^2}{c^2}-1\right)z_2^2=$$
$$=-\lambda\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}\right)+\lambda\left(\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{z_2^2}{c^2}\right),$$

---

*) Соответствие, определяемое равенствами (3.22), называется иногда соответствием в смысле Айвори, или, короче, аффинностью Айвори.

а так как точки M_1 и M_2 лежат на эллипсоиде E, то

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}\equiv 1, \quad \frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}+\frac{z_2^2}{c^2}\equiv 1,$$

и, следовательно,

$$(\overline{M_1M_2'})^2-(\overline{M_2M_1'})^2=0,$$

т. е. расстояния $\overline{M_1M_2'}$ и $\overline{M_2M_1'}$ равны.

Таким образом, теорема Айвори доказана.

§ 4. Эллипсоидальные координаты

1. Докажем теперь следующую теорему:

Теорема. Через каждую точку P', внешнюю по отношению к эллипсоиду E, проходит только один эллипсоид E', софокусный эллипсоиду E.

Пусть $P'(x', y', z')$ есть точка пространства, внешняя для E, т. е. пусть

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}>1.$$

Так как семейство эллипсоидов, софокусных эллипсоиду E, определяется уравнением (3.21), в котором λ есть параметр семейства, то, чтобы найти эллипсоид E', проходящий через точку P', нужно определить соответствующее значение параметра λ из уравнения

$$F(\lambda)=\frac{x'^2}{a^2+\lambda}+\frac{y'^2}{b^2+\lambda}+\frac{z'^2}{c^2+\lambda}-1=0, \qquad (3.23)$$

в котором координаты точки P' и полуоси эллипсоида E суть величины данные.

Покажем, что уравнение (3.23), являющееся кубичным относительно неизвестной λ, всегда имеет три вещественных корня, из которых только один положителен.

Для этого отметим прежде всего, что производная по λ от функции $F(\lambda)$, т. е.

$$F'(\lambda)=-\frac{x'^2}{(a^2+\lambda)^2}-\frac{y'^2}{(b^2+\lambda)^2}-\frac{z'^2}{(c^2+\lambda)^2}$$

есть величина всегда отрицательная. Следовательно, функция $F(\lambda)$ есть монотонно убывающая функция, когда λ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Далее, функция $F(\lambda)$ имеет три точки разрыва второго рода при $\lambda=-c^2$, $-b^2$, $-a^2$, где функция имеет бесконечно большое значение ($\pm\infty$).

Тогда из следующей таблицы, показывающей знак функции $F(\lambda)$ для некоторых значений λ:

λ	знак $F(\lambda)$	λ	знак $F(\lambda)$
$-\infty$	$-$	$-c^2-\varepsilon$	$-$
$-a^2-\varepsilon$	$-$	$-c^2+\varepsilon$	$+$
$-a^2+\varepsilon$	$+$	0	$+$
$-b^2-\varepsilon$	$-$	$+\infty$	$-$
$-b^2+\varepsilon$	$+$		

где ε есть любое положительное число, меньшее чем c^2, мы немедленно усматриваем. что функция $F(\lambda)$ обращается в нуль

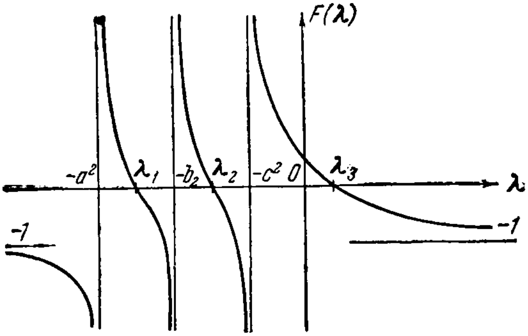


Рис. 18.

три раза на промежутке от $\lambda=-\infty$ до $\lambda=+\infty$ при значениях параметра, удовлетворяющих неравенствам (рис. 18)

$$-a^2<\lambda_1<-b^2, \quad -b^2<\lambda_2<-c^2, \quad 0<\lambda_3<+\infty.$$

Все эти значения вещественны, причем $\lambda_1<0$, $\lambda_2<0$ и $\lambda_3>0$. Значение λ_3 соответствует эллипсоиду E', софокусному с E и проходящему через точку P'. Таким образом, теорема доказана.

Заметим еще, что когда точка P' перемещается в пространстве, приближаясь к поверхности эллипсоида E, то корень λ_3 уменьшается, приближаясь к нулю, а когда точка P' удаляется в бесконечность, то λ_3 возрастает и также стремится к $+\infty$. Наконец, когда точка P' переходит внутрь эллипсоида и, перемещаясь внутри него, приближается к его центру O, то λ_3 делается отрицательным и стремится к $-c^2$, когда $P'\to 0$.

Нетрудно сообразить, что при этом эллипсоид E' делается все более и более плоским и вырождается в пределе в эллипс (точнее, в эллиптический диск) с полуосями a^2-c^2 и b^2-c^2.

Но при любом λ_3, содержащемся в промежутке $(-c^2, +\infty)$, мы имеем

$$\lambda_3+c^2>0,\quad \lambda_3+b^2>0,\quad \lambda_3+a^2>0,$$

и поэтому поверхность, проходящая через точку P' и соответствующая корню λ_3, всегда есть эллипсоид.

Далее, легко видеть, что

$$\lambda_2+c^2<0,\quad \lambda_2+b^2>0,\quad \lambda_2+a^2>0,$$

и поэтому поверхность, проходящая через точку P' и соответствующая корню λ_2, всегда есть однополостный гиперболоид. Наконец, мы имеем

$$\lambda_1+c^2<0,\quad \lambda_1+b^2<0,\quad \lambda_1+a^2>0,$$

а следовательно, поверхность, проходящая через точку P' и соответствующая корню λ_1, есть всегда двуполостный гиперболоид.

2. Итак, через любую точку пространства можно провести три различные центральные поверхности второго порядка, софокусные данному эллипсоиду E. Одна из этих трех поверхностей есть также эллипсоид, другая — однополостный гиперболоид, а третья — двуполостный гиперболоид. Уравнения этих трех поверхностей можно написать в виде

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1(x, y, z;\, \lambda_1)=0=\frac{x^2}{a^2+\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_1}+\frac{z^2}{c^2+\lambda_1}-1,\\ \Phi_2(x, y, z;\, \lambda_2)=0=\frac{x^2}{a^2+\lambda_2}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_2}+\frac{z^2}{c^2+\lambda_2}-1,\\ \Phi_3(x, y, z;\, \lambda_3)=0=\frac{x^2}{a^2+\lambda_3}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_3}+\frac{z^2}{c^2+\lambda_3}-1.\end{aligned}\right\} \quad (3.24)$$

Нетрудно убедиться, что (3.24) образует триортогональное семейство поверхностей второго порядка, т. е. что любые две поверхности, соответствующие различным параметрам, пересекаются под прямым углом.

В самом деле, угол φ между двумя различными поверхностями (3.24) в точках их пересечения равен углу между нормалями к этим поверхностям, а следовательно, $(j\neq i=1, 2, 3)$,

$$\cos\varphi=\frac{\pm 1}{N_iN_j}\left[\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}+\frac{\partial\Phi_i}{\partial z}\frac{\partial\Phi_j}{\partial z}\right],$$

где

$$N_i=\sqrt{\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Phi_i}{\partial z}\right)^2}.$$

Поэтому находим

$$\cos\varphi=\frac{\pm 4}{N_i N_j}\left[\frac{x^2}{(a^2+\lambda_i)(a^2+\lambda_j)}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda_i)(b^2+\lambda_j)}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda_i)(c^2+\lambda_j)}\right].$$

Но для всякой точки, принадлежащей обеим поверхностям (точки на линии их пересечения) будет удовлетворяться следующее соотношение, получающееся из (3.24):

$$\frac{\Phi_i-\Phi_j}{\lambda_j-\lambda_i}=\left[\frac{x^2}{(a^2+\lambda_i)(a^2+\lambda_j)}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda_i)(b^2+\lambda_j)}+\right.$$
$$\left.+\frac{z^2}{(c^2+\lambda_i)(c^2+\lambda_j)}\right]=0.$$

Отсюда следует, что $\cos\varphi=0$ и поверхности $\Phi_i=0$ и $\Phi_j=0$ $(i,\ j=1,\ 2,\ 3;\ j\neq i)$ действительно ортогональны.

Разрешая теперь уравнения (3.24) относительно x^2, y^2, z^2, мы получим

$$\left.\begin{aligned}
x^2&=\frac{(a^2+\lambda_1)(a^2+\lambda_2)(a^2+\lambda_3)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\\
y^2&=\frac{(b^2+\lambda_1)(b^2+\lambda_2)(b^2+\lambda_3)}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},\\
z^2&=\frac{(c^2+\lambda_1)(c^2+\lambda_2)(c^2+\lambda_3)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}.
\end{aligned}\right\}\qquad(3.25)$$

Таким образом, каждой точке пространства соответствуют три числа λ_1, λ_2, λ_3, связанные с декартовыми координатами этой точки формулами (3.25), которые отличаются от формул § 1 только обозначениями.

Следовательно, если основной координатной поверхностью является поверхность данного эллипсоида E, то числа λ_1, λ_2, λ_3 суть эллипсоидальные координаты точки P.

3. Возвращаясь к уравнению (3.23), будем рассматривать координаты точки P как независимые переменные, а λ — как их функцию. Отбрасывая штрихи у координат, напишем уравнение, определяющее λ как функцию x, y, z, в виде

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0.\qquad(3.23')$$

В дальнейшем нам понадобятся выражения дифференциальных параметров Ламе для функции $\lambda(x,\ y,\ z)$, определяемой уравнением (3.23'). Дифференцируя это уравнение по x, y, z соответственно (считая λ их функцией), мы получим

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=\frac{2x}{(a^2+\lambda)\,Q},\qquad\frac{\partial\lambda}{\partial y}=\frac{2y}{(b^2+\lambda)\,Q},\qquad\frac{\partial\lambda}{\partial z}=\frac{2z}{(c^2+\lambda)\,Q},$$

где положено для сокращения

$$Q=\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^2}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^2}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^2}.$$

Вторичное дифференцирование дает, например,

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}=\frac{2}{(a^2+\lambda)\,Q}-\frac{8x^2}{(a^2+\lambda)^3\,Q^2}+\frac{8x^2}{(a^2+\lambda)^2\,Q^3}\cdot\overline{Q},$$

где

$$\overline{Q}=\frac{x^2}{(a^2+\lambda)^3}+\frac{y^2}{(b^2+\lambda)^3}+\frac{z^2}{(c^2+\lambda)^3}$$

и аналогичные выражения для двух других производных. Теперь находим без труда *)

$$\Delta_1\lambda=\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right)^2=\frac{4}{Q} \tag{3.25'}$$

и

$$\nabla\lambda=\frac{2}{Q}\left[\frac{1}{a^2+\lambda}+\frac{1}{b^2+\lambda}+\frac{1}{c^2+\lambda}\right]. \tag{3.26}$$

Полагая еще

$$R(\lambda)=\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)},$$

мы можем представить $\nabla\lambda$ в виде

$$\nabla\lambda=\frac{4}{Q}\,\frac{d\ln R(\lambda)}{d\lambda}. \tag{3.27}$$

Пусть теперь V есть данная функция от λ, которая в силу уравнения (3.23) в свою очередь есть функция от x, y, z.

Найдем оператор Лапласа для функции V. Из формул

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{dV}{d\lambda}\,\frac{\partial\lambda}{\partial x},\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\frac{d^2V}{d\lambda^2}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}\right)^2+\frac{dV}{d\lambda}\,\frac{\partial^2\lambda}{\partial x^2}$$

и им аналогичных для производных по y и z, мы получаем

$$\nabla V=\frac{d^2V}{d\lambda^2}\,\Delta_1\lambda+\frac{dV}{d\lambda}\,\nabla\lambda,$$

что ввиду (3.25′) и (3.26) можно также представить в виде

$$\nabla V=\frac{4}{Q}\left[\frac{d^2V}{d\lambda^2}+\frac{d\ln R(\lambda)}{d\lambda}\,\frac{dV}{d\lambda}\right]. \tag{3.28}$$

§ 5. Притяжение однородного эллипсоида. Случай внутренней точки

Задача о нахождении силовой функции и составляющих силы притяжения однородного эллипсоида издавна была одной из важнейших задач теории притяжения, которой посвящали свои труды многие выдающиеся ученые. Лаплас, Лагранж, Маклорен, Айвори, Якоби, Гаусс, Дирихле, Ляпунов — вот далеко не

---

*) См. формулы (3.4′) § 1 этой главы.

полный список великих и славных имен, связанных с этой, необходимой для астрономических и геофизических приложений, задачей.

Лагранж, Гаусс и Дирихле дали методы, позволяющие найти выражение для силовой функции однородного эллипсоида для случая, когда притягиваемая точка лежит внутри него. Затем теоремы Лапласа, Айвори и Маклорена позволили найти, почти уже без вычислений, силовую функцию и для внешней точки.

Обычно в учебниках или руководствах по теории потенциала излагается классический метод Лагранжа или метод Гаусса. Эти методы заключаются в нахождении составляющих сил притяжения, т. е. частных производных от силовой функции, а затем уже в определении самой силовой функции путем интегрирования ее полного дифференциала. Здесь мы изложим способ непосредственного вычисления самой силовой функции, а составляющие силы найдем затем обычным путем при помощи дифференцирования *).

1. Итак, рассмотрим однородное тело T с плотностью $\delta = \text{const}$, ограниченное поверхностью эллипсоида E.

Для упрощения выкладок возьмем систему координат с началом в центре эллипсоида E, оси которой направлены по главным осям эллипсоида. Тогда уравнение поверхности эллипсоида запишется в виде (3.18), причем по-прежнему считаем, что

$$c \leqslant b \leqslant a.$$

Пусть $P(x, y, z)$ есть материальная точка единичной массы, лежащая внутри эллипсоида, так что

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1.$$

Составляющие силы притяжения, действующей на точку P, пропорциональны, как показал Лагранж, координатам этой точки, а коэффициенты пропорциональности выражаются обыкновенными однократными интегралами, приводящимися к эллиптическим. Отсюда следует, что силовая функция эллипсоида на внутреннюю точку представляется в виде квадратичной формы от координат точки P, содержащей только квадраты этих величин.

Как уже было сказано, мы выведем это выражение для силовой функции путем непосредственного вычисления. Для этого вообразим систему полярных координат с началом в точке P

---

*) Аналогичный способ нахождения силовой функции однородного эллипсоида изложен в книге Мультон, Введение в небесную механику, пер. с англ., ОНТИ, 1935. Способы Лагранжа и Гаусса см., например, в книге Л. Н. Сретенского, Теория ньютоновского потенциала, или в фундаментальном трактате по небесной механике Тиссерана.

и воспользуемся для нахождения силовой функции $U(P)$ формулой, приведенной в сноске на стр. 73 и вытекающей из формулы (2.15).

Таким образом, можем написать

$$U(P)=\frac{1}{2}f\delta\iint\limits_{(\Omega)}R^2\,d\omega, \tag{3.29}$$

где интегрирование распространено на всю сферу Ω единичного радиуса, а R есть переменное расстояние от точки P до точки $M(x', y', z')$ поверхности эллипсоида E (рис. 19). Обозначая, как и раньше, направляющие косинусы прямой $\overrightarrow{PM}$ через α, β, γ, мы имеем

$$x'=x+R\alpha,\quad y'=y+R\beta,$$
$$z'=z+R\gamma.$$

Подставляя эти выражения для координат в уравнение

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}=1 \tag{E}$$

эллипсоида (E), мы получим квадратное уравнение относительно R:

$$AR^2+2BR+C=0, \tag{3.30}$$

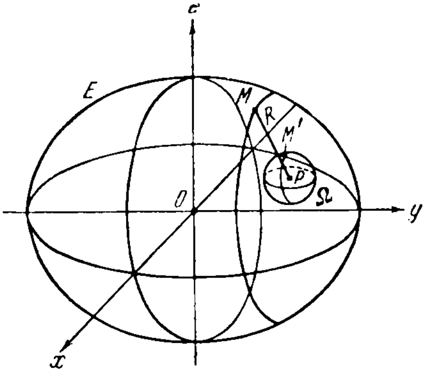


Рис. 19.

коэффициенты которого имеют приводимые ниже значения:

$$A=\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}>0,$$
$$B=\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2},$$
$$C=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1<0,$$

откуда находим, что дискриминант $B^2-AC>0$, т. е. один корень уравнения (3.30) положителен, а другой отрицателен. Так как R есть величина заведомо положительная, то имеем

$$R=-\frac{B}{A}+\frac{\sqrt{B^2-AC}}{A},$$

откуда

$$R^2=\frac{2B^2-AC}{A^2}-\frac{2B\sqrt{B^2-AC}}{A^2}.$$

Подставив найденное выражение для R^2 в формулу для силовой функции (3.29), мы получим

$$U(P)=f\delta\left\{\iint\limits_{(\Omega)}\frac{B^2\,d\omega}{A^2}-\frac{1}{2}\iint\limits_{(\Omega)}\frac{C\,d\omega}{A}-\iint\limits_{(\Omega)}\frac{B\sqrt{B^2-AC}}{A^2}\,d\omega\right\}.$$

Покажем, что последний интеграл равен нулю. Действительно, заменяя B его выражением и полагая для сокращения

$$\Phi(M)=\frac{\sqrt{B^2-AC}}{A^2},$$

мы можем написать

$$\iint\limits_{(\Omega)}\frac{B\sqrt{B^2-AC}}{A^2}\,d\omega=\frac{x}{a^2}\iint\limits_{(\Omega)}\alpha\Phi(M)\,d\omega+\\+\frac{y}{b^2}\iint\limits_{(\Omega)}\beta\Phi(M)\,d\omega+\frac{z}{c^2}\iint\limits_{(\Omega)}\gamma\Phi(M)\,d\omega.$$

Воображая теперь плоскость, проходящую через точку P параллельно плоскости xOy, мы разобьем всю сферу Ω на две половинки — «верхнюю» Σ и «нижнюю» Σ' (рис. 20). Пусть M' есть текущая точка полусферы Σ', симметричная текущей точке полусферы Σ относительно точки P. Тогда направляющие косинусы прямой $\overrightarrow{PM'}$ будут равны соответственно $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, а $\Phi(M')=\Phi(M)$; поэтому, например, для первого интеграла в предыдущей формуле мы получим

$$\iint\limits_{(\Omega)}\alpha\Phi(M)\,d\omega=\iint\limits_{(\Sigma)}\alpha\Phi(M)\,d\omega+\iint\limits_{(\Sigma')}(-\alpha)\Phi(M')\,d\omega=0.$$

Аналогично показывается равенство нулю и остальных двух интегралов.

Теперь можем написать

$$U(P)=f\delta\left\{\bar{U}-\frac{1}{2}\iint\limits_{(\Omega)}\frac{C\,d\omega}{A}+\frac{x^2}{a^4}\iint\limits_{(\Omega)}\frac{\alpha^2\,d\omega}{A^2}+\right.\\\left.+\frac{y^2}{b^4}\iint\limits_{(\Omega)}\frac{\beta^2\,d\omega}{A^2}+\frac{z^2}{c^4}\iint\limits_{(\Omega)}\frac{\gamma^2\,d\omega}{A^2}\right\},$$

где положено

$$\bar{U}=\frac{2xy}{a^2b^2}\iint\limits_{(\Omega)}\frac{\alpha\beta\,d\omega}{A^2}+\frac{2xz}{a^2c^2}\iint\limits_{(\Omega)}\frac{\alpha\gamma\,d\omega}{A^2}+\frac{2yz}{b^2c^2}\iint\limits_{(\Omega)}\frac{\beta\gamma\,d\omega}{A^2}.$$

Но каждый из трех последних интегралов, как легко убедиться, также равен нулю. Действительно, возьмем на полусфере Σ'

текущую точку M', симметричную точке M полусферы Σ относительно плоскости xOy (см. рис. 20).

Так как направляющими косинусами прямой $\overrightarrow{PM'}$ будут теперь α, β, $-\gamma$, то A^2 будет иметь одно и то же значение в точках M и M', а поэтому

$$\iint\limits_{(\Omega)} \frac{\alpha\gamma\,d\omega}{A^2} = \iint\limits_{(\Sigma)} \frac{\alpha\gamma\,d\omega}{A^2} + \iint\limits_{(\Sigma')} \frac{\alpha(-\gamma)\,d\omega}{A^2} = 0.$$

Точно так же показывается, что равны нулю и два других интеграла. Следовательно, $\overline{U}=0$, а заменяя теперь C его значением, мы представим силовую функцию в виде

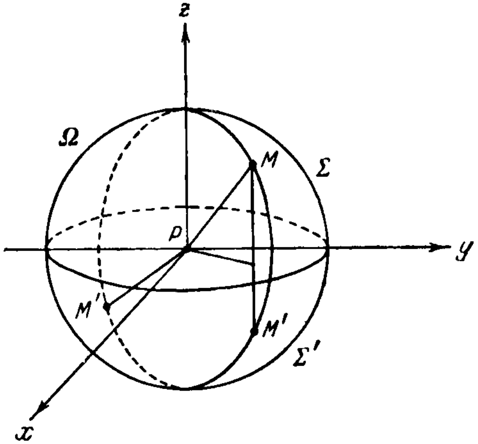


Рис. 20.

$$U(P) = f\delta\,[U_0 + U_1x^2 + U_2y^2 + U_3z^2], \qquad (3.30')$$

где коэффициенты имеют следующие значения:

$$U_0 = \frac{1}{2}\iint\limits_{(\Omega)} \frac{d\omega}{A}, \quad U_1 = \frac{1}{a^4}\iint\limits_{(\Omega)} \frac{\alpha^2\,d\omega}{A^2} - \frac{1}{2a^2}\iint\limits_{(\Omega)} \frac{d\omega}{A},$$

$$U_2 = \frac{1}{b^4}\iint\limits_{(\Omega)} \frac{\beta^2\,d\omega}{A^2} - \frac{1}{2b^2}\iint\limits_{(\Omega)} \frac{d\omega}{A}, \quad U_3 = \frac{1}{c^4}\iint\limits_{(\Omega)} \frac{\gamma^2\,d\omega}{A^2} - \frac{1}{2c^2}\iint\limits_{(\Omega)} \frac{d\omega}{A}.$$

Легко проверить теперь, что

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{U_0}{a}\right), \quad U_2 = \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{U_0}{b}\right), \quad U_3 = \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{U_0}{c}\right),$$

а поэтому нахождение коэффициентов формы (3.30) сводится к вычислению одного-единственного интеграла U_0

2. Чтобы получить классическое выражение для силовой функции эллипсоида, введем вместо направляющих косинусов α, β, γ два независимых угла ε, u, полагая

$$\alpha = \cos\varepsilon, \quad \beta = \sin\varepsilon\cos u, \quad \gamma = \sin\varepsilon\sin u.$$

Тогда

$$d\omega = \sin\varepsilon\, d\varepsilon\, du$$

и

$$A = \left(\frac{\cos^2\varepsilon}{a^2} + \frac{\sin^2\varepsilon}{b^2}\right)\cos^2 u + \\ + \left(\frac{\cos^2\varepsilon}{a^2} + \frac{\sin^2\varepsilon}{c^2}\right)\sin^2 u = p\cos^2 u + q\sin^2 u,$$

и мы найдем

$$U_0 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin\varepsilon\, d\varepsilon \int_0^{2\pi} \frac{du}{p\cos^2 u + q\sin^2 u}.$$

Так как

$$\int_0^{2\pi} \frac{du}{p\cos^2 u + q\sin^2 u} = \frac{4}{q}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\,\mathrm{tg}\, u}{\frac{p}{q} + \mathrm{tg}^2 u} = \\ = \frac{4}{\sqrt{pq}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{tg}\, u}{\sqrt{p/q}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{pq}},$$

то

$$U_0 = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin\varepsilon\, d\varepsilon}{\sqrt{pq}} = 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varepsilon\, d\varepsilon}{\sqrt{pq}}.$$

Вводя, наконец, вместо ε новую переменную интегрирования s при помощи подстановки

$$\cos\varepsilon = \frac{a}{\sqrt{a^2+s}}, \quad \sin\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{a\, ds}{2(a^2+s)^{3/2}},$$

мы получим

$$U_0 = \pi abc\int_0^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}} = \pi abc\int_0^{\infty} \frac{ds}{R(s)}, \qquad (3.31)$$

после чего немедленно находим

$$\left.\begin{aligned} U_1 &= \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{U_0}{a}\right) = -\pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\,R(s)}, \\ U_2 &= \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{U_0}{b}\right) = -\pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{(b^2+s)\,R(s)}, \\ U_3 &= \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{U_0}{c}\right) = -\pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{(c^2+s)\,R(s)}, \end{aligned}\right\} \tag{3.32}$$

где, как и в предыдущем параграфе, положено

$$R(s) = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}.$$

Теперь с помощью формул (3.31) и (3.32) мы можем представить формулу (3.30′) в следующем классическом виде:

$$U(P) = f\,\delta\pi abc \int_0^\infty \left[1 - \frac{x^2}{a^2+s} - \frac{y^2}{b^2+s} - \frac{z^2}{c^2+s}\right] \frac{ds}{R(s)}. \tag{3.33}$$

Отметим, что U_0 есть величина существенно положительная, а коэффициенты U_1, U_2, U_3, наоборот, суть числа заведомо отрицательные. Отсюда следует, что значение силовой функции в центре эллипсоида, т. е.

$$U(0,\,0,\,0) = f\,\delta U_0 = f\,\delta\pi abc \int_0^\infty \frac{ds}{R(s)}$$

есть ее максимум, что является иллюстрацией теоремы, доказанной в § 9 гл. II (принцип максимума силовой функции).

Теперь сразу получаем составляющие силы притяжения, действующей на точку P, лежащую внутри эллипсоида E:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{\partial U}{\partial x} = 2f\,\delta U_1 \cdot x, \\ Y &= \frac{\partial U}{\partial y} = 2f\,\delta U_2 \cdot y, \\ Z &= \frac{\partial U}{\partial z} = 2f\,\delta U_3 \cdot z \end{aligned}\right\}, \tag{3.34}$$

каждая из которых пропорциональна соответствующей координате притягиваемой точки.

3. Докажем теперь общую теорему Ньютона, справедливость которой была установлена ранее для шарового слоя.

Теорема Ньютона. Однородный слой, заключенный между двумя концентрическими, подобными и подобно расположенными эллипсоидами, не оказывает никакого притяжения на материальную точку, находящуюся во внутренней полости слоя.

Пусть даны два концентрических, подобных и подобно расположенных эллипсоида E и E' с полуосями соответственно

$$a,\quad b,\quad c,\quad a'=ka,\quad b'=kb,\quad c'=kc \qquad (k>1).$$

Обозначим силовую функцию однородного слоя с плотностью δ, заключенного между эллипсоидами E и E', через V. Очевидно, что эта силовая функция может рассматриваться как разность силовых функций двух полных эллипсоидов (однородных, с плотностью δ) E' и E, т. е. мы можем написать

$$V(P)=f\delta\left[V_0+V_1x^2+V_2y^2+V_3z^2\right],$$

где

$$V_0=U_0'-U_0,\quad V_1=U_1'-U_1,\quad V_2=U_2'-U_2,\quad V_3=U_3'-U_3.$$

Полагая теперь аналогично предыдущему

$$R'(s')=\sqrt{(a'^2+s')(b'^2+s')(c'^2+s')},$$

мы имеем для U_0', U_1', ... следующие выражения:

$$U_0'=\pi a'b'c'\int_0^\infty\frac{ds'}{R'(s')},\quad U_1'=-\pi a'b'c'\int_0^\infty\frac{ds'}{(a'^2+s')\,R'(s')},\ \ldots$$

Делая в этих интегралах подстановку $s'=k^2s$, мы найдем

$$U_0'=k^2U_0,\quad U_1'=U_1,\quad U_2'=U_2,\quad U_3'=U_3,$$

откуда

$$V_0=(k^2-1)\,U_0,\quad V_1=V_2=V_3=0,$$

и, следовательно,

$$V(P)=f\delta(k^2-1)\,U_0=\text{const}.$$

Таким образом, составляющие силы притяжения, действующей на точку P, будут равны нулю и теорема Ньютона доказана.

Если во внутренней полости однородного эллипсоидального слоя находится не материальная точка (частица), а некоторое материальное тело (т. е. совокупность множества материальных частиц), то это тело также не испытывает притяжения со стороны слоя и, разумеется, само не оказывает на этот слой никакого влияния.

Примечание. Можно показать, как это сделано Дивом*), что теорема Ньютона допускает обращение. А именно, Див доказал, что если материальная точка, находящаяся во внутренней пустой полости некоторого однородного тела, ограниченного подобными поверхностями, не испытывает никакого притяжения, то это тело необходимо есть однородный эллипсоидальный слой, ограниченный двумя концентрическими, подобными и подобно расположенными эллипсоидами.

§ 6. Притяжение однородным эллипсоидом внешней точки

Прежде чем перейти к нахождению силовой функции однородного эллипсоида для случая, когда притягиваемая точка лежит вне эллипсоида, рассмотрим сначала три вспомогательные теоремы, одна из которых принадлежит Айвори, другая — Лапласу, а третья — Маклорену.

1. Пусть даны два концентрических, подобно расположенных и софокусных эллипсоида E и E' с полуосями a, b, c, a', b', c' соответственно. Вообразим, что оба эллипсоида заполнены притягивающей материей с плотностью $\delta=\text{const}$. Рассмотрим некоторую определенную точку $P(x, y, z)$ поверхности эллипсоида E и соответствующую ей (в смысле Айвори) точку $P'(x', y', z')$ поверхности эллипсоида E'. Тогда координаты обеих точек связаны соотношениями

$$x'=\frac{a'}{a}x, \quad y'=\frac{b'}{b}y, \quad z'=\frac{c'}{c}z.$$

Установив это, сравним притяжение, которое оказывает эллипсоид E на материальную частицу единичной массы, помещенную в точке P', с притяжением, которое оказывает эллипсоид E' на частицу той же массы, помещенную в точке P.

Для этого вычислим составляющие сил, действующих на точки P' и P по формулам Гаусса (см. сноску на стр. 81), которые дают

$$X(P')=-f\delta\int\limits_{(E)}\int\frac{\alpha\,d\sigma}{\Delta},$$

где Δ есть расстояние между точкой P' и текущей точкой $M(x_1, y_1, z_1)$ поверхности E, а α есть направляющий косинус внешней нормали к поверхности E в точке M; аналогично,

$$X'(P)=-f\delta\int\limits_{(E')}\int\frac{\alpha'\,d\sigma'}{\Delta'},$$

---

*) P. Dive, Attraction des ellipsoides homogénes et réciproque d'un théoreme de Newton, Bulletin de la Société Mathématique de France, t. LIX, 1931.

где Δ' — расстояние от точки P до текущей точки $M'(x_1', y_1', z_1')$ поверхности E', а α' есть направляющий косинус внешней нормали к E' в точке M'.

Так как каждой точке E соответствует (в смысле Айвори) единственная точка на E', то мы можем считать, что текущая точка M' на E' соответствует текущей точке M на E, т. е. что

$$x_1' = \frac{a'}{a} x_1, \quad y_1' = \frac{b'}{b} y_1, \quad z_1' = \frac{c'}{c} z_1.$$

Так как точки P и P' также соответствуют друг другу, то по теореме Айвори, доказанной в § 3, мы имеем

$$\overline{PM'} = \overline{P'M}.$$

Заметим теперь, что $\alpha d\sigma$ есть проекция площади $d\sigma$ поверхности E на координатную плоскость yOz. Поэтому мы можем положить $\alpha d\sigma = dy_1\, dz_1$ и написать

$$X(P') = -2f\delta \int\limits_{(Э)}\int \frac{dy_1\, dz_1}{\Delta},$$

где интегрирование распространено на площадь $Э$ эллипса, являющегося сечением поверхности E плоскостью yOz.

Точно так же

$$X'(P) = -2f\delta \int\limits_{(Э')}\int \frac{dy_1'\, dz_1'}{\Delta'},$$

где интегрирование распространено на площадь $Э'$ эллипса, являющегося сечением поверхности E' той же плоскостью yOz. Но, очевидно, что

$$dy_1'\, dz_1' = \frac{b'c'}{bc} dy_1\, dz_1$$

и, кроме того,

$$\Delta' = \Delta,$$

так что выражение для составляющей $X'(P)$ принимает вид

$$X'(P) = -2f\delta \frac{b'c'}{bc} \int\limits_{(Э)}\int \frac{dy_1\, dz_1}{\Delta}.$$

Отсюда выводим

$$X'(P) = \frac{b'c'}{bc} X(P'), \quad Y'(P) = \frac{c'a'}{ca} Y(P'), \quad Z'(P) = \frac{a'b'}{ab} Z(P),$$

причем два последних равенства написаны по очевидной аналогии.

Таким образом, доказана следующая теорема, принадлежащая Айвори.

Теорема Айвори. Составляющие по одной и той же оси сил притяжения, действующих на частицы одинаковой массы, помещенные в соответственных точках двух софокусных эллипсоидов, относятся как площади главных сечений эллипсоидов, перпендикулярных к этой оси.

2. Переходим ко второй вспомогательной теореме, которая может рассматриваться как следствие только что доказанной теоремы Айвори.

Рассмотрим для этого два концентрических, подобно расположенных софокусных эллипсоида E_1 и E_2 с полуосями a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 соответственно. Представим себе, что эллипсоид E_1 заполнен однородной притягивающей материей с плотностью δ_1, а эллипсоид E_2 — материей с плотностью δ_2.

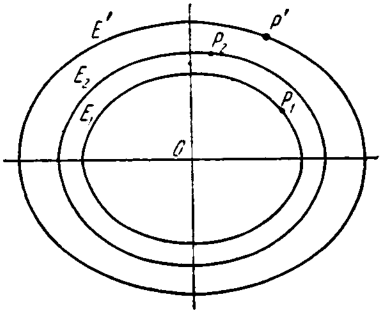


Рис. 21.

Возьмем точку $P'(x', y', z')$, лежащую вне обоих эллипсоидов, и пусть E' есть эллипсоид с полуосями a', b', c', проходящий через эту точку и софокусный эллипсоидам E_1 и E_2 (рис. 21).

Вообразим, что E' заполняется однородной материей с плотностью δ_1 или с плотностью δ_2.

Пусть теперь P_1 и P_2 суть точки, лежащие соответственно на E_1 и E_2 и соответствующие (в смысле Айвори) точке P' на E'. Тогда

$$x' = \frac{a'}{a_1} x_1, \quad y' = \frac{b'}{b_1} y_1, \quad z' = \frac{c'}{c_1} z_1$$

и

$$x' = \frac{a'}{a_2} x_2, \quad y' = \frac{b'}{b_2} y_2, \quad z' = \frac{c'}{c_2} z_2,$$

откуда имеем также

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2}, \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{b_1}{b_2}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Поместим теперь в точках P', P_1, P_2 материальные частицы единичной массы и обозначим через $X_1(P')$, $X_2(P')$ составляющие сил, действующих на точку P' со стороны эллипсоидов E_1 и E_2. Далее, обозначим через $X_1'(P_1)$ и $X_2'(P_2)$ составляющие сил, действующих на точки P_1 и P_2 соответственно со стороны эллипсоида E', заполненного материей с плотностью δ_1 или с плотностью δ_2. Тогда по теореме Айвори будем иметь

$$X_1(P')=\frac{b_1c_1}{b'c'}X_1'(P_1), \quad X_2(P')=\frac{b_2c_2}{b'c'}X_2'(P_2),$$

откуда

$$X_1(P'):X_2(P')=b_1c_1X_1'(P_1):b_2c_2X_2'(P_2).$$

Так как формулы (3.34), примененные к точкам P_1 и P_2, лежащим внутри эллипсоида E', дают

$$X_1'(P_1):X_2'(P_2)=\delta_1x_1:\delta_2x_2=\delta_1a_1:\delta_2a_2,$$

то имеем *)

$$X_1(P'):X_2(P')=\delta_1a_1b_1c_1:\delta_2a_2b_2c_2=m_1:m_2$$

и совершенно так же найдем

$$Y_1(P'):Y_2(P')=m_1:m_2, \quad Z_1(P'):Z_2(P')=m_1:m_2,$$

откуда и вытекает

Теорема Лапласа. Однородные софокусные эллипсоиды притягивают внешнюю точку с силами, направления которых совпадают и величины которых пропорциональны массам эллипсоидов.

Остается последняя вспомогательная теорема. Обозначим через $U_1(P)$ и $U_2(P)$ силовые функции двух софокусных эллипсоидов E_1 и E_2 на точку $P(x, y, z)$, внешнюю для них обоих. Тогда по теореме Лапласа можем написать

$$\frac{1}{m_1}\frac{\partial U_1}{\partial x}-\frac{1}{m_2}\frac{\partial U_2}{\partial x}=0, \quad \frac{1}{m_1}\frac{\partial U_1}{\partial y}-\frac{1}{m_2}\frac{\partial U_2}{\partial y}=0,$$

$$\frac{1}{m_1}\frac{\partial U_1}{\partial z}-\frac{1}{m_2}\frac{\partial U_2}{\partial z}=0,$$

откуда имеем

$$\frac{U_1}{m_1}-\frac{U_2}{m_2}=\text{const}.$$

Но по свойствам силовой функции во внешнем пространстве U_1 и U_2 обращаются в нули, когда точка P удаляется в бесконечность. Поэтому постоянная в правой части равенства есть нуль, и мы имеем

$$U_1:U_2=m_1:m_2,$$

что и дает теорему Маклорена:

Теорема Маклорена. Силовые функции двух однородных софокусных эллипсоидов на внешнюю точку относятся как массы этих эллипсоидов.

---

*) $m_1=\frac{4}{3}\pi a_1b_1c_1\delta_1$ и $m_2=\frac{4}{3}\pi a_2b_2c_2\delta_2$ суть массы эллипсоидов.

3. Теперь нетрудно получить выражение для силовой функции однородного эллипсоида E с полуосями a, b, c и с плотностью δ, когда точка P единичной массы находится вне эллипсоида E, т. е. когда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}>1.$$

В самом деле, проведем через точку P эллипсоид E', софокусный эллипсоиду E. Полуоси эллипсоида E' определятся, как известно, формулами

$$a'^2=a^2+\lambda,\quad b'^2=b^2+\lambda,\quad c'^2=c^2+\lambda,$$

где λ есть положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1 \tag{3.35}$$

и есть некоторая функция от x, y, z.

Представим себе, что эллипсоид E' заполнен притягивающей материей с плотностью δ. Так как точка P лежит на поверхности E', то ее можно рассматривать с одинаковым правом и как внешнюю и как внутреннюю точку для E'. Рассматривая точку P как внешнюю для E', мы можем применить теорему Маклорена и написать

$$U(P):U'(P)=m:m',$$

где $U'(P)$ обозначает силовую функцию эллипсоида E', а m' — массу этого эллипсоида.

Рассматривая теперь точку P как внутреннюю для эллипсоида E', мы можем определить $U'(P)$ по формуле (3.33), что дает

$$U'(P)=f\,\delta\pi a'b'c'\int_0^\infty\left[1-\frac{x^2}{a'^2+s'}-\frac{y^2}{b'^2+s'}-\frac{z^2}{c'^2+s'}\right]\frac{ds'}{R'(s')}.$$

Подставляя это значение для $U'(P)$ в предыдущее равенство и заменяя массы m и m' их значениями, мы найдем

$$U(P)=f\,\delta\pi abc\int_0^\infty\frac{\left[1-\frac{x^2}{a^2+\lambda+s'}-\frac{y^2}{b^2+\lambda+s'}-\frac{z^2}{c^2+\lambda+s'}\right]ds'}{\sqrt{(a^2+\lambda+s')(b^2+\lambda+s')(c^2+\lambda+s')}}.$$

Делая здесь подстановку $s=\lambda+s'$, будем иметь окончательно

$$U(P)=f\,\delta\pi abc\int_\lambda^\infty\left[1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right]\frac{ds}{R(s)}, \tag{3.36}$$

а это есть классическое выражение силовой функции однородного эллипсоида на внешнюю точку, называемое формулой Дирихле.

Теперь простым дифференцированием получим составляющие силы, с которой эллипсоид притягивает внешнюю точку P:

$$\left.\begin{aligned} X(P) &= \frac{\partial U}{\partial x} = -2f\delta\pi abcx \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(a^2+s)R(s)}, \\ Y(P) &= \frac{\partial U}{\partial y} = -2f\delta\pi abcy \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(b^2+s)R(s)}, \\ Z(P) &= \frac{\partial U}{\partial z} = -2f\delta\pi abcz \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(c^2+s)R(s)}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.37)$$

Полагая еще, по аналогии с формулами (3.31) и (3.32),

$$U_0(\lambda) = \pi abc \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{R(s)},$$

$$U_1(\lambda) = -\pi abc \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(a^2+s)R(s)} = \frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{U_0(\lambda)}{a}\right],$$

$$U_2(\lambda) = -\pi abc \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(b^2+s)R(s)} = \frac{\partial}{\partial b}\left[\frac{U_0(\lambda)}{b}\right],$$

$$U_3(\lambda) = -\pi abc \int_{\lambda}^{\infty} \frac{ds}{(c^2+s)R(s)} = \frac{\partial}{\partial c}\left[\frac{U_0(\lambda)}{c}\right],$$

где дифференцирования выполняются при условии, что величина λ считается постоянной, мы представим формулы (3.36) и (3.37) еще в следующем виде:

$$U(P) = f\delta\left[U_0(\lambda) + U_1(\lambda)x^2 + U_2(\lambda)y^2 + U_3(\lambda)z^2\right] \qquad (3.36')$$

и

$$\left.\begin{aligned} X(P) &= 2f\delta xU_1(\lambda), \\ Y(P) &= 2f\delta yU_2(\lambda), \\ Z(P) &= 2f\delta zU_3(\lambda). \end{aligned}\right\} \qquad (3.37')$$

Нетрудно заметить, что если положить в приведенных выше формулах $\lambda=0$, то получатся формулы предыдущего параграфа, относящиеся к случаю внутренней точки.

§ 7. Притяжение однородных эллипсоидов вращения

1. Формулы, полученные нами для силовой функции и составляющих силы притяжения однородного эллипсоида с тремя различными полуосями, содержат квадратуры, не вычисляемые в элементарных функциях.

Действительно, все эти формулы содержат величину

$$R(s)=\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)},$$

т. е. квадратный корень из многочлена третьей степени относительно переменной интегрирования s. Поэтому все эти интегралы суть эллиптические и могут быть выражены, если угодно, только через эллиптические функции.

Однако если две из полуосей равны между собой, т. е. если трехосный эллипсоид превращается в эллипсоид вращения, то в выражении для $R(s)$ под знаком корня остается только двучлен первой степени относительно s, вследствие чего все интересующие нас интегралы делаются легко вычисляемыми и выражаются через простые, элементарные функции.

Чтобы показать это наипростейшим образом, преобразуем предварительно интегралы общего случая, вводя вместо полуосей эллипсоида E так называемые вторые эксцентриситеты l и l_1, определяемые формулами

$$l^2=\frac{a^2-c^2}{c^2},\quad l_1^2=\frac{b^2-c^2}{c^2}.$$

Так как при принятом нами условии для полуосей

$$c\leqslant b\leqslant a,$$

то l и l_1 всегда вещественны. Им приписывают только положительные значения, т. е. принимают

$$l=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{c},\quad l_1=\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{c}.$$

Заметим, что если мы введем первое и второе сжатия эллипсоида α и α_1, полагая, как принято,

$$\alpha=\frac{a-c}{a},\quad \alpha_1=\frac{b-c}{b},$$

то будем иметь следующие соотношения:

$$\alpha=1-\frac{1}{\sqrt{1+l^2}},\quad \alpha_1=1-\frac{1}{\sqrt{1+l_1^2}}$$

и

$$l=\frac{\sqrt{2\alpha-\alpha^2}}{1-\alpha},\quad l_1=\frac{\sqrt{2\alpha_1-\alpha_1^2}}{1-\alpha_1}.$$

Отметим следующие частные случаи: 1) $l_1=l$, тогда и $\alpha_1=\alpha$, а также $b=a$, т. е. E в этом случае есть «сжатый» эллипсоид вращения; 2) $l_1=0$, $l\neq 0$, тогда $\alpha_1=0$ или $b=c$, т. е. в этом случае E есть «вытянутый» эллипсоид вращения; 3) $l_1=l=0$, т. е. $\alpha_1=\alpha=0$ и $c=b=a$, т. е. E есть шар.

Введем теперь вместо s новую переменную интегрирования t посредством подстановки

$$t=\frac{c}{\sqrt{c^2+s}}.$$

Тогда

$$a^2+s=\frac{c^2}{t^2}(1+l^2t^2),\quad b^2+s=\frac{c^2}{t^2}(1+l_1^2t^2),\quad c^2+s=\frac{c^2}{t^2},$$

и если мы положим еще

$$u=\frac{c}{\sqrt{c^2+s}},$$

то u будет удовлетворять уравнению

$$\frac{x^2}{1+l^2u^2}+\frac{y^2}{1+l_1^2u^2}+\frac{z^2}{1}=\frac{c^2}{u^2}.$$

Делая теперь указанную подстановку, мы получим для силовой функции и составляющих силы притяжения следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
U(P)&=\frac{3}{2}fm\,[\bar{U}_0(u)+\bar{U}_1(u)\,x^2+\bar{U}_2(u)\,y^2+\bar{U}_3(u)\,z^2],\\
X(P)&=3fmx\bar{U}_1(u),\\
Y(P)&=3fmy\bar{U}_2(u),\\
Z(P)&=3fmz\bar{U}_3(u),
\end{aligned}\right\}\tag{3.38}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
c\bar{U}_0(u)&=+\int\limits_0^u\frac{dt}{\sqrt{(1+l^2t^2)(1+l_1^2t^2)}},\\
c^3\bar{U}_1(u)&=-\int\limits_0^u\frac{t^2\,dt}{(1+l^2t^2)\sqrt{(1+l^2t^2)(1+l_1^2t^2)}},\\
c^3\bar{U}_2(u)&=-\int\limits_0^u\frac{t^2\,dt}{(1+l_1^2t^2)\sqrt{(1+l^2t^2)(1+l_1^2t^2)}},\\
c^3\bar{U}_3(u)&=-\int\limits_0^u\frac{t^2\,dt}{\sqrt{(1+l^2t^2)(1+l_1^2t^2)}}
\end{aligned}\right\}\tag{3.38$'$}$$

и

$$m=\frac{4}{3}\pi abc\delta=\frac{4}{3}\pi c^3\delta\sqrt{(1+l^2)(1+l_1^2)}.$$

Формулы (3.38) и (3.38′) справедливы также и для случая внутренней точки. Только в последнем случае $\lambda=0$, следовательно, в формулах (3.38) и (3.38′) нужно положить $u=1$. Заметим еще, что вычисление $\bar{U}_1$ и $\bar{U}_2$ приводится к вычислению $\bar{U}_0$, так как мы имеем легко проверяемые соотношения

$$c^3\bar{U}_1(u)=\frac{1}{l}\frac{\partial(c\bar{U}_0)}{\partial l},\quad c^3\bar{U}_2(u)=\frac{1}{l_1}\frac{\partial(c\bar{U}_0)}{\partial l_1}. \tag{3.39}$$

2. Переходим теперь к рассмотрению частных случаев. Полагая в формулах (3.38′) $l_1=l$, мы имеем

$$c\bar{U}_0(u)=\int_0^u\frac{dt}{1+l^2t^2},$$

$$c^3\bar{U}_1(u)=c^3\bar{U}_2(u)=-\int_0^u\frac{t^2\,dt}{(1+l^2t^2)^2},$$

$$c^3\bar{U}_3(u)=-\int_0^u\frac{t^2\,dt}{1+l^2t^2}.$$

Первый из этих интегралов — табличный, второй вычисляется по формуле (3.39), а третий сводится к первому. Выполняя интегрирования, найдем

$$c\bar{U}_0(u)=\frac{1}{l}\operatorname{arctg}(lu),$$

$$c^3\bar{U}_1(u)=c^3\bar{U}_2(u)=\frac{1}{l^2}\left[\frac{lu}{1+l^2u^2}-\operatorname{arctg}(lu)\right],$$

$$c^3\bar{U}_3(u)=\frac{1}{l^3}[\operatorname{arctg}(lu)-lu],$$

причем u определяется из уравнения

$$\frac{x^2+y^2}{1+l^2u^2}+\frac{z^2}{1}=\frac{c^2}{u^2}.$$

Подставляя эти выражения в формулы (3.38), мы получаем выражения для силовой функции и составляющих силы притяжения однородного сжатого эллипсоида вращения, когда притягиваемая точка P находится вне эллипсоида

$$U(P)=\frac{3fm}{2lc}\left\{\operatorname{arctg}(lu)+\frac{x^2+y^2}{l^2c^2}\left[\frac{lu}{1+l^2u^2}-\operatorname{arctg}(lu)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{z^2}{l^2c^2}\left[\operatorname{arctg}(lu)-lu\right]\right\},$$
$$\frac{X(P)}{x}=\frac{Y(P)}{y}=\frac{3fm}{l^3c^3}\left[\frac{lu}{1+l^2u^2}-\operatorname{arctg}(lu)\right],$$
$$\frac{Z(P)}{z}=\frac{3fm}{l^3c^3}\left[\operatorname{arctg}(lu)-lu\right].$$

Полагая здесь $u=1$, получим выражения для силовой функции и составляющих силы притяжения для случая, когда притягиваемая точка P находится внутри или на поверхности эллипсоида.

Полезно еще иметь выражение для силовой функции однородного сжатого эллипсоида вращения, получающееся из общей формулы Дирихле (3.36) при $b=a$:

$$U(P)=\frac{3}{4}fm\int\limits_{\lambda}^{\infty}\left[1-\frac{x^2+y^2}{a^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right]\frac{ds}{(a^2+s)\sqrt{c^2+s}},$$

где $m=\frac{4}{3}\pi a^2c\delta$ — масса эллипсоида, а λ определяется уравнением

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1,$$

причем для внутренней точки нужно положить просто $\lambda=0$.

3. Рассмотрим теперь случай вытянутого эллипсоида вращения. Полагая для этого в формулах (3.38′) $l_1=0$, мы имеем

$$c\bar{U}_0(u)=\int\limits_0^u\frac{dt}{\sqrt{1+l^2t^2}},$$

$$c^3\bar{U}_1(u)=-\int\limits_0^u\frac{t^2\,dt}{(1+l^2t^2)\sqrt{1+l^2t^2}},$$

$$c^3\bar{U}_2(u)=c^3\bar{U}_3(u)=-\int\limits_0^u\frac{t^2\,dt}{\sqrt{1+l^2t^2}}.$$

Первый из этих интегралов — табличный, второй опять вычисляется по формуле (3.39), а третий сводится к табличным интегралам при помощи интегрирования по частям. Производя эти вычисления, мы получим

$$
\begin{aligned}
c\bar{U}_0(u) &= \frac{1}{l}\ln\left(\sqrt{1+l^2u^2}+lu\right),\\
c^3\bar{U}_1(u) &= \frac{1}{l^3}\left[\frac{lu}{\sqrt{1+l^2u^2}}-\ln\left(\sqrt{1+l^2u^2}+lu\right)\right],\\
c^3\bar{U}_2(u) &= c^3\bar{U}_3(u)=\frac{1}{l^3}\left[\ln\left(\overline{1+l^2u^2}+lu\right)-lu\sqrt{1+l^2u^2}\right],
\end{aligned}
$$

причем u определяется из уравнения

$$
\frac{x^2}{1+l^2u^2}+\frac{y^2+z^2}{1}=\frac{c^2}{u^2}.
$$

Подставляя эти выражения в формулы (3.38), мы будем иметь выражения для силовой функции и составляющих силы притяжения однородного вытянутого эллипсоида вращения для случая, когда притягиваемая точка находится вне эллипсоида:

$$
\begin{aligned}
U(P) = \frac{3fm}{2lc}\Big\{&\ln\left(\sqrt{1+l^2u^2}+lu\right)+\\
&+\frac{x^2}{l^2c^2}\left[\frac{lu}{\sqrt{1+l^2u^2}}-\ln\left(\sqrt{1+l^2u^2}+lu\right)\right]+\\
&+\frac{y^2+z^2}{l^2c^2}\left[\ln\sqrt{1+l^2u^2}+lu)-lu\sqrt{1+l^2u^2}\right]\Big\},
\end{aligned}
$$

$$
\frac{X(P)}{x}=\frac{3fm}{l^3c^3}\left[\frac{lu}{\sqrt{1+l^2u^2}}-\ln\left(\sqrt{1+l^2u^2}+lu\right)\right],
$$

$$
\frac{Y(P)}{y}=\frac{Z(P)}{z}=\frac{3fm}{l^3c^3}\left[\ln\left(\sqrt{1+l^2u^2}+lu\right)-lu\sqrt{1+l^2u^2}\right].
$$

Полагая здесь $u=1$, получим формулы для силовой функции и составляющих силы притяжения для случая, когда притягиваемая точка находится внутри или на поверхности эллипсоида.

Здесь также полезно выписать еще выражение для силовой функции однородного вытянутого эллипсоида, получающееся из общей формулы Дирихле (3.36) при $b=c$:

$$
U(P)=\frac{3}{4}fm\int\limits_{\lambda}^{\infty}\left[1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2+z^2}{c^2+s}\right]\frac{ds}{(c^2+s)\sqrt{a^2+s}},
$$

где $m=\frac{4}{3}\pi ac^2\delta$, и λ определяется уравнением

$$
\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2+z^2}{c^2+\lambda}=1,
$$

причем для внутренней точки нужно опять положить $\lambda=0$.

Наконец, при $l = l_1 = 0$ формулы (3.38′) дают

$$c\bar{U}_0(u) = u, \quad c^3\bar{U}_1(u) = c^3\bar{U}_2(u) = c^3\bar{U}_3(u) = -\frac{1}{3}u^3,$$

откуда

$$U(P) = \frac{3fm}{2c}\left[u - \frac{1}{3}u^3\frac{x^2+y^2+z^2}{c^2}\right]$$

и

$$\frac{X(P)}{x} = \frac{Y(P)}{y} = \frac{Z(P)}{z} = -\frac{fmu^3}{c^3},$$

где для внешней точки u определяется из уравнения

$$x^2+y^2+z^2 = \frac{c^2}{u^2},$$

а для внутренней точки $u = 1$.

Полагая

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

имеем для внешней точки $u = c/r$, и выражение для силовой функции принимает вид

$$U(P) = \frac{fm}{r}.$$

Для внутренней точки получаем силовую функцию в виде

$$U(P) = \frac{fm}{2c^3}(3c^2 - r^2).$$

Таким образом, мы еще раз, другим путем, получили формулы для силовой функции однородного шара для внешней и внутренней точек.

§ 8. Притяжение неоднородного эллипсоида

1. Мы видели, как найти силовую функцию шара, не являющегося однородным, но обладающим сферическим распределением плотностей.

Покажем теперь, что этот результат можно некоторым образом обобщить также и для трехосного эллипсоида, заменяя только сферическое распределение плотностей эллипсоидальным.

Разъясним прежде всего, что мы будем подразумевать под эллипсоидальным распределением плотностей.

Пусть задан трехосный эллипсоид E с полуосями

$$c \leqslant b \leqslant a.$$

Если за оси координат принять, как мы уже делали, главные оси эллипсоида, то его уравнение можно написать в виде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (E)$$

Вообразим семейство концентрических, подобных и подобно расположенных эллипсоидов с параметром k, определяемое уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=k^2. \qquad (E_k)$$

Пусть x', y', z' суть текущие координаты внутренней точки M и $\delta(x', y', z')$ — плотность эллипсоидального тела, ограниченного поверхностью E, в точке M.

Если при фиксированном значении k плотность δ имеет постоянное значение во всех точках поверхности E_k, но изменяется произвольным образом при переходе с одной поверхности семейства на другую, т. е. при изменении параметра k, то мы будем говорить, что эллипсоидальное тело T, ограниченное поверхностью эллипсоида E, обладает эллипсоидальной структурой или имеет эллипсоидальное распределение плотностей. Плотность $\delta(M)$ будет тогда функцией одного только k $(0 \leqslant k \leqslant 1)$, причем $k=0$ соответствует центру эллипсоида, а $k=1$ — его поверхности.

Следовательно, мы можем написать

$$\delta(M)=\delta(k)=\delta\left(\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}+\frac{z'^2}{c^2}\right). \qquad (3.40)$$

Ясно, что если $c=b=a$, то эллипсоид E превращается в шар и его плотность будет зависеть только от расстояния r от центра шара, т. е. в этом случае эллипсоидальное распределение превращается в сферическое.

Рассмотрим силовую функцию такого эллипсоидального тела и покажем, что для нее можно получить выражение, аналогичное выражению силовой функции однородного эллипсоида, даваемое формулой Дирихле.

Для вывода силовой функции поступим следующим образом: выделим из тела T бесконечно тонкий эллипсоидальный слой, ограниченный двумя бесконечно близкими поверхностями семейства E_k, и найдем прежде всего выражение для силовой функции этого слоя, который можно считать однородным, на внешнюю и внутреннюю точку P.

«Расслаивая» все тело T на бесчисленное множество таких бесконечно тонких, однородных, эллипсоидальных слоев, мы получим затем силовую функцию всего тела, как сумму силовых функций всех бесконечно тонких слоев, т. е. как интеграл от выражения силовой функции слоя, взятый по параметру k в пределах от нуля до единицы.

Итак, прежде всего нужно найти выражение для силовой функции бесконечно тонкого слоя T' с постоянной плотностью δ, ограниченного двумя бесконечно близкими, концентрическими, подобными и подобно расположенными эллипсоидами.

Для этого придется воспользоваться уже известной теоремой Ньютона, для которой мы дадим, пользуясь случаем, еще одно доказательство, основанное на чисто геометрическом рассмотрении.

Возьмем два эллипсоида, E'_1 и E'_2, из семейства E_k и предположим, что пространство между ними заполнено притягивающей материей с постоянной плотностью δ.

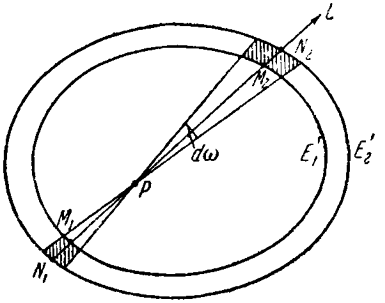


Рис. 22.

Рассмотрим точку P, лежащую во внутренней полости этого слоя T'. Проведем через эту точку произвольную прямую L, и пусть M_1 и M_2 суть точки пересечения L с E'_1, а N_1, N_2 — с E'_2. Тогда, как было показано в § 3, имеем всегда

$$\overline{M_1N_1}=\overline{M_2N_2}.$$

Вообразим теперь бесконечно тонкий конус с вершиной в точке P, осью которого является прямая L (рис. 22). Этот конус вырежет из слоя T' два конических сегмента равной высоты $\overline{M_1N_1}$ и $\overline{M_2N_2}$. Обозначая через Δ расстояние текущей точки прямой L от точки P, а через $d\omega$ — телесный угол конуса, мы найдем, что элемент массы слоя равен $\delta\Delta^2\, d\Delta d\omega$, а сила притяжения, с которой этот элемент массы действует на частицу P единичной массы, равна

$$f\frac{\delta\Delta^2\, d\Delta\, d\omega}{\Delta^2}=f\delta\, d\Delta\, d\omega.$$

Интегрируя последнее выражение по Δ, получим величины сил притяжения, с которыми два бесконечно тонких конических сегмента действуют на точку P:

$$F_1=f\delta\, d\omega\int\limits_{\overline{PM_1}}^{\overline{PN_1}} d\Delta=f\delta\, d\omega\cdot\overline{M_1N_1}$$

и

$$F_2=f\delta\, d\omega\int\limits_{\overline{PM_2}}^{\overline{PN_2}} d\Delta=f\delta\, d\omega\cdot\overline{M_2N_2}.$$

Так как $\overline{M_1N_1}=\overline{M_2N_2}$, то эти силы равны по величине, а так как их направления противоположны, то они взаимно уравновешиваются, и под действием такой пары сил точка P не испытывает никакого притяжения. Поскольку прямая L произвольна, то, воображая бесчисленное множество подобных прямых, мы разобьем всю притягивающую массу слоя на бесчисленное множество пар конических сегментов, действия которых на точку P равны по величине и противоположны по направлению.

Отсюда следует, что точка P единичной массы (а поэтому и любой произвольной массы), находящаяся во внутренней полости слоя T', не испытывает со стороны слоя никакого притяжения. А это и есть теорема Ньютона для случая бесконечно тонкого эллипсоидального слоя.

Если же точка P не испытывает притяжения от слоя, то составляющие силы притяжения по осям координат суть нули, а значит, силовая функция слоя на внутреннюю точку P имеет постоянное значение во всей внутренней полости слоя.

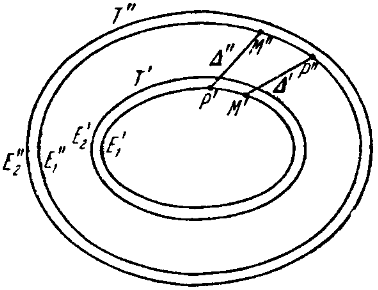


Рис. 23.

2. Рассмотрим теперь два бесконечно тонких эллипсоидальных слоя T' и T''. Пусть T' ограничен опять эллипсоидами E_1' и E_2' с полуосями соответственно a', b', c', ka', kb', kc', где k сколь угодно мало отличается от единицы. Подобным же образом пусть слой T'' ограничен эллипсоидами E_1'' и E_2'' с полуосями соответственно a'', b'', c'', ka'', kb'', kc''. Плотности слоев пусть будут δ' и δ'' (рис. 23).

Положим, что

$$a''^2 - a'^2 = b''^2 - b'^2 = c''^2 - c'^2,$$

т. е. что оба слоя софокусны.

Каждой текущей точке M' поверхности E_1' поставим в соответствие (в смысле Айвори) текущую точку M'' поверхности E_1'', так что

$$x'' = \frac{a''}{a'} x', \quad y'' = \frac{b''}{b'} y', \quad z'' = \frac{c''}{c'} z'.$$

Тогда элементы объемов $d\tau'$ и $d\tau''$ слоев T' и T'' находятся в постоянном отношении, так как

$$d\tau'' : d\tau' = dx'' \, dy'' \, dz'' : dx' \, dy' \, dz' = a''b''c'' : a'b'c'.$$

Возьмем теперь на поверхностях E_1' и E_1'' соответственные точки P' и P''. Тогда по теореме Айвори § 3 имеем

$$\overline{P'M''} = \overline{P''M'}.$$

Обозначим через $U'(P'')$ силовую функцию слоя T' на точку P'' и через $U''(P')$ силовую функцию слоя T'' на точку P'. Тогда

$$U'(P'')=f\delta'\iiint\limits_{(T')}\frac{d\tau'}{\Delta'},$$

где ввиду бесконечно малой толщины слоя T' можно считать расстояние Δ' равным $\overline{M'P''}$ и

$$U''(P')=f\delta''\iiint\limits_{(T'')}\frac{d\tau''}{\Delta''},$$

где также можно считать Δ'' равным $\overline{M''P'}$.

Преобразуем второй интеграл, учитывая, что $\Delta''=\Delta'$.

$$U''(P')=f\frac{\delta''a''b''c''}{\delta'a'b'c'}\delta'\iiint\limits_{(T')}\frac{d\tau'}{\Delta'}=\frac{a''b''c''\delta''}{a'b'c'\delta'}U'(P'').$$

Но $U''(P')$ есть силовая функция однородного слоя, ограниченного двумя подобными эллипсоидами E_1'' и E_2'' на точку P', лежащую во внутренней полости слоя T''.

По теореме Ньютона $U''(P')=\mathrm{const}$, а следовательно, $U'(P'')$ также есть величина постоянная. Таким образом, доказана следующая

Теорема. Силовая функция слоя, ограниченного двумя подобными, бесконечно близкими эллипсоидами, имеет постоянное значение во всех точках эллипсоида, софокусного данному слою.

3. Пусть теперь $P(x, y, z)$ есть точка, лежащая вне слоя T', ограниченного поверхностью E_1' с полуосями a', b', c' и бесконечно близкой к ней поверхностью E_2' Тогда уравнение эллипсоида, проходящего через точку P и софокусного эллипсоиду E_1', имеет вид

$$\frac{x^2}{a'^2+\lambda'}+\frac{y^2}{b'^2+\lambda'}+\frac{z^2}{c'^2+\lambda'}=1. \qquad (E')$$

Во всех точках этого эллипсоида силовая функция слоя T' имеет, согласно только что доказанной теореме, постоянное значение, но при переходе с одного софокусного эллипсоида на другой, т. е. при изменении λ', силовая функция также, конечно, будет изменяться. Следовательно, силовая функция U' бесконечно тонкого слоя T' на внешнюю точку P, единичной массы, есть функция только от λ', которая в свою очередь есть функция от координат точки P.

Чтобы найти эту функцию, вспомним, что силовая функция любой притягивающей массы во внешнем относительно этой массы пространстве всегда удовлетворяет уравнению Лапласа. Следовательно, мы должны иметь

$$\nabla U'(\lambda')=0.$$

Но так как U' зависит только от λ', то мы можем использовать формулу (3.28) § 4, которая дает для U' следующее уравнение:

$$\frac{d^2U'}{d\lambda'^2}+\frac{1}{R'}\frac{dR'}{d\lambda'}\frac{dU'}{d\lambda'}=0, \tag{3.41}$$

где

$$R'(\lambda')=\sqrt{(a'^2+\lambda')(b'^2+\lambda')(c'^2+\lambda')}.$$

Уравнение (3.41) есть линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка, которое легко проинтегрировать. Действительно, непосредственная проверка показывает, что

$$U_1'=1,\quad U_2'=\int\limits_{\lambda_0'}^{\lambda'}\frac{ds'}{R'(s')},$$

где λ_0' — какая угодно постоянная, суть два линейно независимые решения уравнения (3.41), а поэтому общее решение этого уравнения представится формулой

$$U'=C_1+C_2\int\limits_{\lambda_0'}^{\lambda'}\frac{ds'}{R'(s')}, \tag{3.42}$$

с произвольными постоянными C_1 и C_2.

Эти произвольные постоянные определяются из условий, которым должна удовлетворять силовая функция на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty}U'=0,\quad \lim_{r\to\infty}(rU')=fm', \tag{3.42'}$$

где r обозначает расстояние притягиваемой точки от центра слоя (от начала координат), а m' есть масса этого слоя.

Так как при $r\to\infty$ также и $\lambda'\to\infty$, то первое из условий (3.42') дает

$$C_1=C_2\int\limits_{\infty}^{\lambda_0'}\frac{ds'}{R'(s')},$$

и формула (3.42) принимает вид

$$U'=-C_2\int\limits_{\lambda'}^{\infty}\frac{ds'}{R'(s')}.$$

Чтобы определить вторую произвольную постоянную, установим прежде порядок роста функции λ'. Полагая

$$x = r\cos(r,\ x),\quad y = r\cos(r,\ y),\quad z = r\cos(r,\ z),$$

напишем уравнение (3.41), определяющее λ', в виде

$$\frac{\cos^2(r,\ x)}{\left(\frac{a'}{r}\right)^2+\frac{\lambda'}{r^2}}+\frac{\cos^2(r,\ y)}{\left(\frac{b'}{r}\right)^2+\frac{\lambda'}{r^2}}+\frac{\cos^2(r,\ z)}{\left(\frac{c'}{r}\right)^2+\frac{\lambda'}{r^2}}=1,$$

откуда, переходя к пределу при $r\to\infty$, находим без труда

$$\lim_{r\to\infty}\left(\frac{\lambda'}{r^2}\right)=1.$$

Теперь заметим, что из $c'\leqslant b'\leqslant a'$ следует

$$c'^2+s\leqslant b'^2+s\leqslant a'^2+s,$$

а отсюда вытекает неравенство

$$\frac{1}{(a'^2+s)^{3/2}}\leqslant\frac{1}{R'(s')}\leqslant\frac{1}{(c'^2+s')^{3/2}},$$

интегрируя которое в пределах от λ' до ∞, имеем

$$\frac{2r}{\sqrt{a'^2+\lambda'}}\leqslant r\int\limits_{\lambda'}^{\infty}\frac{ds'}{R'(s')}\leqslant\frac{2r}{\sqrt{c'^2+\lambda'}},$$

откуда предельным переходом при $r\to\infty$ найдем

$$\lim_{r\to\infty}\left[r\int\limits_{\lambda'}^{\infty}\frac{ds'}{R'(s')}\right]=2.$$

Теперь второе из условий (3.42′) дает

$$-C_2\lim_{r\to\infty}\left[r\int\limits_{\lambda'}^{\infty}\frac{ds'}{R'(s')}\right]=fm',$$

и, следовательно,

$$-C_2=\frac{1}{2}fm'.$$

Поэтому для силовой функции бесконечно тонкого слоя T на внешнюю точку P имеем следующее выражение:

$$U'=\frac{1}{2}fm'\int\limits_{\lambda'}^{\infty}\frac{ds'}{R'(s')},\tag{3.43}$$

где λ' есть положительный корень уравнения (E').

При приближении точки P к поверхности E_1' эллипсоида $\lambda' \to 0$. Поэтому, учитывая, что силовая функция непрерывна во всем пространстве, а внутри слоя T' она, по теореме Ньютона, есть величина постоянная, мы получим для внутренней точки следующее выражение силовой функции:

$$U' = \frac{1}{2} fm' \int_0^\infty \frac{ds'}{R'(s')}. \tag{3.43'}$$

4. Перейдем теперь к нахождению силовой функции сплошного эллипсоидального тела T, ограниченного поверхностью E, плотность которого определяется законом (3.40). Рассмотрим семейство подобных концентрических эллипсоидов E_k и выделим слой T', ограниченный эллипсоидом E_1' с полуосями $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$ и эллипсоидом E_2' с полуосями $a'' = (k+dk)a$, $b'' = (k+dk)b$, $c'' = (k+dk)c$. Тогда силовая функция слоя T' на внешнюю точку $P(x, y, z)$ определится формулой (3.43), причем масса

$$m' = \frac{4}{3} \pi abc\delta(k^2) [(k+dk)^3 - k^3],$$

откуда, пренебрегая членами выше первого порядка относительно величины dk, получим

$$m' \approx dm = 4\pi abc\delta(k^2) \cdot k^2 dk.$$

Делая еще подстановку $s' = k\sigma$ и обозначая силовую функцию слоя T' (как бесконечно малую часть силовой функции всего тела T) через dU вместо U', можем написать

$$dU = 2f\pi abc\delta(k^2) dk \int_s^\infty \frac{d\sigma}{R(\sigma)}, \tag{3.44}$$

где

$$R(\sigma) = \sqrt{(a^2+\sigma)(b^2+\sigma)(c^2+\sigma)},$$

а $k^2 s = \lambda'$, и следовательно, s определяется уравнением, выводимым из уравнения (E'),

$$\frac{x^2}{a^2+s} + \frac{y^2}{b^2+s} + \frac{z^2}{c^2+s} = k^2. \tag{3.45}$$

Интегрируя теперь равенство (3.44) по k или, что то же, по k^2 в пределах от нуля до единицы, мы получим полную силовую функцию тела T в виде

$$U(P) = f\pi abc \int_0^1 \delta(k^2) dk^2 \int_s^\infty \frac{d\sigma}{R(\sigma)}, \tag{3.46}$$

что можно написать короче, полагая, как в § 6,

$$U_0(s) = \pi abc \int_s^\infty \frac{d\sigma}{R(\sigma)},$$

в следующем виде:

$$U(P) = f \int_0^1 U_0(s)\,\delta(k^2)\,dk^2. \qquad (3.46')$$

Чтобы привести формулу (3.46) или (3.46′) к классической форме Дирихле, будем считать функцию $\delta(k^2)$ интегрируемой в промежутке $0 \leqslant k^2 \leqslant 1$ и положим

$$\varkappa(k^2) = \int_{k^2}^1 \delta(k^2)\,dk^2. \qquad (3.47)$$

Применяя к (3.46′) формулу интегрирования по частям, имеем

$$U(P) = f\left\{ -\Big/_0^1 \varkappa(k^2)\,U_0(s) + \int_0^1 \varkappa(k^2)\,dU_0(s)\right\}.$$

Но при $k^2=1$ имеем $\varkappa(1)=0$, а при $k^2=0$, как видно из уравнения (3.45), имеем $s=\infty$, а значит, $U_0(\infty)$ есть нуль, и проинтегрированная часть исчезает. В оставшемся интеграле примем за переменную интегрирования s вместо k^2. Тогда новые пределы будут ∞ и λ, где λ определится уравнением, получающимся из (3.45) при $k^2=1$, т. е. уравнением

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1, \qquad (3.45')$$

а выражение для силовой функции примет следующий окончательный вид:

$$U(P) = f\pi abc \int_\lambda^\infty \frac{\varkappa(k^2)\,ds}{R(s)}. \qquad (3.48)$$

Если $\delta = \mathrm{const}$, то $\varkappa = (1-k^2)\delta$, где k^2 определяется уравнением (3.45), и мы получаем уже знакомую формулу Дирихле для силовой функции однородного эллипсоида на внешнюю точку.

Найдем теперь составляющие силы, с которой тело T, обладающее эллипсоидальной структурой, действует на внешнюю іатериальную точку единичной массы. Дифференцируя (3.48) ю x, например, мы имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{f\pi abc}{R(\lambda)}\frac{\partial\lambda}{\partial x}[\varkappa(k^2)]_{s=\lambda}-2f\pi abc\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{\delta(k^2)\,ds}{(a^2+s)\,R(s)};$$

ак как при $s=\lambda$ имеем $k^2=1$ и $\varkappa(k^2)=0$, то находим составляющую X и аналогично две другие в виде

$$\left.\begin{aligned}X&=\frac{\partial U}{\partial x}=-2f\pi abcx\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{\delta(k^2)\,ds}{(a^2+s)\,R(s)},\\Y&=\frac{\partial U}{\partial y}=-2f\pi abcy\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{\delta(k^2)\,ds}{(b^2+s)\,R(s)},\\Z&=\frac{\partial U}{\partial z}=-2f\pi abcz\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{\delta(k^2)\,ds}{(c^2+s)\,R(s)}.\end{aligned}\right\}\tag{3.49}$$

При $\delta=\mathrm{const}$, эти формулы превращаются в формулы (3.37) для составляющих силы притяжения однородного эллипсоида.

Покажем еще, что силовая функция U, определяемая формулой (3.48), удовлетворяет уравнению Лапласа *).

Дифференцируя для этого формулы (3.49) по x, y, z соответственно и складывая результаты, мы найдем

$$\nabla U=f\pi abc\left\{-2\int\limits_{\lambda}^{\infty}\left(\frac{1}{a^2+s}+\frac{1}{b^2+s}+\frac{1}{c^2+s}\right)\frac{\delta(k^2)\,ds}{R(s)}-\right.$$
$$-4\int\limits_{\lambda}^{\infty}\frac{d\delta(k^2)}{dk^2}\left[\frac{x^2}{(a^2+s)^2}+\frac{y^2}{(b^2+s)^2}+\frac{z^2}{(c^2+s)^2}\right]\frac{ds}{R(s)}+$$
$$\left.+\frac{2\delta(1)}{R(\lambda)}\left[\frac{x}{a^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{y}{b^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{z}{c^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial z}\right]\right\}.$$

Легко проверить, что

$$\frac{1}{a^2+s}+\frac{1}{b^2+s}+\frac{1}{c^2+s}=\frac{2R'(s)}{R(s)}.$$

Далее, имея в виду (3.45), найдем

$$\frac{d\delta(k^2)}{dk^2}\left[\frac{x^2}{(a^2+s)^2}+\frac{y^2}{(b^2+s)^2}+\frac{z^2}{(c^2+s)^2}\right]=-\frac{d\delta(k^2)}{ds}.$$

---

*) Проверка необходима, так как силовая функция (3.48) выведена синтетическим путем с использованием предельного перехода и заранее неизвестно, обладает ли она характеристическими свойствами или нет.

Наконец, формулы для производных первого порядка от λ, полученные в § 4, дают

$$\frac{x}{a^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x}+\frac{y}{b^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial y}+\frac{z}{c^2+\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial z}=2.$$

С помощью выписанных соотношений оператор Лапласа приводится к следующему виду:

$$\nabla U = f\pi abc\left\{-4\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\delta(k^2)R'(s)}{R^2(s)}\,ds+4\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\delta'(k^2)\,ds}{R(s)}+\frac{4\delta(1)}{R(\lambda)}\right\},$$

откуда

$$\nabla U = f\pi abc\left\{4\int_{\lambda}^{\infty}\frac{d}{ds}\left[\frac{\delta(k^2)}{R(s)}\right]ds+\frac{4\delta(1)}{R(\lambda)}\right\}=0,$$

что мы и хотели показать.

Наконец, отметим, что когда точка P удаляется в бесконечность, то $\lambda \to \infty$, а поэтому как силовая функция, так и ее первые частные производные в бесконечности обращаются в нуль.

5. Перейдем к рассмотрению силовой функции эллипсоидального тела T, обладающего эллипсоидальным распределением плотностей, для случая, когда притягиваемая точка P единичной массы лежит внутри эллипсоида E, т. е. когда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}<1.$$

Выделим из семейства подобных эллипсоидов E_k тот, который проходит через точку P, и обозначим через k_0 $(0<k_0<1)$ значение параметра k, соответствующее этому эллипсоиду (рис. 24).

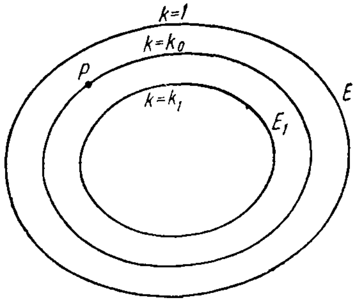


Рис. 24.

Очевидно, что для всех бесконечно тонких эллипсоидальных слоев T', лежащих внутри эллипсоида E'_{k_0} $(0\leqslant k\leqslant k_0)$, точка P является внешней, а для слоев, лежащих вне E'_{k_0} $(k_0\leqslant k\leqslant 1)$, точка P является внутренней.

Поэтому чтобы получить выражение для полной силовой функции тела T на внутреннюю точку P, надо проинтегрировать выражение (3.44) по k^2 от нуля до k_0^2 и прибавить к полученному выражению результат интегрирования выражения, подобного (3.44), для силовой функции слоя T' на внутреннюю точку, по k^2 в пределах от k_0^2 до единицы.

Но выражение силовой функции бесконечно тонкого слоя T' на внутреннюю точку получится из (3.44) заменой нижнего предела интеграла s нулем, а поэтому имеем

$$U(P)=f\pi abc\left\{\int\limits_0^{k_0^2}\delta(k^2)dk^2\int\limits_s^{\infty}\frac{d\sigma}{R(\sigma)}+\int\limits_{k_0^2}^{1}\delta(k^2)dk^2\int\limits_0^{\infty}\frac{d\sigma}{R(\sigma)}\right\}.$$

Применяя к первому из этих интегралов формулу интегрирования по частям и учитывая, что при $k^2=0$ мы имеем $s=\infty$, а при $k^2=k_0^2$ имеем $s=0$, получим

$$U(P)=f\int\limits_0^{k_0^2}\varkappa(k^2)\,dU_0(s),$$

а переходя здесь к переменной интегрирования s, найдем окончательно

$$U(P)=f\pi abc\int\limits_0^{\infty}\frac{\varkappa(k^2)\,ds}{R(s)}. \tag{3.50}$$

При $\delta=\mathrm{const}$ опять получим, как легко проверить, выражение силовой функции однородного эллипсоида на внутреннюю точку.

Дифференцируя (3.50) по x, y, z соответственно, найдем составляющие силы притяжения, действующей на частицу единичной массы, находящуюся внутри тела T:

$$\left.\begin{aligned}X&=\frac{\partial U}{\partial x}=-2f\pi abcx\int\limits_0^{\infty}\frac{\delta(k^2)\,ds}{(a^2+s)\,R(s)},\\ Y&=\frac{\partial U}{\partial y}=-2f\pi abcy\int\limits_0^{\infty}\frac{\delta(k^2)\,ds}{(b^2+s)\,R(s)},\\ Z&=\frac{\partial U}{\partial z}=-2f\pi abcz\int\limits_0^{\infty}\frac{\delta(k^2)\,ds}{(c^2+s)\,R(s)}.\end{aligned}\right\} \tag{3.51}$$

Покажем теперь, что силовая функция U, определяемая формулой (3.50), удовлетворяет уравнению Пуассона.

Дифференцируя для этого формулы (3.51) по x, y, z соответственно и складывая, мы найдем, совершенно так же, как и выше, для оператора Лапласа следующее выражение:

$$\nabla U = 4f\pi abc \int_0^\infty \frac{d}{ds}\left[\frac{\delta(k^2)}{R(s)}\right] ds,$$

откуда

$$\nabla U = -4f\pi\delta(k_0^2),$$

где

$$k_0^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Таким образом, справедливость теоремы Пуассона для неоднородного эллипсоида установлена.

Обратим внимание на то, что при проверке как уравнения Пуассона, так и уравнения Лапласа, мы неявно предполагали, что функция $\delta(k^2)$ имеет первую производную по k^2, а значит, имеет также первые частные производные по координатам текущей точки.

Примечание. Основываясь на формулах (3.48) и (3.50), можно получить также выражения для силовой функции эллипсоидального слоя, ограниченного двумя концентрическими, подобными и подобно расположенными эллипсоидами, и обладающего эллипсоидальным распределением плотностей. Эту силовую функцию можно также получить соответствующим интегрированием выражения (3.44) и выражения, получающегося из последнего заменой нижнего предела нулем.

Не производя на этот раз выкладок, которые совершенно аналогичны выполненным выше, приведем здесь только окончательные выражения для силовой функции такого слоя.

Пусть снаружи слой ограничен опять эллипсоидом E, а внутри эллипсоидом E_1, которому соответствует значение параметра k, равное заданному числу k_1 (рис. 24).

Пусть, далее, λ_1 есть положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda_1} + \frac{y^2}{b^2+\lambda_1} + \frac{z^2}{c^2+\lambda_1} = k_1^2.$$

Тогда если точка P лежит во внутренней полости слоя, т. е. если ее координаты удовлетворяют условию

$$0 \leqslant \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leqslant k_1^2,$$

то

$$U(P) = f\pi abc\varkappa(k_1^2) \int_0^\infty \frac{ds}{R(s)}.$$

Таким образом, в этом случае силовая функция имеет постоянное значение, что дает некоторое обобщение теоремы Ньютона. Далее, если точка P лежит внутри слоя, т. е. если

$$k_1^2 \leqslant \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leqslant 1,$$

то

$$U(P)=f\pi abc\left\{\int_0^{\lambda_1}\frac{\varkappa(k^2)\,ds}{R(s)}+\varkappa(k_1^2)\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{ds}{R(s)}\right\}.$$

Наконец, если точка лежит вне слоя, т. е. если

$$1 \leqslant \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} < \infty,$$

имеем

$$U(P)=f\pi abc\left\{\int_{\lambda}^{\lambda_1}\frac{\varkappa(k^2)\,ds}{R(s)}+\varkappa(k_1^2)\int_{\lambda_1}^{\infty}\frac{ds}{R(s)}\right\}.$$

Все три написанные выше формулы можно объединить и записать в виде единой формулы

$$U(P)=f\pi abc\int_{\lambda}^{\infty}\frac{\bar{\varkappa}(k^2)\,ds}{R(s)},$$

где функция $\bar{\varkappa}(k^2)$ определяется условиями

$$\bar{\varkappa}(k^2)=\varkappa(k^2) \qquad (\lambda \leqslant s \leqslant \lambda_1),$$
$$\bar{\varkappa}(k^2)=\varkappa(k_1^2) \qquad (\lambda_1 \leqslant s \leqslant \infty).$$

Тогда при $\lambda=\lambda_1=0$ получаем силовую функцию для точки, лежащей во внутренней полости; при $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda=0$ получаем силовую функцию для точки, лежащей внутри слоя, а при $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda \neq 0$ имеем силовую функцию для точки, лежащей вне внешней поверхности слоя.

ГЛАВА IV

СФЕРИЧЕСКИЕ И ЭЛЛИПСОИДАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Общие замечания

Формулы, полученные в предыдущей главе, дают нам выражение для силовой функции эллипсоидального тела (полного эллипсоида или эллипсоидального слоя, однородного или обладающего эллипсоидальной структурой) и материальной частицы единичной массы, отнесенной к декартовой системе координат, совпадающей с главными осями эллипсоида. Если в этих формулах заменить f на $f\mu$, то мы получим выражение силовой функции тела на материальную точку массы μ.

Те же формулы дают выражение взаимной силовой функции эллипсоидального тела и шара, обладающего сферической структурой, центр которого находится в точке P, масса которого есть μ и который не имеет общей части с телом T.

Если же заменить в этих формулах буквы x, y, z на ξ', η', ζ', а последние заменить выражениями

$$\left.\begin{aligned}\xi' &= a_{11}(x-\xi)+a_{21}(y-\eta)+a_{31}(z-\zeta),\\ \eta' &= a_{12}(x-\xi)+a_{22}(y-\eta)+a_{32}(z-\zeta),\\ \zeta' &= a_{13}(x-\xi)+a_{23}(y-\eta)+a_{33}(z-\zeta),\end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

в которых x, y, z обозначают опять координаты центра шара, ξ, η, ζ — координаты центра эллипсоидального тела T, а a_{ik} — направляющие косинусы главных осей эллипсоида T в произвольно выбранной декартовой системе координат, то мы получим общие формулы для взаимной силовой функции шара и эллипсоидального слоя.

Это общее выражение силовой функции будет содержать девять независимых переменных, а ее частные производные первого порядка по этим переменным дадут составляющие силы притяжения, действующей на шар и на эллипсоид, а также составляющие момента силы, действующей на тело T относительно центра эллипсоида G *).

Все эти выражения по необходимости выйдут очень сложными и громоздкими и даже в том случае, когда тело T есть эллипсоид вращения, т. е. когда силовая функция выражается через элементарные функции, ее выражение оказывается мало удобным и пользоваться им на практике обыкновенно весьма затруднительно.

Еще более сложным аналитически оказывается выражение силовой функции произвольно взятого тела и материальной точки (или шара), а также, конечно, выражение взаимной силовой функции двух тел произвольного вида и структуры, так как в самом общем случае силовая функция (и все ее частные производные!) выражается шестикратным интегралом, в котором не удается выполнить ни одно из входящих в него интегрирований.

Поэтому в общем случае и даже в разобранных простейших примерах приходится прибегать к какому-либо способу приближенного представления силовой функции.

Одна возможность такого приближенного представления была уже указана ранее, а именно, мы показали, что если два совершенно произвольных по форме и по структуре тела находятся весьма далеко друг от друга (по сравнению с их линейными размерами, разумеется!), то эти два тела взаимно притягиваются почти так же, как и две материальные точки, т. е. с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между их центрами инерции (или, вообще, между двумя достаточно произвольно выбранными центрами приведения).

Мы уже отмечали, что таким приближенным представлением силовой функции широко пользуются в различных областях астрономии, в частности, в небесной механике, но мы указывали также, что этим простейшим приближением далеко не всегда можно пользоваться.

В ряде важнейших задач небесной механики, например, в теории движения спутников планет, а особенно в теории движения искусственных небесных тел (искусственных спутников, космических кораблей и т. п.), оказывается необходимым более подробно рассматривать влияние формы и структуры тел на их поступательные и вращательные движения, а для этого нужно знать лучшее приближение силовой функции, чем то, которое

---

*) Момент силы притяжения, действующей на шар (однородный, или обладающий сферической структурой) относительно центра шара, всегда равен нулю.

непосредственно доставляет закон Ньютона для двух материальных точек.

Иными словами, закон притяжения Ньютона можно рассматривать как «нулевое» приближение к действительности, которое в ряде случаев оказывается достаточным, а иногда является неудовлетворительным, так как его использование не всегда может обеспечить необходимую точность. Но тогда появляется надобность рассматривать последующие приближения и нужно иметь для этого надежный математический аппарат, позволяющий легко и просто строить эти последовательные приближения и оценивать точность, которую они дают.

Таким математическим аппаратом являются бесконечные ряды того или иного вида, теория которых позволяет разложить нужную силовую функцию на сумму бесчисленного множества простых слагаемых, из которой можно затем брать столько первых членов, сколько может потребоваться в данной, конкретной задаче.

Одним из удобнейших и широко применяемых способов разложения силовой функции в бесконечный ряд является классическое разложение силовой функции тела и материальной точки (или шара, обладающего сферическим распределением плотностей) по так называемым сферическим или шаровым функциям, а поэтому прежде всего необходимо ознакомиться с элементами теории таких функций.

Эти функции, как и показывает их название, имеют отношение к сфере, и их применение объясняется приблизительно шарообразной формой планет солнечной системы, движения которых под действием их взаимных притяжений прежде всего и рассматриваются в основных задачах небесной механики.

С другой стороны, большие планеты солнечной системы, например, Земля, более близки по форме не к шарам, а к эллипсоидам (вращения или даже трехосным), а поэтому для приближенного представления силовых функций таких тел было бы более естественно использовать функции, имеющие более близкое отношение к эллипсоиду.

Такими функциями являются так называемые эллипсоидальные функции, введенные Ламе, и с элементами их теории также полезно ознакомиться.

Функции Ламе имеют также большое применение в теории фигур небесных тел, тесно связанной с теорией фигур равновесия вращающихся жидких или газообразных тел и их устойчивости, имеющей важное значение для теории фигуры Земли, а также для исследований в области теории фигур и эволюции звезд.

В этой главе и будут рассматриваться элементы теории упомянутых сферических и отчасти эллипсоидальных функций.

§ 2. Определение сферических функций

1. Сферические и эллипсоидальные функции появляются при изучении некоторых частных решений уравнения Лапласа, которое, как известно, в прямоугольных декартовых координатах имеет вид

$$\nabla U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0. \tag{4.2}$$

Будем искать такие частные решения этого уравнения, которые имеют вид однородного многочлена с тремя независимыми переменными x, y, z данной степени n, где n — целое положительное число ($n=0, 1, 2, 3, \ldots$).

Такой многочлен будем обозначать через $U_n(x, y, z)$ и будем называть гармоническим многочленом степени n, так что

$$\nabla U_n(x, y, z) = 0.$$

Нетрудно убедиться, что далеко не всякий однородный многочлен n-й степени является гармоническим многочленом. Например, многочлен 2-й степени $x^2+y^2+z^2$ (а также просто x^2, или y^2, или z^2) заведомо не удовлетворяет уравнению Лапласа, а поэтому и не может быть назван гармоническим.

Для того чтобы многочлен n-й степени был гармоническим, необходимо, как мы прежде всего покажем, чтобы его коэффициенты удовлетворяли некоторым соотношениям, так что общее число произвольных коэффициентов гармонического многочлена меньше полного числа коэффициентов общего многочлена n-й степени.

Подсчитаем сначала число различных членов в многочлене n-й степени с тремя независимыми переменными.

Для этого заметим, что однородный многочлен n-й степени с двумя независимыми переменными

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} y + \ldots + c_{n-1} x y^{n-1} + c_n y^n$$

содержит, очевидно, $n+1$ коэффициентов.

Однородный многочлен n-й степени с тремя независимыми переменными может быть записан в виде

$$c_0 z^n + u_1(x, y) \cdot z^{n-1} + \ldots + u_{n-1}(x, y) \cdot z + u_n(x, y),$$

где $u_k(x, y)$ обозначает однородный многочлен степени k с двумя переменными x и y. Следовательно, общее число различных членов и общее число коэффициентов в однородном многочлене n-й степени с тремя переменными x, y, z будет равно

$$N_n = 1 + 2 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Теперь покажем, что в гармоническом многочлене n-й степени с тремя независимыми переменными только $2n+1$ из этих N_n коэффициентов могут быть заданы произвольно, а все остальные коэффициенты $\left(\text{в числе } \frac{n(n-1)}{2}\right)$ суть линейные комбинации этих произвольных.

Действительно, запишем многочлен n-й степени с тремя независимыми переменными в общем виде

$$U_n(x, y, z) = \sum c_n^{(m_1, m_2, m_3)} x^{m_1} y^{m_2} z^{m_3}, \qquad (4.3)$$

где суммирование распространяется на все целые неотрицательные числа m_1, m_2, m_3, удовлетворяющие условию

$$m_1 + m_2 + m_3 = n,$$

а $c_n^{(m_1, m_2, m_3)}$ суть N_n его коэффициентов.

Оператор Лапласа от многочлена (4.3) есть, очевидно, также однородный многочлен от x, y, z, но уже $(n-2)$-й степени, а потому он содержит всего N_{n-2} различных членов, коэффициенты которых суть линейные однородные функции от коэффициентов многочлена $U_n(x, y, z)$. Для того чтобы многочлен (4.3) был гармоническим, нужно, чтобы $\nabla U_n(x, y, z)$ был тождественно равен нулю, а для этого необходимо, чтобы все коэффициенты многочлена ∇U_n были равны нулю.

Приравнивая нулю все коэффициенты многочлена ∇U_n, мы получим систему N_{n-2} линейных однородных уравнений, связывающих N_n коэффициентов многочлена (4.3).

Если эти уравнения независимы, то из них можно определить ровно N_{n-2} коэффициентов в функции всех остальных $N_n - N_{n-2}$, остающихся произвольными. Но

$$N_n - N_{n-2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 2n+1,$$

а поэтому число произвольных коэффициентов гармонического многочлена $U_n(x, y, z)$ действительно равно $2n+1$.

В приведенном, весьма простом рассуждении остается, однако, не ясным, будут ли упомянутые линейные уравнения действительно независимыми, а поэтому мы дадим еще другое доказательство высказанного важного предложения.

Так как всякий многочлен может быть представлен в виде многочлена Тейлора, то коэффициенты многочлена (4.3) можно определить формулами Тейлора, а именно:

$$c_n^{(m_1, m_2, m_3)} = \frac{1}{m_1!\, m_2!\, m_3!} \left[\frac{\partial^n U_n(x, y, z)}{\partial x^{m_1}\, \partial y^{m_2}\, \partial z^{m_3}} \right]_{x=y=z=0} \qquad (4.3')$$

Переписывая теперь уравнение Лапласа в виде

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$$

мы можем в выражениях коэффициентов (4.3′) исключить все дифференцирования по z выше первого порядка.

Действительно, мы имеем с помощью уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^n U_n}{\partial x^{m_1}\partial y^{m_2}\partial z^{m_3}} = \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{m_1}\partial y^{m_2}\partial z^{m_3-2}}\left(\frac{\partial^2 U_n}{\partial z^2}\right) =$$

$$= -\frac{\partial^n U_n}{\partial x^{m_1+2}\partial y^{m_2}\partial z^{m_3-2}} - \frac{\partial^n U_n}{\partial x^{m_1}\partial y^{m_2+2}\partial z^{m_3-2}}.$$

В каждой из двух последних производных число дифференцирований по z уменьшилось на две единицы, а число дифференцирований по x или по y соответственно увеличилось. Отсюда ясно, что, повторяя такую операцию достаточное число раз, мы либо вовсе исключим дифференцирования по z (если m_3 четное), либо сведем число этих дифференцирований к единице (если m_3 нечетное). Таким образом, произвольными останутся лишь те коэффициенты $c_n^{(m_1, m_2, m_3)}$, для вычисления которых или вовсе не нужно дифференцировать по z, или нужно произвести это дифференцирование только один раз. Следовательно, произвольными останутся коэффициенты:

$$c_n^{(m_1, m_2, 0)} \qquad (m_1 + m_2 = n),$$

число которых равно $n+1$, и

$$c_n^{(m_1, m_2, 1)} \qquad (m_1 + m_2 = n - 1),$$

число которых равно n, а общее число тех и других как раз равно $2n+1$, что мы и хотели показать.

Это рассуждение показывает одновременно, что упомянутые выше линейные уравнения, связывающие коэффициенты гармонического многочлена $U_n(x, y, z)$, действительно оказываются независимыми.

Для иллюстрации рассмотрим некоторые частные значения n. Если $n=0$, то имеем

$$N_0 = 1, \quad 2n+1 = 1,$$

т. е. единственный гармонический многочлен нулевой степени есть

$$U_0(x, y, z) = C_0,$$

где C_0 — произвольная постоянная.

Для $n=1$ имеем

$$N_1 = 3, \quad 2n+1 = 3,$$

и общий вид гармонических многочленов первой степени будет

$$U_1(x, y, z) = C_1^{(1)}x + C_1^{(2)}y + C_1^{(3)}z,$$

с тремя произвольными постоянными. Иначе говоря, всякий однородный многочлен первой степени с тремя независимыми переменными оказывается гармоническим.

Пусть $n=2$, тогда

$$N_2 = 6, \qquad 2n+1 = 5,$$

т. е. в гармоническом многочлене второй степени пять из шести коэффициентов можно выбрать произвольно. Действительно, легко видеть, что

$$C_2^{(2,\,0,\,0)} + C_2^{(0,\,2,\,0)} + C_2^{(0,\,0,\,2)} = 0,$$

т. е. два из этих коэффициентов можно выбрать произвольно. Так как остальные три коэффициента не входят в выражение для ∇U_2, то они также остаются произвольными и общее число произвольных коэффициентов в этом случае равно пяти.

Общий гармонический многочлен второй степени можно представить (слегка меняя обозначения коэффициентов) в виде

$$U_2(x, y, z) = C_2^{(1)}(x^2 - z^2) + C_2^{(2)}(y^2 - z^2) + C_2^{(3)}xy + C_2^{(4)}yz + C_2^{(5)}zx,$$

где $C_2^{(s)}$ — независимые произвольные постоянные.

Вообще, выбирая какие-нибудь $2n+1$ из N_n коэффициентов однородного гармонического многочлена n-й степени и выражая остальные коэффициенты линейным образом через эти выбранные, мы можем (путем надлежащей сортировки и перестановки членов) представить всякий общий гармонический многочлен n-й степени в следующем виде:

$$U_n(x, y, z) = \sum_{s=1}^{2n+1} C_n^{(s)} U_n^{(s)}(x, y, z), \tag{4.4}$$

где $C_n^{(s)}$ $(s=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n+1)$ суть независимые произвольные постоянные, а $U_n^{(s)}(x, y, z)$ $(s=1,\ 2,\ \ldots\ ,\ 2n+1)$ суть некоторые специально выбранные гармонические многочлены n-й степени, которые линейно между собой независимы.

Эти гармонические многочлены называются основными или элементарными и их можно выбирать различным образом, лишь бы они были линейно независимыми.

Итак, всякий гармонический многочлен n-й степени можно представить в виде линейной комбинации (с постоянными произвольными коэффициентами) $2n+1$ элементарных гармонических многочленов той же степени.

2. Чтобы получить явные выражения для основных (или элементарных) гармонических многочленов данной степени n, перейдем сначала к полярным сферическим координатам, полагая

$$x = r\sin\theta\cos\lambda, \quad y = r\sin\theta\sin\lambda, \quad z = r\cos\theta. \tag{4.5}$$

Тогда всякий однородный многочлен n-й степени представится в виде

$$U_n = r^n Y_n(\theta, \lambda), \tag{4.6}$$

где

$$Y_n(\theta, \lambda) = \sum_{m_1+m_2+m_3=n} c_n^{(m_1, m_2, m_3)} \sin^{m_1+m_2}\theta\cos^{m_3}\theta\cos^{m_1}\lambda\sin^{m_2}\lambda. \tag{4.7}$$

Если U_n есть гармонический многочлен, то выражение (4.6) называется обычно объемной сферической функцией, а множитель $Y_n(\theta, \lambda)$, определяемый формулой (4.7) и зависящий от двух сферических координат θ и λ, называется поверхностной сферической функцией или просто сферической функцией n-го порядка.

Эти функции $Y_n(\theta, \lambda)$ называются также в некоторых руководствах «игреками Лапласа».

Как показывает формула (4.7), сферическая функция n-го порядка есть многочлен относительно синусов и косинусов углов θ и λ, каждый член которого есть произведение функции одного только θ на функцию только от λ.

Каждому элементарному гармоническому многочлену также соответствует по формуле (4.6) некоторая сферическая функция, которую тоже будем называть элементарной. Следовательно, всякая общая сферическая функция является линейной комбинацией $2n+1$ элементарных сферических функций, обладающих указанной выше структурой. Мы еще более уточним эту структуру, рассматривая отдельно множители каждого члена формулы (4.7). А именно, множитель, содержащий только угол θ, мы будем рассматривать преимущественно как функцию от $\cos\theta$, полагая

$$\nu = \cos\theta,$$

так что

$$\sin^{m_1+m_2}\theta\cos^{m_3}\theta = (1-\nu^2)^{\frac{m_1+m_2}{2}}\nu^{m_3}$$

— это многочлен n-й степени относительно ν, если m_1+m_2 есть число четное и представляет собой произведение многочлена $(n-1)$-й степени на $\sqrt{1-\nu^2}$, если m_1+m_2 есть число нечетное.

Другой множитель, содержащий только угол λ, мы будем представлять в виде тригонометрического многочлена относительно синусов и косинусов целых кратностей λ. Этот многочлен будет содержать только косинусы, если m_2 есть число четное, и только синусы, если m_2 — нечетное, а наибольшая кратность угла λ под знаками синусов и косинусов будет, очевидно, равна $m_1+m_2\leqslant n$ *). Поэтому число членов с косинусами различных кратностей угла λ будет равно $n+1$, а число членов с синусами будет равно n. Таким образом, число различных тригонометрических одночленов, каждый из которых содержит либо только косинус либо только синус целой кратности λ, будет, очевидно, равно как раз $2n+1$, т. е. полному числу элементарных сферических функций n-го порядка. Так как выбор элементарных гармонических многочленов, а следовательно, и элементарных сферических функций, вполне произволен, то мы можем распорядиться этим выбором так, чтобы каждая элементарная сферическая функция n-го порядка представляла собой произведение некоторой функции от ν на косинус или на синус угла $k\lambda$ ($k=0$, 1, 2, ..., n).

Обозначая, как принято, упомянутые выше функции от ν через $P_n^{(k)}(\nu)$, мы можем выписать следующий полный набор элементарных сферических функций n-го порядка **):

$$\left.\begin{array}{l} P_n^{(0)}(\nu),\quad P_n^{(1)}(\nu)\cos\lambda,\quad P_n^{(2)}(\nu)\cos 2\lambda,\ \ldots,\ P_n^{(n)}(\nu)\cos n\lambda, \\ \qquad\qquad P_n^{(1)}(\nu)\sin\lambda,\quad P_n^{(2)}(\nu)\sin 2\lambda,\ \ldots,\ P_n^{(n)}(\nu)\sin n\lambda. \end{array}\right\} \tag{4.8}$$

Из сказанного выше следует, что функция $P_n^{(k)}(\nu)$ есть многочлен n-й степени либо многочлен $(n-1)$-й степени, умноженный на $\sqrt{1-\nu^2}$.

Всякая другая сферическая функция того же порядка n будет линейной комбинацией с постоянными коэффициентами элементарных функций (4.8). Поэтому общая сферическая функция n-го порядка представится следующей основной формулой:

$$Y_n(\theta,\lambda)=\sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\nu)\,[A_{nk}\cos k\lambda+B_{nk}\sin k\lambda], \tag{4.9}$$

где A_{nk} и B_{nk} суть $2n+1$ произвольных постоянных (для каждого n).

§ 3. Дифференциальные уравнения для сферических функций

1. Установить вид и структуру элементарных сферических функций непосредственно довольно затруднительно. Гораздо проще это сделать, рассматривая дифференциальные уравнения,

---

*) См. разложения степеней синуса и косинуса по таким же функциям кратных дуг, например, в справочнике: И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, «Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений», Физматгиз, 1963.

**) Вместо $P_n^{(k)}(\nu)$ эти функции часто обозначаются также через $X_n^{(k)}(\nu)$, а за угол θ берут иногда не дополнение до широты, а саму широту.

которым удовлетворяют эти функции. Чтобы вывести эти уравнения, заметим, что гармонический многочлен U_n, по определению, есть некоторое решение уравнения Лапласа (4.2). Переходя к сферическим координатам (4.5), мы представили этот многочлен в виде (4.6), а поэтому это выражение должно удовлетворять уравнению Лапласа в полярных координатах. Беря выражение для оператора Лапласа в сферических координатах (см. (3.8) в § 1 гл. III), мы напишем требуемое уравнение в виде

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\lambda^2}=0. \qquad (4.10)$$

Попробуем искать частное решение этого уравнения в виде произведения функции только от r на функцию только от θ, λ, т. е. в виде

$$U=f(r)Y(\theta,\lambda).$$

Подстановка этого выражения в уравнение (4.10) дает

$$Y(\theta,\lambda)\frac{d}{dr}[r^2f'(r)]+$$
$$+f(r)\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\lambda)}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\lambda)}{\partial\lambda^2}\right\}=0,$$

что можно переписать, разделяя переменные, следующим образом:

$$\frac{1}{f(r)}\frac{d}{dr}[r^2f'(r)]=$$
$$=-\frac{1}{Y(\theta,\lambda)}\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Y(\theta,\lambda)}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y(\theta,\lambda)}{\partial\lambda^2}\right\}.$$

Левая часть последнего равенства содержит только r, а правая только θ и λ, а поэтому каждая часть должна быть равна одной и той же постоянной. Обозначая эту постоянную через $\varkappa$, мы получим два следующих уравнения:

$$\frac{1}{f(r)}\frac{d}{dr}[r^2f'(r)]=\varkappa, \qquad (4.11)$$

и

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\lambda^2}+\varkappa Y=0. \qquad (4.12)$$

Так как U_n определяется формулой (4.6), то функция от r нам известна и мы имеем $f(r)=r^n$. Подставляя это значение в уравнение (4.11), мы найдем, что

$$\varkappa=n(n+1).$$

Заменяя теперь постоянную $\varkappa$ в уравнении (4.12) найденным ее значением, мы получим уравнение, которому должна удовлетворять всякая сферическая функция n-го порядка:

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial Y_n}{\partial\theta}\right]+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\lambda^2}+n(n+1)Y_n=0. \quad (4.13)$$

Так как, далее, общая сферическая функция n-го порядка есть линейная комбинация одночленов, каждый из которых есть произведение функции только от θ на функцию только от λ, то частное решение уравнения (4.13) будем искать в виде

$$\Theta_n(\theta)\cdot L_n(\lambda), \quad (4.13')$$

а затем образуем сумму найденных частных решений, которая в силу линейности уравнения (4.13) также будет его решением.

Заменяя в (4.13) Y_n на $\Theta_n L_n$, получим

$$\frac{L_n}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta_n}{d\theta}\right]+\frac{\Theta_n}{\sin^2\theta}\frac{d^2L_n}{d\lambda^2}+n(n+1)\Theta_n L_n=0,$$

откуда, разделяя переменные, имеем

$$\frac{\sin\theta}{\Theta_n}\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta_n}{d\theta}\right]+n(n+1)\sin^2\theta=-\frac{1}{L_n}\frac{d^2L_n}{d\lambda^2}.$$

Отсюда следует, что каждая часть равенства должна быть равна одной и той же постоянной, которую обозначим через l. Таким образом, получим следующие уравнения для определения каждого из множителей частного решения (4.13):

$$\frac{d^2L_n}{d\lambda^2}=-l\cdot L_n, \quad (4.14)$$

и

$$\sin\theta\frac{d}{d\theta}\left[\sin\theta\frac{d\Theta_n}{d\theta}\right]+[n(n+1)\sin^2\theta-l]\Theta_n=0. \quad (4.15)$$

Так как множитель, зависящий только от λ, должен быть линейной комбинацией синуса и косинуса целой кратности λ, то постоянная l должна быть квадратом целого числа.

Полагая $l=k^2$, мы будем иметь частные решения уравнения (4.14) в виде

$$\cos k\lambda, \quad \sin k\lambda.$$

Заменяя теперь в уравнении (4.15) l на k^2, сделаем подстановку

$$\nu=\cos\theta,$$

что дает следующее уравнение:

$$\frac{d}{d\nu}\left[(1-\nu^2)\frac{dP}{d\nu}\right]+\left[n(n+1)-\frac{k^2}{1-\nu^2}\right]P=0, \quad (4.16)$$

в котором неизвестная функция обозначена через P.

Это уравнение, являющееся обыкновенным линейным дифференциальным уравнением второго порядка без правой части (однородное!), называется уравнением Лежандра и играет важную роль, так как служит аналитической основой для изучения сферических функций.

2. Покажем, что это уравнение имеет частное решение в виде многочлена n-й степени или в виде произведения многочлена $(n-1)$-й степени на $\sqrt{1-v^2}$.

Для этого рассмотрим предварительно вспомогательную функцию

$$y=(x^2-1)^p, \tag{4.17}$$

где p — целое положительное число. Беря логарифмические производные от обеих частей равенства (4.17), мы имеем

$$\frac{y'}{y}=\frac{2px}{x^2-1},$$

откуда следует, что вспомогательная функция y удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$(1-x^2)\frac{dy}{dx}+2pxy=0.$$

Продифференцируем это равенство $m+1$ раз (m — целое положительное число), для чего применим известную формулу Лейбница для вычисления высших производных от произведения двух функций:

$$\frac{d^n(u\cdot v)}{dx^n}=\sum_{s=0}^{n}C_n^s\frac{d^{n-s}u}{dx^{n-s}}\frac{d^s v}{dx^s}, \tag{4.18}$$

где

$$C_n^s=\frac{n!}{(n-s)!\,s!}$$

суть биномиальные коэффициенты.

Нетрудно проверить, что результат дифференцирования запишется в виде

$$(1-x^2)\frac{d^{m+}\,y}{dx^{m+2}}-(2m-2p+2)x\frac{d^{m+1}y}{dx^{m+1}}+(2p-m)(m+1)\frac{d^m y}{dx^m}=0.$$

Отсюда видно, что функция

$$z=\frac{d^m(x^2-1)^p}{dx^m}\qquad(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2p) \tag{4.19}$$

удовлетворяет следующему линейному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}-(2m-2p+2)x\frac{dz}{dx}+(2p-m)(m+1)z=0. \tag{4.20}$$

Вернемся теперь к уравнению (4.16), которое перепишем, обозначая независимую переменную через x и искомую функцию через z, в виде

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}-2x\frac{dz}{dx}+\left[n(n+1)-\frac{k^2}{1-x^2}\right]z=0. \quad (4.16')$$

Рассмотрим сначала случай $k=0$. Тогда это уравнение примет вид

$$(1-x^2)\frac{d^2z}{dx^2}-2x\frac{dz}{dx}+n(n+1)z=0 \quad (4.21)$$

и совпадает с уравнением (4.20) при $p=m=n$.

Отсюда непосредственно следует, что уравнение (4.21) имеет частное решение вида

$$z=C\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}, \quad (4.22)$$

где C — какая угодно постоянная. Беря

$$C=\frac{1}{2^n\cdot n!}$$

и возвращаясь к уравнению (4.16), мы видим, что в случае $k=0$ это уравнение имеет частное решение

$$P_n(\nu)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n(\nu^2-1)^n}{d\nu^n}. \quad (4.23)$$

Нетрудно убедиться, что функция $P_n(\nu)$ есть многочлен n-й степени, содержащий только четные степени ν, если n есть число четное, и только нечетные степени ν, если n — нечетное.

Многочлен $P_n(\nu)$ называется многочленом Лежандра (или полиномом Лежандра), а формула (4.23), определяющая эти многочлены, называется формулой Родрига.

Формула Родрига может также служить для непосредственного вычисления многочленов Лежандра, так как для этого требуется производить только операции дифференцирования, весьма несложные, по крайней мере при не очень больших значениях n.

Действительно, полагая $n=0$, 1, 2, 3, без труда находим

$$P_0(\nu)=1,$$
$$P_1(\nu)=\nu,$$
$$P_2(\nu)=\frac{3}{2}\nu^2-\frac{1}{2},$$
$$P_3(\nu)=\frac{5}{2}\nu^3-\frac{3}{2}\nu.$$

Для бо́льших значений n многочлены Лежандра проще вычисляются несколько иным методом, как будет показано в следующем параграфе.

3. Перейдем к рассмотрению случая $k \neq 0$. Преобразуя уравнение (4.16′) подстановкой

$$z = (1 - x^2)^{\frac{k}{2}} \zeta, \tag{4.24}$$

мы получим следующее уравнение:

$$(1 - x^2)\frac{d^2\zeta}{dx^2} - 2(k+1)x\frac{d\zeta}{dx} + [n(n+1) - k(k+1)]\zeta = 0, \tag{4.25}$$

которое совпадает, как нетрудно проверить, с уравнением (4.20) при $p = n$ и $m = n + k$. Поэтому уравнение (4.25) заведомо имеет частное решение вида

$$\zeta = C\,\frac{d^{n+k}(x^2-1)^n}{dx^{n+k}},$$

а следовательно, уравнение (4.16′) имеет частное решение вида

$$z = C(1 - x^2)^{\frac{k}{2}}\,\frac{d^{n+k}(x^2-1)^n}{dx^{n+k}}.$$

Если выбрать постоянную C так же, как и в формуле (4.22), и возвратиться к обозначениям уравнения (4.16), то мы получим следующее частное его решение:

$$P_n^{(k)}(\nu) = (1 - \nu^2)^{\frac{k}{2}}\,\frac{d^k P_n(\nu)}{d\nu^k}, \tag{4.26}$$

причем эта функция есть действительно или многочлен (когда k есть число четное) степени n или (когда k — нечетное) многочлен $(n-1)$-й степени, помноженный на $\sqrt{1-\nu^2}$.

Величины $P_n^{(k)}(\nu)$, определяемые формулой (4.26), называются присоединенными функциями Лежандра (или ассоциированными функциями Лежандра) и вычисляются без всяких затруднений.

Выпишем для примера присоединенные функции для $n = 2$ $(k = 1, 2)$ и для $n = 3$ $(k = 1, 2, 3)$. Мы имеем

$$P_2^{(1)}(\nu) = (1 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}\,\frac{dP_2(\nu)}{d\nu} = 3\nu\sqrt{1-\nu^2},$$

$$P_2^{(2)}(\nu) = (1 - \nu^2)\,\frac{d^2P_2(\nu)}{d\nu^2} = 3(1-\nu^2),$$

$$P_3^{(1)}(\nu) = (1 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}\,\frac{dP_3(\nu)}{d\nu} = \left(\frac{15}{2}\nu^2 - \frac{3}{2}\right)\sqrt{1-\nu^2},$$

$$P_3^{(2)}(\nu) = (1 - \nu^2)\,\frac{d^2P_3(\nu)}{d\nu^2} = 15\nu(1-\nu^2),$$

$$P_3^{(3)}(\nu) = (1 - \nu^2)^{\frac{3}{2}}\,\frac{d^3P_3(\nu)}{d\nu^3} = 15(1-\nu^2)\sqrt{1-\nu^2}.$$

Примечание. Многочлен Лежандра есть частное решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка (4.21). Из теории линейных уравнений известно, что, зная одно частное решение однородного уравнения второго порядка, можно найти при помощи квадратур второе его решение, линейно независимое с первым. Нетрудно проверить, что это второе решение можно представить в виде

$$Q_n(x) = P_n(x) \int\limits_{\infty}^{x} \frac{dx}{(1-x^2) P_n^2(x)}, \tag{4.27}$$

а тогда общее решение уравнения Лежандра (4.21) будет иметь вид

$$z = C_1 P_n(x) + C_2 Q_n(x),$$

где C_1 и C_2 — две необходимые произвольные постоянные.

Функции $Q_n(x)$, называемые функциями Лежандра второго рода, уже не являются многочленами и суть некоторые трансцендентные функции. Вычисляя первые из этих функций непосредственно по формуле (4.27), мы имеем

$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1},$$

$$Q_1(x) = \frac{1}{2} x \ln \frac{x+1}{x-1} - 1,$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{4} (3x^2 - 1) \ln \frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{2} x.$$

Также и присоединенная функция Лежандра $P_n^{(k)}(x)$ есть частное решение уравнения (4.16′), а поэтому второе, линейно независимое частное решение этого уравнения также найдется при помощи квадратур. Это второе частное решение определится формулой, аналогичной формуле (4.27)

$$Q_n^{(k)}(x) = P_n^{(k)}(x) \int\limits_{\infty}^{x} \frac{dx}{(1-x^2)\left[P_n^{(k)}(x)\right]^2}, \tag{4.27′}$$

а общее решение уравнения (4.16) напишется в виде

$$z = C_1 P_n^{(k)}(x) + C_2 Q_n^{(k)}(x).$$

Функции $Q_n^{(k)}(x)$, определяемые формулой (4.27′), называются присоединенными функциями Лежандра второго рода и также суть функции трансцендентные.

§ 4. Свойства многочленов Лежандра

1. Как установлено в предыдущем параграфе, все элементарные сферические функции n-го порядка представляют собой произведения присоединенных функций Лежандра на косинусы или на синусы целых кратностей полярного угла λ. С другой стороны, присоединенные функции $P_n^{(k)}(\nu)$ выражаются через многочлены Лежандра, а поэтому основными элементарными сферическими функциями являются именно эти последние.

Рассмотрим в этом параграфе некоторые свойства многочленов Лежандра и некоторые дополнительные формулы для их представления и вычисления.

Заметим прежде всего, что из формулы Родрига (4.23) нетрудно получить развернутое выражение для многочлена Лежандра, позволяющее вычислить любой из этих многочленов, независимо от всех предыдущих. Действительно, по формуле бинома Ньютона

$$(\nu^2-1)^n = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s C_n^s \nu^{2n-2s}. \tag{4.28}$$

Дифференцируя это равенство n раз по ν и имея в виду, что при $2s>n$ n-я производная от ν^{2n-2s} есть нуль, мы найдем

$$\frac{d^n(\nu^2-1)^n}{d\nu^n} = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} (-1)^s C_n^s (2n-2s)(2n-2s-1)\ldots$$
$$\ldots[2n-2s-(n-1)]\,\nu^{n-2s},$$

где $E\left(\frac{n}{2}\right)$ обозначает наибольшее целое число, содержащееся в $\frac{n}{2}$.

Теперь формула (4.23) дает

$$P_n(\nu) = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} P_{ns}\nu^{n-2s}, \tag{4.29}$$

где P_{ns} — постоянные коэффициенты, определяемые следующей формулой:

$$P_{ns} = (-1)^s \frac{(2n-2s)}{2^n \cdot s!\,(n-s)!\,(n-2s)!}. \tag{4.30}$$

По формуле (4.30) найдем, например,

$$P_4(\nu) = \frac{1}{8}(35\nu^4 - 30\nu^2 + 3),$$

$$P_5(\nu) = \frac{1}{8}(63\nu^5 - 70\nu^3 + 15\nu).$$

Покажем теперь, что многочлены Лежандра являются коэффициентами разложения некоторой функции в ряд Тейлора, а именно покажем, что справедлива следующая формула:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(x). \tag{4.31}$$

Функция

$$\Phi(\alpha, x)=(1-2x\alpha+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.31'}$$

называется по этой причине **производящей функцией многочленов Лежандра**.

Для вывода формулы (4.31) воспользуемся известной формулой Лагранжа, дающей разложение по степеням α корня (или некоторой функции от корня) ζ уравнения Лагранжа

$$F(z)=z-x-\alpha f(z)=0, \tag{4.32}$$

обращающегося в x при $\alpha=0$.

В уравнении (4.32) $f(z)$ есть заданная функция комплексного переменного z, голоморфная в круге C с центром в точке x и такая, что на окружности имеем

$$|\alpha f(z)|<|z-x|.$$

Если $\Pi(z)$ есть заданная функция, голоморфная в круге C, то упомянутая формула Лагранжа может быть написана в следующем виде *):

$$\frac{\Pi(\zeta)}{F'(\zeta)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}[\Pi(x)f^n(x)]. \tag{4.33}$$

В теории аналитических функций показывается, что если $f(z)$ есть целая функция или многочлен, то ряд (4.33) сходится абсолютно при значениях α, удовлетворяющих неравенству

$$|\alpha|<\bar{\alpha},$$

где $\bar{\alpha}$ есть максимум функции

$$R(r)=\frac{r}{M(r)},$$

а $M(r)$ есть некоторый высший предел значений модуля функции $f(z)$ вдоль окружности радиуса r, с центром в точке x.

---

*) См., например, Э. Гурса, Курс математического анализа, т. 2, перев. с франц., ГТТИ, 1933. Другие способы вывода производящей функции см. в книге Л. Н. Сретенского, Теория ньютоновского потенциала, или в книге Н. П. Грушинского, Теория фигуры Земли.

Чтобы получить теперь нужную нам формулу (4.31), положим в (4.32) и (4.33)

$$f(z)=\frac{z^2-1}{2}.$$

Тогда уравнение Лагранжа превращается в простое квадратное уравнение относительно z, и тот его корень, который стремится к x при $\alpha\to 0$, определяется формулой

$$\zeta=\frac{1-\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}}{\alpha}.$$

Возьмем в формуле (4.33) $\Pi(z)=1$. Так как в нашем случае

$$F'(\zeta)=1-\alpha\zeta=\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2},$$

то формула (4.33) дает

$$\frac{1}{\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{n!\,2^n}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n},$$

что в виду формулы Родрига (4.23) приводит нас к искомому разложению (4.31).

Найдем теперь число $\bar{\alpha}$, т. е. область тех значений переменной α, при которых ряд (4.31) сходится абсолютно.

Для этого нужно определить сначала высший предел значений модуля функции $f(z)$ на окружности C радиуса r с центром в точке x, а затем найти максимум функции $R(r)$, когда r изменяется от нуля до бесконечности.

Так как в нашем случае x есть косинус некоторого угла, то $-1\leqslant x\leqslant+1$ и точка x лежит на действительной оси. Обозначая через φ угол между произвольным радиусом окружности C и положительным направлением оси абсцисс, мы будем иметь на C

$$z=x+r\cos\varphi+ir\sin\varphi,$$

$$\bar{z}=x+r\cos\varphi-ir\sin\varphi,$$

где $\bar{z}$ обозначает число, сопряженное с z.

Далее можем написать

$$4\,|f(z)|^2=(1-z^2)(1-\bar{z}^2),$$

и, следовательно, модуль функции $f(z)$ на окружности C определится формулой

$$4\,|f(z)|^2=[1+r^2\sin^2\varphi-(x+r\cos\varphi)^2]^2+4r^2\sin^2\varphi\,(x+r\cos\varphi)^2.$$

При $\varphi=\frac{\pi}{2}$ это выражение имеет наибольшее значение, так что

$$4M^2(r)=(1+r^2-x^2)^2+4x^2r^2.$$

Чтобы найти теперь максимум функции $R(r)$, мы должны решить уравнение $R'(r)=0$, т. е. уравнение

$$M(r)-rM'(r)=0,$$

которое приводится к виду

$$(1+r^2-x^2)(1-r^2-x^2)=0.$$

Это уравнение имеет единственный вещественный корень $r_0=\sqrt{1-x^2}$, который, как нетрудно проверить, действительно соответствует максимуму функции $R(r)$.

Теперь находим

$$\bar{\alpha}=\max R(r)=\frac{r_0}{M(r_0)}=1,$$

и ряд (4.31) сходится абсолютно при условии, что $|x|\leqslant 1$, если

$$|\alpha|<1.$$

Полученный результат можно еще проверить следующим образом. Если $|x|\leqslant 1$, то квадратный трехчлен

$$\alpha^2-2x\alpha+1$$

имеет корни

$$x\pm i\sqrt{1-x^2},$$

и модуль каждого из них равен единице. Поэтому особые точки ветвления производящей функции многочленов Лежандра, рассматриваемой как функция от α, лежат на окружности единичного радиуса с центром в точке $\alpha=0$, а поэтому ряд (4.31) действительно сходится абсолютно только при $|\alpha|<1$.

2. Применим теперь производящую функцию для получения некоторых числовых значений многочленов Лежандра и для вывода некоторых их свойств.

Положим в формуле (4.31) $x=+1$, что дает

$$\frac{1}{1-\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^nP_n(+1),$$

откуда немедленно выводим

$$P_n(+1)=+1. \tag{4.34}$$

Полагая, далее, $x=-1$, имеем

$$\frac{1}{1+\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\alpha^n=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^nP_n(-1),$$

откуда получаем

$$P_n(-1) = (-1)^n. \tag{4.35}$$

Наконец, полагая $x = 0$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \alpha^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(0),$$

откуда находим *)

$$P_{2n-1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}. \tag{4.36}$$

Последние формулы легко также вывести непосредственно из формулы (4.29), дающей развернутое выражение для $P_n(x)$.

Перейдем к выводу некоторых рекуррентных соотношений между многочленами Лежандра.

Так как равенство (4.31) есть тождество, то мы можем дифференцировать его и по α и по x, в результате чего опять получим тождества.

Дифференцируя (4.31) по α, получим следующее тождество:

$$(x-\alpha)(1-2x\alpha+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1} P_n(x),$$

которое можно написать также следующим образом:

$$(x-\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(x) = (1-2x\alpha+\alpha^2) \sum_{n=0}^{\infty} n\alpha^{n-1} P_n(x).$$

Приравнивая коэффициенты при α^n в левой и правой частях этого равенства, мы найдем

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0. \tag{4.37}$$

Это соотношение, связывающее три последовательных многочлена Лежандра, позволяет легко вычислить P_{n+1}, зная P_{n-1} и P_n. Так как мы уже знаем P_4 и P_5, то по формуле (4.37) найдем, например,

$$P_6(x) = \frac{11}{6} xP_5(x) - \frac{5}{6} P_4(x) = \frac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5),$$

$$P_7(x) = \frac{13}{7} xP_6(x) - \frac{6}{7} P_5(x) = \frac{1}{16}\left(429x^7 - 693x^5 + 315x^3 - 35x\right).$$

Этот процесс вычисления многочленов Лежандра можно продолжать, разумеется, сколь угодно далеко.

---

*) Символ $n!!$ обозначает произведение всех последовательных целых чисел, одинаковой четности с n, не больше n. Например, $10!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10$, $13!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13$.

Дифференцируя теперь (4.31) по x, имеем

$$\alpha(1-2x\alpha+\alpha^2)^{-\frac{3}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P'_n(x),$$

или

$$\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n(x)=(1-2x\alpha+\alpha^2)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P'_n(x).$$

Приравнивая здесь коэффициенты при α^{n+1} в левой и правой частях равенства, получаем

$$P_n(x)=P'_{n+1}(x)-2xP'_n(x)+P'_{n-1}(x). \tag{4.38}$$

Это есть второе рекуррентное соотношение между многочленами Лежандра.

Дифференцируя затем (4.37) по x, найдем

$$(n+1)P'_{n+1}(x)-(2n+1)\left[P_n(x)+xP'_n(x)\right]+nP'_{n-1}(x)=0. \tag{4.39}$$

Исключая теперь из соотношений (4.38) и (4.39) производную $P'_n(x)$, найдем третье рекуррентное соотношение

$$(2n+1)P_n(x)=P'_{n+1}(x)-P'_{n-1}(x). \tag{4.40}$$

Придавая в этом равенстве значку n все целые значения от 1 до m и складывая полученные равенства, мы получим еще следующее соотношение:

$$\sum_{n=0}^{m}(2n+1)P_n(x)=P'_{m+1}(x)+P'_m(x). \tag{4.41}$$

Если же исключим из (4.38) и (4.39) производную $P'_{n-1}(x)$, то найдем четвертое рекуррентное соотношение:

$$P'_{n+1}(x)-xP'_n(x)=(n+1)P_n(x). \tag{4.42}$$

3. Теперь займемся получением некоторых оценок для числовых значений многочленов Лежандра.

Для этого выведем сначала формулу, принадлежащую Лапласу, представляющую многочлен Лежандра n-го порядка в виде некоторого определенного интеграла.

Замечая, что (4.31) дает разложение функции $\Phi(\alpha, x)$ в ряд Тейлора по степеням α, абсолютно сходящееся внутри круга единичного радиуса с центром в точке $\alpha=0$, мы имеем по интегральным формулам Тейлора

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C\frac{\Phi(\alpha, x)\,d\alpha}{\alpha^{n+1}},$$

или

$$P_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{1}{\sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}}\cdot\frac{d\alpha}{\alpha^{n+1}}, \tag{4.43}$$

где интегралы берутся по окружности упомянутого круга.

Делая в интеграле (4.43) подстановку

$$\frac{1}{\alpha}=x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi,$$

мы имеем

$$\frac{d\alpha}{\alpha^2}=i\sqrt{1-x^2}\sin\varphi\,d\varphi,\quad \sqrt{1-2x\alpha+\alpha^2}=\alpha\sqrt{1-x^2}\sin\varphi,$$

и, следовательно,

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \left(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi\right)^n d\varphi. \tag{4.44}$$

Формула (4.44) называется **формулой Лапласа** и может служить также для фактического вычисления многочленов Лежандра, причем мнимость, входящая под знаком интеграла, сама собой исчезает.

Действительно, разлагая подынтегральную функцию по формуле бинома Ньютона, мы имеем

$$\left(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi\right)^n=\sum_{k=0}^{\infty}C_n^k i^k(1-x^2)^{\frac{k}{2}}x^{n-k}\cos^k\varphi.$$

Следовательно, по формуле (4.44)

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}C_n^k i^k(1-x^2)^{\frac{k}{2}}x^{n-k}\int\limits_0^\pi\cos^k\varphi\,d\varphi.$$

Но входящий сюда интеграл равен нулю, когда k нечетное, а при k четном имеем *)

$$\int\limits_0^\pi\cos^{2k}\varphi\,d\varphi=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\pi.$$

Таким образом, окончательно

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_n^{2k}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}(1-x^2)^k x^{n-2k}. \tag{4.45}$$

---

*) См., например, И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.

что есть действительное выражение, могущее служить также и для непосредственного вычисления многочленов Лежандра. Например, имеем

$$P_8(x)=x^8-\frac{1}{2}C_8^2(1-x^2)x^6+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}C_8^4(1-x^2)^2x^4-$$
$$-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}C_8^6(1-x^2)^3x^2+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}(1-x^2)^4=$$
$$=\frac{1}{128}(6435x^8-12012x^6+6930x^4-1260x^2+35).$$

Формула Лапласа (4.44) позволяет также вывести интегральное представление для производящей функции (4.31). Действительно, мы находим

$$\Phi(\alpha,\ x)=(1-2x\alpha+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^nP_n(x)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{1-\alpha(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi)}.$$

Пользуясь формулой Лапласа, мы можем получить оценки, о которых упоминалось выше. Прежде всего отметим, что при $x=\pm 1$ формула (4.44) дает

$$P_n(\pm 1)=(\pm 1)^n.$$

Покажем теперь, что при всех других значениях x, заключающихся в промежутке $(-1,\ +1)$, абсолютные значения любого многочлена Лежандра не превосходят единицы.

Действительно, из формулы Лапласа имеем неравенство

$$|P_n(x)|\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi|^n\,d\varphi. \qquad (4.44')$$

Но при $|x|<1$ имеем, очевидно,

$$|x+i\sqrt{1-x^2}\cos\varphi|=\sqrt{x^2+(1-x^2)\cos^2\varphi}=$$
$$=\sqrt{\cos^2\varphi+x^2\sin^2\varphi}<1,$$

вследствие чего при тех же значениях x имеем из (4.44')

$$|P_n(x)|<1. \qquad (4.46)$$

Выведем более точную оценку для многочленов Лежандра. Для этого перепишем неравенство (4.44′) в виде*)

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [1-(1-x^2)\sin^2\varphi]^{\frac{n}{2}}\,d\varphi.$$

Так как для $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ имеем

$$\frac{\sin\varphi}{\varphi} \geqslant \frac{2}{\pi},$$

то при $|x| < 1$ будем иметь

$$1-(1-x^2)\sin^2\varphi \leqslant 1-\left(\frac{2}{\pi}\right)^2(1-x^2)\,\varphi^2,$$

вследствие чего получим следующее неравенство:

$$|P_n(x)| < \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-z^2\varphi^2)^{\frac{n}{2}}\,d\varphi,$$

где положено для сокращения

$$z=\frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2}.$$

Так как, далее

$$1-z^2\varphi^2 \leqslant e^{-z^2\varphi^2},$$

то предыдущее неравенство можно еще усилить и написать в виде

$$|P_n(x)| < \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{nz^2\varphi^2}{2}}\,d\varphi,$$

или, полагая

$$t=z\varphi\sqrt{\frac{n}{2}}, \qquad T=\frac{z\pi}{2}\sqrt{\frac{n}{2}},$$

будем иметь

$$|P_n(x)| < \sqrt{\frac{2}{n(1-x^2)}}\int_0^T e^{-t^2}\,dt.$$

---

*) Здесь использовано определение модуля комплексного числа

$$|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

Но известно, что

$$\int_0^T e^{-t^2}dt < \int_0^\infty e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

а поэтому мы имеем окончательное неравенство

$$|P_n(x)| < \sqrt{\frac{\pi}{2n(1-x^2)}}, \tag{4.46'}$$

показывающее, что

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = 0$$

при всяком значении x, лежащем в открытом промежутке $(-1, +1)$.

Примечание. Из неравенства (4.46) следует и более сильное утверждение, а именно: во всяком промежутке

$$-1+\varepsilon < x < 1-\varepsilon,$$

где $0<\varepsilon<1$, функция $P_n(x)$ равномерно стремится к нулю, как $1/\sqrt{n}$.

§ 5. Свойства ортогональности сферических функций

Как известно, бесконечная последовательность функций одного действительного переменного $f_n(x)$, определенных на некотором промежутке $a\leqslant x\leqslant b$, называется ортогональной последовательностью в промежутке (a, b), если

$$\int_a^b f_n(x)\,f_m(x)\,dx = 0$$

для любых двух неравных значений n и m.

Отсюда следует, что ни одна из этих функций не может быть линейной комбинацией с постоянными коэффициентами любого числа других функций этой последовательности.

Если функции, образующие последовательность, выбраны так, что

$$\int_a^b f_n^2(x)\,dx = 1$$

для всех значений n $(n=1, 2, \ldots)$, то данная ортогональная последовательность называется нормированной.

Ортогональная система функций называется полной, если не существует такой, не равной тождественно нулю функции

$\varphi(x)$, что

$$\int_a^b \varphi(x) f_n(x)\, dx = 0$$

для всех значений n.

1. Покажем теперь, что многочлены Лежандра

$$P_0(x),\ P_1(x),\ \ldots,\ P_n(x),\ \ldots$$

образуют ортогональную в промежутке $(-1, +1)$ последовательность функций.

Применяя способ доказательства, принадлежащий самому Лежандру, возьмем формулу (4.31), которая дает следующие ряды:

$$\Phi(\alpha, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n P_n(x),$$

$$\Phi(\beta, x) = \sum_{m=0}^{\infty} \beta^m P_m(x),$$

абсолютно сходящиеся для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $|x| \leqslant 1$, если $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$. Так как произведение двух абсолютно сходящихся рядов есть также ряд абсолютно сходящийся, то мы можем перемножить два предыдущих равенства, что дает

$$\Phi(\alpha, x)\Phi(\beta, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^n \beta^m P_n(x) P_m(x).$$

Интегрируя последнее равенство по x в пределах от -1 до $+1$, мы имеем

$$\int_{-1}^{+1} \Phi(\alpha, x)\Phi(\beta, x)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^n \beta^m \int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x)\, dx. \quad (4.47)$$

С другой стороны, как нетрудно проверить *)

$$\int_{-1}^{+1} \Phi(\alpha, x)\Phi(\beta, x)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \Big[\ln \big[\sqrt{\beta(1 - 2\alpha x + \alpha^2)} + \sqrt{\alpha(1 - 2\beta x + \beta^2)} \big] \Big]_{-1}^{+1} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \frac{(1+\alpha)\sqrt{\beta} + (1+\beta)\sqrt{\alpha}}{(1-\alpha)\sqrt{\beta} + (1-\beta)\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \ln \frac{1 + \sqrt{\alpha\beta}}{1 - \sqrt{\alpha\beta}}.$$

---

*) См. также: И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.

Но известно следующее разложение:

$$\ln(1+z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{k+1}}{k+1},$$

абсолютно сходящееся при $|z|<1$, с помощью которого выводим без труда

$$\int_{-1}^{+1}\Phi(\alpha,\ x)\,\Phi(\beta,\ x)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}(\alpha\beta)^n, \qquad (4.48)$$

причем ряд в правой части сходится абсолютно, так как $|\alpha\beta|<1$.

Сравнивая равенства (4.47) и (4.48), имеем

$$\int_{-1}^{+1}P_n(x)\,P_m(x)\,dx=0 \qquad (m\neq n), \qquad (4.49)$$

и для $m=n$

$$\int_{-1}^{+1}P_n^2(x)\,dx=\frac{2}{2n+1}. \qquad (4.50)$$

Равенство (4.49) доказывает ортогональность многочленов Лежандра в промежутке $(-1,\ +1)$, а равенство (4.50) показывает, что эта система функций не является нормированной.

Впрочем, легко видеть, что функции

$$\tilde{P}_n(x)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(x),$$

которые также являются многочленами, удовлетворяющими уравнению Лежандра, образуют нормированную ортогональную систему в промежутке $(-1,\ +1)$. Однако в дальнейшем мы будем пользоваться именно многочленами Лежандра, т. е. ненормированной ортогональной системой функций в промежутке $(-1,\ +1)$.

2. Перейдем к рассмотрению свойства ортогональности присоединенных функций Лежандра, для чего выведем сначала некоторую формулу приведения. Рассмотрим интеграл

$$I_{nm}^{(k)}=\int_{-1}^{+1}P_n^{(k)}(x)\,P_m^{(k)}(x)\,dx. \qquad (4.51)$$

Подставляя сюда вместо присоединенных функций их выражения, определяемые формулой (4.26), имеем

$$I_{nm}^{(k)}=\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^k\frac{d^kP_n}{dx^k}\,\frac{d^kP_m}{dx^k}\,dx$$

а применяя здесь формулу интегрирования по частям, получим

$$I_{nm}^{(k)} = -\int_{-1}^{+1} \frac{d^{k-1}P_m}{dx^{k-1}} \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^k \frac{d^kP_n}{dx^k}\right] dx. \qquad (4.52)$$

С другой стороны, многочлен Лежандра $P_n(x)$ удовлетворяет уравнению (4.21), что дает тождество

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right] + n(n+1)P_n \equiv 0.$$

Дифференцируя это тождество $k-1$ раз, получим новое тождество

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[(1-x^2)\frac{dP_n}{dx}\right] + n(n+1)\frac{d^{k-1}P_n}{dx^{k-1}} \equiv 0,$$

которое после применения формулы Лейбница примет вид

$$(1-x^2)\frac{d^{k+1}P_n}{dx^{k+1}} - 2kx\frac{d^kP_n}{dx^k} - [k(k-1) - n(n+1)]\frac{d^{k-1}P_n}{dx^{k-1}} \equiv 0,$$

а последнее, после умножения на $(1-x^2)^{k-1}$, может быть написано следующим образом:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^k \frac{d^kP_n}{dx^k}\right] \equiv [k(k-1) - n(n+1)](1-x^2)^{k-1}\frac{d^{k-1}P_n}{dx^{k-1}}.$$

С помощью этого тождества формула (4.52) напишется в виде

$$I_{nm}^{(k)} = (n+k)(n+1-k)I_{nm}^{(k-1)}. \qquad (4.53)$$

Заменяя здесь k последовательно на $k-1, k-2, \ldots, 2, 1$, мы получим следующую систему равенств:

$$\begin{aligned}
I_{nm}^{(k-1)} &= (n+k-1)(n+2-k)I_{nm}^{(k-2)},\\
I_{nm}^{(k-2)} &= (n+k-2)(n+3-k)I_{nm}^{(k-3)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
I_{nm}^{(2)} &= (n+2)(n-1)I_{nm}^{(1)},\\
I_{nm}^{(1)} &= (n+1)nI_{nm}^{(0)}.
\end{aligned}$$

Перемножая все эти равенства вместе с равенством (4.53), получим после сокращений

$$I_{nm}^{(k)} = \{(n+k)(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+2)(n+1)\} \times \\ \times \{[n-(k-1)][n-(k-2)][n-(k-3)]\ldots[n-1]n\} I_{nm}^{(0)},$$

что можно записать, очевидно, следующим образом:

$$I_{nm}^{(k)}=\frac{(n+k)!}{(n-k)!}I_{nm}^{(0)}. \tag{4.54}$$

Но

$$I_{nm}^{(0)}=\int_{-1}^{+1}P_n(x)P_m(x)\,dx,$$

а поэтому формулы (4.49) и (4.50) позволяют получить из (4.54) следующие соотношения:

$$\int_{-1}^{+1}P_n^{(k)}(x)P_m^{(k)}(x)\,dx=0 \qquad (m\neq n), \tag{4.55}$$

и для $m=n$:

$$\int_{-1}^{+1}[P_n^{(k)}(x)]^2\,dx=\frac{2}{2n+1}\frac{(n+k)!}{(n-k)!}. \tag{4.56}$$

Эти равенства показывают, что всякая система функций

$$P_0^{(k)}(x),\quad P_1^{(k)}(x),\ \ldots,\ P_n^{(k)}(x),\ \ldots,$$

для которых k имеет определенное значение, образует ортогональную (но не нормированную) в промежутке (—1, +1) последовательность.

3. Наконец, обратимся к элементарным сферическим функциям (4.8) n-го порядка, которые образуют полный набор из $2n+1$ функций. Эти функции мы можем обозначить так:

$$Y_{n0},\ Y_{n1},\ \ldots,\ Y_{nn},\ Y_{n,\,n+1},\ \ldots,\ Y_{n,\,2n},$$

и какую-нибудь будем обозначать через Y_{ns}, где s пробегает все значения от нуля до $2n$. Наряду с числом s будем рассматривать еще число k, полагая $s=k$, если $s\leqslant n$, и $s=n+k$, если $s\geqslant n+1$. Таким образом,

$$\begin{aligned}Y_{ns}(\theta,\ \lambda)&=P_n^{(k)}(\nu)\cos k\lambda \qquad s\leqslant n \quad (k=s),\\ Y_{ns}(\theta,\ \lambda)&=P_n^{(k)}(\nu)\sin k\lambda \qquad s\geqslant n+1 \quad (k=s-n).\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь интеграл

$$I_{n,\,m}^{(s,\,\sigma)}=\iint\limits_{(\Omega)}Y_{ns}Y_{m\sigma}\,d\omega, \tag{4.57}$$

где интегрирование распространено на всю сферу Ω единичного радиуса. Покажем, что если функции Y_{ns} и $Y_{m\sigma}$ отличаются друг от друга хотя бы одним значком, то интеграл (4.57) равен нулю. Действительно, так как $\nu=\cos\theta$, то элемент площади сферы $d\omega=\sin\theta\, d\theta\, d\nu$ можно заменить через $d\nu\, d\lambda$ и интегрирование по ν вести в пределах от -1 до $+1$.

Тогда можем написать

$$I_{n,\,m}^{(s,\,\sigma)}=\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} P_n^{(k)}(\nu)\,P_m^{(\varkappa)}(\nu)\,\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(k\lambda)\,\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\varkappa\lambda)\,d\nu\,d\lambda=$$

$$=\int_0^{2\pi}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(k\lambda)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(\varkappa\lambda)\,d\lambda\int_{-1}^{+1}P_n^{(k)}(\nu)\,P_m^{(\varkappa)}(\nu)\,d\nu.$$

Если теперь $\varkappa\neq k$, то первый множитель, т. е. интеграл, взятый по долготе λ, равен, очевидно, нулю и весь двойной интеграл также равен нулю. Если же $\varkappa=k$, но $m\neq n$, то второй интеграл равен нулю в силу равенства (4.55), и мы имеем окончательно

$$\int\int_{(\Omega)} Y_{ns}Y_{m\sigma}\,d\omega=0 \qquad \begin{pmatrix}\sigma\neq s & \\ \sigma=s, & m\neq n\end{pmatrix}. \tag{4.58}$$

По аналогии с определением ортогональности функций одного переменного на отрезке действительной оси, мы скажем, что семейство функций (4.8) от двух переменных образует в силу (4.58) ортогональную систему функций на сфере единичного радиуса.

Найдем теперь интеграл от квадрата сферической функции, т. е. интеграл

$$I_{n,\,n}^{(s,\,s)}=\int\int_{(\Omega)} Y_{ns}^2\,d\omega=\int_0^{2\pi}\begin{matrix}\cos^2\\ \sin^2\end{matrix}(k\lambda)\,d\lambda\int_{-1}^{+1}\left[P_n^{(k)}(\nu)\right]^2 d\nu.$$

Если $k\neq 0$, то

$$\int_0^{2\pi}\begin{matrix}\cos^2\\ \sin^2\end{matrix}(k\lambda)\,d\lambda=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1\pm\cos 2k\lambda)\,d\lambda=\pi,$$

а если $k=0$, то

$$\int_0^{2\pi}\begin{matrix}\cos^2\\ \sin^2\end{matrix}(0\cdot\lambda)\,d\lambda=\begin{cases}2\pi,\\ 0,\end{cases}$$

и мы получим

$$I_{n,\,n}^{(s,\,s)}=\int\int_{(\Omega)} Y_{ns}^2\,d\omega=\frac{2\pi\delta_k}{2n+1}\,\frac{(n+k)!}{(n-k)!}, \tag{4.59}$$

где δ_k обозначает число, определяемое условиями

$$\delta_0=2,\quad \delta_k=1 \qquad (k>0).$$

Равенства (4.58) и (4.59) могут быть написаны также следующим образом:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n^{(k)}(\cos\theta)\,P_m^{(k)}(\cos\theta)\substack{\cos\\ \sin}(k\lambda)\substack{\cos\\ \sin}(\varkappa\lambda)\sin\theta\,d\theta\,d\lambda=0 \qquad (4.60)$$

и

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[P_n^{(k)}(\cos\theta)\cos k\lambda\right]^2\sin\theta\,d\theta\,d\lambda=\frac{2\pi\delta_k}{2n+1}\,\frac{(n+k)!}{(n-k)!}, \qquad (4.61)$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\left[P_n^{(k)}(\cos\theta)\sin k\lambda\right]^2\sin\theta\,d\theta\,d\lambda=\frac{2\pi\delta_k}{2n+1}\,\frac{(n+k)!}{(n-k)!}. \qquad (4.62)$$

Примечание. Обращаясь к общей сферической функции n-го порядка, определяемой формулой (4.9), заметим, что эта формула может быть написана также в виде

$$Y_n(\theta,\ \lambda)=\sum_{s=0}^{2n}a_{ns}Y_{ns}(\theta,\ \lambda),$$

где $a_{\;s}$ обозначают $2n+1$ постоянных коэффициентов.

Отсюда в силу равенства (4.58) немедленно выводим, что если $m\neq n$, то

$$\iint_{(\Omega)}Y_n(\theta,\ \lambda)\,Y_m(\theta,\ \lambda)\,d\omega=0,$$

откуда следует, что бесконечная последовательность сферических функций от двух переменных θ и λ

$$Y_0(\theta,\ \lambda),\quad Y_1(\theta,\ \lambda),\ \ldots,\ Y_n(\theta,\ \lambda),\ \ldots$$

образует на сфере единичного радиуса ортогональную систему функций.

Далее, при помощи равенства (4.59) найдем

$$\iint_{(\Omega)}Y_n^2(\theta,\ \lambda)\,d\omega=\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{s=0}^{2n}\delta_k a_{ns}^2\,\frac{(n+k)!}{(n-k)!},$$

где по-прежнему $k=s$, если $s\leqslant n$, и $k=s-n$, если $s\geqslant n+1$.

4. Свойство ортогональности сферических функций позволяет представить функцию, заданную на поверхности сферы, в виде ряда сферических функций, аналогичному ряду Фурье для функции одной переменной.

Действительно, пусть дана функция $f(\theta,\ \lambda)$, конечная, однозначная и непрерывная на всей поверхности сферы Ω единичного радиуса. Допустим, что эта функция может быть представлена в виде бесконечной суммы сферических функций вида

$$f(\theta, \lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{2n} a_{ns} Y_{ns}(\theta, \lambda). \tag{4.63}$$

Для определения коэффициентов этого разложения мы можем применить, благодаря свойству ортогональности, тот же самый прием, при помощи которого находятся коэффициенты ряда Фурье.

В самом деле, умножим обе части формулы (4.63) на Y_{ns} и результат проинтегрируем по всей сфере Ω. Имея в виду формулы (4.58) и (4.59), мы получим в результате

$$a_{ns}=\frac{2n+1}{2\pi\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\iint\limits_{(\Omega)} f(\theta, \lambda) Y_{ns}(\theta, \lambda)\, d\omega. \tag{4.64}$$

По этой формуле можно найти все коэффициенты разложения (4.63) и остается рассмотреть вопрос о сходимости полученного ряда.

Этот вопрос будет рассмотрен несколько далее.

§ 6. Формула сложения сферических функций

1. Выведем одну важную формулу, называемую формулой сложения сферических функций. Для этого заметим, что, как уже было показано, все элементарные сферические функции n-го порядка могут быть выражены через многочлен Лежандра $P_n(\nu)$, где $\nu=\cos\theta$, который является, таким образом, функцией угла, образованного радиусом-вектором точки сферы единичного радиуса $M(\theta, \lambda)$ с положительным направлением оси Oz

Пусть $M'(\theta', \lambda')$ есть заданная точка сферы Ω, а γ — угол между радиусами-векторами точек M и M'.

Мы имеем

$$\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda-\lambda'). \tag{4.65}$$

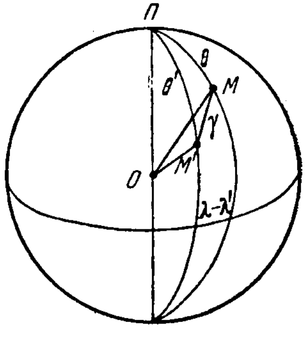


Рис. 25.

Преобразуем первоначальную систему координат таким образом, чтобы новая ось аппликат Oz' проходила через точку M' (рис. 25).

Тогда $P_n(\cos\gamma)$ есть основная сферическая функция в новой системе координат. Но эта функция является, конечно, сферической и в старой системе координат, а поэтому она должна выражаться через элементарные функции по формуле (4.9), т. е. мы должны иметь

$$P_n(\cos\gamma)=\sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\cos\theta)\,[A_{nk}\cos k\lambda+B_{nk}\sin k\lambda], \qquad (4.66)$$

где коэффициенты A_{nk} и B_{nk} являются постоянными относительно переменных θ и λ, но, разумеется, являются функциями от θ' и λ'. Так как $\cos\gamma$ симметрично относительно координат точек M и M', то и правая часть равенства (4.66) тоже должна быть симметричной относительно этих же координат, а отсюда следует, что коэффициенты A_{nk} и B_{nk} должны иметь вид

$$\left.\begin{matrix} A_{nk} \\ B_{nk} \end{matrix}\right\}=h_k P_n^{(k)}(\cos\theta')\,{}^{\cos}_{\sin}(k\lambda'),$$

где h_k — зависящие от n числовые коэффициенты.

Следовательно, формула (4.66) должна иметь вид

$$P_n(\cos\gamma)=\sum_{k=0}^{n} h_k P_n^{(k)}(\cos\theta)\,P_n^{(k)}(\cos\theta')\cos k(\lambda-\lambda'). \qquad (4.66')$$

Чтобы найти коэффициенты h_k, рассмотрим частный случай равенства (4.66), когда $\theta'=0$.

Полагая для сокращения

$$\cos\theta=\cos\theta'=\nu, \quad \lambda-\lambda'=\omega,$$

напишем равенство (4.66′) следующим образом:

$$P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]=\sum_{k=0}^{n} h_k\,[P_n^{(k)}(\nu)]^2\cos k\omega. \qquad (4.67)$$

С другой стороны, формула (4.31) дает следующее равенство:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha\,[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]+\alpha^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega].$$

Интегрируя обе части этого равенства по ν в пределах от -1 до $+1$, имеем

$$\frac{2}{\sqrt{2\alpha(1-\cos\omega)}}\arcsin\sqrt{\frac{2\alpha(1-\cos\omega)}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\int_{-1}^{+1}P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]\,d\nu$$

или

$$\sqrt{\frac{2}{1-\cos\omega}}\arcsin\sqrt{\frac{2\alpha(1-\cos\omega)}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^{n+\frac{1}{2}}\int_{-1}^{+1}P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]\,d\nu.$$

Дифференцируя полученное равенство, которое является тождеством, по α, мы получим после упрощения

$$\frac{1+\alpha}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2}\alpha^n\int_{-1}^{+1}P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]\,d\nu. \quad (4.68)$$

Разложим левую часть равенства (4.68) тоже по степеням величины α. Для этого заметим, что, как легко проверить *),

$$\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}=\frac{1}{1-\alpha e^{i\omega}}+\frac{1}{1-\alpha e^{-i\omega}}-1,$$

а поэтому мы будем иметь

$$\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}=-1+\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(e^{ni\omega}+e^{-ni\omega})=$$

$$=-1+2\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n\cos n\omega=1+2\alpha\cos\omega+2\alpha^2\cos 2\omega+\ldots$$

Теперь находим

$$\frac{1+\alpha}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}=\frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1-\alpha^2}{1-2\alpha\cos\omega+\alpha^2}=$$

$$=(1+\alpha+\alpha^2+\ldots)(1+2\alpha\cos\omega+2\alpha^2\cos 2\omega+\ldots)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^n(1+2\cos\omega+2\cos 2\omega+\ldots+2\cos n\omega).$$

Сравнение этого равенства с равенством (4.68) дает

$$\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]\,d\nu=1+2\cos\omega+\ldots+2\cos n\omega$$

---

*) Для этого нужно воспользоваться формулой Эйлера $2\cos\omega=e^{i\omega}+\bar{e}^{i\omega}$ и разложить затем дробь на сумму элементарных слагаемых.

или

$$\int_{-1}^{+1} P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]\,d\nu=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{\delta_k}\cos k\omega. \qquad (4.69)$$

Возвращаясь теперь к равенству (4.67), проинтегрируем обе его части по ν в пределах от -1 до $+1$, что дает

$$\int_{-1}^{+1} P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]\,d\nu=\sum_{k=0}^{n} h_k\cos k\omega\int_{-1}^{+1}[P_n^{(k)}(\nu)]^2\,d\nu.$$

Отсюда с помощью формулы (4.56) получаем

$$\int_{-1}^{+1} P_n[\nu^2+(1-\nu^2)\cos\omega]\,d\nu=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{n} h_k\frac{(n+k)!}{(n-k)!}\cos k\omega. \qquad (4.69')$$

Приравнивая теперь правые части равенств (4.69) и (4.69′), а затем сравнивая коэффициенты при $\cos k\omega$ в левой и правой частях получившегося равенства, мы найдем

$$h_k=\frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!},$$

где, как и раньше, $\delta_0=2$, $\delta_1=\delta_2=\ldots=1$.

Заменяя, наконец, в формуле (4.66′) коэффициенты h_k полученными их выражениями, имеем окончательно

$$P_n(\cos\gamma)=P_n(\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos\omega)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}P_n^{(k)}(\cos\theta)\,P_n^{(k)}(\cos\theta')\cos k\omega, \qquad (4.70)$$

что и есть искомая формула сложения для сферических функций.

2. Заметим, между прочим, что из формулы сложения (4.70) можно получить еще одну формулу для многочлена Лежандра. Действительно, положим в формуле (4.70) $\theta=\theta'=\frac{\pi}{2}$, что дает

$$P_n(\cos\omega)=\sum_{k=0}^{n}\frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}[P_n^{(k)}(0)]^2\cos k\omega.$$

Но формулы (4.26), (4.29) и (4.30) дают нам следующее выражение для присоединенной функции Лежандра:

$$P_n^{(k)}(\nu)=(1-\nu^2)^{\frac{k}{2}}\sum_{s=0}^{E\left(\frac{n-k}{2}\right)}P_{ns}^{(k)}\nu^{n-2s-k},$$

где коэффициенты определяются формулой

$$P_{ns}^{(k)}=(-1)^s\frac{(2n-2s)!}{2^n s!\,(n-s)!\,(n-2s-k)!}$$

Из формулы для $P_n^{(s)}(\nu)$ непосредственно усматриваем, что $P_n^{(k)}(0)$ равно нулю, если $n-k$ есть число нечетное. Если же $n-k$ есть число четное, то, полагая $n-k=2k'$, будем иметь

$$P_n^{(k)}(0)=(-1)^{k'}\frac{(n+k)!}{2^n k'!\,(n-k')!}.$$

Используя это равенство, можно представить выражение для $P_n(\cos\omega)$ в следующем виде:

$$P_n(\cos\omega)=\sum_{k=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)}\overline{P}_{nk}\cos(n-2k)\,\omega, \tag{4.71}$$

где коэффициенты определяются формулой

$$\overline{P}_{nk}=\frac{2}{\delta_{n-2k}}\,\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!}. \tag{4.71'}$$

Например, формулы (4.71) и (4.71') дают

$$P_2(\cos\omega)=\frac{1}{4}(3\cos 2\omega+1),$$

$$P_3(\cos\omega)=\frac{1}{8}(5\cos 3\omega+3\cos\omega),$$

$$P_4(\cos\omega)=\frac{1}{64}(35\cos 4\omega+20\cos 2\omega+9),$$

$$P_5(\cos\omega)=\frac{1}{128}(63\cos 5\omega+35\cos 3\omega+30\cos\omega),$$

$$P_6(\cos\omega)=\frac{1}{512}(231\cos 6\omega+126\cos 4\omega+105\cos 2\omega+50),$$

$$P_7(\cos\omega)=\frac{1}{1024}(429\cos 7\omega+231\cos 5\omega+189\cos 3\omega+175\cos\omega).$$

§ 7. Разложение по сферическим функциям

1. Перейдем теперь к разложению функции, заданной на поверхности сферы Ω единичного радиуса, в ряд по сферическим функциям.

Пусть нам дана функция $f(\theta,\lambda)$ от двух независимых переменных — сферических координат θ и λ произвольной точки M сферы Ω.

Предположим, что в каждой точке M сферы Ω эта функция конечна, однозначна и непрерывна, и покажем, что ее можно представить рядом вида

$$f(\theta,\ \lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\theta,\ \lambda), \tag{4.72}$$

где $Y_n(\theta,\ \lambda)$ — сферическая функция n-го порядка

$$Y_n(\theta,\ \lambda)=\sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\cos\theta)\,[A_{nk}\cos k\lambda+B_{nk}\sin k\lambda], \tag{4.73}$$

коэффициенты которой полностью определяются функцией $f(\theta,\lambda)$.

Мы уже отметили в конце § 5, что эти коэффициенты определяются при помощи свойства ортогональности однозначно, так что всегда можно составить ряд (4.72) и нам остается только рассмотреть вопрос о его сходимости.

В этом параграфе мы составим более удобные формулы для определения коэффициентов ряда и дадим доказательство его сходимости.

Подставляя выражения (4.73) для Y_n в формулу (4.72), мы имеем

$$f(\theta,\ \lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\ \sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\cos\theta)\,[A_{nk}\cos k\lambda+B_{nk}\sin k\lambda]. \tag{4.74}$$

Для определения коэффициентов этого разложения применим, как уже было отмечено выше, тот же прием, который используется и при определении коэффициентов обыкновенного ряда Фурье.

Заменим в формуле (4.74) координаты точки M, которую будем считать фиксированной, на координаты θ' и λ' текущей точки M', затем помножим обе части полученного равенства на элементарную сферическую функцию

$$P_n^{(k)}(\cos\theta')\cos k\lambda' \quad \text{или} \quad P_n^{(k)}(\cos\theta')\sin k\lambda',$$

и результат проинтегрируем по всей поверхности сферы Ω.

Тогда, используя формулы (4.60) — (4.62), выражающие свойство ортогональности сферических функций, мы получим

$$\left.\begin{aligned} A_{nk}&=\frac{2n+1}{2\pi\delta_k}\,\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta',\ \lambda')\,P_n^{(k)}(\cos\theta')\cos k\lambda'\sin\theta'\,d\theta'\,d\lambda', \\ B_{nk}&=\frac{2n+1}{2\pi\delta_k}\,\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta',\ \lambda')\,P_n^{(k)}(\cos\theta')\sin k\lambda'\sin\theta'\,d\theta'\,d\lambda'. \end{aligned}\right\} \tag{4.75}$$

Эти формулы показывают, что если ряд (4.74) сходится равномерно, то это разложение единственно. Коэффициенты A_{nk} и B_{nk}, вполне определяемые заданием функции $f(\theta, \lambda)$, можно назвать коэффициентами Фурье для этой функции.

Переходим теперь к доказательству сходимости ряда (4.74), коэффициенты которого определяются формулами (4.75).

Положим для этого

$$S_m(\theta, \lambda)=\sum_{n=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\cos \theta)\left[A_{nk} \cos k\lambda+B_{nk} \sin k\lambda\right]. \qquad (4.76)$$

Подставляя сюда вместо A_{nk} и B_{nk} их выражения, определяемые формулами (4.75), и используя формулу сложения (4.70), мы можем написать

$$S_m(\theta, \lambda)=\sum_{n=0}^{m} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta', \lambda') P_n(\cos \gamma) \sin \theta' \, d\theta' \, d\lambda'$$

или

$$S_m(\theta, \lambda)=\sum_{n=0}^{m} \frac{2n+1}{4\pi} \int\int_{(\Omega)} f(M') P_n(\cos \gamma') \, d\omega', \qquad (4.77)$$

где $d\omega'$ — элемент поверхности сферы Ω.

Введем для упрощения новую систему координат, в которой за ось аппликат принято направление $\overrightarrow{OM}$ (см. рис. 25). Тогда одна из новых координат точки M' есть γ, а новую долготу обозначим через φ, так что будем иметь $d\omega'=\sin\gamma \, d\gamma \, d\varphi$.

Теперь формула (4.77) напишется в виде

$$S_m(\theta, \lambda)=\sum_{n=0}^{m} \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{\pi} P_n(\cos \gamma) \sin \gamma \, d\gamma \int_0^{2\pi} f(M') \, d\varphi.$$

Введем новую функцию, которая представляет собой среднее значение функции $f(M')$ на различных параллелях в новой системе, полагая

$$\Phi(\gamma)=\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(M') \, d\varphi. \qquad (4.78)$$

Тогда

$$S_m(\theta, \lambda)=\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{m}(2n+1) \int_0^{\pi} \Phi(\gamma) P_n(\cos \gamma) \sin \gamma \, d\gamma. \qquad (4.79)$$

Введем в этой формуле новую переменную интегрирования x, полагая $x=\cos\gamma$ и положим еще *)

$$\Phi(\gamma)=\Phi(\arccos x)=\Psi(x).$$

Тогда формула (4.79) примет вид

$$S_m(0,\lambda)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\Psi(x)\left[\sum_{n=0}^{m}(2n+1)P_n(x)\right]dx.$$

Применяя здесь рекуррентную формулу (4.41), имеем

$$S_m(\theta,\lambda)=\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\left[P'_{m+1}(x)+P'_m(x)\right]\Psi(x)\,dx. \tag{4.80}$$

Так как, по условию, функция $f(M')$ непрерывна на сфере, то функция $\Psi(x)$ имеет в промежутке $-1\leqslant x\leqslant+1$ непрерывную производную. Поэтому мы можем применить в формуле (4.80) правило интегрирования по частям, что дает

$$S_m(\theta,\lambda)=\frac{1}{2}\left\{\left[P_{m+1}(x)+P_m(x)\right]\Psi(x)\right\}_{-1}^{+1}-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\left[P_{m+1}(x)+P_m(x)\right]\Psi'(x)\,dx.$$

Но, как мы нашли в § 4,

$$P_{m+1}(+1)=P_m(+1)=1,\quad P_m(-1)=-P_{m+1}(-1)=(-1)^m,$$

вследствие чего получаем

$$S_m(0,\lambda)=\Psi(+1)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\left[P_{m+1}(x)+P_m(x)\right]\Psi'(x)\,dx, \tag{4.81}$$

или, так как

$$\Psi(+1)=\Phi(0)=f(M)=f(\theta,\lambda),$$

то

$$S_m(\theta,\lambda)=f(\theta,\lambda)-\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1}\left[P_{m+1}(x)+P_m(x)\right]\Psi'(x)\,dx. \tag{4.82}$$

Теперь докажем, что интеграл, входящий в формулу (4.82), стремится к нулю при $m\to\infty$. Пусть A есть наибольшая величина абсолютного значения непрерывной функции $\Psi'(x)$ в промежутке $(-1,+1)$. Тогда

$$\left|\int_{-1}^{+1}\left[P_{m+1}(x)+P_m(x)\right]\Psi'(x)\,dx\right|\leqslant A\int_{-1}^{+1}\left\{\left|P_{m+1}(x)\right|+\left|P_m(x)\right|\right\}dx.$$

---

*) При $\gamma=0$, $x=+1$ и при $\gamma=\pi$, $x=-1$. Кроме того, $dx=-\sin\gamma\,d\gamma$.

Применяя неравенство Шварца *), мы имеем

$$\left\{\int_{-1}^{+1}|P_m(x)|\,dx\right\}^2 \leqslant \int_{-1}^{+1} P_m^2(x)\,dx \int_{-1}^{+1} 1^2\,dx = 2\int_{-1}^{+1} P_m^2(x)\,dx$$

или в силу формулы (4.50)

$$\int_{-1}^{+1} |P_m(x)|\,dx \leqslant \frac{2}{\sqrt{2m+1}},$$

откуда следует, что

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-1}^{+1} |P_m(x)|\,dx = 0,$$

а следовательно,

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-1}^{+1} [P_{m+1}(x)+P_m(x)]\,\Psi'(x)\,dx = 0.$$

Поэтому равенство (4.82) дает в пределе

$$\lim_{m\to\infty} S_m(\theta,\ \lambda) = f(\theta,\ \lambda), \tag{4.83}$$

что и доказывает равномерную на всей сфере Ω сходимость ряда (4.72) к заданной функции $f(\theta,\ \lambda)$.

Заметим, что доказанная теорема о разложимости произвольной функции, заданной на сфере единичного радиуса и удовлетворяющей только некоторым условиям достаточно общего вида, в ряд по сферическим функциям показывает также, что *сферические функции образуют полную систему ортогональных на сфере единичного радиуса функций*.

Это важное предложение было доказано впервые А. М. Ляпуновым **).

2. Рассмотрим один важный частный случай, когда заданная функция зависит только от угла θ. Тогда формулы (4.75) дают

$$A_{nk} = B_{nk} = 0 \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

и

$$A_{n0} = a_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(\theta')\,P_n(\cos\theta')\sin\theta'\,d\theta'. \tag{4.84}$$

---

*) См., например, Э. Гурса, Курс математического анализа, т. 3, или В. И. Смирнов, Курс высшей математики. Формула Шварца имеет вид

$$\left\{\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx\right\}^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b \varphi^2(x)\,dx.$$

**) См. А. М. Ляпунов, Собрание сочинений, т. 4, изд. АН СССР, 1959.

Разложение (4.74) примет для этого случая вид

$$f(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos\theta). \tag{4.85}$$

Если заменить здесь многочлены Лежандра их тригонометрическими выражениями (4.71), то получим разложение функции $f(\theta)$ в ряд тригонометрических многочленов. Если окажется, что полученный ряд сходится абсолютно, то члены его можно переставлять как угодно и, в частности, их можно расположить так, что формула (4.85) примет вид

$$f(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \cos n\theta, \tag{4.85$'$}$$

и мы получим разложение нашей функции в ряд Фурье.

Если же рассматривать функцию $f(\theta)$ как функцию от косинуса θ, то, полагая $\cos\theta=x$, напишем разложение (4.85) в следующем виде:

$$f(\arccos x)=\psi(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \tag{4.85$''$}$$

а формулы для коэффициентов a_n приведутся к виду

$$a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1}\psi(x)P_n(x)\,dx. \tag{4.84$'$}$$

Таким образом, получаем разложение функции $\psi(x)$, заданной в промежутке $-1\leqslant x\leqslant +1$ в ряд по многочленам Лежандра.

Если функция $\psi(x)$ есть многочлен, то и ряд (4.85″) должен приводиться к многочлену и все коэффициенты, порядок которых выше степени многочлена, должны быть равны нулю.

Пусть m — степень многочлена $T_m(x)$. Тогда

$$\int_{-1}^{+1} T_m(x)P_n(x)\,dx=0 \tag{4.86}$$

для всякого $m<n$. Если, наконец, $T_m(x)=x^m$, то

$$\int_{-1}^{+1} x^m P_n(x)\,dx=0 \qquad (n>m). \tag{4.86$'$}$$

§ 8. Классификация сферических функций

1. Соотношение (4.86) позволяет показать, что все корни многочлена Лежандра вещественны и принадлежат промежутку $(-1, +1)$. Действительно, допустим, что уравнение

$$P_n(x)=0 \tag{4.87}$$

имеет несколько пар комплексных сопряженных корней и предположим, сверх того, что среди вещественных корней этого уравнения одна их часть принадлежит промежутку $(-1, +1)$, а другая лежит вне этого промежутка.

Тогда многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде произведения трех множителей *):

$$P_n(x) = P'_n(x)\,P''_n(x)\,P'''_n(x), \qquad (4.87')$$

причем первый множитель имеет только комплексные корни многочлена $P_n(x)$, второй множитель $P''_n(x)$ обладает лишь теми вещественными корнями многочлена $P_n(x)$, которые лежат вне отрезка $(-1, +1)$; наконец, третий множитель $P'''_n(x)$ обладает лишь теми вещественными корнями многочлена $P_n(x)$, которые находятся в промежутке $(-1, +1)$. Благодаря такому значению многочленов $P'_n(x)$ и $P''_n(x)$ произведение $P'_nP''_n$ не обращается в нуль ни при каком значении x, лежащем внутри промежутка $(-1, +1)$, и, следовательно, сохраняет один и тот же знак внутри этого промежутка.

Кроме того, если наше предположение о корнях многочлена Лежандра $P_n(x)$ справедливо, то степень многочлена $P'''_n(x)$ заведомо будет меньше, чем n, а поэтому согласно равенству (4.86) мы должны иметь

$$\int\limits_{-1}^{+1} P'''_n(x)\,P_n(x)\,dx = 0,$$

или, заменяя $P_n(x)$ произведением трех множителей,

$$\int\limits_{-1}^{+1} P'_n(x)\,P''_n(x)\,[P'''_n(x)]^2\,dx = 0.$$

Но это равенство содержит в себе противоречие, так как подинтегральная функция сохраняет свой знак при всех значениях x в промежутке $(-1, +1)$, т. е. в пределах интегрирования.

Следовательно, сделанное предположение о корнях многочлена $P_n(x)$ неправильно, а поэтому проведенное рассуждение доказывает, что многочлен Лежандра имеет только вещественные корни и что все эти корни лежат в промежутке от -1 до $+1$.

Вспоминая затем, что при четном n многочлен Лежандра содержит только четные степени x, заключаем, что в этом

---

*) «Штрихи» здесь не обозначают дифференцирование.

случае каждому положительному корню соответствует равный ему по числовому значению отрицательный корень и все n корней распадаются на $n/2$ пар, симметричных относительно нуля.

Если n нечетное, то многочлен Лежандра содержит только нечетные степени x и может быть представлен в виде произведения x на многочлен $(n-1)$-й степени, содержащий только четные степени. Поэтому в случае нечетного n многочлен Лежандра имеет один корень равный нулю, а остальные $n-1$ корней распределяются на $(n-1)/2$ пар, симметричных относительно нуля.

Рассмотрим теперь присоединенную функцию Лежандра

$$P_n^{(k)}(x)=(1-x^2)^{\frac{k}{2}}\frac{d^kP_n(x)}{dx^k}.$$

Нетрудно видеть, применяя теорему Ролля, что все корни многочлена $(n-k)$-й степени, получаемого k-кратным дифференцированием многочлена Лежандра $P_n(x)$, вещественны и лежат внутри промежутка $(-1, +1)$, располагаясь симметрично относительно нуля.

Так как $(1-x^2)^{\frac{k}{2}}$ обращается в нуль только при $x \pm 1$, то присоединенная функция Лежандра обращается в нуль при $x=-1$, $x=+1$ и, кроме того, $n-k$ раз внутри промежутка от -1 до $+1$.

2. Обратимся теперь к распределению элементарных сферических функций на классы, т. е. проведем их классификацию.

Сферическая функция $Y_{n0}=P_n$ обращается в нуль при n неравных вещественных значениях $\cos\theta$, симметричных по отношению к нулю; этим значениям корней соответствуют n значений дополнения до широты θ, симметричных по отношению к экватору сферы $\left(\theta=\frac{\pi}{2},\ \cos\theta=0\right)$. Иными словами, функция Y_{n0} обращается в нуль на n параллелях сферы, симметрично расположенных относительно экватора. Этими параллелями вся поверхность сферы разбивается на $n+1$ сферических поясов, или зон, где функция Y_{n0} попеременно получает положительные и отрицательные значения. По этой причине функции $Y_{n0}(\cos\theta)$, т. е. многочлены Лежандра, называются зональными сферическими функциями (или зональными гармониками) (см. рис. 26 для $n=4$).

Рассмотрим теперь две сферические функции

$$Y_{nn}=P_n^{(n)}(\cos\theta)\cdot\cos n\lambda,$$

$$Y_{n,\,2n}=P_n^{(n)}(\cos\theta)\cdot\sin n\lambda.$$

Так как производная n-го порядка от многочлена n-й степени есть число постоянное, то каждая из этих двух функций обращается в нуль только на меридианах сферы, долготы которых находятся соответственно из уравнений $\cos n\lambda=0$, $\sin n\lambda=0$.

Эти меридианы разбивают всю поверхность сферы на $2n$ сферических секторов (двуугольников), внутри которых функции Y_{nn} и $Y_{n,2n}$ принимают попеременно положительные и отрицательные значения. Эти две функции называются по этой причине **секториальными сферическими функциями** (или секториальными гармониками) (рис. 26).

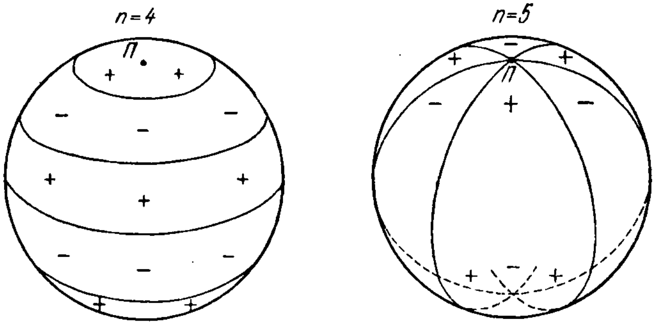


Рис. 26.

Обратимся теперь к оставшимся сферическим функциям в числе $2n-2$:

$$Y_{n,1}=P_n^{(1)}(\cos\theta)\cos\lambda,\ \dots,\ Y_{n,n-1}=P_n^{(n-1)}(\cos\theta)\cos(n-1)\lambda,$$
$$Y_{n,n+1}=P_n^{(1)}(\cos\theta)\sin\lambda,\ \dots,\ Y_{n,2n-1}=P_n^{(n-1)}(\cos\theta)\sin(n-1)\lambda,$$

и рассмотрим какую-нибудь из них. Многочлен $\frac{d^kP_k}{d\nu^k}$ имеет, как уже было отмечено, $n-k$ вещественных корней, расположенных симметрично относительно нуля; этим корням соответствуют $n-k$ значений полярного расстояния θ, распределенных симметрично относительно экватора сферы. Ими определяются $n-k$ параллелей, которыми вся сфера делится на $n-k+1$ зон; затем каждый из множителей $\cos k\lambda$ или $\sin k\lambda$ обращается в нуль для $2k$ значений долготы λ, т. е. на $2k$ меридианах, отстоящих друг от друга на π/k.

Этой сеткой меридианов и параллелей вся сфера делится на сферические четырехугольники (кроме полярных областей, где образуются треугольники); в каждых двух прилежащих четырехугольниках рассматриваемые функции попеременно положительны и отрицательны. Поэтому эти сферические функции называются тессеральными сферическими функциями (или тессеральными гармониками*)) (см. рис. 27, на котором изображено деление сферы, соответствующее функции $Y_{11,6}$).

Таким образом, в системе $2n+1$ основных (или элементарных) сферических функций n-го порядка имеется одна зональная, две секториальные и $2n-2$ тессеральных.

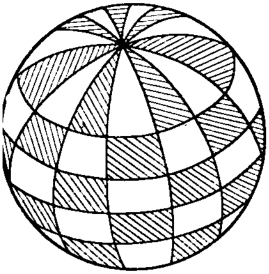


Рис. 27.

Все эти функции суть функции колеблющиеся (осциллирующие) на единичной сфере, подобно тому как $\cos k\lambda$ и $\sin k\lambda$ суть функции, колеблющиеся на окружности единичного радиуса.

Повышая порядок сферических функций, мы как бы облекаем сферу Ω правильной системой постепенно уменьшающихся участков, на границе которых происходит перемена знака сферических функций.

Таким образом, задача о разложении заданной на сфере Ω функции $f(\theta, \lambda)$ в ряд сферических функций есть задача о наилучшем приближении к заданной совокупности ее значений на сфере путем комбинации осциллирующих функций. А это, по существу самого метода, совершенно соответствует задаче о разложении функции одной переменной в тригонометрический ряд Фурье.

§ 9. Формула Лежандра

1. Мы закончим очерк теории сферических функций **) выводом одной интересной формулы, принадлежащей Лежандру, которая найдет свое применение в следующей главе.

Рассмотрим сначала интеграл

$$F_n(k) = \int_{-1}^{+1} x^k P_n(x)\,dx, \tag{4.88}$$

где k обозначает целое положительное число.

Непосредственно очевидно, что при любом k, для которого $n+k$ есть число нечетное***), интеграл (4.88) равен нулю.

---

*) Название «тессеральные» эти функции получили от греческого слова «тессера», что означает «четыре». В итальянском языке слово tessera означает «плиточка».

**) Более подробное изложение теории сферических функций можно найти в трактате Тиссерана или в обширной монографии Гобсона (см. список литературы).

***) Действительно, если $n+k$ — число нечетное, то интеграл распадается на сумму интегралов от одночленов нечетной степени.

В конце § 7 (см. формулу (4.86′)) было показано, что этот интеграл равен нулю также при всяком $k<n$.

Рассмотрим теперь интеграл (4.88), когда $k \geqslant n$ и сумма $n+k$ есть число четное. Вычислим сначала $F_{2n}(2k)$ при $k \geqslant n$. Используя формулу (4.29), имеем

$$F_{2n}(2k)=\int_{-1}^{+1} x^{2k}P_{2n}(x)\,dx=2\int_{0}^{1} x^{2k}P_{2n}(x)\,dx=2\sum_{s=0}^{n}\frac{P_{2n,\,s}}{2n+2k-2s+1},$$

а приводя здесь все дроби к одному знаменателю, получим *)

$$F_{2n}(2k)=\frac{2\Phi_{2n}(2k)}{\prod\limits_{s=0}^{n}(2n+2k-2s+1)},$$

где $\Phi_{2n}(2k)$ есть некоторый многочлен относительно величины $(2k)$ степени n. Этот многочлен легко вычислить. Действительно, так как $F_{2n}(2k)$, как было показано, равно нулю при $2k<2n$, то

$$0,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 2n-4,\ 2n-2$$

суть корни многочлена $\Phi_{2n}(2k)$, а следовательно,

$$\Phi_{2n}(2k)=A_{2n}\prod_{s=0}^{n-1}(2k-2s).$$

Но коэффициент при высшей степени $(2k)$ в многочлене $\Phi_{2n}(2k)$, очевидно, равен

$$A_{2n}=\sum_{s=0}^{n}P_{2n,\,s}=P_{2n}(1)=1,$$

и мы имеем окончательно для $k \geqslant n$:

$$F_{2n}(2k)=\int_{-1}^{+1} x^{2k}P_{2n}(x)\,dx=\frac{2\prod\limits_{s=0}^{n-1}(2k-2s)}{\prod\limits_{s=0}^{n}(2n+2k-2s+1)}. \qquad (4.88')$$

Также найдем

$$F_{2n+1}(2k+1)=\int_{-1}^{+1} x^{2k+1}P_{2n+1}(x)\,dx=\frac{2\prod\limits_{s=0}^{n-1}(2k-2s-1)}{\prod\limits_{s=0}^{n}(2n+2k-2s+2)}. \qquad (4.88'')$$

---

*) Знак $\prod\limits_{s=0}^{n}$ обозначает произведение $n+1$ множителей.

2. Вычислим теперь интеграл

$$I_n(p)=\int_{-1}^{+1}\frac{P_{2n}(x)\,dx}{(1+px^2)^{n+\frac{3}{2}}}, \tag{4.89}$$

где p есть любое число, удовлетворяющее условию

$$-1<p<+1.$$

Вычисление интеграла производится совершенно элементарно. Действительно, по теореме Ньютона имеем разложение

$$(1+px^2)^{-n-\frac{3}{2}}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(n+\frac{3}{2}\right)\ldots\left(n+\frac{3}{2}+r-1\right)}{r!}(-p)^r x^{2r},$$

равномерно сходящееся в промежутке $-1\leqslant x\leqslant +1$.

Умножая обе части последнего равенства на $P_{2n}(x)$ и интегрируя почленно, мы получим

$$I_n(p)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(n+\frac{3}{2}\right)\ldots\left(n+\frac{3}{2}+r-1\right)}{r!}(-p)^r\int_{-1}^{+1}x^{2r}P_{2n}(x)\,dx.$$

Все интегралы, для которых $r<n$, в силу доказанного выше равны нулю, а поэтому предыдущую формулу можно переписать в следующем виде $(r=n+s)$:

$$I_n(p)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(n+\frac{3}{2}\right)\ldots\left(n+\frac{3}{2}+n+s-1\right)}{(n+s)!}(-p)^{n+s}F_{2n}(2n+2s).$$

Но, согласно (4.88′), мы имеем

$$F_{2n}(2n+2s)=\frac{2\prod\limits_{r=0}^{n-1}(2n+2s-2r)}{\prod\limits_{r=0}^{n}(4n+2s-2r+1)},$$

поэтому получаем

$$I_n(p)=\frac{2(-p)^n}{2n+1}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(n+\frac{1}{2}+s-1\right)}{s!}(-p)^s.$$

Но, опять по теореме Ньютона, мы можем написать

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(n+\frac{1}{2}+s-1\right)}{s!}(-p)^s=(1+p)^{-n-\frac{1}{2}},$$

а следовательно,

$$I_n(p) = \int_{-1}^{+1} \frac{P_{2n}(x)\,dx}{(1+px^2)^{n+\frac{3}{2}}} = \frac{2}{2n+1}\,\frac{(-p)^n}{(1+p)^{n+\frac{1}{2}}}. \tag{4.90}$$

Это и есть формула Лежандра.

§ 10. Уравнение Ламе. Эллипсоидальные функции

1. Рассмотрим опять эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{E}$$

при условии, что

$$c \leqslant b \leqslant a;$$

будем его называть основным эллипсоидом.

Мы знаем (см. § 4 гл. III), что через всякую точку пространства $P(x, y, z)$ *) проходят три взаимно ортогональные поверхности второго порядка, софокусные с (E), соответствующие трем вещественным корням уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\theta} + \frac{y^2}{b^2+\theta} + \frac{z^2}{c^2+\theta} = 1, \tag{E_θ}$$

где буквой θ обозначен параметр этого семейства.

Изменяя для удобства обозначения гл. III, назовем эти три корня буквами λ, μ, ν, располагая их нижеследующим порядком:

$$-a^2 \leqslant \nu \leqslant -b^2 \leqslant \mu \leqslant -c^2 \leqslant \lambda < \infty. \tag{4.91}$$

Таким образом, параметр λ соответствует эллипсоиду, параметр μ — однополостному гиперболоиду и параметр ν — двуполостному гиперболоиду.

Поэтому уравнения этих трех поверхностей напишутся соответственно в виде

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} + \frac{z^2}{c^2+\lambda} = 1, \tag{E_λ}$$

$$\frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2}{b^2+\mu} + \frac{z^2}{c^2+\mu} = 1, \tag{E_μ}$$

$$\frac{x^2}{a^2+\nu} + \frac{y^2}{b^2+\nu} + \frac{z^2}{c^2+\nu} = 1. \tag{E_ν}$$

Как уже было отмечено в § 4 гл. III, эти три числа, однозначно соответствующие точке $P(x, y, z)$, называются эллипсоидальными координатами точки P и являются частным случаем общих криволинейных координат Ламе, рассмотренных в § 1 гл. III.

---

*) Мы обозначаем здесь координаты точки, лежащей на (E), и координаты любой точки пространства одними и теми же буквами. Из текста каждый раз ясно, о каких именно точках идет речь.

Решая уравнения (E_λ), (E_μ) и (E_ν) относительно квадратов координат точки P, мы получим формулы, уже приведенные ранее в других обозначениях, выражающие прямоугольные декартовы координаты через эллипсоидальные:

$$\left.\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2+\lambda)(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \\ y^2 &= \frac{(b^2+\lambda)(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}, \\ z^2 &= \frac{(c^2+\lambda)(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}. \end{aligned}\right\} \tag{4.92}$$

Координаты μ и ν изменяются, согласно (4.91), в ограниченных пределах, но координата λ растет неограниченно, когда точка P удаляется в бесконечность и, таким образом, характеризует удаленность точки P от начала координат, а также от основного эллипсоида E. Нетрудно выразить радиус-вектор r точки P через эллипсоидальные координаты. Действительно, напишем уравнение (E_θ) в приведенном виде

$$(b^2+\theta)(c^2+\theta)x^2+(a^2+\theta)(c^2+\theta)y^2+(a^2+\theta)(b^2+\theta)z^2= \\ =(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta) \qquad (E'_\theta)$$

и применим теорему Виета, что даст

$$x^2+y^2+z^2=r^2=a^2+b^2+c^2+\lambda+\mu+\nu, \tag{4.93}$$

откуда, между прочим, получим опять (см. § 8 гл. III)

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r^2}{\lambda}=1.$$

Отметим еще, что $\lambda=0$ соответствует основному эллипсоиду (E); поэтому, полагая в (4.93) $\lambda=0$, мы получим радиус-вектор точки, лежащей на (E). Обозначая его через r_E, имеем

$$r_E^2=a^2+b^2+c^2+\mu+\nu,$$

вследствие чего формула (4.93) примет вид

$$r^2=r_E^2+\lambda, \tag{4.93'}$$

так что μ и ν суть координаты точки, лежащей на основном эллипсоиде (E).

Вместо криволинейных координат μ и ν точки, лежащей на (E), можно ввести другие, более простые и привычные величины. Для этого положим

$$\left.\begin{aligned} x &= \sqrt{a^2+\lambda}\sin\varphi\cos\psi, \\ y &= \sqrt{b^2+\lambda}\sin\varphi\sin\psi, \\ z &= \sqrt{c^2+\lambda}\cos\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{4.94}$$

где $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ и $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$ суть обычные, сферические координаты точки единичной сферы, имеющей общий центр с (E).

2. Перейдем к определению эллипсоидальных функций. Для этого отметим, что сферические функции мы определили как некоторые частные решения уравнения Лапласа, написанного в полярных сферических координатах.

Совершенно таким же образом можно определить и эллипсоидальные функции.

Составим уравнение Лапласа в эллипсоидальных координатах, связанных с прямоугольными декартовыми координатами формулами (4.92). Воспользовавшись формулой для оператора Лапласа (3.10) гл. III, мы сейчас же напишем (меняя обозначения) уравнение Лапласа в эллипсоидальных координатах:

$$(\mu-\nu) R(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda}\left[R(\lambda) \frac{\partial V}{\partial \lambda}\right]+(\nu-\lambda) R(\mu) \frac{\partial}{\partial \mu}\left[R(\mu) \frac{\partial V}{\partial \mu}\right]+ \\ +(\lambda-\mu) R(\nu) \frac{\partial}{\partial \nu}\left[R(\nu) \frac{\partial V}{\partial \nu}\right]=0, \qquad (4.95)$$

где, как и в гл. III,

$$R(\theta)=\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)} \qquad (\theta=\lambda,\ \mu,\ \nu).$$

Будем теперь искать решения уравнения (4.95) в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одной из эллипсоидальных координат, т. е. положим

$$V=\Lambda(\lambda) \mathrm{M}(\mu) \mathrm{N}(\nu). \qquad (4.96)$$

Подставляя это значение V в уравнение (4.95), имеем

$$\frac{\mu-\nu}{\Lambda} R(\lambda) \frac{d}{d \lambda}\left[R(\lambda) \frac{d \Lambda}{d \lambda}\right]+\frac{\nu-\lambda}{\mathrm{M}} R(\mu) \frac{d}{d \mu}\left[R(\mu) \frac{d \mathrm{M}}{d \mu}\right]+ \\ +\frac{\lambda-\mu}{\mathrm{N}} R(\nu) \frac{d}{d \nu}\left[R(\nu) \frac{d \mathrm{N}}{d \nu}\right]=0. \qquad (4.95')$$

Равенство (4.95′) будет удовлетворено, если мы положим

$$\left.\begin{aligned} 4 \frac{R(\lambda)}{\Lambda} \frac{d}{d \lambda}\left[R(\lambda) \frac{d \Lambda}{d \lambda}\right] & =K \lambda+C, \\ 4 \frac{R(\mu)}{\mathrm{M}} \frac{d}{d \mu}\left[R(\mu) \frac{d \mathrm{M}}{d \mu}\right] & =K \mu+C, \\ 4 \frac{R(\nu)}{\mathrm{N}} \frac{d}{d \nu}\left[R(\nu) \frac{d \mathrm{N}}{d \nu}\right] & =K \nu+C, \end{aligned}\right\} \qquad (4.95'')$$

где K и C — какие угодно постоянные.

Таким образом, каждый из трех множителей в формуле (4.96) определяется одним и тем же уравнением, но с различными обозначениями неизвестной функции и независимой переменной.

Полагая теперь

$$K=n(n+1),$$

где n — целое положительное число, и обозначая переменные стандартным образом буквами x и y, мы напишем уравнение, определяющее каждый из множителей (4.96), в виде

$$4\sqrt{(a^2+x)(b^2+x)(c^2+x)}\,\frac{d}{dx}\left[\sqrt{(a^2+x)(b^2+x)(c^2+x)}\,\frac{dy}{dx}\right]=$$
$$=[n(n+1)x+C]\,y. \qquad (4.97)$$

Уравнение (4.97) является аналитической основой для определения и изучения эллипсоидальных функций, так же как и ранее уравнение Лежандра служило для определения и изучения сферических функций. Это основное уравнение называется **уравнением Ламе***).

Уравнение Ламе можно также написать в эквивалентном виде, выполняя дифференцирование, что дает

$$4(a^2+x)(b^2+x)(c^2+x)\frac{d^2y}{dx^2}+$$
$$+2[(b^2+x)(c^2+x)+(a^2+x)(c^2+x)+(a^2+x)(b^2+x)]\frac{dy}{dx}=$$
$$=[n(n+1)x+C]\,y, \qquad (4.97')$$

или также в виде

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{a^2+x}+\frac{1}{b^2+x}+\frac{1}{c^2+x}\right]\frac{dy}{dx}=$$
$$=\frac{n(n+1)x+C}{4(a^2+x)(b^2+x)(c^2+x)}\,y. \qquad (4.97'')$$

Каждому решению уравнения Ламе, которое есть линейное дифференциальное уравнение второго порядка (однородное, к тому же), соответствует по формуле (4.97) некоторое решение уравнения Лапласа (4.95). Сумма любого числа таких решений, помноженных на произвольные постоянные, также будет решением уравнения (4.95).

3. Можно показать, на чем мы не будем здесь останавливаться, что для всякого целого положительного n можно найти $2n+1$ вещественных чисел

$$C_{n1},\ C_{n2},\ \ldots,\ C_{n,\,n+1},\ C_{n,\,n+2},\ \ldots,\ C_{n,\,2n+1},$$

при которых уравнение Ламе имеет решение в виде многочлена некоторой степени m относительно x, или в виде подобного многочлена, помноженного на один, два или три из выражений

$$\sqrt{a^2+x},\quad \sqrt{b^2+x},\quad \sqrt{c^2+x}.$$

---

*) См. Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, ч. 2, перев. с англ., Гостехиздат, 1934; Е. В. Гобсон, Теория сферических и эллипсоидальных функций, перев. с англ., ИЛ, 1952. См. также: Lamé, Leçons sur les coordonnées curvilignes, Paris, 1859.

Эти частные решения уравнения Ламе называются функциями Ламе, порядка n и первого рода, соответственно первого, второго, третьего и четвертого класса.

Обозначая такую функцию через $E_n^{(s)}(x)$, мы будем иметь, следовательно, тождество $(s=1, 2, \ldots, 2n+1)$

$$4R(x)\frac{d}{dx}\left[R(x)\frac{dE_n^{(s)}(x)}{dx}\right] \equiv [n(n+1)x+C_{ns}]\cdot E_n^{(s)}(x). \qquad (4.98)$$

Каждому значению n соответствует всегда $2n+1$ этих эллипсоидальных функций. Для четного n эти функции принадлежат только к первому и третьему классам, притом так, что $\frac{1}{2}\;n+1$ этих функций суть многочлены степени $n/2$ (функции первого рода и первого класса) и $3n/2$ суть произведения многочлена степени $(n-2)/2$ на один из трех множителей

$$\sqrt{(a^2+x)(b^2+x)}, \quad \sqrt{(b^2+x)(c^2+x)}, \quad \sqrt{(c^2+x)(a^2+x)}.$$

Общее число функций Ламе первого рода четного порядка n равно $\frac{1}{2}n+1+\frac{3}{2}n=2n+1$.

Для нечетного значения n функции Ламе первого рода принадлежат второму и четвертому классу, притом так, что $\frac{3}{2}(n+1)$ этих функций принадлежат второму классу и каждая из них есть произведение многочлена степени $\frac{1}{2}(n-1)$ на одно из выражений $\sqrt{a^2+x}$, $\sqrt{b^2+x}$, $\sqrt{c^2+x}$, а остальные $\frac{1}{2}(n-1)$ функций первого рода нечетного порядка суть многочлены степени $\frac{1}{2}$ $(n-3)$, умноженные на

$$\sqrt{(a^2+x)(b^2+x)(c^2+x)}.$$

Общее число функций Ламе первого рода нечетного порядка будет равно $\left(\frac{3}{2}n+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{n}{2}-\frac{1}{2}\right)=2n+1$.

Представляя функции $E_n^{(s)}(x)$ указанным образом с неопределенными коэффициентами многочленного множителя и требуя, чтобы составленное выражение удовлетворяло равенству (4.98), нетрудно найти выражения для функций Ламе и соответствующих им постоянных C_{ns} для не очень больших, по крайней мере, значений n.

Выпишем для примера выражения эллипсоидальных функций первого рода и соответствующих им постоянных C_{ns}, полученные указанным путем, для $n=0, 1, 2, 3$.

Для $n=0$ имеем только одну функцию, принадлежащую к первому классу и являющуюся многочленом нулевой степени, т. е. величину постоянную. Принимая, для большей простоты, эту постоянную равной единице, имеем

$$E_0^{(1)}(x)=1,$$

причем соответствующая постоянная C_{01} также равна единице.

Для $n=1$ имеем всего три функции Ламе, все второго класса, каждая из которых есть произведение многочлена нулевой степени на одно из выражений (4.99). Принимая опять постоянную равной единице, мы будем иметь следующие три функции первого порядка:

$$\left.\begin{aligned} E_1^{(1)}(x)&=\sqrt{a^2+x},\\ E_1^{(2)}(x)&=\sqrt{b^2+x},\\ E_1^{(3)}(x)&=\sqrt{c^2+x}. \end{aligned}\right\} \tag{4.99}$$

Соответствующие этим функциям постоянные C_{1s} имеют следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} C_{11}&=b^2+c^2,\\ C_{12}&=c^2+a^2,\\ C_{13}&=a^2+b^2. \end{aligned}\right\} \tag{4.99'}$$

Для $n=2$ имеем две функции первого класса, каждая из которых есть многочлен первой степени, и три функции третьего класса, каждая из которых есть произведение многочлена нулевой степени (примем его опять равным единице) на два из трех корней (4.99).

Эти функции определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} E_2^{(1)}(x)&=x+k_{21},\\ E_2^{(2)}(x)&=x+k_{22},\\ E_2^{(3)}(x)&=\sqrt{(b^2+x)(c^2+x)},\\ E_2^{(4)}(x)&=\sqrt{(c^2+x)(a^2+x)},\\ E_2^{(5)}(x)&=\sqrt{(a^2+x)(b^2+x)}, \end{aligned}\right\} \tag{4.100}$$

где *)

$$\left.\begin{matrix} k_{21}\\ k_{22} \end{matrix}\right\}=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)\pm\frac{1}{3}\sqrt{a^4+b^4+c^4-b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2}.$$

---

*) Для k_{21} нужно взять знак «плюс», а для k_{22} знак «минус» или наоборот.

Соответствующие этим функциям постоянные C_{2s} имеют следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} C_{21} &= 4(a^2+b^2+c^2)+k_{21}, \\ C_{22} &= 4(a^2+b^2+c^2)+k_{22}, \\ C_{23} &= 4a^2(b^2+c^2)+2b^2c^2, \\ C_{24} &= 4b^2(c^2+a^2)+2c^2a^2, \\ C_{25} &= 4c^2(a^2+b^2)+2a^2b^2. \end{aligned}\right\} \qquad (4.100')$$

Для $n=3$ имеем шесть функций второго класса, каждая из которых есть произведение многочлена первой степени на одно из выражений (4.99), и одну функцию четвертого класса, представляющую собой произведение многочлена нулевой степени на произведение всех трех корней (4.99). Эти функции определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} E_3^{(1)}(x) &= (x+k_{31})\sqrt{a^2+x}, \\ E_3^{(2)}(x) &= (x+k_{32})\sqrt{a^2+x}, \\ E_3^{(3)}(x) &= (x+k_{33})\sqrt{b^2+x}, \\ E_3^{(4)}(x) &= (x+k_{34})\sqrt{b^2+x}, \\ E_3^{(5)}(x) &= (x+k_{35})\sqrt{c^2+x}, \\ E_3^{(6)}(x) &= (x+k_{36})\sqrt{c^2+x}, \\ E_3^{(7)}(x) &= \sqrt{(a^2+x)(b^2+x)(c^2+x)}, \end{aligned}\right\} \qquad (4.101)$$

а соответствующие им постоянные C_{3s} имеют следующие значения:

$$C_{3s} = b^2+c^2+\frac{2a^2(b^2+c^2)+6b^2c^2}{k_{3s}} \qquad (s=1,\ 2), \qquad (4.101')$$

а величины k_{3s} определяются формулой *)

$$k_{3s} = \frac{1}{5}(a^2+2b^2+2c^2) \pm \frac{1}{5}\sqrt{a^4+4b^4+4c^4-7b^2c^2-c^2a^2-a^2b^2}. \qquad (4.101'')$$

Остальные две пары постоянных C_{3s} и k_{3s} (для $s=3$, 4 и $s=5$, 6) получаются из выражений (4.101′) и (4.101″) циклической перестановкой букв a, b, c.

Итак, каждому значению n (целому и положительному, разумеется) соответствует $2n+1$ функций Ламе первого рода, каждая из которых является частным решением уравнения

---

*) Для k_{31} нужно брать знак «плюс», а для k_{32} знак «минус» или наоборот.

Ламе (4.97), в котором постоянной C нужно придать соответствующее значение, как в тождестве (4.98). Можно доказать, что все эти $2n+1$ функций между собой линейно независимы, т. е. что никакие r из них ($r \leqslant 2n+1$) не связаны линейной зависимостью с постоянными коэффициентами. Доказательства этого предложения мы здесь приводить не будем.

Зная одно частное решение уравнения Ламе, нетрудно по общему правилу найти второе его решение, линейно независимое с первым.

Такое второе решение, обращающееся вдобавок в нуль при $x=\infty$, называется функцией Ламе второго рода, и определяется следующей формулой:

$$F_n^{(s)}(x)=(2n+1)\,E_n^{(s)}(x)\int\limits_x^\infty \frac{dx}{R(x)\left[E_n^{(s)}(x)\right]^2}. \tag{4.102}$$

Ясно, что число функций Ламе второго рода также равно $2n+1$ и что все они между собой линейно независимы.

Теперь общее решение уравнения Ламе (4.97), в котором постоянная C имеет значение C_{ns}, запишется в виде

$$y=C_1E_n^{(s)}(x)+C_2F_n^{(s)}(x), \tag{4.103}$$

где C_1 и C_2 — две произвольные постоянные.

Заметим, что при помощи различных преобразований уравнению Ламе можно придать различную форму, что часто облегчает или способствует рассмотрению и изучению свойств функций Ламе. Мы не будем рассматривать эти различные формы и многочисленные свойства эллипсоидальных функций, так как нашей целью является только дать первоначальное понятие об этой области математики, находящей различные приложения в задачах естествознания и, в частности, в теории притяжения.

§ 11. Произведения Ламе и связь со сферическими функциями

1. Составим произведение трех функций Ламе одного и того же порядка и одного и того же класса, но с аргументами λ, μ, ν. Тогда функция

$$V_n^{(s)}(\lambda,\ \mu,\ \nu)=V_n^{(s)}=E_n^{(s)}(\lambda)\,E_n^{(s)}(\mu)\,E_n^{(s)}(\nu) \tag{4.104}$$

в силу (4.95′) и (4.95″) удовлетворит уравнению (4.95), так что

$$\nabla V_n^{(s)}(\lambda,\ \mu,\ \nu)=0.$$

Этому уравнению удовлетворит, конечно, и любая линейная комбинация (с постоянными коэффициентами) функций (4.104).

Поэтому функция

$$V_n(\lambda, \mu, \nu) = \sum_{s=1}^{2n+1} D_n^{(s)} V_n^{(s)}(\lambda, \mu, \nu) \tag{4.104'}$$

также будет решением уравнения Лапласа (4.95) при любых постоянных значениях коэффициентов $D_n^{(s)}$.

Рассмотрим ближе функцию (4.104), которая называется произведением Ламе n-го порядка. Из сказанного выше следует, что всякая функция Ламе первого рода и порядка n представляется в следующем виде:

$$E_n^{(s)}(x) = \begin{cases} \quad n \text{ четное:} & \quad n \text{ нечетное:} \\ \quad P(x), & P(x)\sqrt{a^2+x}, \ldots \\ P(x)\sqrt{a^2+x}\sqrt{b^2+x}, \ldots & P(x)\sqrt{(a^2+x)(b^2+x)(c^2+x)}, \end{cases}$$

где $P(x)$ обозначает соответственно многочлен степени

$$\frac{n}{2}, \quad \frac{n-2}{2}, \quad \frac{n-1}{2}, \quad \frac{n-3}{2}.$$

Эти формулы, определяющие вид функций Ламе, вместе с уравнением (E_θ), корнями которого являются эллиптические координаты λ, μ, ν, приводят на основании теории симметрических функций корней алгебраического уравнения *) к заключению, что каждое произведение Ламе n-го порядка, преобразованное к координатам x, y, z, есть многочлен n-й степени (вообще говоря, неоднородный, но который можно разбить на сумму однородных гармонических многочленов), удовлетворяющий уравнению Лапласа.

Таким образом, функция $V_n^{(s)}$ может быть представлена в виде суммы гармонических многочленов и мы можем написать:

$$V_n^{(s)} = E_n^{(s)}(\lambda) E_n^{(s)}(\mu) E_n^{(s)}(\nu) = \sum_{j=1}^{n} U_j^{(s)}(x, y, z). \tag{4.105}$$

Но каждый гармонический многочлен, преобразованный к сферическим координатам r, φ, ψ, порождает объемную сферическую функцию того же порядка, так что мы можем написать также

$$E_n^{(s)}(\lambda) E_n^{(s)}(\mu) E_n^{(s)}(\nu) = \sum_{j=1}^{n} r^j Y_j^{(s)}(\varphi, \psi), \tag{4.105'}$$

что представляет соотношение между тройным произведением Ламе и объемными сферическими функциями того же порядка.

---

*) См., например, А. Г. Курош, Курс высшей алгебры (любое издание), а также В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 2.

Формулу (4.105′) можно также написать в виде

$$V_n^{(s)}=\sum_{j=1}^{n} r^j \sum_{k=0}^{j} P_j^{(k)}(\cos\varphi)\left[A_{jk}^{(s)}\cos k\psi+B_{jk}^{(s)}\sin k\psi\right], \tag{4.105″}$$

где «игреки» Лапласа заменены их выражениями через элементарные сферические функции.

Замечая теперь, что функция $E_n^{(s)}(\lambda)$ имеет в отношении к переменной λ порядок $n/2$, а координата λ есть величина второго порядка по отношению к радиусу-вектору r (см. (4.93)), мы найдем, что $E_n^{(s)}(\lambda)$ есть величина порядка r^n, а поэтому

$$\lim_{r\to\infty}\frac{E_n^{(s)}(\lambda)}{r^n}=1.$$

Разделим обе части равенства (4.105′) на r^n и перейдем к пределу при $r\to\infty$. Так как всякая поверхностная сферическая функция всегда имеет конечное значение, то найдем в пределе

$$E_n^{(s)}(\mu)\,E_n^{(s)}(\nu)=Y_n^{(s)}(\varphi,\ \psi), \tag{4.106}$$

или

$$E_n^{(s)}(\mu)\,E_n^{(s)}(\nu)=\sum_{k=0}^{n} P_n^{(k)}(\cos\varphi)\left[A_{nk}^{(s)}\cos k\psi+B_{nk}^{(s)}\sin k\psi\right], \tag{4.106′}$$

т. е. двойное произведение Ламе есть сферическая функция n-го порядка.

Заметим, что в силу свойства ортогональности сферических функций мы имеем

$$\int\limits_{(\Omega)}\int Y_n^{(s)}(\varphi,\ \psi)\,Y_m^{(\sigma)}(\varphi,\ \psi)\,d\omega=0 \qquad (m\neq n),$$

где интеграл взят по всей сфере единичного радиуса. В силу формулы (4.106) мы можем теперь написать также

$$\int\limits_{(\Omega)}\int E_n^{(s)}(\mu)\,E_n^{(s)}(\nu)\,E_m^{(\sigma)}(\mu)\,E_m^{(\sigma)}(\nu)\,d\omega=0 \qquad (m\neq n), \tag{4.107}$$

причем интеграл также берется по сфере Ω. Перенося в формуле (4.107) интегрирование с поверхности сферы единичного радиуса на поверхность эллипсоида (E), имеющего общий центр с Ω, мы получим

$$\int\limits_{(E)}\int E_n^{(s)}(\mu)\,E_n^{(s)}(\nu)\,E_m^{(\sigma)}(\mu)\,E_m^{(\sigma)}(\nu)\cdot p\,d\sigma=0, \tag{4.107′}$$

где p обозначает длину перпендикуляра, опущенного из центра на плоскость, касательную к элементу $d\sigma$ поверхности эллипсоида.

2. Так как сферическая функция n-го порядка также получается из гармонического многочлена, то всякая такая функция (объемная!) должна выражаться линейно через тройные произведения Ламе и мы имеем

$$r^n Y_n(\varphi, \psi) = \sum_{s=1}^{2n+1} \alpha_n^{(s)} E_n^{(s)}(\lambda) E_n^{(s)}(\mu) E_n^{(s)}(\nu).$$

Разделив обе части этого равенства опять на r^n и переходя к пределу при $r \to \infty$, мы получим

$$Y_n(\varphi, \psi) = \sum_{s=1}^{2n+1} \alpha_n^{(s)} E_n^{(s)}(\mu) E_n^{(s)}(\nu). \tag{4.108}$$

Таким образом, всякая сферическая функция n-го порядка выражается линейно через $2n+1$ произведений функций Ламе от переменных μ и ν, связанных с полярными сферическими координатами формулами (см. (4.92) и (4.94))

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi\cos\psi &= \sqrt{\frac{(a^2+\mu)(a^2+\nu)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}, \\ \sin\varphi\sin\psi &= \sqrt{\frac{(b^2+\mu)(b^2+\nu)}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}}, \\ \cos\varphi &= \sqrt{\frac{(c^2+\mu)(c^2+\nu)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.109}$$

Поэтому всякая функция, которую можно разложить в ряд по сферическим функциям, выражается также рядом произведений функций Ламе.

Приведем без вывода выражение такого рода для функции $P_n(\cos\gamma)$, где

$$\cos\gamma = \cos\varphi\cos\varphi' + \sin\varphi\sin\varphi'\cos(\psi - \psi').$$

Так как функция $P_n(\cos\gamma)$ симметрична относительно двух пар сферических координат, то она также будет симметрична и относительно двух пар эллипсоидальных координат и мы имеем в результате следующее выражение:

$$P_n(\cos\gamma) = \frac{\pi}{2(2n+1)} \sum_{s=1}^{2n+1} E_n^{(s)}(\mu) E_n^{(s)}(\nu) E_n^{(s)}(\mu') E_n^{(s)}(\nu'). \tag{4.110}$$

Этим мы и закончим краткое изложение элементов теории эллипсоидальных функций.

ГЛАВА V

РАЗЛОЖЕНИЕ СИЛОВОЙ ФУНКЦИИ

§ 1. Разложение силовой функции произвольного притягивающего тела по сферическим функциям

1. Рассмотрим некоторое тело T (одномерное, двумерное или трехмерное), неподвижное относительно выбранной декартовой системы координат $Oxyz$.

Пусть $M(x', y', z')$ есть любая (текущая) точка тела, в которой сосредоточена элементарная притягивающая масса dm.

Если $\delta(M)=\delta(x', y', z')$ есть заданная плотность тела, которую будем считать непрерывной (или хотя бы интегрируемой) функцией от координат x', y', z' текущей точки M, то

$$dm=\delta(M)\,dT,$$

где dT обозначает пространственный элемент, представляющий собой либо элемент линии (для одномерного тела), либо элемент площади поверхности (для двумерного тела), либо элемент объема (для трехмерного тела).

Пусть, далее, $P(x, y, z)$ есть произвольная точка пространства, в которой сосредоточена единичная притягивающая масса.

Тогда притяжение, оказываемое телом T на точку P, полностью определяется заданием силовой функции $U(P)$ по формуле

$$U(x, y, z)=f\int\limits_{(T)}\frac{dm}{\Delta}, \tag{5.1}$$

где

$$\Delta=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}, \tag{5.2}$$

и интеграл распространен на всю притягивающую массу тела T, являясь обыкновенным криволинейным интегралом для одномерного тела, двойным поверхностным для двумерного тела и тройным объемным для трехмерного тела.

Переходя к полярным сферическим координатам r, θ, λ, имеем

$$\left.\begin{array}{lll} x=r\sin\theta\cos\lambda, & y=r\sin\theta\sin\lambda, & z=r\cos\theta, \\ x'=r'\sin\theta'\cos\lambda', & y'=r'\sin\theta'\sin\lambda', & z'=r'\cos\theta', \end{array}\right\} \tag{5.3}$$

а поэтому

$$\Delta=\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\gamma}, \tag{5.2'}$$

где γ есть угол, сбразованный радиусами-векторами точек M и M', причем очевидно, что

$$\cos\gamma=\frac{x}{r}\frac{x'}{r'}+\frac{y}{r}\frac{y'}{r'}+\frac{z}{r}\frac{z'}{r'}=$$
$$=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\lambda-\lambda'). \tag{5.4}$$

Имея теперь в виду формулу для производящей функции многочленов Лежандра (см. формулу (4.31) гл. IV), мы можем написать следующие разложения:

для $r>r'$

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r'}{r}\cos\gamma+\left(\frac{r'}{r}\right)^2}}=$$
$$=\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r'^n}{r^{n+1}}P_n(\cos\gamma), \tag{5.5}$$

и для $r<r'$

$$\frac{1}{\Delta}=\frac{1}{r'}\frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r}{r'}\cos\gamma+\left(\frac{r}{r'}\right)^2}}=$$
$$=\frac{1}{r'}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos\gamma)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{r'^{n+1}}P_n(\cos\gamma), \tag{5.6}$$

причем каждый из двух этих рядов сходится абсолютно для любого значения угла γ $(0\leqslant\gamma\leqslant\pi)$.

Нетрудно также установить область, в которой каждый из этих рядов сходится не только абсолютно, но и равномерно, и оценить величину остаточного члена.

Действительно, если имеем

$$\frac{r'}{r}<q<1,$$

то ряд (5.5) сходится равномерно, а его остаточный член

$$R_m = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{r'^n}{r^{n+1}} P_n(\cos\gamma)$$

удовлетворяет неравенству

$$|R_m| < \sum_{n=m}^{\infty} \frac{q^n}{r} = \frac{q^m}{r(1-q)},$$

поскольку, как показано в предыдущей главе, $|P_n(\cos\gamma)| < 1$.

Также, если

$$\frac{r}{r'} < q' < 1,$$

то ряд (5.6) сходится равномерно, а для его остаточного члена

$$R'_m = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{r^n}{r'^{n+1}} P_n(\cos\gamma)$$

получаем неравенство

$$|R'_m| < \frac{q'^m}{r'(1-q')}.$$

2. Допустим теперь, что система координат выбрана так, что для данной точки $P(x, y, z)$ мы имеем $r > r'$.

Тогда имеет место разложение (5.5), а подставляя это разложение в формулу (5.1) и интегрируя почленно, что возможно при условии равномерной сходимости ряда, мы получим соответствующее разложение силовой функции $U(P)$ в полярных координатах в виде

$$U(r, \theta, \lambda) = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int\limits_{(T)} r'^n P_n(\cos\gamma)\, dm. \tag{5.7}$$

Так как по формуле сложения

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{\delta_k} \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(\cos\theta) P_n^{(k)}(\cos\theta') \cos k(\lambda - \lambda') \tag{5.8}$$

является сферической функцией n-го порядка относительно координат θ и λ, то, интегрируя выражение $r'^n P_n(\cos\gamma)$ по переменным r', θ', λ', мы опять получим некоторую сферическую функцию того же порядка n.

Полагая для сокращения

$$Y_n(\theta, \lambda) = \int\limits_{(T)} r'^n P_n(\cos\gamma)\, dm, \tag{5.9}$$

мы получим разложение силовой функции в виде

$$U(r,\ \theta,\ \lambda)=f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Y_n(\theta,\ \lambda)}{r^{n+1}}. \qquad (5.10)$$

Сферические функции $Y_n(\theta,\ \lambda)$, входящие в это разложение, можно представить в явном виде, заменяя в формуле (5.9) многочлен Лежандра $P_n(\cos\gamma)$ его выражением (5.8). Тогда получим

$$Y_n(\theta,\ \lambda)=\sum_{k=0}^{n}P_n^{(k)}(\cos\theta)\left[A_{nk}\cos k\lambda+B_{nk}\sin k\lambda\right], \qquad (5.11)$$

где

$$A_{nk}=\frac{2}{\delta_k}\,\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int\limits_{(T)}r'^nP_n^{(k)}(\cos\theta')\cos k\lambda'\,dm \qquad (5.12)$$

и

$$B_{nk}=\frac{2}{\delta_k}\,\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int\limits_{(T)}r'^nP_n^{(k)}(\cos\theta')\sin k\lambda'\,dm \qquad (5.13)$$

суть постоянные, зависящие от формы тела T, его положения в пространстве относительно системы $Oxyz$ и от его структуры, т. е. от распределения материи, составляющей тело.

Обратимся далее к случаю, когда $r<r'$. Тогда имеем разложение (5.6), а подставляя его в формулу (5.1) и интегрируя, мы получим другое разложение силовой функции в виде

$$U(r,\ \theta,\ \lambda)=f\sum_{n=0}^{\infty}r^n\int\limits_{(T)}\frac{P_n(\cos\gamma)\,dm}{r'^{n+1}}, \qquad (5.14)$$

или, полагая

$$\tilde{Y}_n(\theta,\ \lambda)=\int\limits_{(T)}\frac{P_n(\cos\gamma)\,dm}{r'^{n+1}}, \qquad (5.15)$$

в следующем виде:

$$U(r,\ \theta,\ \lambda)=f\sum_{n=0}^{\infty}r^n\tilde{Y}_n(\theta,\ \lambda). \qquad (5.16)$$

Здесь $\tilde{Y}_n$ также суть сферические функции, которые определяются следующей формулой:

$$\tilde{Y}_n(\theta,\ \lambda)=\sum_{k=0}^{n}P_n^{(k)}(\cos\theta)\left[\tilde{A}_{nk}\cos k\lambda+\tilde{B}_{nk}\sin k\lambda\right], \qquad (5.17)$$

где коэффициенты $\tilde{A}_{nk}$ и $\tilde{B}_{nk}$, подобно коэффициентам A_{nk} и B_{nk}, выражаются формулами

$$\tilde{A}_{nk}=\frac{2}{\delta_k}\,\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int\limits_{(T)}P_n^{(k)}(\cos\theta')\,\frac{\cos k\lambda'}{r'^{n+1}}\,dm, \qquad (5.18)$$

и

$$\tilde{B}_{nk}=\frac{2}{\delta_k}\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\int\limits_{(T)} P_n^{(k)}(\cos k\theta')\frac{\sin k\lambda'}{r'^{n+1}}\,dm. \tag{5.19}$$

Эти коэффициенты также зависят от формы тела, его положения и от его структуры.

Формулы (5.10) и (5.15) дают выражения для силовой функции тела T в полярных сферических координатах в виде бесконечных рядов сферических функций, области сходимости которых в общем случае могут быть установлены лишь довольно грубо.

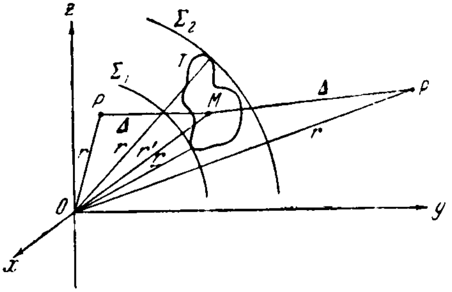


Рис. 28.

Действительно, пусть существует такая положительная постоянная, что для всех точек тела $\bar{r}$ будет выполняться неравенство $r' \leqslant \bar{r}$. Тогда ряд (5.10) заведомо будет сходящимся абсолютно и равномерно во всех точках пространства, внешних по отношению к сфере Σ_2 радиуса $\bar{r}$ с центром в начале координат (рис. 28).

Представляя формулу (5.10) в виде

$$U(P)=f\sum_{n=0}^{N}\frac{Y_n(\theta,\lambda)}{r^{n+1}}+U_N(P), \tag{5.10'}$$

мы можем теперь оценить остаточный член

$$U_N(P)=f\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\int\limits_{(T)} r'^n P_n(\cos\gamma)\,dm$$

подобно тому как это было сделано для остаточного члена ряда (5.5) при помощи легко выводимого неравенства

$$|U_N(P)|<\frac{fm}{r-\bar{r}}\left(\frac{\bar{r}}{r}\right)^N,$$

где m есть полная масса тела T.

Также, если существует такая положительная постоянная $\underline{r}$, что для всех точек тела T выполняется неравенство $\underline{r} \leqslant r'$, то ряд (5.16) будет сходиться абсолютно и равномерно во всех точках пространства, лежащих внутри сферы Σ_1 радиуса $\underline{r}$ с центром в начале (см. рис. 28).

Представляя формулу (5.16) в виде

$$U(P) = f \sum_{n=0}^{N} r^n \tilde{Y}_n(\theta, \lambda) + \tilde{U}_N(P), \qquad (5.16')$$

мы получим, так же как и выше, для остаточного члена

$$\tilde{U}_N(P) = f \sum_{n-N}^{\infty} r^n \int\limits_{(T)} \frac{P_n(\cos\gamma)\, dm}{r'^{n+1}}$$

следующее неравенство:

$$|\tilde{U}_N(P)| < \frac{fm}{\underline{r} - r} \left(\frac{r}{\underline{r}}\right)^N.$$

Таким образом, области сходимости рядов (5.10) и (5.16) зависят от положения тела в пространстве или, что то же, от выбора системы координат $Oxyz$.

Если за начало координат принята какая-либо точка самого тела T (которое будем считать сплошным), то для силовой функции мы будем иметь только разложение типа (5.10), абсолютно сходящееся во всех точках пространства, лежащих вне сферы Σ радиуса $\bar{r}$ с центром в начале координат (рис. 29).

Заметим, что для области, заключенной между сферами Σ_1 и Σ_2, изображенными на рис. 28, и для области, заключенной между поверхностью тела и сферой Σ на рис. 29, полученные разложения вообще непригодны. Эти разложения непригодны и для того случая, когда точка P находится внутри тела T, составляя часть его массы.

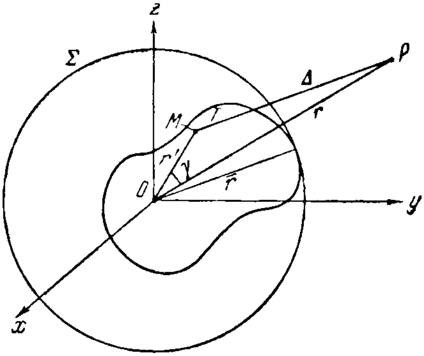


Рис. 29.

Для всех этих исключительных областей необходимы дополнительные исследования и получение разложений иного типа.

3. Зная разложение силовой функции, можно найти путем обычного почленного дифференцирования соответствующие разложения ее частных производных по сферическим координатам r, λ, θ, что даст составляющие силы притяжения, действующей на точку P, определяемые формулами (1.13) гл. I, т. е. составляющие

$$F_r = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad F_T = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial\lambda}, \quad F_W = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\theta}.$$

Разложения частных производных напишутся, как легко видеть, следующим образом. Для случая, когда точка P находится вне сферы Σ_2, или сферы Σ, т. е. для случая формулы (5.10), мы имеем

$$\frac{\partial U}{\partial r} = -f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)Y_n(\theta, \lambda)}{r^{n+2}},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\frac{\partial Y_n(\theta, \lambda)}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{r^{n+1}}\frac{\partial Y_n(\theta, \lambda)}{\partial \theta},$$

причем

$$\frac{\partial Y_n(\theta, \lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{k=0}^{n} kP_n^{(k)}(\cos\theta)\left[-A_{nk}\sin k\lambda + B_{nk}\cos k\lambda\right],$$

и

$$\frac{\partial Y_n(\theta, \lambda)}{\partial \theta} = -f\sum_{k=0}^{n}\sin\theta\frac{dP_n^{(k)}(\nu)}{d\nu}\left[A_{nk}\cos k\lambda + B_{nk}\sin k\lambda\right],$$

а производная от присоединенной функции Лежандра найдется по формуле

$$\frac{dP_n^{(k)}(\nu)}{d\nu} = -\frac{k}{\sin^2\theta}P_n^{(k)}(\cos\theta) + \frac{1}{\sin\theta}P_n^{(k+1)}(\cos\theta).$$

Для случая, когда точка P находится внутри сферы Σ_1, т. е. для случая формулы (5.16), имеем аналогично

$$\frac{\partial U}{\partial r} = f\sum_{n=0}^{\infty} nr^{n-1}\tilde{Y}_n(\theta, \lambda),$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = f\sum_{n=0}^{\infty} r^n\frac{\partial \tilde{Y}_n(\theta, \lambda)}{\partial \lambda},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = f\sum_{n=0}^{\infty} r^n\frac{\partial \tilde{Y}_n(\theta, \lambda)}{\partial \theta},$$

Производные от сферической функции $\tilde{Y}_n$ имеют совершенно такой же вид, как и производные от Y_n, нужно только постоянные A_{nk} и B_{nk} заменить на $\tilde{A}_{nk}$ и $\tilde{B}_{nk}$.

§ 2. Разложение силовой функции по гармоническим многочленам

1. В приложениях теории притяжения так же часто пользуются прямоугольными декартовскими координатами, как и сферическими. Поэтому нужно иметь разложения силовой функции и ее производных в координатах x, y, z..

Чтобы найти такое разложение, заметим, что по формуле (4.6) гл. IV каждой сферической функции n-го порядка соответствует некоторый однородный гармонический многочлен n-й степени, так что мы имеем

$$Y_n(\theta, \lambda) = \frac{1}{r^n} U_n(x, y, z).$$

Подставляя это выражение для Y_n в формулу (5.10), мы получим для силовой функции $U(P)$ следующее разложение:

$$U(x, y, z) = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n(x, y, z)}{r^{2n+1}}, \tag{5.20}$$

сходящееся абсолютно и равномерно во всяком случае в области, определяемой неравенством $r > \bar{r}$, т. е. вне сферы Σ_2 (или сферы Σ).

Сферической функции $\tilde{Y}_n$, входящей в формулу (5.16), соответствует также некоторый другой однородный гармонический многочлен, который обозначим через $\tilde{U}_n$, так что имеем

$$r^n \tilde{Y}_n(\theta, \lambda) = \tilde{U}_n(x, y, z).$$

Подставляя это выражение в формулу (5.16), получим другое разложение силовой функции

$$U(x, y, z) = f \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{U}_n(x, y, z), \tag{5.21}$$

сходящееся абсолютно и равномерно во всяком случае в области, определяемой неравенством $r < \underline{r}$, т. е. внутри сферы Σ_1 *).

Многочлены U_n и $\tilde{U}_n$ можно найти различными способами. Например, можно исходить из выражений для Y_n и $\tilde{Y}_n$, даваемых формулами (5.11) и (5.17), и выразить в этих формулах синусы и косинусы от θ и λ через прямоугольные координаты

---

*) Области сходимости рядов (5.20) и (5.21), так же как и области сходимости рядов (5.10) и (5.16), в отдельных случаях могут оказаться более широкими, но для установления этого всегда нужны дополнительные исследования.

x, y, z по формулам преобразования координат, т. е. по формулам

$$\cos\theta = \frac{z}{r}, \qquad \cos\lambda = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r}, \qquad \sin\lambda = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Можно поступить и иначе, более непосредственным путем. Действительно, рассмотрим выражение $P_n(\cos\gamma)$, входящее в формулы (5.9) и (5.15), которое есть многочлен Лежандра n-го порядка относительно $\cos\gamma$. Поэтому по формуле (4.29) гл. IV можем написать

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} P_{ns}\cos^{n-2s}\gamma;$$

заменяя здесь $\cos\gamma$ его выражением (5.4) через координаты точек P и M и умножая обе части равенства на $(rr')^n$, получим

$$(rr')^n P_n(\cos\gamma) = \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} P_{ns}(xx'+yy'+zz')^{n-2s}\, r^{2s}r'^{2s}. \tag{5.22}$$

Каждый член последней суммы есть, очевидно, однородный многочлен n-й степени как относительно координат точки P, так и относительно координат точки M.

Следовательно, и вся сумма также есть многочлен такого же рода, и мы можем написать

$$r^n r'^n P_n(\cos\gamma) = \bar{P}_n(P,\, M) = \sum P_n^{(k_1,\, k_2,\, k_3)}(x',\, y',\, z')\, x^{k_1}y^{k_2}z^{k_3}, \tag{5.22'}$$

где сумма распространена на все целые неотрицательные числа k_1, k_2, k_3, удовлетворяющие условию $k_1+k_2+k_3=n$, а каждый коэффициент есть целый однородный многочлен n-й степени относительно координат x', y', z'.

Эти многочлены можно представить в виде

$$P_n^{(k_1,\, k_2,\, k_3)}(x',\, y',\, z') = \sum P_{n,\, k_1',\, k_2',\, k_3'}^{(k_1,\, k_2,\, k_3)}\, x'^{k_1'} y'^{k_2'} z'^{k_3'}, \tag{5.23}$$

где все $P_{n,\dots}^{(\dots)}$ суть числовые коэффициенты и сумма распространяется на все целые неотрицательные числа k_1', k_2', k_3', удовлетворяющие условию $k_1'+k_2'+k_3'=n$.

2. Теперь формула (5.9) дает

$$Y_n(\theta,\, \lambda) = \int\limits_{(T)} r'^n P_n(\cos\gamma)\, dm = \frac{1}{r^n}\int\limits_{(T)} \bar{P}_n(P,\, M)\, dm = \frac{1}{r^n}\, U_n(x,\, y,\, z),$$

и многочлены U_n полностью определяются, так как

$$U_n(x, y, z) = \int\limits_{(T)} \overline{P}_n(P, M)\,dm. \tag{5.24}$$

Эти многочлены мы можем представить в следующем виде:

$$U_n(x, y, z) = \sum U_n^{(k_1, k_2, k_3)} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} \tag{5.24'}$$

с тем же способом суммирования, что и выше, причем коэффициенты определяются формулами

$$U_n^{(k_1, k_2, k_3)} = \int\limits_{(T)} P_n^{(k_1, k_2, k_3)}(x', y', z')\,dm \tag{5.25}$$

и зависят исключительно от формы, структуры и расположения тела T относительно осей $Oxyz$.

Заметим, что так как U_n есть гармонический многочлен, то общее число различных его коэффициентов равно $2n+1$, т. е. их столько же, сколько имеется коэффициентов A_{nk} и B_{nk}.

Имея в виду формулу (5.23), мы получим для коэффициентов многочлена $U_n(x, y, z)$ следующее выражение:

$$U_n^{(k'_1, k'_2, k'_3)} = \sum P^{(k_1, k_2, k_3)}_{n, k'_1, k'_2, k'_3} I_n^{(k'_1, k'_2, k'_3)}, \tag{5.25'}$$

где положено

$$I_n^{(k'_1, k'_2, k'_3)} = \int\limits_{(T)} \delta(x', y', z')\, x'^{k'_1} y'^{k'_2} z'^{k'_3}\,dT. \tag{5.25''}$$

Величины $I_n^{(k'_1, k'_2, k'_3)}$ являются характеристическими постоянными для тела T, число которых равно $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ для каждого значения n. Эти величины называются, вообще, **моментами инерции n-го порядка** тела T. Обычные моменты инерции второго порядка тела T относительно начала, координатных осей и координатных плоскостей легко выражаются через величины $I_2^{(k'_1, k'_2, k'_3)}$. В самом деле, нетрудно видеть, что мы имеем

$$I_0 = \int\limits_{(T)} (x'^2 + y'^2 + z'^2)\,dm = I_2^{(2, 0, 0)} + I_2^{(0, 2, 0)} + I_2^{(0, 0, 2)},$$

$$A = \int\limits_{(T)} (y'^2 + z'^2)\,dm = I_2^{(0, 2, 0)} + I_2^{(0, 0, 2)},$$

$$B = \int\limits_{(T)} (x'^2 + z'^2)\,dm = I_2^{(2, 0, 0)} + I_2^{(0, 0, 2)},$$

$$C = \int\limits_{(T)} (x'^2 + y'^2)\,dm = I_2^{(2,\,0,\,0)} + I_2^{(0,\,2,\,0)},$$

$$D = \int\limits_{(T)} x'y'\,dm = I_2^{(1,\,1,\,0)},$$

$$E = \int\limits_{(T)} x'z'\,dm = I_2^{(1,\,0,\,1)},$$

$$F = \int\limits_{(T)} y'z'\,dm = I_2^{(0,\,1,\,1)}.$$

Моменты D, E, F называются также центробежными моментами или произведениями инерции.

Обращаясь затем к формуле (5.15), получаем

$$r^n \tilde{Y}_n(\theta,\ \lambda) = \int\limits_{(T)} \frac{r^n P_n(\cos\gamma)\,dm}{r'^{n+1}} = \int\limits_{(T)} \frac{\overline{P}_n(P,\ M)\,dm}{r'^{2n+1}} = \tilde{U}_n(x,\ y,\ z),$$

откуда с помощью (5.22′) найдем следующее выражение для многочлена $\tilde{U}_n(x, y, z)$:

$$\tilde{U}_n(x,\ y,\ z) = \sum \tilde{U}_n^{(k_1,\ k_2,\ k_3)} x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3}, \qquad (5.26)$$

с тем же способом суммирования, что и выше. Так как $\tilde{U}_n(x, y, z)$ также есть гармонический многочлен, то число независимых его коэффициентов равно $2n+1$ и эти коэффициенты определяются формулой

$$\tilde{U}_n^{(k_1,\ k_2,\ k_3)} = \int\limits_{(T)} \frac{P_n^{(k_1,\ k_2,\ k_3)}(x',\ y',\ z')\,dm}{r'^{2n+1}}, \qquad (5.26')$$

т. е. зависят исключительно от формы, структуры и расположения тела T относительно осей $Oxyz$.

При помощи формулы (5.23) мы получаем следующие выражения для коэффициентов $\tilde{U}_n^{(k_1,\ k_2,\ k_3)}$:

$$\tilde{U}_n^{(k_1,\ k_2,\ k_3)} = \sum P_{n,\ k'_1,\ k'_2,\ k'_3}^{(k_1,\ k_2,\ k_3)} \tilde{I}_n^{(k'_1,\ k'_2,\ k'_3)}, \qquad (5.26'')$$

где положено, аналогично предыдущему,

$$\tilde{I}_n^{(k'_1,\ k'_2,\ k'_3)} = \int\limits_{(T)} \frac{\delta(x',\ y',\ z')}{r'^{2n+1}} x'^{k'_1} y'^{k'_2} z'^{k'_3}\,dT.$$

Эти величины, для которых нет особого названия, могут быть выражены через моменты инерции (5.25″), которые полностью характеризуют тело T, так что два разных тела отличаются друг от друга числовыми значениями моментов инерции, и наоборот, если заданы две системы чисел (5.25''), то они соответствуют, вообще, двум различным телам.

3. Мы уже отмечали, что коэффициенты $I_n^{(\dots)}$ и $\tilde{I}_n^{(\dots)}$ зависят не только от формы и структуры тела T, но и от его расположения и ориентации относительно системы осей $Oxyz$.

Так как зависимость этих коэффициентов от системы координат является в известной мере случайной и не влияющей на физическую природу тела, то наиболее удобно относить все эти величины к собственной системе координат, неизменно связанной с телом, например к системе, начало которой совпадает с центром масс тела, а оси — с главными осями инерции.

Характеристические постоянные, вычисленные для этой системы координат, можно назвать главными или основными моментами инерции тела T. Очевидно, что значения этих постоянных в любой другой системе координат могут быть выведены из главных моментов инерции с помощью общих формул преобразования координат в пространстве.

Возвращаясь теперь к разложениям (5.20) и (5.21) силовой функции тела T, найдем при помощи дифференцирований этих разложений соответствующие разложения для прямоугольных составляющих силы притяжения тела T, действующей на материальную точку P единичной массы.

Нетрудно видеть, что для случая $r > \bar{r}$, т. е. когда точка P находится вне сферы Σ_2 (или сферы Σ), мы получаем, дифференцируя (5.20) по x, y, z:

$$\left.\begin{aligned} X(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X_n(x, y, z)}{r^{2n+3}}, \\ Y(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Y_n(x, y, z)}{r^{2n+3}}, \\ Z(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{Z_n(x, y, z)}{r^{2n+3}}, \end{aligned}\right\} \qquad (5.27)$$

где X_n, Y_n, Z_n суть однородные многочлены $(n+1)$-й степени, определяемые формулами

$$X_n(x, y, z) = r^2 \frac{\partial U_n}{\partial x} - (2n+1) x U_n,$$

$$Y_n(x, y, z) = r^2 \frac{\partial U_n}{\partial y} - (2n+1) y U_n,$$

$$Z_n(x, y, z) = r^2 \frac{\partial U_n}{\partial z} - (2n+1) z U_n.$$

Для случая, когда $r<\underline{r}$, т. е. когда точка P находится внутри сферы Σ_1, мы имеем, дифференцируя таким же образом выражение (5.21):

$$\left.\begin{aligned} X(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial U_n}{\partial x} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{X}_n(x, y, z), \\ Y(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial U_n}{\partial y} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Y}_n(x, y, z), \\ Z(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial U_n}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{Z}_n(x, y, z), \end{aligned}\right\} \tag{5.28}$$

где $\tilde{X}_n$, $\tilde{Y}_n$, $\tilde{Z}_n$ суть, очевидно, некоторые многочлены $(n-1)$-й степени, тоже однородные.

§ 3. Первые члены разложения силовой функции

1. Разложения, полученные в предыдущих параграфах, имеют совершенно общий характер, т. е. дают общее выражение для силовой функции произвольного притягивающего тела в виде некоторого бесконечного ряда, структура общего члена которого установлена приведенными выше формулами.

Однако в практических приложениях обыкновенно используются только несколько первых членов подобных рядов, а поэтому полезно привести формулы, дающие развернутые выражения этих первых членов. Мы ограничимся выписыванием только первых пяти членов, т. е. найдем выражения сферических функций или гармонических многочленов для $n=0, 1, 2, 3, 4$.

Прежде всего составим для этих значений n многочлены $\bar{P}_n(P, M)$, определяемые формулами (5.22) и (5.22′).

Прежде всего, имеем

$$\bar{P}_0(P, M) = P_0(\cos\gamma) = 1. \tag{5.29}$$

Далее, так же просто получаем

$$\bar{P}_1(P, M) = rr'P_1(\cos\gamma) = rr'\cos\gamma = xx' + yy' + zz'. \tag{5.30}$$

Полагая теперь $n=2$, находим

$$\bar{P}_2(P, M) = r^2r'^2P_2(\cos\gamma) = r^2r'^2\left(\frac{3}{2}\cos^2\gamma - \frac{1}{2}\right),$$

откуда

$$\bar{P}_2(P, M) = \frac{3}{2}(xx' + yy' + zz')^2 - \frac{1}{2}r'^2(x^2 + y^2 + z^2),$$

или, в развернутом виде,

$$P_2(P,\ M)=\frac{x^2}{2}\left(3x'^2-r'^2\right)+\frac{y^2}{2}\left(3y'^2-r'^2\right)+$$
$$+\frac{z^2}{2}\left(3z'^2-r'^2\right)+3xy\cdot x'y'+3xz\cdot x'z'+3yz\cdot y'z'. \quad (5.31)$$

Затем, для $n=3$ имеем

$$\bar{P}_3(P,M)=r^3r'^3P_3(\cos\gamma)=r^3r'^3\left(\frac{5}{2}\cos^3\gamma-\frac{3}{2}\cos\gamma\right)=$$
$$=\frac{5}{2}(rr'\cos\gamma)^3-\frac{3}{2}(rr'\cos\gamma)\,r^2r'^2,$$

или

$$\bar{P}_3(P,\ M)=\frac{5}{2}(xx'+yy'+zz')^3-$$
$$-\frac{3}{2}r'^3(xx'+yy'+zz')(x^2+y^2+z^2),$$

а в развернутом виде

$$\bar{P}_3(P,\ M)=x^3\left(\frac{5}{2}x'^3-\frac{3}{2}x'r'^2\right)+x^2y\left(\frac{15}{2}y'x'^2-\frac{3}{2}y'r'^2\right)+$$
$$+x^2z\left(\frac{15}{2}z'x'^2-\frac{3}{2}z'r'^2\right)+xy^2\left(\frac{15}{2}x'y'^2-\frac{3}{2}x'r'^2\right)+$$
$$+15xyz\cdot x'y'z'+xz^2\left(\frac{15}{2}x'z'^2-\frac{3}{2}x'r'^2\right)+$$
$$+y^3\left(\frac{5}{2}y'^3-\frac{3}{2}y'r'^2\right)+y^2z\left(\frac{15}{2}z'y'^2-\frac{3}{2}z'r'^2\right)+$$
$$+yz^2\left(\frac{15}{2}y'z'^2-\frac{3}{2}y'r'^2\right)+z^3\left(\frac{5}{2}z'^3-\frac{3}{2}z'r'^2\right). \quad (5.32)$$

Наконец, для $n=4$ находим

$$\bar{P}_4(P,\ M)=r^4r'^4P_4(\cos\gamma)=r^4r'^4\left(\frac{35}{8}\cos^4\gamma-\frac{30}{8}\cos^2\gamma+\frac{3}{8}\right)=$$
$$=\frac{35}{8}(rr'\cos\gamma)^4-\frac{30}{8}(rr'\cos\gamma)^2r^2r'^2+\frac{3}{8}r^4r'^4,$$

или

$$\bar{P}_4(P,\ M)=\frac{35}{8}(xx'+yy'+zz')^4-$$
$$-\frac{30}{8}(xx'+yy'+zz')^2(x^2+y^2+z^2)\,r'^2+\frac{3}{8}(x^2+y^2+z^2)^2\cdot r'^4,$$

а в развернутом виде имеем

$$\begin{aligned}
\overline{P}_4(P, M) = {} & x^4\left(\frac{35}{8}x'^4 - \frac{30}{8}x'^2r'^2 + \frac{3}{8}r'^4\right) + \\
& + x^3y\left(\frac{35}{2}x'^3y' - \frac{15}{2}x'y'r'^2\right) + x^3z\left(\frac{35}{2}x'^3z' - \frac{15}{2}x'z'r'^2\right) + \\
& + x^2y^2\left(\frac{105}{4}x'^2y'^2 - \frac{15}{4}x'^2r'^2 - \frac{15}{4}y'^2r'^2 + \frac{3}{4}r'^4\right) + \\
& + x^2z^2\left(\frac{105}{4}x'^2z'^2 - \frac{15}{4}x'^2r'^2 - \frac{15}{4}z'^2r'^2 + \frac{3}{4}r'^4\right) + \\
& + x^2yz\left(\frac{105}{2}x'^2y'z' - \frac{30}{4}y'z'r'^2\right) + xy^3\left(\frac{35}{2}x'y'^3 - \frac{30}{4}x'y'r'^2\right) + \\
& + xy^2z\left(\frac{105}{2}x'y'^2z' - \frac{30}{4}x'z'r'^2\right) + xyz^2\left(\frac{105}{2}x'y'z'^2 - \frac{30}{4}x'y'r'^2\right) + \\
& + xz^3\left(\frac{35}{2}x'z'^3 - \frac{30}{4}x'z'r'^2\right) + y^4\left(\frac{35}{8}y'^4 - \frac{30}{8}y'^2r'^2 + \frac{3}{8}r'^4\right) + \\
& + y^3z\left(\frac{35}{2}y'^3z' - \frac{30}{4}y'z'r'^2\right) + \\
& + y^2z^2\left(\frac{105}{4}y'^2z'^2 - \frac{30}{8}z'^2r'^2 - \frac{30}{8}y'^2r'^2 + \frac{3}{4}r'^4\right) + \\
& + yz^3\left(\frac{35}{2}y'z'^3 - \frac{30}{4}y'z'r'^2\right) + z^4\left(\frac{35}{8}z'^4 - \frac{30}{8}z'^2r'^2 + \frac{3}{8}r'^4\right). \qquad (5.33)
\end{aligned}$$

2. Переходим теперь к вычислению многочленов U_n и $\overline{U}_n$. Так как

$$U_n(x, y, z) = \int\limits_{(T)} \overline{P}_n(P, M)\,dm, \qquad (5.24)$$

то, полагая здесь последовательно $n=0, 1, 2, 3, 4$ и имея в виду формулы (5.29) — (5.33), мы найдем

$$U_0(x, y, z) = \int\limits_{(T)} dm = m, \qquad (5.34)$$

где m — полная масса притягивающего тела.

Далее,

$$\begin{aligned}
U_1(x, y, z) = x\int\limits_{(T)} x'\,dm + y\int\limits_{(T)} y'\,dm + z\int\limits_{(T)} z'\,dm = \\
= m(x\bar{x} + y\bar{y} + z\bar{z}), \qquad (5.35)
\end{aligned}$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ обозначают координаты центра инерции (центра масс) притягивающего тела T в системе координат $Oxyz$, выбранной совершенно произвольно. Если, в частности, система координат выбрана так, что начало O помещено в центре инерции тела, то $\bar{x}=\bar{y}=\bar{z}=0$ и формула (5.35) показывает, что в этом случае $U_1(x, y, z)\equiv 0$.

Для $n=2$ находим

$$U_2(x, y, z)=\frac{x^2}{2}\int\limits_{(T)}(3x'^2-r'^2)\,dm+\frac{y^2}{2}\int\limits_{(T)}(3y'^2-r'^2)\,dm+\\+\frac{z^2}{2}\int\limits_{(T)}(3z'^2-r'^2)\,dm+3xy\int\limits_{(T)}x'y'\,dm+\\+3xz\int\limits_{(T)}x'z'\,dm+3yz\int\limits_{(T)}y'z'\,dm.$$

Используя здесь выражения для моментов инерции второго порядка, приведенные выше, мы напишем выражение для U_2 в виде

$$U_2(x, y, z)=\frac{1}{2}(B+C-2A)x^2+\frac{1}{2}(C+A-2B)y^2+\\+\frac{1}{2}(A+B-2C)z^2+3Dxy+3Exz+3Fyz. \quad (5.36)$$

Заметим, что U_2 есть гармонический многочлен второго порядка и число независимых его коэффициентов должно быть равно пяти. И в самом деле, легко видеть, что сумма коэффициентов при квадратах координат равна нулю, т. е. два из них выражаются через третий. Принимая, например, за независимые коэффициенты первые два и последние три, мы можем написать выражение для U_2 также в следующем виде:

$$U_2(x, y, z)=\frac{1}{2}(B+C-2A)(x^2-z^2)+\\+\frac{1}{2}(C+A-2B)(y^2-z^2)+3Dxy+3Exz+3Fyz. \quad (5.36')$$

Многочлен U_2 можно представить еще в другом, более удобном для приложений виде, а именно:

$$U_2(x, y, z)=\frac{1}{2}r^2(A+B+C-3I), \quad (5.37)$$

где

$$I=A\left(\frac{x}{r}\right)^2+B\left(\frac{y}{r}\right)^2+C\left(\frac{z}{r}\right)^2-2D\frac{x}{r}\frac{y}{r}-2E\frac{x}{r}\frac{z}{r}-2F\frac{y}{r}\frac{z}{r} \quad (5.37')$$

есть момент инерции тела T относительно прямой OP, соединяющей начало координат с притягиваемой точкой $P(x, y, z)$.

Система координат $Oxyz$ в формулах (5.35)—(5.37′) остается совершенно произвольной. Если, в частности, за направления осей координат принять направления главных осей инерции тела, то, как известно *), $D=E=F=0$, и формулы (5.36) и (5.37′) примут более простой вид:

$$U_2(x,\ y,\ z)=\frac{1}{2}(B+C-2A)\,x^2+$$
$$+\frac{1}{2}(C+A-2B)\,y^2+\frac{1}{2}(A+B-2C)\,z^2=$$
$$=\frac{1}{2}(B+C-2A)(x^2-z^2)+\frac{1}{2}(C+A-2B)(y^2-z^2), \qquad (5.36'')$$
$$I=A\left(\frac{x}{r}\right)^2+B\left(\frac{y}{r}\right)^2+C\left(\frac{z}{r}\right)^2. \qquad (5.37'')$$

3. Далее, для $n=3$ имеем

$$U_3(x,\ y,\ z)=U_3^{(3,\,0,\,0)}x^3+U_3^{(2,\,1,\,0)}x^2y+U_3^{(2,\,0,\,1)}x^2z+$$
$$+U_3^{(1,\,2,\,0)}xy^2+U_3^{(1,\,1,\,1)}xyz+U_3^{(1,\,0,\,2)}xz^2+U_3^{(0,\,3,\,0)}y^3+$$
$$+U_3^{(0,\,2,\,1)}y^2z+U_3^{(0,\,1,\,2)}yz^2+U_3^{(0,\,0,\,3)}z^3, \qquad (5.38)$$

где коэффициенты, ввиду (5.32) и (5.25″), определяются следующими формулами:

$$U_3^{(3,\,0,\,0)}=\frac{1}{2}\int\limits_{(T)}(5x'^2-3r'^2)\,x'\,dm=I_3^{(3,\,0,\,0)}-\frac{3}{2}I_3^{(1,\,2,\,0)}-\frac{3}{2}I_3^{(1,\,0,\,2)},$$

$$U_3^{(2,\,1,\,0)}=\frac{1}{2}\int\limits_{(T)}(15x'^2-3r'^2)\,y'\,dm=6I_3^{(2,\,1,\,0)}-\frac{3}{2}I_3^{(0,\,3,\,0)}-\frac{3}{2}I_3^{(0,\,1,\,2)},$$

$$U_3^{(2,\,0,\,1)}=\frac{1}{2}\int\limits_{(T)}(15x'^2-3r'^2)\,z'\,dm=6I_3^{(2,\,0,\,1)}-\frac{3}{2}I_3^{(0,\,2,\,1)}-\frac{3}{2}I_3^{(0,\,0,\,3)},$$

$$U_3^{(1,\,2,\,0)}=\frac{1}{2}\int\limits_{(T)}(15y'^2-3r'^2)\,x'\,dm=-\frac{3}{2}I_3^{(3,\,0,\,0)}+6I_3^{(1,\,2,\,0)}-\frac{3}{2}I_3^{(1,\,0,\,2)},$$

$$U_3^{(1,\,1,\,1)}=15\int\limits_{(T)}x'y'z'\,dm=15I_3^{(1,\,1,\,1)},$$

$$U_3^{(1,\,0,\,2)}=\frac{1}{2}\int\limits_{(T)}(15z'^2-3r'^2)\,x'\,dm=-\frac{3}{2}I_3^{(3,\,0,\,0)}-\frac{3}{2}I_3^{(1,\,2,\,0)}+6I_3^{(1,\,0,\,2)}$$

$$U_3^{(0,\,3,\,0)}=\frac{1}{2}\int\limits_{(T)}(5y'^2-3r'^2)\,y'\,dm=-\frac{3}{2}I_3^{(2,\,1,\,0)}+I_3^{(0,\,3,\,0)}-\frac{3}{2}I_3^{(0,\,1,\,2)}$$

---

*) См. любой учебник по теоретической механике, например, Г. К. Суслов, Теоретическая механика, или А. И. Лурье, Аналитическая механика, Физматгиз, 1961.

$$U_3^{(0,2,1)} = \frac{1}{2}\int\limits_{(T)} (15y'^2-3r'^2)z'\,dm = -\frac{3}{2}I_3^{(2,0,1)} + 6I_3^{(0,2,1)} - \frac{3}{2}I_3^{(0,0,3)},$$

$$U_3^{(0,1,2)} = \frac{1}{2}\int\limits_{(T)} (15z'^2-3r'^2)y'\,dm = -\frac{3}{2}I_3^{(2,1,0)} - \frac{3}{2}I_3^{(0,3,0)} + 6I_3^{(0,1,2)},$$

$$U_3^{(0,0,3)} = \frac{1}{2}\int\limits_{(T)} (5z'^2-3r'^2)z'\,dm = -\frac{3}{2}I_3^{(2,0,1)} - \frac{3}{2}I_3^{(0,2,1)} + I_3^{(0,0,3)}.$$

Число независимых коэффициентов гармонического многочлена третьей степени равно $2\cdot 3+1=7$. Следовательно, 10 выписанных выражений не являются все независимыми и три из них должны выражаться через остальные семь. Нетрудно найти необходимые зависимости между этими коэффициентами:

$$3U_3^{(3,0,0)} + U_3^{(1,2,0)} + U_3^{(1,0,2)} = 0,$$
$$U_3^{(2,1,0)} + 3U_3^{(0,3,0)} + U_3^{(0,1,2)} = 0,$$
$$U_3^{(2,0,1)} + U_3^{(0,2,1)} + 3U_3^{(0,0,3)} = 0.$$

Из этих равенств можно выразить три коэффициента, например, $U_3^{(3,0,0)}$, $U_3^{(0,3,0)}$, $U_3^{(0,0,3)}$ через шесть. Седьмым независимым коэффициентом будет $U_3^{(1,1,1)}$, не входящий в эти равенства.

Окончательное выражение для U_3 можно написать, например, в следующем виде:

$$U_3(x, y, z) = U_3^{(1,2,0)}\left(xy^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + U_3^{(1,0,2)}\left(xz^2 - \frac{1}{3}x^3\right) +$$
$$+ U_3^{(2,1,0)}\left(x^2y - \frac{1}{3}y^3\right) + U_3^{(0,1,2)}\left(yz^2 - \frac{1}{3}y^3\right) +$$
$$+ U^{(2,0,1)}\left(x^2z - \frac{1}{3}z^3\right) + U_3^{(0,2,1)}\left(y^2z - \frac{1}{3}z^3\right) + U_3^{(1,1,1)}xyz. \quad (5.38')$$

4. Наконец, для $n=4$ имеем

$$U_4(x, y, z) = U_4^{(4,0,0)}x^4 + U_4^{(3,1,0)}x^3y + U_4^{(3,0,1)}x^3z +$$
$$+ U_4^{(2,2,0)}x^2y^2 + U_4^{(2,0,2)}x^2z^2 + U_4^{(2,1,1)}x^2yz + U_4^{(1,3,0)}xy^3 +$$
$$+ U_4^{(1,2,1)}xy^2z + U_4^{(1,1,2)}xyz^2 + U_4^{(1,0,3)}xz^3 + U_4^{(0,4,0)}y^4 +$$
$$+ U_4^{(0,3,1)}y^3z + U_4^{(0,2,2)}y^2z^2 + U_4^{(0,1,3)}yz^3 + U_4^{(0,0,4)}z^4, \quad (5.39)$$

где коэффициенты, ввиду (5.33), определяются формулами

$$U_4^{(4,0,0)} = \frac{1}{8}\int\limits_{(T)} (35x'^4 - 30x'^2r'^2 + 3r'^4)\,dm =$$
$$= \frac{1}{4}I_4^{(4,0,0)} - 3I_4^{(2,2,0)} - 3I_4^{(2,0,2)} + \frac{3}{4}I_4^{(0,2,2)} + \frac{3}{8}I_4^{(0,4,0)} + \frac{3}{8}I_4^{(0,0,4)},$$

$$U_4^{(3,\,1,\,0)}=\frac{5}{2}\int\limits_{(T)}(7x'^2-3r'^2)\,x'y'\,dm=10I_4^{(3,\,1,\,0)}-\frac{15}{2}\,I_4^{(1,\,3,\,0)}-\frac{15}{2}\,I_4^{(1,\,1,\,2)},$$

$$U_4^{(3,\,0,\,1)}=\frac{5}{2}\int\limits_{(T)}(7x'^2-3r'^2)\,x'z'\,dm=10I_4^{(3,\,0,\,1)}-\frac{15}{2}\,I_4^{(1,\,2,\,1)}-\frac{15}{2}\,I_4^{(1,\,0,\,3)},$$

$$U_4^{(2,\,2,\,0)}=\frac{3}{4}\int\limits_{(T)}(35x'^2y'^2-5x'^2r'^2-5y'^2r'^2+r'^4)\,dm=$$

$$=\frac{81}{4}\,I_4^{(2,\,2,\,0)}-3I_4^{(4,\,0,\,0)}-\frac{9}{4}\,I_4^{(2,\,0,\,2)}-\frac{9}{4}\,I_4^{(0,\,2,\,2)}+\frac{3}{4}\,I_4^{(0,\,4,\,0)}+\frac{3}{4}\,I_4^{(0,\,0,\,4)},$$

$$U_4^{(2,\,0,\,2)}=\frac{3}{4}\int\limits_{(T)}(35x'^2z'^2-5x'^2r'^2-5z'^2r'^2+r'^4)\,dm=$$

$$=\frac{81}{4}\,I_4^{(2,\,0,\,2)}-\frac{9}{4}\,I_4^{(2,\,2,\,0)}-3I_4^{(4,\,0,\,0)}-\frac{9}{4}\,I_4^{(0,\,2,\,2)}-3I_4^{(0,\,0,\,4)}+\frac{3}{4}\,I_4^{(0,\,4,\,0)},$$

$$U_4^{(2,\,1,\,1)}=\frac{15}{2}\int\limits_{(T)}(7x'^2-r'^2)\,y'z'\,dm=45I_4^{(2,\,1,\,1)}-\frac{15}{2}\,I_4^{(0,\,3,\,1)}-\frac{15}{2}\,I_4^{(0,\,1,\,3)},$$

$$U_4^{(1,\,3,\,0)}=\frac{5}{2}\int\limits_{(T)}(7y'^2-3r'^2)\,x'y'\,dm=10I_4^{(1,\,3,\,0)}-\frac{15}{2}\,I_4^{(3,\,1,\,0)}-\frac{15}{2}\,I_4^{(1,\,1,\,2)},$$

$$U_3^{(1,\,2,\,1)}=\frac{15}{2}\int\limits_{(T)}(7y'^2-r'^2)\,x'z'\,dm=45I_4^{(1,\,2,\,1)}-\frac{15}{2}\,I_4^{(3,\,0,\,1)}-\frac{15}{2}\,I_4^{(1,\,0,\,3)},$$

$$U_4^{(1,\,1,\,2)}=\frac{15}{2}\int\limits_{(T)}(7z'^2-r'^2)\,x'y'\,dm=45I_4^{(1,\,1,\,2)}-\frac{15}{2}\,I_4^{(3,\,1,\,0)}-\frac{15}{2}\,I_4^{(1,\,3,\,0)},$$

$$U_4^{(1,\,0,\,3)}=\frac{5}{2}\int\limits_{(T)}(7z'^2-3r'^2)\,x'z'\,dm=10I_4^{(1,\,0,\,3)}-\frac{15}{2}\,I_4^{(1,\,2,\,1)}-\frac{15}{2}\,I_4^{(3,\,0,\,1)},$$

$$U_4^{(0,\,4,\,0)}=\frac{1}{8}\int\limits_{(T)}(35y'^4-30y'^2r'^2+3r'^4)\,dm=$$

$$=I_4^{(0,\,4,\,0)}-3I_4^{(2,\,2,\,0)}-3I_4^{(0,\,2,\,2)}+\frac{3}{8}\,I_4^{(4,\,0,\,0)}+\frac{3}{8}\,I_4^{(0,\,0,\,4)}+\frac{3}{8}\,I_4^{(2,\,0,\,2)},$$

$$U_4^{(0,\,3,\,1)}=\frac{5}{2}\int\limits_{(T)}(7y'^2-3r'^2)\,y'z'\,dm=10I_4^{(0,\,3,\,1)}-\frac{15}{2}\,I_4^{(2,\,1,\,1)}-\frac{15}{2}\,I_4^{(0,\,1,\,3)},$$

$$U_4^{(0,\,2,\,2)}=\frac{3}{4}\int\limits_{(T)}(35y'^2z'^2-5z'^2r'^2-5y'^2r'^2+r'^4)\,dm=$$

$$=\frac{81}{4}\,I_4^{(0,\,2,\,2)}-\frac{3}{4}\,I_4^{(2,\,0,\,2)}+\frac{3}{4}\,I_4^{(4,\,0,\,0)}-\frac{9}{4}\,I_4^{(2,\,2,\,0)}-3I_4^{(0,\,0,\,4)}-3I_4^{(0,\,4,\,0)},$$

$$U_4^{(0,1,3)} = \frac{5}{2}\int\limits_{(T)} (7z'^2-3r'^2)\,y'z'\,dm = 10I_4^{(0,1,3)} - \frac{15}{2}I_4^{(2,1,1)} - \frac{15}{2}I_4^{(0,3,1)},$$

$$U_4^{(0,0,4)} = \frac{1}{8}\int\limits_{(T)} (35z'^4 - 30z'^2r'^2 + 3r'^4)\,dm =$$

$$= I_4^{(0,0,4)} - 3I_4^{(2,0,2)} - 3I_4^{(0,2,2)} + \frac{3}{8}I_4^{(4,0,0)} + \frac{3}{8}I_4^{(0,4,0)} + \frac{3}{4}I_4^{(2,2,0)}.$$

Из этих 15 коэффициентов в силу гармоничности многочлена U_4 только $2\cdot 4+1=9$ независимы, а остальные шесть выражаются через девять независимых. Нетрудно установить, что коэффициенты многочлена U_4 связаны следующими соотношениями:

$$6U_4^{(4,0,0)} + U_4^{(2,2,0)} + U_4^{(2,0,2)} = 0, \quad 3U_4^{(3,1,0)} + 3U_4^{(1,3,0)} + U_4^{(1,1,2)} = 0,$$

$$3U_4^{(3,0,1)} + U_4^{(1,2,1)} + 3U_4^{(1,0,3)} = 0, \quad U_4^{(2,2,0)} + 6U_4^{(0,4,0)} + U_4^{(0,2,2)} = 0,$$

$$U_4^{(2,0,2)} + U_4^{(0,2,2)} + 6U_4^{(0,0,4)} = 0, \quad U_4^{(2,1,1)} + 3U_4^{(0,3,1)} + 3U_4^{(0,1,3)} = 0,$$

из которых можем выразить шесть коэффициентов через остальные.

Например, можем написать

$$U_4^{(4,0,0)} = -\frac{1}{6}U_4^{(2,2,0)} - \frac{1}{6}U_4^{(2,0,2)}, \quad U_4^{(1,1,2)} = -3U_4^{(3,1,0)} - 3U_4^{(1,3,0)},$$

$$U_4^{(0,4,0)} = -\frac{1}{6}U_4^{(2,2,0)} - \frac{1}{6}U_4^{(0,2,2)}, \quad U_4^{(1,2,1)} = -3U_4^{(3,0,1)} - 3U_4^{(1,0,3)},$$

$$U_4^{(0,0,4)} = -\frac{1}{6}U_4^{(2,0,2)} - \frac{1}{6}U_4^{(0,2,2)}, \quad U_4^{(2,1,1)} = -3U_4^{(0,3,1)} - 3U_4^{(0,1,3)},$$

и тогда формула (5.39) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} U_4(x,\,y,\,z) = {} & U_4^{(2,2,0)}\left(x^2y^2 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}y^4\right) + \\ & + U_4^{(2,0,2)}\left(x^2z^2 - \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{6}z^4\right) + U_4^{(0,2,2)}\left(y^2z^2 - \frac{1}{6}y^4 - \frac{1}{6}z^4\right) + \\ & + U_4^{(3,1,0)}(x^3y - 3xyz^2) + U_4^{(1,3,0)}(xy^3 - 3xyz^2) + \\ & + U_4^{(3,0,1)}(x^3z - 3xy^2z) + U_4^{(1,0,3)}(xz^3 - 3xy^2z) + \\ & + U_4^{(0,3,1)}(y^3z - 3x^2yz) + U_4^{(0,1,3)}(yz^3 - 3x^2yz). \end{aligned} \qquad (5.39')$$

5. Вычисленные многочлены позволяют написать следующее приближенное выражение для силовой функции тела T:

$$U(x,\,y,\,z) = f\left\{\frac{m}{r} + \sum_{n=1}^{4}\frac{U_n(x,\,y,\,z)}{r^{2n+1}} + \ldots\right\}. \qquad (5.40)$$

Если же начало координат взять в центре масс тела, а за координатные оси принять главные центральные оси инерции, то будем иметь следующее выражение:

$$U(x, y, z) = f\left\{\frac{m}{r} + \frac{A+B+C-3I}{2r^3} + \frac{U_3(x, y, z)}{r^7} + \frac{U_4(x, y, z)}{r^9} + \ldots\right\}. \tag{5.40'}$$

Заметим, что на практике большей частью можно ограничиться только двумя первыми членами ряда и писать

$$U(x, y, z) = f\left\{\frac{m}{r} + \frac{A+B+C-3I}{2r^3} + \ldots\right\}. \tag{5.40''}$$

Переходя теперь к вычислению многочленов $\tilde{U}_n$, определяемых формулой

$$\tilde{U}_n(x, y, z) = \int\limits_{(T)} \frac{\tilde{P}_n(P, M)\,dm}{r'^{2n+1}},$$

можно заметить, что это выражение отличается от выражения (5.24) для многочленов U_n только множителем r'^{-2n-1} подынтегрального выражения. Поэтому все коэффициенты многочленов $\tilde{U}_n$ получатся введением множителя r'^{-2n-1} в подынтегральные выражения формул, определяющих коэффициенты U_n и нет нужды выписывать все эти громоздкие выражения еще раз. Разумеется, между коэффициентами гармонических многочленов $\tilde{U}_n(x, y, z)$ существуют такие же соотношения гармоничности, как и между коэффициентами многочленов $U_n(x, y, z)$.

Коэффициенты A_{nk}, B_{nk} и $\tilde{A}_{nk}$, $\tilde{B}_{nk}$ разложений (5.10) и (5.16) силовой функции по сферическим гармоникам могут быть, конечно, вычислены непосредственно по формулам (5.12), (5.13) и (5.18), (5.19), но могут быть также выражены через коэффициенты гармонических многочленов U_n и $\tilde{U}_n$.

В самом деле, сферические функции, «игреки Лапласа», получаются из гармонических многочленов путем замены прямоугольных координат через полярные сферические, по формулам (5.3), что позволяет выразить $2n+1$ независимых коэффициентов гармонического многочлена n-й степени через $2n+1$ коэффициентов сферической функции n-го порядка. Наоборот, заменяя синусы и косинусы сферических кординат в общем выражении для $Y_n(\theta, \lambda)$ их значениями в функции x, y, z, мы перейдем от сферической функции к гармоническому многочлену, что опять позволит написать соотношения между коэффициентами обеих функций.

Произведя такое вычисление для $n=0$, 1, 2, мы получим

$$A_{00}=m, \quad A_{10}=m\bar{z}, \quad A_{11}=m\bar{x}, \quad A_{12}=m\bar{y},$$

$$A_{20}=\frac{A+B-2C}{2}, \quad A_{22}=\frac{B-A}{2},$$

$$B_{22}=\frac{1}{6}D, \quad A_{21}=\frac{1}{3}E, \quad B_{21}=\frac{1}{3}F,$$

и первые члены разложения функции U для случая $r>\bar{r}$ напишутся в виде

$$U(r,\ \theta,\ \lambda)=f\left\{\frac{m}{r}+\frac{m}{r^2}(\bar{x}\sin\theta\cos\lambda+\bar{y}\sin\theta\sin\lambda+\bar{z}\cos\theta)+\right.$$
$$+\frac{A+B-2C}{2r^3}P_2(\cos\theta)+\frac{3(B-A)}{4r^3}\sin^2\theta\cos 2\lambda+$$
$$\left.+\frac{D}{2r^3}\sin^2\theta\sin 2\lambda+\frac{E}{2r^3}\sin 2\theta\cos\lambda+\frac{F}{2r^3}\sin 2\theta\sin\lambda+\ \ldots\right\}. \quad (5.41)$$

Если начало системы координат $Oxyz$ взято в центре инерции тела T, то имеем более простую формулу:

$$U(r,\ \theta,\ \lambda)=f\left\{\frac{m}{r}+\frac{A+B-2C}{2r^3}P_2(\cos\theta)+\right.$$
$$\left.+\frac{3(B-A)}{4r^3}\sin^2\theta\cos 2\lambda+\ \ldots\right\}. \quad (5.41')$$

§ 4. Некоторые частные случаи разложения силовой функции

В предыдущих параграфах мы рассматривали задачу о разложении силовой функции притягивающего тела, форма и строение которого предполагались достаточно произвольными. Система координат, к которой относилось наше тело и притягиваемая материальная точка (единичной массы), вообще оставалась какой угодно, и лишь в одном случае мы показали, как упрощается разложение, если за систему координат принять главные центральные оси инерции притягивающего тела.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые важные частные случаи, в которых притягивающее тело обладает некоторой геометрической и динамической симметрией, вследствие чего разложение силовой функции надлежащим выбором системы координат может быть значительно упрощено.

1. Пусть тело T таково, что его форма обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии, общая точка пересечения которых является тогда также центром симметрии.

Например, из тел, имеющих только одно измерение (материальная линия), такой симметрией обладают, очевидно, прямолинейный отрезок, окружность, эллипс, периметр квадрата или прямоугольника и т. д. Из тел, имеющих два измерения (материальная поверхность), такой симметрией обладают квадрат, прямоугольник, круглый или эллиптический диск, поверхность шара или эллипсоида и т. д. Из трехмерных тел такой симметрией обладают куб, шар, эллипсоид, круглый или эллиптический цилиндр и др.

Но если тело обладает только геометрической симметрией, а распределение плотностей в нем остается произвольным, то никакого упрощения мы вообще не получим.

Поэтому допустим, что тело обладает не только геометрической, но и механической (или динамической) симметрией относительно тех же трех взаимно перпендикулярных плоскостей. Иными словами, предположим, что притягивающее вещество расположено симметрично относительно этих плоскостей, что будет, например, всегда в том случае, когда тело, обладающее геометрической симметрией, вдобавок однородно. Но и неоднородные тела могут обладать динамической симметрией, примером чего может быть шар, обладающий сферическим распределением плотностей или, вообще, эллипсоидальное тело с эллипсоидальным распределением плотностей *).

Итак, пусть тело T обладает указанной геометрической и динамической симметрией относительно трех взаимно перпендикулярных плоскостей. Тогда, по соображениям симметрии, очевидно, что общая точка пересечения этих плоскостей (т. е. центр симметрии тела) является также его центром инерции, а линии пересечения плоскостей симметрии являются также главными центральными осями инерции тела T.

Возьмем начало координат в центре инерции тела, а за координатные оси примем упомянутые главные центральные оси инерции. Тогда плотность тела T (линейная, поверхностная или объемная), т. е. функция $\delta(M)=\delta(x', y', z')$ будет, очевидно, удовлетворять одновременно следующим условиям:

$$\delta(-x', y', z')=\delta(x', -y', z')=$$
$$=\delta(x', y', -z')=\delta(x', y', z'). \quad (5.42)$$

Пусть теперь вообще $\Phi(M)$ есть некоторая неотрицательная функция текущей точки $M(x', y', z')$ тела, также удовлетворяющая условиям (5.42). Тогда, как нетрудно убедиться, все интегралы типа

$$\int\limits_{(T)} \Phi(M)x'\,dT, \quad \int\limits_{(T)} \Phi(M)x'y'\,dT, \quad \int\limits_{(T)} \Phi(M)x'y'z'\,dT, \quad (5.43)$$

---

*) Поверхности равной плотности такого эллипсоидального тела будут, очевидно, подобными эллипсоидами, имеющими общий центр с эллипсоидом, ограничивающим тело снаружи, и расположенными подобно ему. Но поверхности равной плотности не обязательно будут подобны внешней поверхности тела.

будут равны нулю. Доказательство может быть проведено совершенно так же, как аналогичное доказательство для случая однородного эллипсоида в § 5 гл. III. Возьмем например, интеграл первого типа с множителем z'. Так как область интегрирования симметрична относительно плоскости xOy, то мы можем написать $((T_2)=(T_1))$

$$\int_{(T)} \Phi(M) z'\,dT = \int_{(T_1)} \Phi(M) z'\,dT + \int_{(T_2)} \Phi(M) z'\,dT.$$

Полагая во втором интеграле $z'=-\zeta$ и имея в виду симметрию области интегрирования и свойство функции $\Phi(M)$, мы найдем

$$\int_{(T)} \Phi(M) z'\,dT = \int_{(T_1)} \Phi(M) z'\,dT - \int_{(T_1)} \Phi(M) \zeta\,dT = 0.$$

Подобным же образом показывается, что и все другие интегралы типа (5.43) равны нулю.

В частности, интегралы

$$\int_{(T)} x'\,dm = \int_{(T)} \delta(x', y', z') x'\,dT, \ldots$$

и

$$\int_{(T)} x'y'\,dm = \int_{(T)} \delta(x', y', z') x'y'\,dT, \ldots$$

суть, очевидно, интегралы типа (5.43) и, следовательно, равны нулю. Поэтому, действительно, центр симметрии тела является одновременно его центром инерции (центром масс), а оси симметрии — главными центральными осями инерции.

Рассмотрим теперь многочлены U_n и $\bar{U}_n$, определяемые формулами (5.24) и (5.26) и коэффициенты которых даются формулами (5.25′), (5.25″) и, соответственно, (5.26′) и (5.26″).

Так как плотность $\delta(x', y' z')$ удовлетворяет условиям (5.42), а функция

$$\frac{1}{r'^{2n+1}} = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{-n-\frac{1}{2}}$$

при любом n есть тоже функция типа $\Phi(M)$, то, если хотя бы одно из трех чисел k_1', k_2', k_3' есть число нечетное, соответствующий интеграл $I_n^{(k_1', k_2', k_3')}$ или $\bar{I}_n^{(k_1', k_2', k_3')}$ будет одним из интегралов типа (5.43), а следовательно, будет равен нулю.

Отсюда следует, что если n число нечетное, и так как $k_1'+k_2'+k_3'=n$, то либо одно из k_1', k_2', k_3' либо все три обязательно также будут нечетными, а поэтому все интегралы в формулах (5.25′), (5.26′) будут интегралами типа (5.43) при любых k_1, k_2, k_3, сумма которых есть n.

Поэтому все коэффициенты

$$U_n^{(k_1,\,k_2,\,k_3)},\qquad \tilde{U}_n^{(k_1,\,k_2,\,k_3)}$$

будут равны нулю. Следовательно, при n нечетном все многочлены U и $\tilde{U}_n$ тождественно равны нулю и соответствующие разложения силовой функции напишутся для этого случая в виде: для $r > \bar{r}$

$$U(x,\,y,\,z) = f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_{2n}(x,\,y,\,z)}{r^{4n+1}}, \tag{5.44}$$

и для $r < \underline{r}$

$$U(x,\,y,\,z) = f\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{U}_{2n}(x,\,y,\,z). \tag{5.45}$$

Многочлены U_{2n} и $\tilde{U}_{2n}$ с четными индексами, разумеется, не равны нулю, но значительно упрощаются. Действительно, из формулы (5.22) следует, что при четном n во всех членах, в которых x, y, z входят только в четных степенях, координаты x', y', z' также входят только в четных степенях. Поэтому коэффициенты (5.25′), (5.26′), для которых (при четном n) все три показателя k_1, k_2, k_3 суть числа четные, вообще отличны от нуля, а все остальные коэффициенты заведомо равны нулю. Следовательно, многочлены U_{2n} и $\tilde{U}_{2n}$ содержат в рассматриваемом случае только члены с четными степенями координат x, y, z и мы имеем, например,

$$\begin{aligned}
U_2(x,\,y,\,z) &= U_2^{(2,\,0,\,0)}x^2 + U_2^{(0,\,2,\,0)}y^2 + U_2^{(0,\,0,\,2)}z^2,\\
U_4(x,\,y,\,z) &= U_4^{(4,\,0,\,0)}x^4 + U_4^{(0,\,4,\,0)}y^4 + U_4^{(0,\,0,\,4)}z^4 +\\
&\quad + U_4^{(2,\,2,\,0)}x^2y^2 + U_4^{(2,\,0,\,2)}x^2z^2 + U_4^{(0,\,2,\,2)}y^2z^2
\end{aligned}$$

2. Перейдем теперь к рассмотрению другого важного частного случая, когда притягивающее тело обладает и геометрической и динамической симметрией относительно некоторой оси. Так, например, геометрической осевой симметрией обладает тело, внешняя поверхность которого есть поверхность вращения вокруг некоторой оси. Тело может быть также простым слоем, распределенным на поверхности вращения. Из одномерных тел геометрической симметрией обладает только окружность и, можно сказать, прямолинейный отрезок.

Если осесимметричное тело однородно, то оно обладает также и механической симметрией относительно той же оси. Но осесимметричное тело может быть и неоднородным.

Простейшим примером тела, обладающего геометрической и динамической симметрией, является, очевидно, однородная материальная окружность (а также однородный прямолинейный отрезок!). Если тело есть простой слой, распределенный на поверхности вращения, то оно обладает механической симметрией, если плотность остается неизменной на любой параллели *), но изменяется произвольным образом при переходе с одной параллели на другую. Наконец, объемное тело обладает указанной симметрией, если в каждом сечении, перпендикулярном к оси вращения, плотность тела зависит только от расстояния до этой оси.

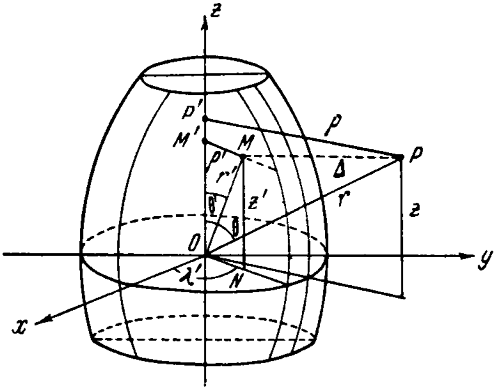


Рис. 30.

Покажем, что разложение силовой функции тела, обладающего геометрической и механической симметрией относительно одной и той же оси, принимает чрезвычайно простой вид, если ось вращения принята за одну из координатных осей декартовой системы координат.

Итак, рассмотрим тело T (одномерное, двумерное или трехмерное), обладающее указанной геометрической и механической симметрией относительно некоторой оси, которую примем за ось аппликат системы координат $Oxyz$. За начало координат примем произвольную точку, лежащую на этой оси, и будем сначала пользоваться сферическими полярными координатами r, θ, λ, к которым присоединим еще расстояние точки до оси вращения ρ, причем очевидно, что $\rho = r \sin\theta$ (рис. 30).

Пусть, как обычно, M есть текущая точка тела, в которой сосредоточен элемент притягивающей массы $dm = \delta(M)\,dT$, где, как и выше, dT обозначает пространственный элемент (линейный, поверхностный или объемный).

Для осесимметричного тела плотность $\delta(M)$, очевидно, не зависит от долготы текущей точки λ' и есть, следовательно,

---

*) «Параллелью» поверхности вращения называют окружность, получающуюся пересечением поверхности плоскостью, перпендикулярной к оси вращения. Если тело обладает, вдобавок, плоскостью симметрии, перпендикулярной к оси вращения, то соответствующая ей параллель называется «экватором». «Меридианом» поверхности вращения называют линию пересечения поверхности вращения плоскостью, проходящей через ось вращения (плоскость меридиана). Очевидно, все меридианы одинаковы и тождественны с производящей кривой, образующей поверхность.

некоторая заданная функция от двух других сферических координат; мы можем использовать для нее какое-либо из следующих обозначений:

$$\delta(M),\quad \delta(r',\theta'),\quad \delta(\rho',\theta'),\quad \delta(r',z'),\quad \delta(\rho',z').$$

Рассмотрим разложения (5.10) и (5.16) силовой функции произвольного притягивающего тела по сферическим функциям $Y_n(\theta,\lambda)$ и $\bar{Y}_n(\theta,\lambda)$ соответственно. Эти сферические функции определяются соответственно формулами (5.11) и (5.17), а их числовые коэффициенты — формулами (5.12), (5.13) и (5.18), (5.19).

Выражения для коэффициентов сферических функций определяются, таким образом, интегралами, взятыми по всей массе притягивающего тела, а так как тело T обладает геометрической симметрией относительно оси аппликат, то одно из интегрирований в выражениях коэффициентов есть обязательно интегрирование по долготе λ' и производится в пределах от $\lambda'=0$ до $\lambda'=2\pi$. Но плотность $\delta(M)$, входящая множителем в dm, не зависит от λ', а поэтому интегрирования по λ' сводятся к вычислению интегралов

$$\int_0^{2\pi} \cos k\lambda'\,d\lambda',\qquad \int_0^{2\pi} \sin k\lambda'\,d\lambda',$$

которые все равны нулю для $k=1, 2, 3, \ldots$, а для $k=0$ первый из них равен 2π.

Следовательно, все коэффициенты A_{nk}, B_{nk} и $\bar{A}_{nk}$, $\bar{B}_{nk}$ равны нулю, за исключением A_{n0} и $\bar{A}_{n0}$, которые вообще отличны от нуля и являются некоторыми характерными для тела T постоянными.

Теперь разложения (5.10) и (5.16) напишутся в следующем виде*):

для $r > \bar{r}$:

$$U(r,\theta) = f\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n0}P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}, \tag{5.46}$$

и для $r < \underline{r}$:

$$U(r,\theta) = f\sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{n0} r^n P_n(\cos\theta). \tag{5.47}$$

---

*) $\bar{r}$ есть наибольшее из расстояний точек какого-либо меридиана внешней поверхности тела до начала, а $\underline{r}$ (в случае существования внутренней полости) — наименьшее из расстояний точек меридиана поверхности, ограничивающей внутреннюю полость тела.

Эти разложения не зависят от долготы λ притягиваемой точки P, что, впрочем, можно было предвидеть заранее по соображениям симметрии.

Формулы (5.46) и (5.47) легко преобразовать к прямоугольным координатам, для чего нужно просто заменить в этих формулах $\cos 0$ на z/r.

Делая это и воспользовавшись формулой (4.29) для многочленов Лежандра, мы получим разложения силовой функции вида (5.20) и (5.21), которые для рассматриваемого случая примут вид

для $r > \bar{r}$:

$$U(r,\ z) = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n0}}{r^{n+1}} P_n\left(\frac{z}{r}\right) = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_n(r,\ z)}{r^{2n+1}}, \tag{5.48}$$

где

$$U_n(r,\ z) = A_{n0} \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} P_{ns} z^{n-2s} r^{2s}, \tag{5.48'}$$

и для $r < \underline{r}$

$$U(r,\ z) = f \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{A}_{n0} r^n P_n\left(\frac{z}{r}\right) = f \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{U}_n(r,\ z), \tag{5.49}$$

где

$$\tilde{U}_n(r,\ z) = \tilde{A}_{n0} \sum_{s=0}^{E\left(\frac{n}{2}\right)} P_{ns} z^{n-2s} r^{2s}. \tag{5.49'}$$

3. Разложения (5.46), (5.47) и (5.48), (5.49) справедливы для любого тела, обладающего геометрической и механической симметрией относительно одной и той же оси. Если же тело T обладает к тому же симметрией относительно некоторой плоскости, перпендикулярной к этой оси, то получающиеся разложения силовой функции можно еще несколько упростить надлежащим выбором начала координат.

Действительно, всякое осесимметричное тело обладает, очевидно, бесчисленным множеством плоскостей симметрии, которые все проходят через ось симметрии (меридианные плоскости). Поэтому существует также бесчисленное множество пар взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии, а если тело T обладает еще и плоскостью симметрии, перпендикулярной к оси симметрии, то это тело имеет тогда три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии, и мы приходим опять к случаю, рассмотренному выше.

В этом случае точка пересечения оси симметрии с плоскостью симметрии является также центром симметрии, а значит, и центром инерции тела T.

Следовательно, если мы примем центр симметрии за начало координат, оставляя ось симметрии осью аппликат (тогда плоскость симметрии, перпендикулярная к оси вращения, т. е. плоскость экватора, будет плоскостью xOy), мы должны получить разложение силовой функции в виде (5.44) и (5.45) соответственно, откуда следует, что все постоянные A_{n0} и $\tilde{A}_{n0}$ с нечетными индексами должны быть равны в этом случае нулю. Разложения силовой функции напишутся для этого случая в виде

для $r > \bar{r}$:

$$U(r,\ \theta) = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{2n,\,0} P_{2n}(\cos\theta)}{r^{2n+1}}, \tag{5.46'}$$

$$U(r,\ z) = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{U_{2n}(r,\ z)}{r^{4n+1}}, \tag{5.48''}$$

и для $r < \bar{r}$:

$$U(r,\ \theta) = f \sum_{n=0}^{\infty} A_{2n,\,0} r^{2n} P_{2n}(\cos\theta), \tag{5.47'}$$

$$U(r,\ z) = f \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{U}_{2n}(r,\ z). \tag{5.49''}$$

Укажем формулы для вычисления коэффициентов A_{n0} и $\tilde{A}_{n0}$ отдельно для случая, когда притягивающее тело есть простой слой, и отдельно для трехмерного тела.

Итак, пусть тело T есть простой слой, лежащий на поверхности вращения вокруг оси Oz, и пусть $r' = f(\theta')$ есть уравнение производящей кривой, или меридианного сечения тела.

Поверхностная плотность слоя $\delta(M)$ не должна зависеть от долготы λ' и есть, следовательно, функция только от угла θ'. Эту плотность можно рассматривать так же, как функцию от $\nu' = \cos\theta'$, или как функцию от r', так что мы можем использовать для нее одно из обозначений

$$\delta(M), \quad \delta(\theta'), \quad \delta(\nu'), \quad \delta(r').$$

Имея теперь в виду, что элемент площади поверхности вращения можно определить формулой

$$d\sigma = 2\pi\rho'\, ds',$$

где

$$\rho' = r' \sin\theta', \quad ds' = d\theta' \sqrt{r'^2 + \left(\frac{dr'}{d\theta'}\right)^2},$$

мы получим без труда

$$A_{n0} = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r'^{n+1} P_n(\cos\theta')\, \delta(\theta') \sin\theta' \sqrt{r'^2 + \left(\frac{dr'}{d\theta'}\right)^2}\, d\theta', \tag{5.50}$$

и

$$\tilde{A}_{n0}=2\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta} r'^{-n}P_n(\cos\theta')\,\delta(\theta')\sin\theta'\sqrt{r'^2+\left(\frac{dr'}{d\theta'}\right)^2}\,d\theta', \quad (5.51)$$

где α и β суть значения угла θ', соответствующие концевым точкам производящей кривой.

Можно, конечно, получить и другие формулы для вычисления этих коэффициентов, в зависимости от того, какая переменная принята за переменную интегрирования.

Пусть теперь поверхность, несущая слой, симметрична относительно плоскости, перпендикулярной к оси вращения. Примем за начало координат точку пересечения оси вращения и плоскости симметрии («центр» поверхности), и пусть в этой системе координат плотность слоя удовлетворяет условию

$$\delta(\pi-\theta')=\delta(\theta').$$

Тогда притягивающее тело обладает не только геометрической, но и механической симметрией, и все коэффициенты разложения с нечетными значками должны быть равны нулю.

Действительно, в этом случае

$$\beta=\pi-\alpha, \quad r'(\pi-\theta')=r'(\theta')$$

и так как $P_n(\cos\theta')$ при нечетных n содержит только нечетные степени $\cos\theta'$, то формулы (5.50) и (5.51) дают непосредственно $A_{2n+1,\,0}=\tilde{A}_{2n+1,\,0}=0$.

Рассмотрим теперь случай трехмерного тела, обладающего геометрической и механической осевой симметрией.

Пусть $r=f(\theta)$ есть уравнение производящей кривой внешней поверхности тела, α и β — значения полярного угла θ, соответствующего концам дуги этой кривой и $\delta(r', \theta')$ — объемная плотность тела.

Так как элемент массы можно определить по формуле

$$dm=\delta(r', \theta')\,r'^2\sin\theta'\,dr'\,d\theta'\,d\lambda',$$

то формулы (5.12) и (5.18) после выполнения интегрирования по долготе λ' напишутся в виде

$$A_{n0}=2\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta}\int\limits_{0}^{f(\theta')} r'^{n+2}P_n(\cos\theta')\,\delta(r', \theta')\sin\theta'\,dr'\,d\theta', \quad (5.52)$$

и

$$\tilde{A}_{n0}=2\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta}\int\limits_{0}^{f(\theta')} r'^{-n+1}P_n(\cos\theta')\,\delta(r', \theta')\sin\theta'\,dr'\,d\theta'. \quad (5.53)$$

Выбирая переменные интегрирования как-нибудь иначе, мы получим некоторые другие, иногда более удобные, формулы для этих коэффициентов.

Возьмем, например, вместо сферических координат r, θ, λ цилиндрические ρ, z, λ.

Пусть $\rho = R(z)$ есть уравнение производящей кривой внешней поверхности тела, c и d — аппликаты концов дуги этой кривой (меридиана) и $\delta(\rho', z')$ — плотность тела.

Тогда имеем следующие формулы:

$$A_{n0} = 2\pi \int\limits_c^d \int\limits_0^{R(z')} r'^n P_n\left(\frac{z'}{r'}\right) \delta(\rho', z') \rho' \, d\rho' \, dz' \qquad (5.52')$$

и

$$\tilde{A}_{n0} = 2\pi \int\limits_c^d \int\limits_0^{R(z')} r'^{-n-1} P_n\left(\frac{z'}{r'}\right) \delta(\rho', z') \rho' \, d\rho' \, dz'. \qquad (5.53')$$

Пусть теперь тело T обладает кроме того симметрией относительно некоторой плоскости, перпендикулярной к оси симметрии (плоскость экватора). Тогда точка пересечения этой плоскости с осью симметрии является центром инерции тела, а две главные оси инерции лежат в этой плоскости симметрии.

Возьмем эту точку за начало координат, оставляя осью аппликат ось симметрии, так что плоскость экватора есть плоскость xOy.

Тогда, очевидно, будем иметь

$$f(\pi - \theta') = f(\theta'), \quad \delta(r', \pi - \theta') = \delta(r', \theta'), \quad \beta = \pi - \alpha,$$

или

$$R(-z') = R(z'), \quad \delta(\rho', -z') = \delta(\rho', z'), \quad c = -d$$

и формулы (5.52), (5.53) или (5.52′), (5.53′) дадут непосредственно $A_{2n+1,0} = \tilde{A}_{2n+1,0} = 0$, как это и должно быть.

Примечание. Мы рассмотрели в этом параграфе случаи, когда притягивающее тело имеет либо три взаимно перпендикулярные плоскости геометрической и механической симметрии, либо когда тело имеет ось симметрии, а стало быть, бесчисленное множество пар взаимно перпендикулярных плоскостей симметрии.

Вообще возможен и такой случай, когда тело имеет всего только одну плоскость симметрии. В этом случае разложение силовой функции не допускает существенного упрощения. Можно отметить только, что если такую плоскость симметрии взять за одну из координатных плоскостей, например, за плоскость

xOy, то силовая функция сделается четной функцией относительно координаты z, и, следовательно, будет содержать только четные степени z.

Поэтому разложения типа (5.20) и (5.21) здесь остаются в силе, только многочлены U_n и $\tilde{U}_n$ будут удовлетворять условиям

$$U_n(x,\ y,\ -z)=U_n(x,\ y,\ z),$$

$$\tilde{U}_n(x,\ y,\ -z)=\tilde{U}_n(x,\ y,\ z).$$

Полезно еще заметить, что если тело имеет единственную плоскость симметрии, то цетр инерции тела обязательно находится в этой плоскости и может быть принят за начало координат.

Тогда многочлен $U_1(x,\ y,\ z)$ будет тождественно равен нулю и это будет единственное упрощение, возможное в отмечаемом случае.

§ 5. Простейшие примеры разложения силовой функции

1. Здесь мы будем рассматривать некоторые специальные случаи, когда оказывается возможным дать общие выражения для коэффициентов разложения силовой функции притягивающего тела в конечном виде, или, по крайней мере, в наиболее простой форме.

Такие примеры, естественно, приходится выбирать из тех случаев, когда тело T имеет возможно более простую (геометрически) форму и когда оно обладает возможно более простой структурой, например, когда его плотность есть величина постоянная.

Кроме того, на форму разложения силовой функции и на выражения для коэффициентов этого разложения оказывает также влияние выбор системы координат, так что иногда можно подходящим выбором координатной системы получить наипростейшие формулы.

Случаи, которые мы будем здесь рассматривать, имеют и методическое и прикладное значение, так как они часто встречаются в приложениях, например, в разнообразных задачах небесной механики, как классической, так и современной.

Случай 1. Прямолинейный материальный отрезок.

Пусть притягивающее тело T является прямолинейным материальным отрезком (стержнем!), вообще говоря, неоднородным. Тогда в обозначениях § 3 гл. II мы имеем следующее выражение для силовой функции такого стержня на внешнюю точку единичной массы, в произвольно выбранной системе координат *) (см. рис. 5 на стр. 56):

$$U(P)=f\int_{-l_1}^{+l_2}\frac{\delta(s)\,ds}{\sqrt{R^2+s^2+2R\nu s}}, \tag{5.54}$$

где плотность $\delta(s)$ есть заданная, интегрируемая в промежутке $(-l_1, +l_2)$ функция от расстояния s текущей точки M стержня до фиксированной его точки G, $R=\overline{PG}$ и $\nu=\cos(\overrightarrow{PG}, \overrightarrow{AB})$ (A — начало, B — конец стержня).

Используя выражение для производящей функции многочленов Лежандра, мы без труда получим разложение силовой функции в виде

$$U=\frac{f}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n P_n(\nu)}{R^n}, \tag{5.55}$$

где коэффициенты определяются формулой

$$A_n=(-1)^n\int_{-l_1}^{+l_2}\delta(s)\,s^n\,ds. \tag{5.56}$$

Ряд (5.55) сходится абсолютно и равномерно при $R>l$, где l наибольшее из двух чисел l_1 и l_2. Если точка G есть середина отрезка $\overline{AB}$ и плотность $\delta(s)$ удовлетворяет условию

$$\delta(-s)=\delta(s),$$

то все коэффициенты A_n с нечетными индексами равны нулю и разложение (5.55) получает следующий вид:

$$U=\frac{f}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_{2n}P_{2n}(\nu)}{R^{2n}}, \tag{5.55'}$$

где

$$A_{2n}=\int_{-l}^{+l}\delta(s)\,s^n\,ds \tag{5.56'}$$

(в этом случае $l_1=l_2=l$). В частности, если плотность $\delta(s)$ есть величина постоянная, то разложение силовой функции получает вид

$$U=\frac{fm}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P_{2n}(\nu)}{2n+1}\left(\frac{l}{R}\right)^{2n}, \tag{5.55''}$$

где $m=2l\delta$ — масса стержня.

---

*) В § 3 гл. II мы рассматривали однородный стержень. Этот случай получится, если считать в (5.54) плотность $\delta(M)$ постоянной и положить $m=\delta(l_1+l_2)$, где m — масса стержня.

Отметим еще, что, беря начало координат в точке G, а прямую $\overrightarrow{AB}$ принимая за ось аппликат, мы имеем

$$R=r, \quad \nu=\cos\theta,$$

и разложение (5.55) принимает вид (5.46), что и понятно, так как прямолинейный стержень можно рассматривать как предельный случай тела, обладающего осевой симметрией.

Случай 2. Однородная материальная окружность.

Пусть притягивающее тело есть однородная материальная окружность (круговое кольцо Гаусса). Как уже отмечалось, такое тело обладает и геометрической и механической симметрией относительно оси, проходящей через центр окружности, перпендикулярно к ее плоскости. Кроме того, очевидно, что такое тело можно считать также обладающим плоскостью симметрии, перпендикулярной к оси симметрии. Этой плоскостью является просто плоскость самой окружности.

Возьмем начало координат в произвольной точке оси окружности, и пусть a будет радиус окружности и h — расстояние от начала координат до центра окружности G (рис. 31).

Разложение силовой функции определится тогда формулами (5.46) и (5.47), а коэффициенты A_{n0} и $\tilde{A}_{n0}$ этих разложений найдутся по формулам (5.12) и (5.18) при $k=0$.

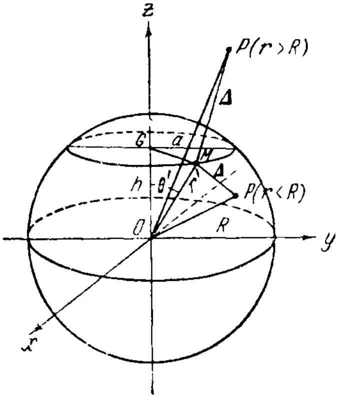


Рис. 31.

Так как

$$dm=\delta\, ds=a\delta\, d\lambda'$$

и для любой точки M окружности

$$r'=\sqrt{a^2+h^2}=\text{const}, \quad \cos\theta'=\frac{h}{\sqrt{a^2+h^2}}=\text{const},$$

то, полагая для сокращения

$$R=\sqrt{a^2+h^2},$$

мы найдем из формул (5.12) и (5.13) после интегрирования по λ' в пределах от 0 до 2π:

$$A_{n0}=2\pi a\delta R^n P_n\left(\frac{h}{R}\right),$$

$$\tilde{A}_{n0}=2\pi a\delta R^{-n-1} P_n\left(\frac{h}{R}\right).$$

Далее имеем, очевидно,

$$2\pi a\delta = m, \quad \bar{r} = r = R,$$

где m — масса кольца, и разложение силовой функции напишется следующим образом:

для $r > R$:

$$U(r, \theta) = \frac{fm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\frac{h}{R}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) \tag{5.57}$$

и для $r < R$:

$$U(r, \theta) = \frac{fm}{R} \sum_{n=0}^{\infty} P_n\left(\frac{h}{R}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^n P_n(\cos\theta). \tag{5.58}$$

Формулы (5.56) и (5.57) определяют силовую функцию гауссова кольца во всем пространстве, за исключением точек, лежащих на поверхности сферы радиуса R с центром в начале координат. Если точка P лежит на самом кольце, т. е. если

$$r = R, \quad \cos\theta = \frac{h}{R},$$

то, так как в этом случае силовая функция обращается в бесконечность (см. § 3 гл. II), ряды (5.57) и (5.58) заведомо расходятся.

Разложения (5.57) и (5.58) существенно упрощаются, если начало координат взять в центре кольца G (рис. 32).

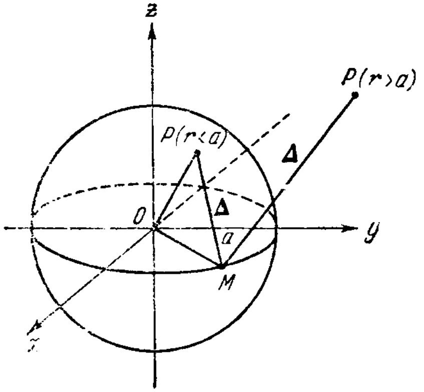


Рис. 32.

В этом случае, как нетрудно видеть,

$$h = 0, \quad R = a.$$

Кроме того, формулы (4.36) гл. IV дают

$$P_{2n+1}(0) = 0, \quad P_{2n}(0) = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

и мы получаем следующие разложения:

для $r > a$:

$$U(r, \theta) = \frac{fm}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\theta) \tag{5.57'}$$

и для $r<a$:

$$U(r, \theta) = \frac{fm}{a} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \left(\frac{r}{a}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\theta). \tag{5.58'}$$

Эти две формулы определяют силовую функцию кольца во всем пространстве, за исключением точек, лежащих на поверхности сферы радиуса a, центр которой совпадает с центром кольца.

Если точка P попадает на само кольцо, то ряды (5.57′) и (5.58′), безусловно, расходятся.

Отметим еще случай, когда притягиваемая точка находится в плоскости кольца. Тогда $\cos\theta=0$, и заменяя $P_{2n}(0)$ его значением, мы получим

для $r>a$:

$$U(r)=\frac{fm}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}, \tag{5.57″}$$

и для $r<a$:

$$U(r)=\frac{fm}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}. \tag{5.58″}$$

Заметим, что каждая из этих двух сумм представляет (с точностью до множителя $\frac{\pi}{2}$) разложение полного эллиптического интеграла первого рода с модулем $\frac{a}{r}$ и $\frac{r}{a}$ соответственно*), и мы можем написать также

$$U(r)=\frac{2fm}{\pi r}K\left(\frac{a}{r}\right) \qquad (r>a) \tag{5.57‴}$$

и

$$U(r)=\frac{2fm}{\pi a}K\left(\frac{r}{a}\right) \qquad (r<a). \tag{5.58‴}$$

Случай 3. Плоское круглое кольцо и диск.

Перейдем к рассмотрению простейших случаев разложения силовой функции двумерного притягивающего тела или простого слоя. Сначала рассмотрим слой, распределенный на плоском круглом кольце и, в частности, на плоском круглом диске. Очевидно, что в этом случае притягивающее тело обладает геометрической осевой симметрией относительно прямой, проходящей через центр кольца, перпендикулярно к его плоскости.

Мы ограничимся рассмотрением разложения силовой функции подобного простого слоя для случая, когда слой обладает также и механической симметрией относительно той же оси, для

---

*) См. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.

чего необходимо, чтобы плотность $\delta(M)$ слоя зависела только от расстояния точки M до центра G кольца. Пусть

$$\delta(M) = \delta(\rho')$$

есть заданная интегрируемая функция от ρ' в промежутке (a_1, a_2), где a_1 обозначает внутренний, а a_2 — внешний радиус кольца. Возьмем начало координат в любой точке O оси симметрии (рис. 33). Тогда разложение силовой функции определится формулами (5.46), (5.47), и нам остается только вычислить коэффициенты A_{n0} и $\bar{A}_{n0}$ и найти пределы $\bar{r}$ и $\underline{r}$.

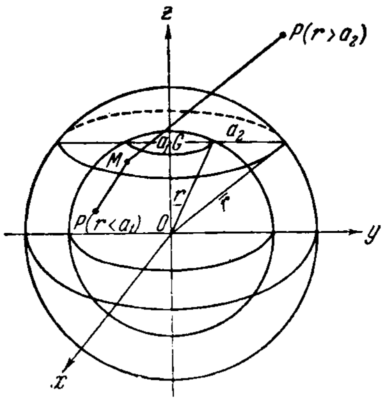


Рис. 33.

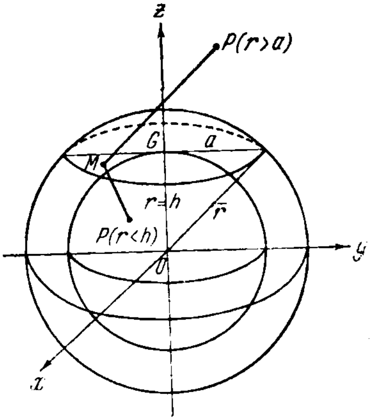


Рис. 34.

Пусть h есть расстояние от начала координат до центра кольца G, который является, очевидно, также центром инерции кольца. Тогда, как легко видеть,

$$\bar{r} = \sqrt{a_2^2 + h^2}, \quad \underline{r} = \sqrt{a_1^2 + h^2}.$$

Для большего удобства вычисления коэффициентов примем за переменную интегрирования ρ'. Так как

$$dm = \delta(\rho')\rho'\,d\rho'\,d\lambda', \qquad r' = \sqrt{\rho'^2 + h^2}, \quad \cos\theta' = \frac{h}{r'},$$

то мы из формул (5.12) и (5.18) для $k=0$ после выполнения интегрирования по λ' получим следующие выражения для коэффициентов:

$$A_{n0} = 2\pi \int_{a_1}^{a_2} r'^n P_n\left(\frac{h}{r'}\right) \delta(\rho')\rho'\,d\rho', \tag{5.59}$$

и

$$\tilde{A}_{n0}=2\pi\int_{a_1}^{a_2} r'^{-n-1}P_n\left(\frac{h}{r'}\right)\delta(r')\rho'\,d\rho'. \qquad (5.60)$$

Если простой слой распределен на диске радиуса a, то $a_1=0$ и $a_2=0$, а (рис. 34)

$$\bar{r}=\sqrt{a^2+h^2}, \quad \underline{r}=h.$$

Выражения для коэффициентов несколько упрощаются, если за начало координат взята точка G — центр кольца. Действительно, тогда $h=0$, $r'=\rho'$, все коэффициенты с нечетными индексами равны нулю, а коэффициенты с четными индексами найдутся по формулам

$$A_{2n,0}=2\pi(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_{a_1}^{a_2}\rho'^{2n+1}\delta(\rho')\,d\rho' \qquad (5.59')$$

и

$$\tilde{A}_{2n,0}=2\pi(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_{a_1}^{a_2}\rho'^{-2n}\delta(\rho')\,d\rho'. \qquad (5.60')$$

Поэтому разложение силовой функции в этом случае будет иметь следующий вид:

для $r>a_2$:

$$U(r,\theta)=2\pi f\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{P_{2n}(\cos\theta)}{r^{2n+1}}\int_{a_1}^{a_2}\rho'^{2n+1}\delta(\rho')\,d\rho', \qquad (5.61)$$

и для $r<a_1$:

$$U(r,\theta)=2\pi f\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,r^{2n}P_{2n}(\cos\theta)\int_{a_1}^{a_2}\rho'^{-2n}\delta(\rho')\,d\rho'. \qquad (5.62)$$

Если кольцо превращается в диск, то имеем для $r>a$:

$$U(r,\theta)=2\pi f\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{P_{2n}(\cos\theta)}{r^{2n+1}}\int_{0}^{a}\rho'^{2n+1}\delta(\rho')\,d\rho'. \qquad (5.63)$$

Ряды (5.61), (5.62) определяют силовую функцию, за исключением точек, лежащих внутри шарового слоя с центром в G и с радиусами a_1 и a_2. Ряд (5.63) также определяет силовую функцию диска во всем пространстве, внешнем по отношению к сфере радиуса a с центром в точке G.

Однако интересно отметить, что каждый из этих рядов оказывается сходящимся на границе области сходимости *).

Действительно, положим в формуле (5.61) $r=a_2$ и $\cos\theta=0$, т. е. поместим притягиваемую точку P на внешний край кольца, несущего на себе простой слой.

Тогда имеем

$$U\left(a_2, \frac{\pi}{2}\right)=2\pi f\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{a_2^{2n+1}}\int_{a_1}^{a_2}\rho'^{2n+1}\delta(\rho')\,d\rho'. \qquad (5.61')$$

Пусть $\bar{\delta}$ есть наибольшее значение функции $\delta(\rho')$ в промежутке (a_1, a_2). Тогда ряд (5.61) будет сходиться абсолютно, если сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\frac{1-\alpha^{2n+2}}{2n+2}; \qquad (5.61'')$$

где $\alpha=\frac{a_1}{a_2}<1$.

Но ряд (5.61) можно рассматривать как разность двух рядов с общими членами

$$u_n=\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\cdot\frac{1}{2n+2}, \qquad v_n=\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\frac{\alpha^{2n+2}}{2n+2}.$$

Легко видеть, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\alpha^2<1,$$

откуда следует, что ряд с общим членом v_n — сходящийся. Доказательство сходимости другого ряда несколько менее элементарно, так как для него

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1.$$

Но, с другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{u_{n+1}}{u_n}-1\right]=-2,$$

откуда следует по признаку Раабе **), что ряд с общим членом u_n сходится. Следовательно, ряд (5.61″) также сходится, а значит, сходится и ряд (5.61′), и формула (5.61′) дает значение силовой

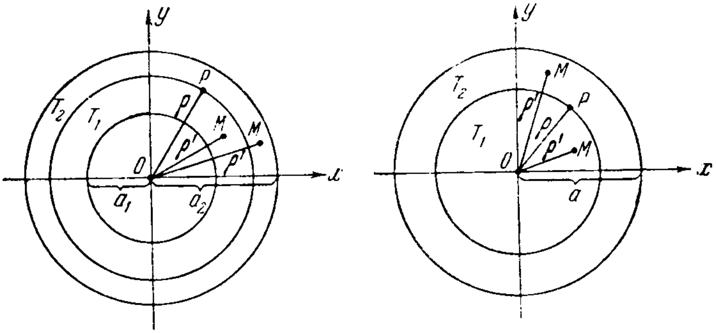
---

*) Г. Н. Дубошин, **Разложение силовой функции кольца, диска и сфероида**, Вестник МГУ, № 1, 1948, или Г. Н. Дубошин, Теория притяжения, **Физматгиз**, 1961.

**) См., например, Э. Гурса, Курс математического анализа, т. I, ч. 2, 1933.

функции на внешнем крае кольца. Также доказывается сходимость ряда (5.62) при $r=a_1$, $\theta=\frac{\pi}{2}$, т. е. на внутреннем крае кольца и ряда (5.63) при $r=a$, $\theta=\frac{\pi}{2}$, т. е. на крае диска.

Приведенные соображения позволяют построить разложение силовой функции кольца или диска также для случая, когда притягиваемая точка P составляет часть притягивающей массы.



Случай кольца Случай диска

Рис. 35.

Действительно, пусть притягиваемая точка (единичной массы) лежит внутри кольца на расстоянии ρ от его центра (рис. 35), так что $(a_1<\rho<a_2)$. Тогда силовая функция в точке P есть, очевидно, сумма двух силовых функций, а именно, силовой функции кольца T_1 с внутренним радиусом a_1 и внешним радиусом ρ на точку, лежащую на внешнем крае этого кольца, и силовой функции кольца T_2 с внутренним радиусом ρ и внешним радиусом a_2 на точку, лежащую на внутреннем крае.

Поэтому первая часть U_1 полной силовой функции получится из (5.61), где нужно положить

$$\theta=\frac{\pi}{2}, \quad r=\rho, \quad a_2=\rho,$$

а вторая часть U_2 — из формулы (5.62), в которой нужно положить

$$\theta=\frac{\pi}{2}, \quad r=\rho, \quad a_1=\rho.$$

Делая это, мы получим выражение для силовой функции

$$U=U_1+U_2$$

простого слоя плотности $\delta(\rho')$, распределенного на круглом кольце, на точку P, лежащую внутри кольца, в следующем виде:

$$U(\rho)=2\pi f\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 U_{2n}(\rho), \tag{5.64}$$

где положено для сокращения

$$U_{2n}(\rho)=\int_{a_1}^{\rho}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{2n+1}\delta(\rho')\,d\rho'+\int_{\rho}^{a_2}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^{2n}\delta(\rho')\,d\rho'.$$

Согласно установленному выше ряд (5.64) сходится для всякого значения ρ, удовлетворяющего неравенству $a_1\leqslant\rho\leqslant a_2$.

Полагая в формуле (5.64) $a_1=0$ и $a_2=a$, мы получим разложение силовой функции простого слоя, лежащего на диске, на внутреннюю точку P в виде

$$U(\rho)=2\pi f\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 \overline{U}_{2n}(\rho), \tag{5.65}$$

где

$$\overline{U}_{2n}(\rho)=\int_{0}^{\rho}\left(\frac{\rho'}{\rho}\right)^{2n+1}\delta(\rho')\,d\rho'+\int_{\rho}^{a}\left(\frac{\rho}{\rho'}\right)^{2n}\delta(\rho')\,d\rho'.$$

Ряд (5.65) сходится для всякого значения ρ в промежутке $0\leqslant\rho\leqslant a$.

Если плотность $\delta(\rho')$ есть величина постоянная, то все приведенные выше формулы значительно упрощаются.

Например, положим $\delta=\text{const}$ в формулах (5.63) и (5.65), определяющих силовую функцию диска на внешнюю и внутреннюю точки.

После простых преобразований мы получим разложение силовой функции однородного диска в виде

для $r\geqslant a$:

$$U(r,\theta)=\frac{fm}{r}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(n+1)(2n)!!}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}P_{2n}(\cos\theta) \tag{5.63'}$$

и для $0\leqslant\rho\leqslant a$, $\cos\theta=0$

$$U(\rho)=-\frac{fm}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n-1}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2\left(\frac{\rho}{a}\right)^{2n}. \tag{5.65'}$$

2. Случай 4. Эллипсоид вращения. В качестве последнего примера найдем разложение силовой функции эллипсоидального тела T, обладающего некоторой специальной структурой.

Итак, пусть притягивающее тело ограничено поверхностью эллипсоида вращения (сжатого или вытянутого), образованного вращением эллипса с полуосями a и c ($a>c$) вокруг его большой или малой оси. Тогда тело T обладает, очевидно, геометрической симметрией и относительно оси вращения и относительно плоскости, проходящей через центр эллипсоида перпендикулярно к оси вращения (экваториальная плоскость).

Возьмем центр эллипсоида за начало координат, а ось аппликат направим по оси вращения поверхности тела. Тогда две другие оси расположатся как-нибудь (перпендикулярно друг другу) в экваториальной плоскости тела T.

Если не делать никаких упрощающих предположений о структуре тела T, то разложение силовой функции эллипсоида на внешнюю точку будет иметь общий вид (5.10), а коэффициенты сферических функций $Y_n(\theta, \lambda)$ определятся общими формулами (5.12), (5.13), в которых нужно положить

$$dm = \delta(M) r'^2 \sin\theta' \, dr' \, d\theta' \, d\lambda',$$

а интегралы брать по всему объему эллипсоида.

Мы ограничимся рассмотрением более простого случая, когда поверхности равной плотности в теле T суть также поверхности вращения (не обязательно эллипсоиды) вокруг оси вращения эллипсоида, являющегося внешней поверхностью тела. Тогда тело T будет обладать не только геометрической, но и механической симметрией относительно упомянутой оси вращения и разложение силовой функции тела T на внешнюю точку P напишется в виде

$$U(r, \theta) = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{n0} P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}, \tag{5.66}$$

причем ряд сходится равномерно и абсолютно во всяком случае в области $r > \bar{r} = a$ (рис. 36).

Остается вычислить коэффициенты A_{n0} этого разложения. Так как в рассматриваемом нами случае плотность $\delta(M)$ не зависит от долготы λ' текущей точки M, то формула (5.12) после интегрирования по долготе λ' в пределах от нуля до 2π даст

$$A_{n0} = 2\pi \int_0^{\pi} P_n(\cos\theta') \sin\theta' \, d\theta' \int_0^{R(\theta')} \delta(r', \theta') r'^{n+2} \, dr', \tag{5.67}$$

где верхний предел внутреннего интеграла берется из уравнения внешней поверхности тела, или, что то же, из уравнения производящего эллипса, которое может быть написано в виде

$$r = R(\theta) \quad \text{или} \quad r = R(\nu).$$

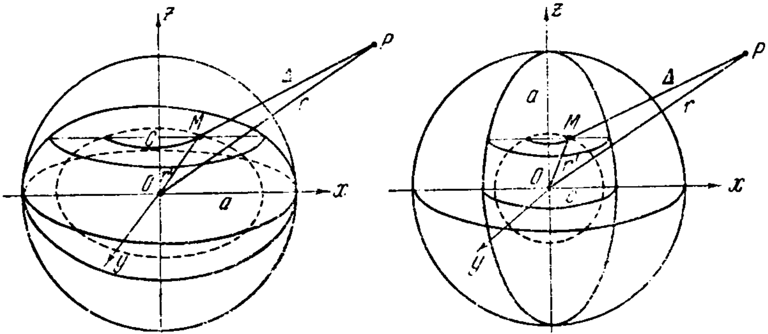
Так как плотность $\delta(M)$ можно рассматривать так же как функцию от r' и $\nu' = \cos\theta'$, то вместо формулы (5.67) мы можем написать следующую формулу:

$$A_{n0} = 2\pi \int_{-1}^{+1} P_n(\nu')\,d\nu' \int_0^{R(\nu')} \delta(r', \nu')\, r'^{n+2}\,dr'. \tag{5.68}$$

Если плотность тела T удовлетворяет добавочному условию

$$\delta(r', -\nu') = \delta(r', \nu'),$$

то тело обладает также механической симметрией относительно экваториальной плоскости и центр эллипсоида будет в этом случае также центром инерции тела. Тогда, как мы знаем, все коэффициенты с нечетными значками n будут равны нулю и разложение силовой функции нашего эллипсоидального тела примет вид



Сжатый эллипсоид Вытянутый эллипсоид

Рис. 36.

$$U(r, \theta) = f \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{2n,0} P_{2n}(\cos\theta)}{r^{2n+1}}, \tag{5.66'}$$

где

$$A_{2n,0} = 2\pi \int_0^{\pi} P_{2n}(\cos\theta')\sin\theta'\,d\theta' \int_0^{R(\theta')} \delta(r', \theta')\, r'^{n+2}\,dr' \tag{5.67'}$$

или

$$A_{2n,0} = 2\pi \int_{-1}^{+1} P_{2n}(\nu')\,d\nu' \int_0^{R(\nu')} \delta(r', \nu')\, r'^{n+2}\,dr'. \tag{5.68'}$$

3. Особенно интересен случай, когда тело T есть однородный эллипсоид вращения, так как в этом случае все интегралы в формулах для коэффициентов вычисляются весьма просто и коэффициенты представляются простыми конечными формулами. Покажем это сначала для случая однородного сжатого эллипсоида вращения.

Так как ось вращения эллипсоида принята за ось Oz, то уравнение внешней поверхности тела T имеет вид

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Преобразуя это уравнение к сферическим координатам, найдем

$$r^2\left(\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{c^2}\right)=1,$$

откуда, полагая

$$a^2-c^2=c^2l^2, \quad \cos 0=\nu,$$

имеем

$$r=\frac{a}{\sqrt{1+l^2\nu^2}}=R(\nu).$$

Воспользуемся теперь формулой (5.68′). Полагая $\delta=\text{const}$ и выполняя внутреннее интегрирование, получим

$$A_{2n,0}=\frac{2\pi\delta}{2n+3}\int\limits_{-1}^{+1}R^{2n+3}(\nu')P_{2n}(\nu')\,d\nu',$$

или

$$A_{2n,0}=\frac{2\pi\delta a^{2n+3}}{2n+3}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{P_{2n}(\nu')\,d\nu'}{(1+l^2\nu'^2)^{n+\frac{3}{2}}}.$$

Но интеграл, входящий в последнюю формулу, вычисляется по формуле Лежандра (см. формулу (4.90) гл. IV), в которой надо положить $p=l^2$, вследствие чего найдем следующее выражение:

$$A_{2n,0}=\frac{4\pi\delta a^{2n+3}}{(2n+1)(2n+3)}\cdot\frac{(-l^2)^n}{(1+l^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

которое легко преобразуется к виду

$$A_{2n,0}=4\pi\delta a^2c\,\frac{(-1)^n l^{2n}c^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}. \tag{5.69}$$

Замечая еще, что масса сжатого эллипсоида вращения определяется формулой

$$m=\frac{4}{3}\pi a^2c\delta,$$

мы можем также написать

$$A_{2n,0} = 3m\frac{(-1)^n l^{2n} c^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}, \qquad (5.69')$$

вследствие чего разложение силовой функции однородного сжатого эллипсоида вращения на внешнюю точку единичной массы примет следующую примечательную форму:

$$U(r,\ \theta) = \frac{fm}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(-1)^n l^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}\left(\frac{c}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\theta)\ ^*). \qquad (5.70)$$

Подобным же образом получим и разложение силовой функции однородного вытянутого эллипсоида вращения. Так как ось вращения есть ось Oz, то уравнение внешней поверхности тела напишется в виде

$$\frac{x^2+y^2}{c^2}+\frac{z^2}{a^2}=1,$$

откуда, переходя к полярным координатам и полагая

$$a^2-c^2=e^2a^2, \quad \nu=\cos\theta,$$

имеем

$$r=\frac{c}{\sqrt{1-e^2\nu^2}}=R(\nu).$$

Применяя опять формулу (5.68′), найдем (так же как и для сжатого эллипсоида)

$$A_{2n,0}=\frac{2\pi\delta c^{2n+3}}{2n+3}\int_{-1}^{+1}\frac{P_{2n}(\nu')\,d\nu'}{\left(1-e^2\nu'^2\right)^{n+\frac{3}{2}}}.$$

Воспользовавшись опять формулой Лежандра, получим после упрощений

$$A_{2n,0}=3m\frac{e^{2n}a^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}, \qquad (5.71)$$

где

$$m=\frac{4}{3}\pi ac^2\delta$$

есть масса однородного вытянутого эллипсоида.

Поэтому разложение силовой функции однородного вытянутого эллипсоида на внешнюю точку (единичной массы) напишется в виде

$$U(r\ \ \theta)=\frac{fm}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3e^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}\left(\frac{a}{r}\right)^{2n}P_{2n}(\cos\theta). \qquad (5.72)$$

---

*) Иным способом эта формула была выведена А. А. Орловым в статье: Об одном способе разложения силовой функции сжатого эллипсоида вращения в ряд по многочленам Лежандра, Труды ГАИШ, т. XXIV, 1954.

Все ряды, рассмотренные в этом параграфе, заведомо сходятся абсолютно и равномерно в области $r>\bar{r}=a$, т. е. вне сферы радиуса a, описанной из центра эллипсоида.

Однако область сходимости этих рядов может быть и более широкой. Действительно, рассмотрим ряд (5.70). Так как $|P_{2n}(\cos\theta)|\leqslant 1$, то этот ряд будет абсолютно сходящимся для всякого значения r, при котором сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{l^{2n}}{(2n+1)(2n+3)}\left(\frac{c}{r}\right)^{2n}.$$

Но последний, как нетрудно убедиться, сходится, если выполняется условие $r^2\geqslant l^2c^2$, и расходится, если $r^2<l^2c^2$.

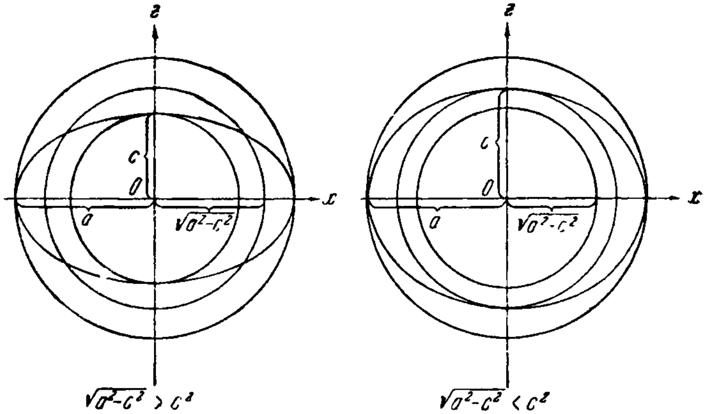


Рис. 37.

Следовательно, ряд (5.70) сходится абсолютно также в области $r\geqslant\sqrt{a^2-c^2}$, т. е. вне сферы, описанной из центра эллипсоида радиусом, равным половине фокального расстояния производящего эллипса (рис. 37). В этой области имеется также множество внутренних точек эллипсоида, но, разумеется, в этих точках ряд (5.70) не представляет силовую функцию тела T.

Интересно отметить, что если полуоси элипсоида, являющегося внешней поверхностью притягивающего тела, таковы, что выполняется условие $a\leqslant\sqrt{2}c$, то ряд (5.70) сходится абсолютно в области $r\geqslant c$ и, следовательно, представляет силовую функцию этого тела во всем пространстве, за исключением внутренней области.

В точках внешней поверхности тела T силовая функция представляется (при условии $a \leqslant \sqrt{2}\,c$) рядом

$$U = \frac{3fm\bar{R}}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{2n} \bar{R}^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} P_{2n}(\cos\theta), \tag{5.72$'$}$$

где

$$\bar{R} = \sqrt{1 + l^2 \cos^2\theta}.$$

Так же доказывается, что ряд (5.71) сходится при $r \geqslant \sqrt{a^2 - c^2}$, а при выполнении условия $a \leqslant \sqrt{2}\,c$ этот ряд сходится в области $r \geqslant c$ и представляет силовую функцию однородного вытянутого эллипсоида вращения во всем пространстве, за исключением внутренней области.

В точках внешней поверхности тела силовая функция представляется рядом (при условии $a \leqslant \sqrt{2}\,c$)

$$U = \frac{3fm\tilde{R}}{c} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l^{2n} \tilde{R}^{2n}}{(2n+1)(2n+3)} P_{2n}(\cos\theta), \tag{5.72$''$}$$

где

$$\tilde{R} = \sqrt{1 - e^2 \cos^2\theta}.$$

Доказанное остается справедливым и для неоднородного эллипсоидального тела, поверхности равной плотности которого суть поверхности вращения вокруг оси вращения эллипсоида, симметричные относительно его экваториальной плоскости. Действительно, силовая функция такого тела определяется формулой (5.66), коэффициенты которого даются формулой (5.67) или (5.68). Так как плотность δ ограничена внутри эллипсоида, то существует такое положительное число $\bar{\delta}$, что

$$\delta(M) \leqslant \bar{\delta}.$$

Поэтому коэффициенты ряда (5.66) численно не превышают коэффициентов такого же ряда, определяющего силовую функцию однородного эллипсоида с плотностью $\bar{\delta}$. Но мы только что показали, что разложение силовой функции однородного эллипсоида всегда сходится абсолютно при $r \geqslant \sqrt{a^2 - c^2}$, а если выполнено условие $a \leqslant \sqrt{2}\,c$, то при $r \geqslant c$. Поэтому ряд (5.66) также сходится абсолютно при тех же условиях.

Если мы имеем тело, ограниченное поверхностью сжатого эллипсоида вращения, то для характеристики формы такого тела удобно ввести величину, называемую «сжатием» и определяемую формулой

$$\alpha = \frac{a - c}{a} = 1 - \frac{c}{a}.$$

Поэтому условие $a \leqslant \sqrt{2}c$ может быть также записано в следующем виде:

$$\alpha \leqslant 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}2928932.$$

Известно, что каждая из больших планет солнечной системы по внешнему виду весьма похожа на эллипсоид вращения, полярная ось которого меньше экваториальной. Сжатие каждой из этих планет весьма мало́ и во всяком случае меньше указанного предела.

Поэтому силовую функцию каждой из больших планет можно приближенно представить рядом (5.66), сходящимся во всем внешнем относительно планеты пространстве.

§ 6. Разложение силовой функции взаимного притяжения двух конечных тел

1. Рассмотрим два тела, T_1 и T_2, совершенно произвольных по своей внешней форме и внутреннему строению. Пусть M_i $(i=1,2)$ есть текущая точка тела T_i, в которой сосредоточена элементарная притягивающая масса

$$dm_i = \delta_i(M_i)\,dT_i,$$

где $\delta_i(M_i)$ — плотность тела T_i (линейная, поверхностная или объемная), а dT_i обозначает пространственный элемент тела (элемент дуги, площади поверхности или объема соответственно).

Полагая

$$\overline{M_1M_2} = \Delta,$$

мы имеем следующее общее выражение для взаимной силовой функции двух тел:

$$U = f \int\limits_{(T_1)} \int\limits_{(T_2)} \frac{dm_1\,dm_2}{\Delta}, \tag{5.73}$$

где интегрирование распространяется на обе притягивающие массы и, следовательно, кратность интеграла k удовлетворяет условию

$$2 \leqslant k \leqslant 6.$$

Как было уже установлено в гл. I, величина, определяемая формулой (5.73), зависит от положения и ориентации каждого из двух тел относительно некоторой абсолютной (т. е. не связанной ни с одним из двух тел T_1 и T_2) системы координат, или, если угодно, от положения и ориентации одного тела относительно другого.

Обозначим, как и в гл. I, через ξ_i, η_i, ζ_i координаты точки G_i, жестко связанной с телом T_i, и через ψ_i, ϑ_i, φ_i — углы Эйлера, определяющие ориентацию «собственной» системы координат с началом в точке G_i относительно абсолютных осей. Тогда силовая функция есть некоторая функция от 12 независимых переменных

$$\xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1,\ \psi_1,\ \vartheta_1,\ \varphi_1,\ \xi_2,\ \eta_2,\ \zeta_2,\ \psi_2,\ \vartheta_2,\ \varphi_2, \tag{5.74}$$

производные первого порядка от которой дают составляющие сил притяжения, действующих на рассматриваемые тела, а также составляющие моментов этих сил относительно центров приведения G_1 и G_2.

Полезно заметить еще раз, что центр приведения тела T_i, т. е. точка G_i, может быть выбран совершенно произвольно (лишь бы точка G_i была жестко связана с телом) и может даже и не принадлежать телу T_i. В частности, за эту точку G_i можно взять центр инерции (центр масс) тела T_i, который вообще будем обозначать через C_i.

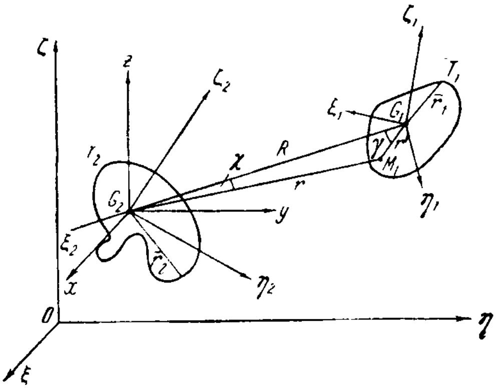


Рис. 38.

Задача, которую мы будем здесь рассматривать, заключается в нахождении явного выражения для силовой функции в зависимости от величин (5.74) или каких-либо других величин, им эквивалентных. Так как получить такое явное выражение в конечном виде в общем случае, очевидно, невозможно, то задача приводится к представлению функции U при помощи бесконечного ряда того или иного вида.

Указанное разложение силовой функции взаимного притяжения двух тел может быть получено, например, на основании такого же принципа, как и разложение силовой функции тела на материальную точку, рассмотренное в предыдущих параграфах.

Установим форму этого разложения и приведем его первые члены *).

Для упрощения выкладок возьмем начало главной системы координат в точке G_2, оставляя направления координатных осей

---

*) Мы проведем выкладки более подробно, чем это сделано в классическом трактате Тиссерана или в курсе механики Д. Бобылева. См. также Д. Брауэр, Дж. Клеменс, Методы небесной механики, перев. с англ., «Мир», 1964.

параллельными соответствующим направлениям абсолютных осей *) (рис. 38).

Обозначим через x, y, z координаты текущей точки M_1 тела T_1 в этой системе координат и положим еще

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

Перепишем теперь формулу (5.73) следующим образом:

$$U=f\int\limits_{(T_1)} dm_1 \int\limits_{(T_2)} \frac{dm_2}{\Delta}=\int\limits_{(T_1)} U_2(M_1)\,dm_1, \tag{5.73'}$$

где положено

$$U_2(M_1)=f\int\limits_{(T_2)} \frac{dm_2}{\Delta}. \tag{5.75}$$

Очевидно, что $U_2(M_1)$ есть силовая функция тела T_2 на материальную частицу единичной массы, помещенную в текущей точке M_1 тела T_1.

Предполагая, что тела T_1 и T_2 не имеют никакой общей части и что расстояние между их центрами приведения G_1 и G_2 больше наибольшего из линейных размеров обоих тел, мы можем определить функцию $U_2(M_1)$ разложением типа (5.20) и написать

$$U_2(M_1)=f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n^{(2)}(x,\,y,\,z)}{r^{2n+1}}, \tag{5.75'}$$

где $U_n^{(2)}(x, y, z)$ — гармонические многочлены относительно координат точки M_1, коэффициенты которых зависят от эйлеровых углов ψ_2, ϑ_2, φ_2 тела T_2.

Так как

$$x=x_1'-\xi_2,\quad y=y_1'-\eta_2,\quad z=z_1'-\zeta_2,$$

где буквы со штрихом обозначают абсолютные координаты точки M_1, то величины $U_2^{(2)}(x, y, z)$ можно рассматривать как многочлены относительно абсолютных координат точки G_2, коэффициенты которых зависят от эйлеровых углов тела T_2.

Рассмотрим теперь треугольник $G_1M_1G_2$, в котором сторона $\overline{M_1G_2}$ есть r (см. рис. 38). Положим еще

$$R=\overline{G_1G_2},\quad r'=\overline{M_1G_1},\quad \gamma=L(\overrightarrow{G_1G_2},\ \overrightarrow{G_1M_1});$$

тогда

$$r^2=R^2+r'^2-2Rr'\cos\gamma,$$

---

*) Следует отметить, что главная система координат с началом в точке G_2 не совпадает с «собственной» системой координат тела T_2, начало которой также находится в точке G_2.

и мы можем написать

$$\frac{1}{r^{2n+1}} = \frac{1}{R^{2n+1}}\left[1 - 2\frac{r'}{R}\cos\gamma + \frac{r'^2}{R^2}\right]^{-n-\frac{1}{2}} \qquad (5.76)$$

Поэтому

$$U_2(M_1) = f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n^{(2)}(x, y, z)}{R^{2n+1}}\left[1 - 2\frac{r'}{R}\cos\gamma + \frac{r'^2}{R^2}\right]^{-n-\frac{1}{2}} \qquad (5.75'')$$

Внося это разложение в формулу (5.73), мы представим разложение силовой функции U в следующем виде:

$$U = f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n^{(1,2)}}{R^{2n+1}}. \qquad (5.77)$$

Здесь R есть расстояние между центрами приведения тел T_1 и T_2, которое в произвольной абсолютной системе координат определяется формулой

$$R = \sqrt{(\xi_2 - \xi_1)^2 + (\eta_2 - \eta_1)^2 + (\zeta_2 - \zeta_1)^2},$$

а $U_n^{(1,2)}$ суть некоторые многочлены относительно абсолютных координат точек G_1 и G_2. Коэффициенты этих многочленов зависят от эйлеровых углов обоих тел *).

Разложение (5.77) сходится и представляет силовую функцию взаимного притяжения двух тел в области, определяемой неравенством

$$R > \bar{r}_1 + \bar{r}_2,$$

где

$$\bar{r}_1 = \max(\overline{G_1M_1}), \quad \bar{r}_2 = \max(\overline{G_2M_2}).$$

Коэффициенты ряда (5.77) определяются формулой

$$U_n^{(1,2)} = \int\limits_{(T_1)}\frac{U_n^{(2)}(x, y, z)\,dm_1}{\left(1 - 2\frac{r'}{R}\cos\gamma + \frac{r'^2}{R^2}\right)^{n+\frac{1}{2}}}, \qquad (5.78)$$

при помощи которой они и могут быть вычислены. Для этого вычисления нужно прежде всего разложить в ряд выражение (5.76), а затем произвести соответствующие интегрирования.

2. Ограничимся нахождением нескольких первых членов разложения силовой функции, предполагая, что расстояние R настолько велико по сравнению с $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$, что членами выше треть-

---

*) Само собой разумеется, что эти коэффициенты зависят также от параметров, определяющих формы тел T_1, T_2 и их внутреннее строение.

его порядка относительно обратного расстояния $1/R$ можно пренебречь.

По формулам (5.34), (5.35) и (5.37) мы находим

$$\begin{aligned}
&U_0^{(2)}(x,\,y,\,z)=m_2,\\
&U_1^{(2)}(x,\,y,\,z)=m_2(\bar\xi_2 x+\bar\eta_2 y+\bar\zeta_2 z),\\
&U_2^{(2)}(x,\,y,\,z)=\frac{r^2}{2}\,[A_2+B_2+C_2-3I_2'],
\end{aligned}$$

где m_2 есть масса тела T_2; $\bar\xi_2$, $\bar\eta_2$, $\bar\zeta_2$ — координаты его центра инерции в системе координат с началом в G_2; A_2, B_2, C_2 — его моменты инерции относительно тех же осей и I_2' — его момент инерции относительно прямой $\overline{G_2M_1}$.

Заметим, что если центр приведения G_2 взят в центре инерции тела T_2, то $\bar\xi_2=\bar\eta_2=\bar\zeta_2$ и, следовательно, $U_1^{(2)}(x,\,y,\,z)\equiv 0$.

Теперь формула (5.78) дает

$$\frac{U_0^{(1,2)}}{R}=\frac{m_2}{R}\int\limits_{(T_1)}\frac{dm_1}{\left(1-2\frac{r'}{R}\cos\gamma+\frac{r'^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{2}}}=m_2\int\limits_{(T_1)}\frac{dm_1}{r}.$$

Для вычисления этого интеграла мы можем отнести тело T_1 к собственной системе координат с началом в точке G_1, а тогда ясно, что написанное выражение представляет собой силовую функцию тела T_1 на материальную частицу с массой m_2/f, находящуюся в точке G_2. Следовательно, если ξ, η, ζ суть координаты G_1 относительно G_2, то $-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$ суть координаты G_2 относительно G_1 (оси обеих систем, по условию, параллельны), и мы будем иметь, применяя опять формулы (5.34), (5.35) и (5.37),

$$\begin{aligned}
\frac{U_0^{(1,2)}}{R}=\frac{m_2m_1}{R}+\frac{m_2m_1}{R^3}(-\xi\bar\xi_1'-\eta\bar\eta_1'-\zeta\bar\zeta_1')&+\\
+\frac{m_2}{2R^3}[A_1+B_1+C_1-3I_1]+\ldots;&\qquad(5.79)
\end{aligned}$$

здесь m_1 есть масса тела T_1; $\bar\xi_1'$, $\bar\eta_1'$, $\bar\zeta_1'$ — координаты его центра инерции в системе осей с началом в точке G_1; A_1, B_1, C_1 — его моменты инерции относительно тех же осей и I_1 — его момент инерции относительно прямой $\overline{G_2G_2}$.

Если за центр приведения тела T_1 взят его центр инерции, то $\bar\xi_1'=\bar\eta_1'=\bar\zeta_1'=0$ и второй член в правой части формулы (5.79) обращается в нуль. Далее имеем, если $U_1^{(2)} \neq 0$,

$$\frac{U_1^{(1,2)}}{R^3} = \int\limits_{(T_1)} \frac{U_1^{(2)}(x,\ y,\ z)\,dm_1}{r^3} =$$

$$= m_2\bar{\xi}_2 \int\limits_{(T_1)} \frac{x\,dm_1}{r^3} + m_2\bar{\eta}_2 \int\limits_{(T_1)} \frac{y\,dm_1}{r^3} + m_2\bar{\zeta}_2 \int\limits_{(T_1)} \frac{z\,dm_1}{r^3}.$$

Переходя опять к собственной для тела T_1 системе координат, мы имеем, например,

$$\int\limits_{(T_1)} \frac{x\,dm_1}{r^3} = \int\limits_{(T_1)} \frac{(\xi_1' + \xi)\,dm_1}{r^3} = -\frac{\partial}{\partial\xi} \int\limits_{(T_1)} \frac{dm_1}{r}.$$

Аналогично можем представить и два других интеграла, что позволяет написать следующую формулу:

$$\frac{U_1^{(1,2)}}{R^3} = -\bar{\xi}_2 \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{U_0^{(1,2)}}{R}\right) - \bar{\eta}_2 \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{U_0^{(1,2)}}{R}\right) - \bar{\zeta}^2 \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{U_0^{(1,2)}}{R}\right). \quad (5.80)$$

Входящие сюда производные легко находятся из (5.79), причем при дифференцировании нужно иметь в виду, что

$$R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Наконец, для $n = 2$ имеем

$$\frac{U_2^{(1,2)}}{R^5} = \int\limits_{(T_1)} \frac{U_2^{(2)}(x,\ y,\ z)\,dm_1}{r^5} = \frac{1}{2} \int\limits_{(T_1)} \frac{(A_2 + B_2 + C_2 - 3I_2')\,dm_1}{r^3},$$

а ограничиваясь, как было условлено, членами третьей степени относительно $1/R$ (см. (5.76)), мы найдем

$$\frac{U_2^{(1,2)}}{R^5} = \frac{1}{2R^3}\left[m_1(A_2 + B_2 + C_2) - 3\int\limits_{(T_1)} I_2'\,dm_1\right].$$

Но

$$I_2' = I_2 \cos^2\chi,$$

где χ есть угол между направлением $\overrightarrow{G_2M_1}$ и направлением $\overrightarrow{G_2G_1}$, а так как, по условию, размеры тела T_1 весьма малы по сравнению с расстоянием R, то для любой точки M_1 тела T_1 этот угол также весьма мал, а поэтому с принятой степенью точности

$$\int\limits_{(T_1)} I_2'\,dm_1 = \int\limits_{(T_1)} I_2 \cos^2\alpha\,dm_1 \cong m_1 I_2,$$

где I_2 есть момент инерции тела T_2 относительно прямой $\overrightarrow{G_1G_2}$. Поэтому можем написать

$$\frac{U_2^{(1,2)}}{R^5} \cong m_1 \frac{A_2+B_2+C_2-3I_2}{2R^3}. \tag{5.81}$$

Выпишем теперь окончательное приближенное выражение для силовой функции, принимая притом для большего упрощения центры инерции тел T_1 и T_2 за их центры приведения.

Тогда формулы (5.79)—(5.81) дают

$$U=f\frac{m_1m_2}{R}+fm_1\frac{A_2+B_2+C_2-3I_2}{2R^3}+$$
$$+fm_2\frac{A_1+B_1+C_1-3I_1}{2R^3}+\ \ldots \tag{5.82}$$

Заметим, что если за оси собственных систем координат тел T_1 и T_2 взяты главные оси инерции этих тел, то величины A_i, B_i, C_i суть главные центральные моменты инерции тела T_i, а момент инерции I_i относительно прямой $\overline{G_1G_2}$, проходящей через центры инерции двух тел, определится формулой

$$I_i=A_i\alpha_i^2+B_i\beta_i^2+C_i\gamma_i^2,$$

где α_i, β_i, γ_i суть косинусы углов, образуемых прямой $\overline{G_1G_2}$ с главными центральными осями инерции тела T_i $(i=1,2)$. Вспоминая выражения для направляющих косинусов осей собственной системы тела T_i с абсолютными осями (см. формулы (1.27) гл. I) и имея в виду, что направляющие косинусы прямой $\overline{G_1G_2}$ суть

$$\frac{\xi_2-\xi_1}{R},\quad \frac{\eta_2-\eta_1}{R},\quad \frac{\zeta_2-\zeta_1}{R},$$

мы найдем следующие выражения для α_i, β_i, γ_i:

$$\alpha_i=(\cos\psi_i\cos\varphi_i-\sin\psi_i\sin\varphi_i\cos\vartheta_i)\frac{\xi_2-\xi_1}{R}+$$
$$+(\sin\psi_i\cos\varphi_i+\cos\psi_i\sin\varphi_i\cos\vartheta_i)\frac{\eta_2-\eta_1}{R}+\sin\varphi_i\sin\vartheta_i\frac{\zeta_2-\zeta_1}{R},$$

$$\beta_i=(-\cos\psi_i\sin\varphi_i-\sin\psi_i\cos\varphi_i\cos\vartheta_i)\frac{\xi_2-\xi_1}{R}+$$
$$+(-\sin\psi_i\sin\varphi_i+\cos\psi_i\cos\varphi_i\cos\vartheta_i)\frac{\eta_2-\eta_1}{R}+\cos\varphi_i\sin\vartheta_i\frac{\zeta_2-\zeta_1}{R},$$

$$\gamma_i=\sin\psi_i\sin\vartheta_i\frac{\xi_2-\xi_1}{R}-\cos\psi_i\sin\vartheta_i\frac{\eta_2-\eta_1}{R}+\cos\vartheta_i\frac{\zeta_2-\zeta_1}{R},$$

где

$$R=\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2+(\zeta_2-\zeta_1)^2}.$$

если тела T_1 и T_2 отнесены к абсолютной системе координат, и $R=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$, если одно тело, например T_1, отнесено к системе координат, связанной с другим телом.

Ввиду выражений для моментов инерции I_i и направляющих косинусов (5.83), функция U, определяемая формулой (5.82), является явной функцией от переменных (5.74), и дифференцирование этой функции по переменным (5.74) даст выражения составляющих сил притяжения, действующих на тела T_1, T_2 и выражения для моментов этих сил.

Если расстояние R очень велико по сравнению с $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$, то мы можем ограничиться в формуле (5.82) только одним первым членом и тогда получим

$$U=f\frac{m_1m_2}{R}, \tag{5.82'}$$

что опять показывает, что два тела, находящиеся на достаточно большом взаимном расстоянии, притягиваются друг к другу почти так же, как притягивались бы две материальные точки, помещенные в центрах приведения этих тел, массы которых равны m_1 и m_2.

3. Возвратимся теперь к формулам (5.77), (5.78) и покажем, как можно построить разложение функции U в общем виде.

Для этого рассмотрим сначала вкратце некоторое обобщение многочленов Лежандра, принадлежащее Гегенбауеру *).

Рассмотрим вместо производящей функции $\Phi(x, \alpha)$ многочленов Лежандра (см. формулу (4.31') гл. IV) следующую функцию

$$G^{(n)}(x, \alpha)=(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-n-\frac{1}{2}}, \tag{5.83}$$

где n есть целое положительное число, x по-прежнему обозначает косинус некоторого угла, а $|\alpha|<1$.

Можно доказать (на чем для сокращения мы останавливаться не будем) **), что при этих условиях функция (5.83) разложима в абсолютно сходящийся ряд, расположенный по степеням параметра α.

Этот ряд представим следующим образом:

$$G^{(n)}(x, \alpha)=\sum_{p=0}^{\infty}\alpha^p G_p^{(n)}(x), \tag{5.84}$$

---

*) См. Е. Т. Уиттекер и Г. Н. Ватсон, Курс современного анализа, т. 2, перев. с англ., ГТТИ, 1934 (2-е изд., 1965), а также Г. Н. Дубошин, Разложение обратного расстояния в теории притяжения, Прикл. матем. и мех., т. X, 1946.

**) Доказательство сходимости ряда (5.84) проводится совершенно так же, как и доказательство сходимости ряда, представляющего производящую функцию $\Phi(x,\alpha)$ многочленов Лежандра. Действительно, функция (5.83) имеет те же особые точки, что и функция (4.31'), причем очевидно, что $G^{(0)}(x,\alpha)\equiv\Phi(x,\alpha)$.

и покажем, что его коэффициенты являются многочленами p-й степени относительно x, которые называются многочленами Гегенбауера и частным случаем которых являются многочлены Лежандра.

Для доказательства воспользуемся рекуррентной формулой для коэффициентов $G_p^{(n)}(x)$, вполне аналогичной такой же формуле для многочленов Лежандра. Дифференцируя равенство (5.84) по параметру α, имеем

$$(2n+1)(x-\alpha)(1-2\alpha x+\alpha^2)^{-n-\frac{3}{2}}=\sum_{p=0}^{\infty} p\alpha^{p-1}G_p^{(n)}(x),$$

что можно написать также в виде

$$(2n+1)(x-\alpha)\sum_{p=0}^{\infty}\alpha^p G_p^{(n)}(x)=(1-2\alpha x+\alpha^2)\sum_{p=0}^{\infty}p\alpha^{p-1}G_p^{(n)}(x).$$

Приравнивая теперь коэффициенты при α^p в левой и правой частях равенства, мы найдем после приведений искомую рекуррентную формулу

$$(p+1)\,G_{p+1}^{(n)}(x)=(2n+2p+1)\,xG_p^{(n)}(x)-(2n+p)\,G_{p-1}^{(n)}(x). \quad (5.85)$$

Но, с другой стороны, коэффициенты $G_p^{(n)}(x)$ можно рассматривать как коэффициенты разложения функции (5.83) в ряд Тейлора, т. е. можно написать

$$G_p^{(n)}(x)=\frac{1}{p!}\left[\frac{d^pG^{(n)}(x,\alpha)}{d\alpha^p}\right]_{\alpha=0}.$$

Полагая $p=0$ и $p=1$, находим отсюда

$$G_0^{(n)}(x)=1,\quad G_1^{(n)}(x)=(2n+1)\,x,$$

после чего формула (5.85) даст последовательно все остальные коэффициенты, и мы видим, что действительно $G_p^{(n)}(x)$ есть многочлен p-й степени относительно x, содержащий только четные степени x, если p есть число четное, и только нечетные степени x, если p есть число нечетное.

Применяя формулу (5.85), найдем последовательно

$$G_2^{(n)}(x)=\frac{1}{2}(2n+1)(2n+3)\,x^2-\frac{1}{2}(2n+1),$$

$$G_3^{(n)}(x)=\frac{1}{6}(2n+1)(2n+3)(2n+5)\,x^3-\frac{1}{2}(2n+1)(2n+3)\,x,$$

и так далее. Применяя метод индукции к рекуррентной формуле (5.85), нетрудно также вывести общую формулу для многочленов $G_p^{(n)}(x)$.

Мы имеем

$$G_p^{(n)}(x)=\sum_{s=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)} G_{ps}^{(n)}x^{p-2s}, \tag{5.86}$$

где $G_{ps}^{(n)}$ суть числовые коэффициенты, определяемые формулой

$$G_{ps}^{(n)}=(-1)^s\frac{(2n+1)(2n+3)\ldots(2n+2p-2s-1)}{2^s s!\,(p-2s)!}. \tag{5.87}$$

Используя теперь полученные формулы, мы можем представить формулу (5.76) в следующем виде:

$$\frac{1}{r^{2n+1}}=\frac{1}{R^{2n+1}}\sum_{p=0}^{\infty}\left(\frac{r'}{R}\right)^p G_p^{(n)}(\cos\gamma), \tag{5.88}$$

а коэффициенты $U_n^{(1,2)}$ разложения (5.77), определяемые формулой (5.78), представятся в виде

$$U_n^{(1,2)}=\sum_{p=0}^{\infty}\int\limits_{(T_1)} U_n^{(2)}(x,\ y,\ z)\left(\frac{r'}{R}\right)^p G_p^{(n)}(\cos\gamma)\,dm_1. \tag{5.89}$$

Так как

$$r'R\cos\gamma=-\xi(x-\xi)-\eta(y-\eta)-\zeta(z-\zeta)=$$
$$=R^2-\xi x-\eta y-\zeta z,$$

то

$$r'^p R^p G_p^{(n)}(\cos\gamma)=\sum_{s=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)} G_{ps}^{(n)}(r'R\cos\gamma)^{p-2s}r'^{2s}R^{2s}=$$
$$=\sum_{s=0}^{E\left(\frac{p}{2}\right)} G_{ps}^{(n)}(R^2-\xi x-\eta y-\zeta z)^{p-2s}r'^{2s}R^{2s}=U_{np}^{(1)}(x,\ y,\ z),$$

и мы можем переписать формулу (5.89) в следующем виде:

$$U_n^{(1,2)}=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{U_{np}^{(1,2)}}{R^{2p}}, \tag{5.89'}$$

где

$$U_{np}^{(1,2)}=\int\limits_{(T_1)} U_n^{(2)}(x,\ y,\ z)\,U_{np}^{(1)}(x,\ y,\ z)\,dm_1. \tag{5.90}$$

Очевидно, что подынтегральная функция в формуле (5.90) есть некоторый многочлен относительно координат текущей точки M_1 тела T_1, а поэтому вычисление коэффициентов (5.90) сводится к интегрированию многочленов и не представляет никаких затруднений.

§ 7. О разложении силовой функции по функциям Ламе

В заключение этой главы сделаем несколько общих замечаний о возможности разложения силовой функции какого-либо тела на материальную точку единичной массы в ряд, коэффициенты которого выражаются через эллипсоидальные функции Ламе (см. § 10 гл. IV).

Возьмем начало координат O в центре инерции притягивающего тела T и выберем некоторый эллипсоид (E), центр которого совпадает с началом координат, а главные оси — с соответствующими направлениями координатных осей.

Силовая функция тела T на точку P единичной массы определяется формулой (5.10), где сферические функции — «игреки Лапласа» даются формулой (5.9).

Но, как показано в § 10 гл. IV, сферическая функция выражается суммой произведений Ламе, а поэтому формулу (5.10) можно написать также в виде

$$U(P) = f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n(\mu,\nu)}{n+1}. \tag{5.91}$$

Чтобы определить коэффициенты этого разложения, заменим в формуле (5.9) многочлен Лежандра $P_n(\cos\gamma)$ его выражением (4.110), приведенным в конце гл. IV. Тогда мы получим

$$U_n(\mu,\nu) = \sum_{s=1}^{2n+1} U_n^s E_n^s(\mu)\,E_n^s(\nu), \tag{5.92}$$

где коэффициенты определяются формулой

$$U_n^s = \frac{\pi}{2(2n+1)}\int\limits_{(T)} r'^n E_n^s(\mu')\,E_n^s(\nu')\,dm. \tag{5.93}$$

Ясно, что коэффициенты U_n^s также являются некоторыми характерными для тела T постоянными, которые можно вывести из постоянных A_{nk}, B_{nk} или же из моментов инерции различных порядков.

Радиус-вектор r точки P можно заменить его выражением (4.93) или (4.93') через эллипсоидальные координаты λ, μ, ν, и тогда формула (5.91) напишется в виде

$$U(P)=f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{U_n(\mu,\nu)}{\left(r_0^2+\lambda\right)^{\frac{n+1}{2}}}. \qquad (5.91')$$

Если эллипсоид относимости (E) выбран достаточно близким к внешней поверхности тела и точка P близка к телу, то координата λ будет иметь малое числовое значение и функцию

$$\left(r_0^2+\lambda\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

можно разложить в ряд, расположенный по степеням λ.

В этом случае разложение силовой функции представится в виде

$$U(P)=f\sum_{n=0}^{\infty}L_n^*(\mu,\ \nu)\cdot\lambda^n, \qquad (5.94)$$

где коэффициенты зависят только от координат μ и ν.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ
ОБЩАЯ ЗАДАЧА НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

ГЛАВА VI
УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА И ГАМИЛЬТОНА

Из курса теоретической механики известно, что изучение движений каких-либо неизменяемых тел, находящихся под действием заданных сил, приводится обычно к составлению и интегрированию некоторой системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Неизвестными функциями в этих уравнениях, называемых дифференциальными уравнениями движения, являются некоторые величины (параметры), определяющие положения и скорости тел относительно какой-либо выбранной подходящим образом системы отсчета (системы координат) *).

Задача интегрирования заключается в нахождении этих величин в зависимости от времени и надлежащего числа произвольных постоянных так, чтобы все уравнения движения были удовлетворены и чтобы были выполнены также заданные начальные условия.

Когда такое интегрирование математически возможно, то мы получаем формулы (конечные уравнения движения), позволяющие вычислять числовые значения параметров для любого момента времени, а также устанавливать общие свойства и законы изучаемого движения.

Однако строгое интегрирование удается выполнить только в немногих исключительных случаях, а обычно уравнения движения оказываются неинтегрируемыми, и тогда можно ставить вопрос лишь о их приближенном решении или о численном интегрировании. При этом весьма важную роль играет удачный выбор системы отсчета и параметров, или координат, которые должны быть определены как функции времени и начальных условий.

---

*) Термин «параметр» не имеет строго установленного значения. Это, вообще, некоторая величина, могущая иметь и постоянное и переменное значения, характеризующая положение тела (или системы) или его структуру.

Иногда в процессе решения задачи приходится переходить от одной системы отсчета к какой-либо другой, почему-либо более выгодной, и заменять первоначально выбранные параметры другими, более удобными или более простыми. Иначе говоря, дифференциальные уравнения движения постоянно приходится подвергать некоторым преобразованиям, заменяя старые переменные какими-то новыми, связанными с первоначальными заданными формулами преобразования.

Вообще говоря, такие преобразования (или подстановки) приводят к сложным и громоздким выкладкам, а поэтому, естественно, следует отыскивать такие формы уравнений движения и такие законы преобразований, которые позволили бы упростить и сократить эти выкладки и связанные с ними вычисления. Это удается осуществить, если уравнения движения записаны в особой форме, называемой *лагранжевой*, и особенно, когда их удается привести к так называемому *каноническому виду* (*гамильтонова форма*). В последнем случае можно осуществить множество преобразований, не изменяющих канонического вида уравнений.

Эти преобразования (канонические преобразования или преобразования прикосновения) играют в небесной механике важную роль, а поэтому мы начнем изложение предмета с рассмотрения этого вопроса.

§ 1. Уравнения Лагранжа второго рода

1. Рассмотрим задачу о движении системы свободных материальных точек M_0, M_1, $\ldots$, M_n, находящихся под действием заданных сил. Пусть m_i есть масса точки M_i и ξ_i, η_i, ζ_i — ее прямоугольные декартовы координаты в некоторой абсолютной системе отсчета ($i=0, 1, 2, \ldots, n$).

Обозначим через Ξ_i, H_i, Z_i составляющие (проекции на координатные оси) равнодействующей всех сил, действующих на точку M_i.

Эти величины являются заданными функциями времени t, координат ξ_0, η_0, ζ_0, ξ_1, η_1, ζ_1, $\ldots$, ξ_n, η_n, ζ_n и их первых производных по времени $\dot{\xi}_0$, $\dot{\eta}_0$, $\dot{\zeta}_0$, $\dot{\xi}_1$, $\dot{\eta}_1$, $\dot{\zeta}_1$, $\ldots$, $\dot{\xi}_n$, $\dot{\eta}_n$, $\dot{\zeta}_n$.

Для упрощения записи мы введем для этих величин, а также и для других функций многих переменных сокращенные обозначения. Всякую функцию F времени, координат и составляющих скоростей всех точек нашей материальной системы мы будем изображать следующим образом:

$$F = F(t \,|\, \xi, \ \eta, \ \zeta \,|\, \dot{\xi}, \ \dot{\eta}, \ \dot{\zeta}).$$

Функцию от времени и координат (не содержащую составляющих скоростей!) и функцию только от координат мы будем обозначать соответственно так:

$$F=F(t\,|\,\xi,\ \eta,\ \zeta),\qquad F=F(\xi,\ \eta,\ \zeta).$$

Разумеется, в случае надобности, например, когда функция зависит от координат только некоторых точек системы, мы будем пользоваться также и более подробными обозначениями.

В принятых сокращенных обозначениях дифференциальные уравнения движения рассматриваемой материальной системы могут быть написаны следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} m_i\frac{d^2\xi_i}{dt^2}&=\Xi_i\left(t\,|\,\xi,\ \eta,\ \zeta\,|\,\frac{d\xi}{dt},\ \frac{d\eta}{dt},\ \frac{d\zeta}{dt}\right),\\ m_i\frac{d^2\eta_i}{dt^2}&=\mathrm{H}_i\left(t\,|\,\xi,\ \eta,\ \zeta\,|\,\frac{d\xi}{dt},\ \frac{d\eta}{dt},\ \frac{d\zeta}{dt}\right),\\ m_i\frac{d^2\zeta_i}{dt^2}&=\mathrm{Z}_i\left(t\,|\,\xi,\ \eta,\ \zeta\,|\,\frac{d\xi}{dt},\ \frac{d\eta}{dt},\ \frac{d\zeta}{dt}\right),\\ &(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)\end{aligned}\right\}\qquad(6.1)$$

или, еще более просто,

$$m_i\ddot{\xi}_i=\Xi_i,\qquad m_i\ddot{\eta}_i=\mathrm{H}_i,\qquad m_i\ddot{\zeta}_i=\mathrm{Z}_i.$$

Может случиться, что действующие силы обладают **силовой функцией**, т. е. что существует такая функция $U(t\,|\,\xi,\ \eta,\ \zeta)$, не зависящая от составляющих скоростей (она может не зависеть также и от времени t), частные производные которой по координатам точки M_i равны соответствующим составляющим силы, действующей на эту точку. Тогда

$$\Xi_i=\frac{\partial U}{\partial\xi_i},\qquad \mathrm{H}_i=\frac{\partial U}{\partial\eta_i},\qquad \mathrm{Z}_i=\frac{\partial U}{\partial\zeta_i},$$

и уравнения (6.1) принимают вид

$$m_i\ddot{\xi}_i=\frac{\partial U}{\partial\xi_i},\qquad m_i\ddot{\eta}_i=\frac{\partial U}{\partial\eta_i},\qquad m_i\ddot{\zeta}_i=\frac{\partial U}{\partial\zeta_i}.\qquad(6.1')$$

Система (6.1) состоит из $3n+3$ дифференциальных уравнений второго порядка, и неизвестными функциями в ней являются координаты точек M_i. Рассматривая составляющие скоростей точек M_i так же как неизвестные функции, мы можем заменить систему (6.1) равносильной ей системой $6n+6$ дифференциальных уравнений первого порядка, которая запишется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt}&=\dot{\xi}_i, & m_i\frac{d\dot{\xi}_i}{dt}&=\Xi_i,\\ \frac{d\eta_i}{dt}&=\dot{\eta}_i, & m_i\frac{d\dot{\eta}_i}{dt}&=\mathrm{H}_i,\\ \frac{d\zeta_i}{dt}&=\dot{\zeta}_i, & m_i\frac{d\dot{\zeta}_i}{dt}&=\mathrm{Z}_i.\end{aligned}\right\}\qquad(6.1'')$$

Общее решение системы (6.1″) определяет координаты и составляющие скоростей точек M_i как функции времени и $6n+6$ произвольных постоянных интегрирования, которые могут быть выражены через начальные значения этих функций, соответствующих некоторому определенному моменту времени t_0, который называется начальным моментом или эпохой*).

В этой главе мы будем обозначать начальное значение какой-либо величины ξ через ξ^0, так что полная система начальных данных для системы (6.1) запишется так:

$$\xi_i^0=\xi_i(t_0),\quad \eta_i^0=\eta_i(t_0),\quad \zeta_i^0=\zeta_i(t_0);$$
$$\dot{\xi}_i^0=\dot{\xi}_i(t_0),\quad \dot{\eta}_i^0=\dot{\eta}_i(t_0),\quad \dot{\zeta}_i^0=\dot{\zeta}_i(t_0)$$
$$(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Тогда общее решение системы (6.1) или системы (6.1″) представится равенствами вида

$$\left.\begin{aligned}
\xi_i&=\xi_i(t\,|\,\xi^0,\ \eta^0,\ \zeta^0\,|\,\dot{\xi}^0,\ \dot{\eta}^0,\ \dot{\zeta}^0), & \dot{\xi}_i&=\dot{\xi}_i(t\,|\,\xi^0,\eta^0,\zeta^0\,|\,\dot{\xi}^0,\dot{\eta}^0,\dot{\zeta}^0),\\
\eta_i&=\eta_i(t\,|\,\xi^0,\ \eta^0,\ \zeta^0\,|\,\dot{\xi}^0,\ \dot{\eta}^0,\ \dot{\zeta}^0), & \dot{\eta}_i&=\dot{\eta}_i(t\,|\,\xi^0,\eta^0,\zeta^0\,|\,\dot{\xi}^0,\dot{\eta}^0,\dot{\zeta}^0),\\
\zeta_i&=\zeta_i(t\,|\,\xi^0,\ \eta^0,\ \zeta^0\,|\,\dot{\xi}^0,\ \dot{\eta}^0,\ \dot{\zeta}^0), & \dot{\zeta}_i&=\dot{\zeta}_i(t\,|\,\xi^0,\eta^0,\zeta^0\,|\,\dot{\xi}^0,\dot{\eta}^0,\dot{\zeta}^0)\\
&&&(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).
\end{aligned}\right\}\quad(6.2)$$

Если правые части уравнений (6.1) удовлетворяют некоторым достаточно общим условиям, то обычные теоремы теории обыкновенных дифференциальных уравнений обеспечивают существование единственного решения системы (6.1), удовлетворяющего заданным начальным условиям и определенного для всех значений времени, заключенных в некотором промежутке, включающем начальный момент t_0.

Может случиться также (и такие случаи представляют для небесной механики особенно важное значение), что формулы (6.2) определяют решение системы (6.1) для всех действительных значений времени от $-\infty$ до $+\infty$.

Вместо общего решения системы (6.1) или (6.1″) мы будем рассматривать часто общий интеграл этой системы, т. е. совокупность $6n+6$ независимых между собой уравнений вида

$$F_j(t\,|\,\xi,\ \eta,\ \zeta\,|\,\dot{\xi},\ \dot{\eta},\ \dot{\zeta})=C_j=\text{const}\quad(j=1,2,\ \ldots,\ 6n+6),\qquad(6.2')$$

---

*) «Начальную эпоху» t_0 можно выбирать, по существу, совершенно произвольно. В конкретных задачах механики этот выбор диктуется обычно практическими требованиями задачи.

обращающихся в тождества после подстановки вместо величин ξ_i, η_i, ζ_i, $\dot\xi_i$, $\dot\eta_i$, $\dot\zeta_i$ функций времени, удовлетворяющих уравнениям (6.1).

Каждое из равенств вида (6.2′) называется **первым интегралом** системы (6.1) или (6.1″), и характеризуется тем, что его полная производная по времени, взятая в силу уравнений (6.1″), равна тождественно нулю, так что имеем следующие тождества:

$$\frac{\partial F_j}{\partial t}+\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{\partial F_j}{\partial \xi_i}\dot\xi_i+\frac{\partial F_j}{\partial\eta_i}\dot\eta_i+\frac{\partial F_j}{\partial\zeta_i}\dot\zeta_i+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{m_i}\left(\frac{\partial F_j}{\partial\dot\xi_i}\Xi_i+\frac{\partial F_j}{\partial\dot\eta_i}\mathrm{H}_i+\frac{\partial F_j}{\partial\dot\zeta_i}\mathrm{Z}_i\right)\right]\equiv 0.$$

Можно сказать также, что общий интеграл системы (6.1) или (6.1″) представляет собой совокупность $6n+6$ независимых первых интегралов этой системы.

Признаком независимости первых интегралов (6.2″) является, как известно, неравенство нулю определителя Якоби (якобиана) системы $6n+6$ функций F_j от $6n+6$ независимых переменных ξ_i, η_i, ζ_i, $\dot\xi_i$, $\dot\eta_i$, $\dot\zeta_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$, причем t рассматривается как величина постоянная. Это условие может быть записано в следующей краткой форме*):

$$D=\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{6n+6})}{D(\xi, \eta, \zeta \mid \dot\xi, \dot\eta, \dot\zeta)}\neq 0.$$

Заметим, что, полагая в формулах (6.2′) $t=t_0$, мы получим

$$C_j=F_j(t_0 \mid \xi^0, \eta^0, \zeta^0 \mid \dot\xi^0, \dot\eta^0, \dot\zeta^0), \qquad (6.2'')$$

что дает выражения для произвольных постоянных в зависимости от начальных условий. Наоборот, решая уравнения (6.2″) относительно величин ξ_i^0, η_i^0, ζ_i^0, $\dot\xi_i^0$, $\dot\eta_i^0$, $\dot\zeta_i^0$, что возможно ввиду неравенства якобиана D нулю, мы можем выразить начальные значения через произвольные постоянные, что кратко записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
\xi_i^0&=\xi_i(t_0 \mid C), & \dot\xi_i^0&=\dot\xi_i(t_0 \mid C),\\
\eta_i^0&=\eta_i(t_0 \mid C), & \dot\eta_i^0&=\dot\eta_i(t_0 \mid C),\\
\zeta_i^0&=\zeta_i(t_0 \mid C), & \dot\zeta_i^0&=\dot\zeta_i(t_0 \mid C).
\end{aligned}$$

---

*) D есть определитель $6n+6$-го порядка, элементами которого служат частные производные функций F_j по всем координатам и составляющим скоростей точек системы.

2. Введем теперь вместо переменных ξ_i, η_i, ζ_i некоторые другие переменные $q_1, q_2, \ldots, q_k$ $(k=3n+3)$, связанные с абсолютными координатами определенными соотношениями (формулами преобразования), которые могут также содержать время t.

В сокращенной записи формулы преобразования переменных могут быть представлены в виде

$$\xi_i=\xi_i(t\,|\,q),\quad \eta_i=\eta_i(t\,|\,q),\quad \zeta_i=\zeta_i(t\,|\,q). \tag{6.3}$$

Допустим, что правые части этих равенств суть заданные непрерывные и однозначные функции своих аргументов, так что при заданном t всякой системе значений величин $q_1, \ldots, q_k$ соответствует единственная система значений абсолютных координат, т. е. определенное положение нашей материальной системы.

Тогда положение системы точек M_i однозначно определяется значениями величин q_j, которые, следовательно, играют такую же роль, как и абсолютные координаты и также могут быть названы координатами. Эти величины q_j называются в механике обобщенными координатами или переменными Лагранжа.

Выведем дифференциальные уравнения, определяющие переменные Лагранжа. Для этого помножим уравнения (6.1) соответственно на $\frac{\partial\xi_i}{\partial q_j}$, $\frac{\partial\eta_i}{\partial q_j}$, $\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_j}$ $(j=1, 2, \ldots, k)$ и сложим все полученные равенства. Мы получим k уравнений следующего вида:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\ddot\xi_i\frac{\partial\xi_i}{\partial q_j}+\ddot\eta_i\frac{\partial\eta_i}{\partial q_j}+\ddot\zeta_i\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_j}\right)=\sum_{i=0}^{n}\left(\Xi_i\frac{\partial\xi_i}{\partial q_j}+\mathrm{H}_i\frac{\partial\eta_i}{\partial q_j}+\mathrm{Z}_i\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_j}\right).$$

Имея в виду очевидные тождества

$$\ddot\xi\frac{\partial\xi}{\partial q}=\frac{d}{dt}\left(\dot\xi\frac{\partial\xi}{\partial q}\right)-\dot\xi\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\xi}{\partial q}\right)$$

и полагая для сокращения

$$P_j=\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\dot\xi_i\frac{\partial\xi_i}{\partial q_j}+\dot\eta_i\frac{\partial\eta_i}{\partial q_j}+\dot\zeta_i\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_j}\right),$$

$$Q_j=\sum_{i=0}^{n} m_i\left[\dot\xi_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial q_j}\right)+\dot\eta_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\eta_i}{\partial q_j}\right)+\dot\zeta_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_j}\right)\right],$$

$$R_j=\sum_{i=0}^{n}\left(\Xi_i\frac{\partial\xi_i}{\partial q_j}+\mathrm{II}_i\frac{\partial\eta_i}{\partial q_j}+\mathrm{Z}_i\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_j}\right),$$

мы перепишем предыдущие уравнения в следующем простом виде:

$$\frac{dP_j}{dt} - Q_j = R_j \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k). \tag{6.4}$$

Теперь выразим величины P_j, Q_j, R_j через время, обобщенные координаты и их первые производные по t (обобщенные скорости).

Для этого подставим в выражения для P_j, Q_j, R_j вместо абсолютных координат их выражения (6.3) и вместо составляющих абсолютных скоростей следующие их значения, получаемые полным дифференцированием формул преобразования по времени:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \\ \dot{\eta}_i &= \frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} \dot{q}_j, \\ \dot{\zeta}_i &= \frac{\partial \zeta_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j} \dot{q}_j. \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

Результат этой подстановки можно представить в очень простом виде. Действительно, рассмотрим полную живую силу T нашей системы, определяемую в абсолютных координатах формулой

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2). \tag{6.6}$$

С помощью формул (6.5) мы получим выражение живой силы в переменных Лагранжа:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i \left\{ \left[\frac{\partial \xi_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \xi_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right]^2 + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right]^2 + \left[\frac{\partial \zeta_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j} \dot{q}_j \right]^2 \right\}. \tag{6.6'}$$

Отсюда видно, что T есть многочлен второй степени относительно обобщенных скоростей $\dot{q}$, который удобно представить в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \tag{6.7}$$

где T_s ($s=2$, 1, 0) есть однородный многочлен степени s относительно величин $\dot{q}$.

Очевидно, мы можем написать

$$T_2=\frac{1}{2}\sum_{s,\,j=1}^{k} A_{sj}\dot{q}_s\dot{q}_j,\quad T_1=\sum_{j=1}^{k} B_j\dot{q}_j,$$

где

$$A_{sj}=A_{js}=\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial q_s}\frac{\partial\xi_i}{\partial q_j}+\frac{\partial\eta_i}{\partial q_s}\frac{\partial\eta_i}{\partial q_j}+\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_s}\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_j}\right),$$

$$B_j=\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial q_j}\frac{\partial\xi_i}{\partial t}+\frac{\partial\eta_i}{\partial q_j}\frac{\partial\eta_i}{\partial t}+\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_j}\frac{\partial\zeta_i}{\partial t}\right).$$

Кроме того,

$$T_0=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i\left[\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta_i}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\zeta_i}{\partial t}\right)^2\right].$$

Если формулы преобразования (6.3) не содержат время t, то, как легко видеть, $T_1=T_0=0$, и живая сила T есть однородный многочлен второй степени относительно обобщенных скоростей $\dot{q}$, так что мы можем написать

$$T=T_2=\frac{1}{2}\sum_{s,\,j=1}^{k} A_{sj}\dot{q}_s\dot{q}_j.$$

Покажем теперь, что

$$P_j=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j},\quad Q_j=\frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

Действительно, дифференцируя (6.6) частным образом по $\dot{q}_j$, мы имеем

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}=\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\dot{\xi}_i\frac{\partial\dot{\xi}_i}{\partial\dot{q}_j}+\dot{\eta}_i\frac{\partial\dot{\eta}_i}{\partial\dot{q}_j}+\dot{\zeta}_i\frac{\partial\dot{\zeta}_i}{\partial\dot{q}_j}\right).$$

С другой стороны, дифференцируя по $\dot{q}_j$ соотношения (6.5), получим

$$\frac{\partial\dot{\xi}_i}{\partial\dot{q}_j}=\frac{\partial\xi_i}{\partial q_j},\quad \frac{\partial\dot{\eta}_i}{\partial\dot{q}_j}=\frac{\partial\eta_i}{\partial q_j},\quad \frac{\partial\dot{\zeta}_i}{\partial\dot{q}_j}=\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_j},$$

вследствие чего находим

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}=\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\dot{\xi}_i\frac{\partial\xi_i}{\partial q_j}+\dot{\eta}_i\frac{\partial\eta_i}{\partial q_j}+\dot{\zeta}_i\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_j}\right)\equiv P_j.$$

Дифференцируя затем (6.6) частным образом по q_j, имеем

$$\frac{\partial T}{\partial q_j}=\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\dot{\xi}_i\frac{\partial\dot{\xi}_i}{\partial q_j}+\dot{\eta}_i\frac{\partial\dot{\eta}_i}{\partial q_j}+\dot{\zeta}_i\frac{\partial\dot{\zeta}_i}{\partial q_j}\right).$$

Чтобы найти производные от составляющих скоростей, продифференцируем по q_j формулы (6.5), что дает, например,

$$\frac{\partial\dot{\xi}_i}{\partial q_j}=\frac{\partial^2\xi_i}{\partial t\,\partial q_j}+\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial^2\xi_i}{\partial q_s\,\partial q_j}\dot{q}_s.$$

Дифференцируя теперь (6.3) по q_j и беря затем полные производные по t, мы найдем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial q_j}\right)=\frac{\partial^2\xi_i}{\partial q_j\,\partial t}+\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial^2\xi_i}{\partial q_j\,\partial q_s}\dot{q}_s.$$

Предполагая формулы преобразования (6.3) такими, чтобы правые их части обладали непрерывными частными производными первого и второго порядков, мы будем иметь

$$\frac{\partial^2\xi_i}{\partial t\,\partial q_j}=\frac{\partial^2\xi_i}{\partial q_j\,\partial t},\qquad\frac{\partial^2\xi_i}{\partial q_s\,\partial q_j}=\frac{\partial^2\xi_i}{\partial q_j\,\partial q_s},$$

вследствие чего найдем

$$\frac{\partial\dot{\xi}_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial q_j}\right),\qquad\frac{\partial\dot{\eta}_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\eta_i}{\partial q_j}\right),\qquad\frac{\partial\dot{\zeta}_i}{\partial q_j}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_j}\right),$$

а поэтому

$$\frac{\partial T}{\partial q_j}=\sum_{i=0}^{n} m_i\left[\dot{\xi}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial q_j}\right)+\dot{\eta}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\eta_i}{\partial q_j}\right)+\dot{\zeta}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\zeta_i}{\partial q_j}\right)\right]\equiv Q_j.$$

Таким образом, уравнения (6.4) напишутся в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=R_j\qquad(j=1,\,2,\,\ldots,\,k),\tag{6.8}$$

где T определяется формулой (6.6′), и величины R_j предполагаются выраженными через t, q и $\dot{q}$.

Уравнения (6.8) называются уравнениями Лагранжа второго рода или просто уравнениями Лагранжа. Величины R_j определяются действующими силами и называются поэтому обобщенными силами, хотя размерности этих величин могут и не совпадать с размерностями сил.

Уравнения Ланrранжа позволяют весьма просто переходить от абсолютных координат к каким-либо другим переменным, а также непосредственно составлять уравнения движения, определяющие заданные параметры q_j.

Если, в частности, действующие силы обладают силовой функцией U, то составление уравнений Лагранжа еще более упрощается. В самом деле, тогда мы имеем

$$\Xi_i=\frac{\partial U}{\partial \xi_i},\quad \mathrm{H}_i=\frac{\partial U}{\partial \eta_i},\quad \mathrm{Z}_i=\frac{\partial U}{\partial \zeta_i},$$

вследствие чего

$$R_j=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial \eta_i}\frac{\partial \eta_i}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial \zeta_i}\frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j}\right)\equiv\frac{\partial U}{\partial q_j},$$

и уравнения (6.8) примут вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=\frac{\partial U}{\partial q_j}\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k).\tag{6.8'}$$

3. Покажем теперь, что уравнения (6.8) разрешимы относительно вторых производных от обобщенных координат. Действительно, составляя производные от живой силы, мы имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_j}=\frac{\partial T_2}{\partial \dot q_j}+\frac{\partial T_1}{\partial \dot q_j}=\sum_{s=1}^{k}A_{sj}\dot q_s+B_j,$$

а подставляя эти выражения в уравнения (6.8), мы приведем их к следующему виду:

$$\sum_{s=1}^{k}A_{sj}\ddot q_s=G_j(t\,|\,q\,|\,\dot q)\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k),\tag{6.8''}$$

где G_j — известные функции своих переменных.

Уравнения (6.8″) представляют собой систему линейных неоднородных уравнений относительно величин $\ddot q$, определитель которой обозначим через A:

$$A=|\,A_{sj}\,|.$$

Этот определитель заведомо не равен нулю. Действительно, заменяя величины A_{sj} их выражениями и воспользовавшись известными правилами сложения и умножения определителей, мы найдем

$$A=(m_0m_1\,\ldots\,m_n)^3\cdot D^2,$$

где

$$D=\frac{D(\xi\,|\,\eta\,|\,\zeta)}{D(q)}$$

есть якобиан функций (6.3).

Так как было предположено, что обобщенные координаты однозначно определяют положение рассматриваемой материальной системы, то соотношения (6.3), связывающие старые и новые переменные, должны быть между собою независимыми, а поэтому якобиан функций ξ, η, ζ от k независимых переменных q должен быть отличен от нуля.

Но при $D \neq 0$ также и $A \neq 0$ и, следовательно, уравнения (6.8″) разрешимы относительно вторых производных и дают для них единственные значения.

Решая систему (6.8″), мы получим уравнения движения в следующем виде:

$$\ddot{q}_j = \Phi_j(t \mid q \mid \dot{q}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

где Φ_j суть известные функции времени, обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Наконец, предыдущие уравнения можно представить в виде равносильной системы $2k$ уравнений первого порядка:

$$\frac{dq_j}{dt} = \dot{q}_j, \quad \frac{d\dot{q}_j}{dt} = \Phi_j(t \mid q \mid \dot{q}).$$

Решая эти уравнения, мы получим обобщенные координаты и обобщенные скорости как функции от t и $2k$ произвольных постоянных, за которые могут быть приняты начальные значения q^0 обобщенных координат и $\dot{q}^0$ обобщенных скоростей, соответствующих начальному моменту t_0.

Это решение представится в виде

$$q_j = q_j(t \mid q^0 \mid \dot{q}^0), \quad \dot{q}_j = \dot{q}_j(t \mid q^0 \mid \dot{q}^0),$$

после чего нетрудно уже найти и абсолютные координаты и составляющие скоростей по формулам (6.3) и (6.5).

4. Уравнения Лагранжа могут быть применены не только для определения движения системы материальных точек, но и в более сложных задачах механики, например, для определения движения системы неизменяемых тел. В последнем случае «состояние» системы определяется не только координатами центров приведения тел, но и эйлеровыми углами, определяющими их ориентацию. Поэтому полезно привести более общий вывод уравнений (6.8), основываясь на каком-либо общем, основном принципе механики. Рассмотрим такой вывод на основании интегрального принципа Остроградского — Гамильтона.

Пусть имеем какую-нибудь материальную систему без неинтегрируемых дифференциальных связей и с конечным числом степеней свободы.

Тогда, если число степеней свободы есть k, то «состояние» системы может быть однозначно определено k независимыми между собою параметрами — обобщенными координатами:

$$q_1, q_2, \ldots, q_k.$$

Пусть $T(t|q|\dot{q})$ есть живая сила рассматриваемой материальной системы, являющаяся непрерывной функцией времени t, обобщенных координат q и обобщенных скоростей $\dot{q}$ и обладающая непрерывными частными производными первого и второго порядков.

Представим себе, что движение материальной системы происходит под действием сил, обладающих силовой функцией U, являющейся непрерывной функцией времени и обобщенных координат q *), имеющей непрерывные частные производные первого и второго порядков.

Положим

$$L = T + U. \tag{6.9}$$

Очевидно, что $L(t|q|\dot{q})$, называемая функцией Лагранжа, непрерывна и обладает непрерывными частными производными первого и второго порядков.

Рассмотрим теперь интеграл

$$I = \int_{t_0}^{t_1} L(t|q|\dot{q})\,dt, \tag{6.10}$$

называемый обычно действием по Гамильтону.

Принцип Остроградского — Гамильтона утверждает, что действительное движение материальной системы отличается от всех других возможных ее движений тем, что оно удовлетворяет необходимому условию экстремума гамильтонова действия.

При этом предполагается, что начальное (для $t=t_0$) и конечное (для $t=t_1$) состояния системы одинаковы для всех ее движений (т. е. и для действительного и для всех возможных движений). Иными словами, начальные значения q^0, $\dot{q}^0$ координат и скоростей и конечные их значения q^1, $\dot{q}^1$ неизменны для всех движений.

Необходимым условием экстремума интеграла I является, как известно из вариационного исчисления **), равенство нулю его первой вариации δI, т. е. мы должны иметь

$$\delta I = \delta \int_{t_0}^{t_1} L(t|q|\dot{q})\,dt = 0.$$

---

*) Разумеется, все рассматриваемые здесь функции от t, q и $\dot{q}$ обладают требуемыми свойствами, вообще, в некотором промежутке изменения t (который может быть и бесконечным) и в некоторой области изменения обобщенных координат и обобщенных скоростей. Подробности см. в книге: Уинтнер, Аналитические основы небесной механики, перев. с англ., «Наука», 1967.

**) См., например, М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник, Основы вариационного исчисления, ОНТИ, 1935, и Г. К. Суслов, Теоретическая механика, Гостехиздат, 1944. См. также А. И. Лурье, Аналитическая механика, Физматгиз, 1961.

Вычисляя вариацию по правилам вариационного исчисления, мы находим

$$\delta I = \int_{t_0}^{t_1} \delta L \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j \right] \right\} dt.$$

Для преобразования этого выражения заметим, что, так как время t не варьируется, то операции варьирования и дифференцирования по времени переместительны. В самом деле, обозначая через $\tilde{q}$ варьированное значение функции q, имеем

$$\delta q = \tilde{q} - q.$$

Взяв от обеих частей этого равенства производные, получим

$$\frac{d(\delta q)}{dt} = \dot{\tilde{q}} - \dot{q}.$$

Но разность $\dot{\tilde{q}} - \dot{q}$ представляет вариацию производной от функции q по t, т. е. $\delta \dot{q}$, а следовательно,

$$\frac{d(\delta q)}{dt} = \delta \frac{dq}{dt},$$

что и требовалось показать.

На основании сказанного мы можем написать

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d(\delta q_j)}{dt} dt = \left| {}_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q \, dt.\right.$$

По условию, начальные и конечные положения системы одинаковы во всех ее движениях, т. е. вариации δq_j обобщенных координат равны нулю при $t = t_0$ и $t = t_0$; поэтому имеем

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \, dt = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \delta q_j \, dt,$$

и выражение для вариации функционала I можно представить в следующем виде:

$$\delta I = - \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{j=1}^{k} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j \right\} dt. \qquad (6.11)$$

Так как промежуток интегрирования (t_0, t_1) совершенно произволен, то из равенства интеграла нулю в формуле (6.11) следует равенство нулю подынтегрального выражения, т. е. мы должны иметь

$$\sum_{j=1}^{k} \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} \right] \delta q_j = 0.$$

Но вариации обобщенных координат произвольны и между собой независимы. Поэтому предыдущая сумма может быть равна нулю только в том случае, когда коэффициент при каждой вариации в отдельности есть нуль. Поэтому в действительном движении рассматриваемой материальной системы обобщенные координаты q должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k), \tag{6.12}$$

которые представляют собой просто иную форму уравнений Лагранжа.

В самом деле, из (6.9) мы имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, \qquad \frac{\partial L}{\partial q_j}=\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial U}{\partial q_j},$$

так что уравнения (6.12) могут быть также написаны в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=\frac{\partial U}{\partial q_j} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k), \tag{6.12'}$$

а это и есть уравнения Лагранжа в форме (6.8′), т. е. в случае, когда существует силовая функция U, зависящая только от времени и от обобщенных координат q.

Подобным же образом можно вывести уравнения Лагранжа и из какого-либо другого принципа механики.

§ 2. Первые интегралы уравнений Лагранжа

1. Уравнения Лагранжа представляют собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и, вообще говоря, не допускают интегралов, выражающихся через известные функции или через квадратуры от известных функций.

Однако можно указать некоторые, весьма немногие, но важные для приложений случаи, когда такие интегралы существуют и выводятся из дифференциальных уравнений весьма легко.

Рассмотрим случай, когда живая сила материальной системы определяется формулой (6.7) и не зависит явно от времени t. Пусть, кроме того, действующие силы обладают силовой функцией, также не зависящей явно от времени. Тогда уравнения (6.12) имеют интеграл

$$T_2-T_0-U=h=\mathrm{const},$$

также не содержащий времени явно.

Действительно, помножим уравнения (6.12′) соответственно на $\dot{q}_j$ и сложим все уравнения; мы получим

$$\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial q_j} = \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

Но очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) = \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{j=1}^{k} \ddot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j},$$

и предыдущее равенство напишется в виде

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \sum_{j=1}^{k}\left(\ddot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial q_j}\right) = \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial U}{\partial q_j}. \qquad (6.12'')$$

Но формула (6.7) дает

$$\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} + \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j},$$

а так как T_2 и T_1 суть однородные функции величин $\dot{q}$ второго и первого измерений соответственно, то по теореме Эйлера об однородных функциях мы имеем

$$\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} = 2T_2, \qquad \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} = T_1,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = 2T_2 + T_1.$$

Далее, в силу независимости T и U от времени мы имеем

$$\sum_{j=1}^{k}\left(\ddot{q}_j \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} + \dot{q}_j \frac{\partial T}{\partial q_j}\right) = \frac{dT}{dt}, \qquad \sum_{j=1}^{k} \dot{q}_j \frac{\partial U}{\partial q_j} = \frac{dU}{dt},$$

вследствие чего равенство (6.12″) примет вид

$$\frac{d(2T_2 + T_1)}{dt} - \frac{d(T_2 + T_1 + T_0)}{dt} = \frac{dU}{dt},$$

откуда интегрированием получаем

$$T_2 - T_0 = U + h, \qquad (6.13)$$

где h обозначает постоянную интегрирования.

Интеграл (6.13) назовем **обобщенным интегралом Якоби**. Если $T_1=T_0=0$, так что живая сила $T=T_2$ и есть однородная функция второй степени относительно величин $\dot{q}$, то равенство (6.13) принимает вид

$$T=U+h \qquad (6.14)$$

и называется **интегралом живой силы**.

Последнее равенство можно написать еще в виде

$$T+(-U)=h, \qquad (6.14')$$

откуда ясно его механическое значение. В самом деле, живая сила T определяет кинетическую энергию системы, а $-U$ — ее потенциальную энергию, так что уравнение (6.14′) устанавливает неизменность полной энергии системы во все время движения. По этой причине равенство (6.14) или (6.14′) называется еще **интегралом энергии**.

Такое движение материальной системы, во время которого ее полная энергия не изменяется, называется, как известно, **консервативным**.

2. Рассмотрим теперь случай, когда живая сила системы и ее силовая функция не зависят от какой-нибудь одной из координат q, которая называется в таком случае **циклической координатой**. Не нарушая общности, мы можем считать, что циклической координатой является q_1. Тогда

$$\frac{\partial T}{\partial q_1}=\frac{\partial U}{\partial q_1}=0,$$

и из уравнений (6.12) или (6.12′) мы находим

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}=c_1, \qquad (6.15)$$

или

$$A_{11}\dot{q}_1+A_{21}\dot{q}_2+\ldots+A_{k1}\dot{q}_k+B_1=c_1, \qquad (6.15')$$

где c_1 — произвольная постоянная.

Очевидно, что равенство (6.15) или (6.15′) является интегралом системы (6.12), в рассматриваемом случае линейным относительно обобщенных скоростей $\dot{q}$. С помощью этого интеграла из уравнений (6.12′) можно исключить величину $\dot{q}_1$.

Тогда уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=\frac{\partial U}{\partial q_j} \qquad (j=2,\ 3,\ \ldots,\ k) \qquad (6.12''')$$

образуют систему $2k$—2-го порядка с неизвестными функциями $q_2,\ q_3,\ \ldots,\ q_k$ и, следовательно, порядок первоначальной системы понижен на две единицы.

Если система (6.12‴) проинтегрирована, то из соотношения (6.15′) мы найдем оставшуюся функцию q_1 — циклическую координату — простой квадратурой.

Подобным же образом, если переменные $q_1, q_2, \ldots, q_r$ $(r<k)$ являются циклическими координатами, то мы получим r линейных интегралов типа (6.15), с помощью которых можем понизить порядок системы на $2r$ единиц. После интегрирования преобразованной системы $2k—2r$-го порядка мы найдем все циклические координаты при помощи r квадратур.

При помощи интеграла живой силы или обобщенного интеграла Якоби также можно, конечно, понизить порядок системы уравнений Лагранжа, но так как соотношения (6.13) и (6.14) не являются линейными относительно величин $\dot{q}$, то осуществить это понижение порядка на деле крайне затруднительно, а если все же провести это преобразование, то новые уравнения получатся весьма громоздкими, вследствие чего понижение порядка не доставляет никаких преимуществ.

3. Никаких других интегралов в общем случае уравнения Лагранжа не допускают, но можно указать некоторые частные случаи, в которых возможно даже найти полную систему интегралов уравнений (6.12), т. е. проинтегрировать эту систему до конца.

Один из таких случаев указан Лиувиллем. Так как теорема Лиувилля часто находит применение в задачах небесной механики, то мы ее здесь рассмотрим.

Теорема Лиувилля. Если живая сила системы и ее силовая функция определяются формулами вида

$$2T = B\sum_{j=1}^{k} A_j(q_j)\,\dot{q}_j^2, \quad U = \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{k} U_j(q_j), \tag{6.16}$$

где

$$B = \sum_{j=1}^{k} B_j(q_j),$$

то уравнения Лагранжа интегрируются в **квадратурах***).

Приведем наиболее простое доказательство этой важной теоремы, данное Пенлеве.

Положим

$$du_j = \sqrt{A_j(q_j)}\,dq_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{6.17}$$

---

*) Здесь каждая из функций $A_j(q_j)$, $B_j(q_j)$, $U_j(q_j)$ зависит только от одной координаты q_j. Точно так же G_j и F_j зависят каждая только от u_j.

Это равенство устанавливает связь между обобщенной координатой q_j и соответствующей новой переменной u_j. Предполагая, что q_j выражено через u_j, мы можем положить

$$B_j(q_j)=G_j(u_j),\quad U_j(q_j)=F_j(u_j);$$

тогда формулы (6.16) запишутся в виде

$$2T=G\sum_{j=1}^{k}\dot{u}_j^2,\quad U=\frac{F}{G}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{k}F_j(u_j)}{\sum\limits_{j=1}^{k}G_j(u_j)}.$$

Будем рассматривать теперь величины u_j как новые обобщенные координаты и напишем для них уравнения Лагранжа. Мы имеем

$$\frac{d}{dt}(G\dot{u}_j)-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial u_j}\sum_{j=1}^{k}\dot{u}_j^2=\frac{\partial U}{\partial u_j}\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k).\quad (6.18)$$

Так как T и U не зависят явно от времени и живая сила содержит только квадраты новых обобщенных скоростей $\dot{u}_j$, то уравнения (6.18) имеют интеграл живой силы

$$T=\frac{1}{2}G\sum_{j=1}^{k}\dot{u}_j^2=U+h,\qquad (6.18')$$

где h — произвольная постоянная.

Умножив теперь каждое равенство (6.18) на $2G\dot{u}_j$ и имея в виду (6.18′), мы получим

$$\frac{d}{dt}(G^2\dot{u}_j^2)-2\dot{u}_j\frac{\partial G}{\partial u_j}(U+h)=2\dot{u}_jG\frac{\partial U}{\partial u_j},$$

или

$$\frac{d}{dt}(G^2\dot{u}_j^2)=2\dot{u}_j\frac{\partial G(U+h)}{\partial u_j}.$$

Далее, так как $GU=F$, имеем

$$\frac{d}{dt}(G^2\dot{u}_j^2)=2\dot{u}_j\frac{\partial(F+hG)}{\partial u_j}=2\dot{u}_j\frac{d(F_j+hG_j)}{du_j},$$

или

$$\frac{d(G^2\dot{u}_j^2)}{dt}=2\frac{d(F_j+hG_j)}{dt}.$$

Интегрируя эти равенства, найдем

$$G^2\dot{u}_j^2=2(F_j+hG_j+\alpha_j),\qquad (6.19)$$

где α_j — произвольные постоянные.

Эти постоянные не независимы. Действительно, складывая равенства (6.19), мы находим

$$\sum_{j=1}^{k} G^2\dot{u}_j^2 = 2GT = 2\sum_{j=1}^{k}(F_j + hG_j + \alpha_j) =$$
$$= 2F + 2hG + 2\sum_{j=1}^{k}\alpha_j = 2G(U+h) + 2\sum_{j=1}^{k}\alpha_j.$$

Сравнение полученного равенства с интегралом живой силы (6.18) приводит к соотношению

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j = 0$$

между произвольными постоянными α.

Далее, из (6.19) имеем

$$\frac{du_j}{\sqrt{F_j + hG_j + \alpha_j}} = \frac{\sqrt{2}\,dt}{G}.$$

Умножая каждое из этих равенств на G_j и складывая, мы получим

$$\sum_{j=1}^{k}\frac{G_j\,du_j}{\sqrt{F_j + hG_j + \alpha_j}} = \sqrt{2}\,dt. \qquad (6.20)$$

Возвращаясь теперь к переменным q, мы можем написать равенства (6.19) и (6.20) в следующем виде:

$$B^2A_j(q_j)\dot{q}_j^2 = 2\Psi_j(q_j) \qquad (6.19')$$

и

$$\sum_{j=1}^{k} B_j\sqrt{\frac{A_j}{\Psi_j}}\,dq_j = \sqrt{2}\,dt, \qquad (6.20')$$

где положено для сокращения

$$\Psi_j(q_j) = U_j(q_j) + hB_j(q_j) + \alpha_j,$$

так что эта функция также зависит только от одной переменной.

Интегрируя (6.19′) после исключения из них dt и (6.20′), мы получим полную систему первых интегралов уравнений Лагранжа в случае Лиувилля в следующем виде:

$$\int\sqrt{\frac{A_1(q_1)}{\Psi_1(q_1)}}\,dq_1 + \beta_1 = \ldots = \int\sqrt{\frac{A_k(q_k)}{\Psi_k(q_k)}}\,dq_k + \beta_k, \qquad (6.21)$$

$$\sqrt{2}(t-\tau) = \sum_{j=1}^{k}\int B_j(q_j)\sqrt{\frac{A_j(q_j)}{\Psi_j(q_j)}}\,dq_j. \qquad (6.22)$$

Независимыми произвольными постоянными в этих формулах являются величины

$$\begin{array}{llll} \alpha_1, & \alpha_2, \ldots, & \alpha_{k-1}, & h, \\ \beta_1, & \beta_2, \ldots, & \beta_{k-1}, & \tau, \end{array}$$

число которых равно $2k$, т. е. порядку системы. Поэтому равенства (6.21) и (6.22) представляют общий интеграл уравнений Лагранжа в случае Лиувилля. Следовательно, теорема доказана.

§ 3. Примеры использования уравнений Лагранжа

Рассмотрим некоторые простые примеры на применение уравнений Лагранжа.

1. Пусть мы имеем задачу о движении одной материальной точки под действием силы, составляющие которой по осям абсолютной системы координат суть Ξ, H, Z. Если m есть масса точки, то дифференциальные уравнения движения будут иметь следующий вид:

$$m\ddot{\xi}=\Xi,\quad m\ddot{\eta}=\mathrm{H},\quad m\ddot{\zeta}=\mathrm{Z}. \qquad (6.23)$$

Введем теперь вместо прямоугольных координат ξ, η, ζ полярные сферические r, φ, λ, где $r=\sqrt{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}$ есть радиус-вектор точки, φ — широта и λ — долгота (рис. 39).

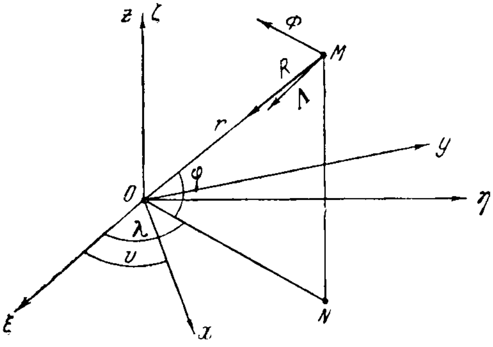


Рис. 39.

Чтобы получить выражение для живой силы

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2)>(6.24)$$

в сферических координатах, дифференцируем сначала формулы преобразования, что дает

$$\begin{aligned} \dot{\xi}&=\dot{r}\cos\varphi\cos\lambda-r\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\lambda-r\dot{\lambda}\cos\varphi\sin\lambda,\\ \dot{\eta}&=\dot{r}\cos\varphi\sin\lambda-r\dot{\varphi}\sin\varphi\sin\lambda+r\dot{\lambda}\cos\varphi\cos\lambda,\\ \dot{\zeta}&=\dot{r}\sin\varphi+r\dot{\varphi}\cos\varphi, \end{aligned}$$

после чего находим

$$T=\frac{1}{2}m(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2+r^2\cos^2\varphi\cdot\dot{\lambda}^2). \qquad (6.25)$$

Примем за обобщенные координаты — сферические, полагая *)

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \lambda.$$

Тогда будем иметь

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \qquad \frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{\partial T}{\partial r} = mr(\dot{\varphi}^2 + \dot{\lambda}^2 \cos^2\varphi),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi}, \qquad \frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\, mr^2\dot{\lambda}^2 \sin\varphi \cos\varphi,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = mr^2\dot{\lambda}\cos^2\varphi, \qquad \frac{\partial T}{\partial q_3} = \frac{\partial T}{\partial \lambda} = 0.$$

Подставляя эти значения частных производных в уравнения Лагранжа (6.8), мы получим дифференциальные уравнения движения точки в сферических координатах:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r\dot{\lambda}^2\cos^2\varphi &= \frac{1}{m} R_1, \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) + r^2\dot{\lambda}^2 \sin\varphi\cos\varphi &= \frac{1}{m} R_2, \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot{\lambda}\cos^2\varphi) &= \frac{1}{m} R_3. \end{aligned}\right\} \qquad (6.25')$$

Выражения для обобщенных сил найдутся по формулам § 1, которые дают

$$R_1 = \Xi\cos\varphi\cos\lambda + \mathrm{H}\cos\varphi\sin\lambda + \mathrm{Z}\sin\varphi = R,$$

$$R_2 = r\,[\Xi(-\sin\varphi\cos\lambda) + \mathrm{H}(-\sin\varphi\sin\lambda) + \mathrm{Z}\cos\varphi] = r\Phi,$$

$$R_3 = r\cos\varphi\,[\Xi(-\sin\lambda) + \mathrm{H}\cos\lambda + \mathrm{Z}\cdot 0] = r\cos\varphi\cdot\Lambda,$$

где R — проекция силы на направление радиуса-вектора движущейся точки, Λ — проекция силы на направление, перпендикулярное к плоскости, проходящей через радиус-вектор и ось аппликат (ось $O\zeta$), и, наконец, Φ — проекция силы на направление, перпендикулярное к двум предыдущим (см. рис. 39).

Если существует силовая функция $U(t, r, \varphi, \lambda)$, то, как мы уже знаем,

$$R_1 = \frac{\partial U}{\partial r}, \quad R_2 = \frac{\partial U}{\partial \varphi}, \quad R_3 = \frac{\partial U}{\partial \lambda}.$$

В случае, когда силовая функция не зависит явно от времени, уравнения (6.25′) имеют интеграл живой силы

$$T = U + h,$$

---

*) Таким образом, производные $\dot{r}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\lambda}$ суть обобщенные скорости.

а если силовая функция не зависит к тому же от долготы λ, то последняя является циклической координатой (так как T также не зависит от λ) и уравнения (6.25′) имеют еще один интеграл

$$r^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda} = c,$$

называемый обычно «интегралом площадей» *).

2. В качестве второго примера рассмотрим преобразование тех же уравнений движения (6.23) к вращающейся системе координат. Пусть ось аппликат новой системы координат совпадает с осью аппликат старой системы, а новая ось абсцисс образует с осью $O\xi$ угол v, который будем считать известной функцией времени. Тогда переход к новым координатам x, y, z определится формулами (см. рис. 39)

$$\xi = x\cos v - y\sin v, \quad \eta = x\sin v + y\cos v, \quad \zeta = z,$$

откуда дифференцированием находим производные

$$\begin{aligned}
\dot{\xi} &= \dot{x}\cos v - \dot{y}\sin v - \dot{v}(x\sin v + y\cos v),\\
\dot{\eta} &= \dot{x}\sin v + \dot{y}\cos v + \dot{v}(x\cos v - y\sin v),\\
\dot{\zeta} &= \dot{z},
\end{aligned}$$

и выражение живой силы T в новых координатах

$$T = \frac{m}{2}[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2\dot{v}(x\dot{y} - y\dot{x}) + \dot{v}^2(x^2 + y^2)]. \tag{6.26}$$

Возьмем за обобщенные координаты величины x, y, z, т. е. положим

$$q_1 = x, \quad q_2 = y, \quad q_3 = z.$$

Выражения для частных производных от живой силы T будут иметь вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m(\dot{x} - \dot{v}y), && \frac{\partial T}{\partial x} = m\dot{v}(\dot{y} + \dot{v}x),\\
&\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = m(\dot{y} + \dot{v}x), && \frac{\partial T}{\partial y} = m\dot{v}(-\dot{x} + \dot{v}y),\\
&\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, && \frac{\partial T}{\partial z} = 0.
\end{aligned}$$

---

*) Интеграл площадей не зависит от силовой функции и может иметь место и в общем случае. Для его существования достаточно только, чтобы Λ была равна нулю, т. е. чтобы направление действующей силы лежало в плоскости OMN (см. рис. 39).

Подставляя эти выражения в уравнения Лагранжа (6.8), мы получим уравнения движения точки во вращающихся осях:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} - 2\dot{v}\dot{y} - \dot{v}^2 x - \ddot{v} y &= \frac{1}{m} R_1, \\ \ddot{y} + 2\dot{v}\dot{x} - \dot{v}^2 y + \ddot{v} x &= \frac{1}{m} R_2, \\ \ddot{z} &= \frac{1}{m} R_3, \end{aligned}\right\} \tag{6.26'}$$

где, согласно формулам § 1,

$$\begin{aligned} R_1 &= \Xi \cos v - \mathrm{H} \sin v = X, \\ R_2 &= \Xi \sin v + \mathrm{H} \cos v = Y, \\ R_3 &= \mathrm{Z} = Z, \end{aligned}$$

так что X, Y, Z суть проекции силы на подвижные оси. Если существует силовая функция U, то мы имеем

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Часто встречается случай, когда новая система координат вращается вокруг оси $O\zeta$ равномерно. Тогда

$$\dot{v} = \mathrm{const} = n, \quad \ddot{v} = 0,$$

и уравнения (6.26′) напишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x &= \frac{1}{m} X, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y &= \frac{1}{m} Y, \\ \ddot{z} &= \frac{1}{m} Z. \end{aligned}\right\} \tag{6.26''}$$

Если в последнем случае существует силовая функция U, не зависящая явно от времени, то, так как при $\dot{v} = n$ живая сила также не зависит от времени, уравнения движения допускают интеграл

$$T_2 - T_0 = U + h.$$

Но по формуле (6.26)

$$T_2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad T_0 = \frac{mn^2}{2}(x^2 + y^2),$$

и упомянутый интеграл можно написать в виде

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \Omega + h, \tag{6.27}$$

где положено

$$\Omega = T_0 + U.$$

Интеграл (6.27) называется интегралом Якоби и был получен впервые в частном случае задачи, описываемой уравнениями (6.26″), известной под названием «ограниченная задача трех тел» *).

Заметим, что если написать уравнения (6.26″) в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}-2n\dot{y}&=\frac{1}{m}\frac{\partial\Omega}{\partial x},\\ \ddot{y}+2n\dot{x}&=\frac{1}{m}\frac{\partial\Omega}{\partial y},\\ \ddot{z}&=\frac{1}{m}\frac{\partial\Omega}{\partial z},\end{aligned}\right\}\qquad(6.27')$$

то интеграл Якоби можно вывести также из этих уравнений непосредственно. В самом деле, умножая уравнения (6.27′) соответственно на $m\dot{x}$, $m\dot{y}$, $m\dot{z}$ и складывая, мы имеем

$$m(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}+\dot{z}\ddot{z})=\frac{\partial\Omega}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial\Omega}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial\Omega}{\partial z}\dot{z},$$

или

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)=\frac{d\Omega}{dt},$$

откуда интегрированием получается интеграл Якоби (6.27). Заметим, кстати, что этот интеграл (так же как и обобщенный интеграл Якоби, рассмотренный в § 2) нельзя назвать интегралом живой силы или интегралом энергии, так как левая часть равенства (6.27) содержит только часть полной живой силы, а следовательно, интеграл Якоби не выражает принципа сохранения энергии.

Преобразуем еще систему (6.26″) к цилиндрическим координатам, присоединяя к аппликате z обычные полярные координаты на плоскости (xy), полагая

$$x=\rho\cos\lambda,\qquad y=\rho\sin\lambda.$$

Тогда, как легко проверить,

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\lambda}^2,\qquad x\dot{y}-y\dot{x}=\rho^2\dot{\lambda},$$

и выражение для живой силы T примет вид

$$T=\frac{m}{2}\left[\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\lambda}^2+\dot{z}^2+2n\rho^2\dot{\lambda}+n^2\rho^2\right].$$

Принимая за обобщенные координаты величины ρ, λ, z, мы получим из уравнений Лагранжа следующие дифференциальные

---

*) См. главу VIII части второй.

уравнения:

$$\ddot{\rho}-\rho(\dot{\lambda}+n)^2=\frac{1}{m}P_1,$$
$$\frac{d}{dt}[\rho^2(\dot{\lambda}+n)]=\frac{1}{m}P_2,$$
$$\ddot{z}=\frac{1}{m}Z,$$

где обобщенные силы P_1 и P_2 определяются формулами

$$P_1=X\cos\lambda+Y\sin\lambda=P_\rho,$$
$$P_2=\rho(-X\sin\lambda+Y\cos\lambda)=\rho P_\lambda.$$

Очевидно, что P_ρ есть составляющая действующей силы по направлению, параллельному проекции радиуса-вектора на плоскость (xy), а P_λ — составляющая силы по направлению, перпендикулярному к предыдущему и лежащему также в плоскости (xy).

Если существует силовая функция U, то имеем

$$P_1=\frac{\partial U}{\partial\rho},\quad P_2=\frac{\partial U}{\partial\lambda},\quad Z=\frac{\partial U}{\partial z},$$

и уравнения движения напишутся в виде

$$\ddot{\rho}-\rho(\dot{\lambda}+n)^2=\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial\rho},$$
$$\frac{d}{dt}[\rho^2(\dot{\lambda}+n)]=\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial\lambda},$$
$$\ddot{z}=\frac{1}{m}\frac{\partial U}{\partial z},$$

откуда в случае независимости U от времени следует существование интеграла Якоби в виде

$$\frac{m}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\lambda}^2+\dot{z}^2-n^2\rho^2)=U+h.$$

Этими примерами мы здесь и ограничимся. В дальнейшем мы будем иметь случаи рассматривать еще другие примеры применения уравнений Лагранжа.

§ 4. Канонические уравнения и их интегралы

1. Уравнения Лагранжа представляют собой систему k совместных дифференциальных уравнений второго порядка, определяющих обобщенные координаты в функции времени и $2k$ произвольных постоянных, за которые можно принять начальные значения q^0 и $\dot{q}^0$.

Как известно, увеличивая соответствующим образом число неизвестных функций, мы всегда можем заменить эту систему равносильной ей системой $2k$ дифференциальных уравнений первого порядка.

Эту замену можно произвести различными способами, простейший из которых указан в конце § 1.

Теперь мы рассмотрим один специальный случай такого преобразования, который приведет нас к особенно удобной и симметричной форме дифференциальных уравнений движения, называемой канонической или гамильтоновой.

Рассмотрим уравнения Лагранжа в общем виде (6.8):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = R_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

и введем вместо обобщенных скоростей $\dot{q}_j$ новые зависимые переменные p_j при помощи формул

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k). \tag{6.28}$$

Если живая сила T определяется формулой типа (6.7), то p_j суть линейные функции обобщенных скоростей и мы имеем

$$p_j = \sum_{s=1}^{k} A_{sj}\dot{q}_s + B_j. \tag{6.28'}$$

Было доказано, что определитель $A = |A_{sj}|$ не равен нулю тождественно, вследствие чего уравнения (6.28′) можно разрешить относительно $\dot{q}$, что дает

$$\dot{q}_j = \sum_{s=1}^{k} \frac{\bar{A}_{js}}{A}(p_s - B_s), \tag{6.28''}$$

где $\bar{A}_{js}$ обозначает алгебраическое дополнение элемента A_{js} определителя A.

Следовательно, зная для какого-либо момента времени значения величин q и p, мы будем знать также значения величин q и $\dot{q}$, определяющих состояние системы.

Поэтому переменные

$$\left.\begin{matrix} q_1, & q_2, & \ldots, & q_k, \\ p_1, & p_2, & \ldots, & p_k, \end{matrix}\right\} \tag{6.29}$$

полностью определяют состояние системы и могут рассматриваться вместо обобщенных координат и обобщенных скоростей.

Величины (6.29) будем называть каноническими переменными или каноническими координатами.

Величины q по-прежнему называются обобщенными координатами, а величины p называются обыкновенно обобщенными импульсами или просто импульсами.

Составим теперь дифференциальные уравнения, определяющие канонические переменные q и p.

Прежде всего, мы имеем

$$\frac{dq_j}{dt} = \dot{q}_j, \quad \frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial T}{\partial q_j} + R_j. \tag{6.30}$$

Остается выразить правые части этих равенств через канонические переменные, для чего достаточно подставить вместо обобщенных скоростей их выражения (6.28″). Результаты этих подстановок можно представить в очень простом и симметричном виде, если ввести вспомогательную функцию K при помощи формулы

$$K = \sum_{s=1}^{k} p_s \dot{q}_s - T. \tag{6.31}$$

Считая величины $\dot{q}_s$ функциями времени и канонических переменных, определяемых уравнениями (6.28) (в частности, уравнениями (6.28′)), мы можем рассматривать K так же, как функцию времени и канонических переменных, а поэтому можем дифференцировать эту функцию и по q и по p.

Выполняя эти дифференцирования, мы найдем

$$\frac{\partial K}{\partial q_j} = \sum_{s=1}^{k} p_s \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial q_j} - \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial q_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

и

$$\frac{\partial K}{\partial p_j} = \dot{q}_j + \sum_{s=1}^{k} p_s \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial p_j} - \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial p_j},$$

откуда в силу (6.28) и (6.30) имеем

$$\dot{q}_j = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial K}{\partial q_j},$$

вследствие чего получаем

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial K}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial q_j} + R_j. \tag{6.30′}$$

Допустим теперь, что R_j являются частными производными от некоторой функции $U(t|q)$ по координатам q_j, т. е. что

$$R_j = \frac{\partial U}{\partial q_j}.$$

Полагая тогда

$$H(t\,|\,q\,|\,p) = K(t\,|\,q\,|\,p) - U(t\,|q), \tag{6.31'}$$

мы напишем уравнения (6.30′) следующим образом:

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}. \tag{6.32}$$

Уравнения (6.32) и называются **каноническими уравнениями** или **уравнениями Гамильтона**, а функция H, определяющая аналитическую структуру правых частей этих уравнений, называется **характеристической функцией**, или **функцией Гамильтона** (иногда **гамильтонианом**).

В наиболее интересном для нас случае, когда T есть живая сила некоторой материальной системы с k степенями свободы, определяемая формулой (6.8), выражение для функции K и соответственно для функции H принимает чрезвычайно простой вид, имеющий ясный механический смысл.

Действительно, в этом случае

$$\sum_{s=1}^{k} p_s\dot{q}_s = \sum_{s=1}^{k} \dot{q}_s \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} = \sum_{s=1}^{k} \dot{q}_s \left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_s} + \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_s} \right) = 2T_2 + T_1,$$

и формула (6.31) дает

$$K = 2T_2 + T_1 - T = 2T_2 + T_1 - (T_2 + T_1 + T_0),$$

т. е.

$$K = T_2 - T_0. \tag{6.31''}$$

Если, как это часто бывает, живая сила T есть однородный многочлен второй степени относительно обобщенных скоростей, то $T_1 = T_0 = 0$, $T = T_2$, и мы имеем просто

$$K = T.$$

Далее, если существует силовая функция U, не зависящая от обобщенных скоростей, то формула (6.31′) дает

$$H = T_2 - T_0 - U, \tag{6.31'''}$$

а когда T есть однородный многочлен второй степени, мы имеем

$$H = T - U. \tag{6.31*}$$

Таким образом, в этом последнем случае характеристическая функция H есть полная энергия механической системы.

Заметим еще, что каноническую систему вида (6.32) можно, разумеется, рассматривать просто как особую форму системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не связывая ее с какой-либо механической задачей. Тогда характеристическую функцию или гамильтониан H нужно рассматривать просто как некоторую заданную функцию от независимой переменной t (которая вовсе не обязательно обозначает время) и от величин q и p, являющихся неизвестными функциями.

Рассматривая каноническую систему с такой общей точки зрения, мы можем изучать свойства этих уравнений, а также свойства функций, ими определяемых, чисто математическим путем, что может оказаться полезным также и для приложений гамильтоновых систем в небесной механике.

2. Выразим теперь функции K и H через канонические переменные, предполагая, что T есть живая сила некоторой материальной системы, определяемая формулой (6.8). Так как T_0 зависит только от t и величин q, то в силу формулы (6.31‴) остается выразить через канонические переменные квадратичную форму T_2.

Воспользовавшись теоремой Эйлера, мы можем написать

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j,$$

но

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} + B_j,$$

откуда

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j} = p_j - B_j,$$

и мы получаем

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} (p_j - B_j) \dot{q}_j.$$

Подставляя сюда вместо $\dot{q}_j$ его выражение (6.28″), найдем окончательно

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=1}^{k} \frac{\bar{A}_{sj}}{A} (p_j - B_j)(p_s - B_s).$$

Очевидно, что T_2 не будет, вообще говоря, однородным многочленом относительно импульсов p, но если $T_1 \equiv 0$, то все B также суть нули и мы имеем

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} \sum_{s=1}^{k} \frac{\bar{A}_{js}}{A} p_j p_s,$$

т. е. однородную функцию второй степени относительно импульсов p.

Найдя T_2, мы получим K по формуле (6.31) и, в случае существования силовой функции, гамильтониан H по формуле (6.31′).

Рассматривая теперь произвольную каноническую систему, покажем, что если характеристическая функция не зависит от времени, т. е. если

$$H=H(q|p),$$

то система (6.32) всегда имеет первый интеграл $H=\mathrm{const}$.

Действительно, умножим уравнения (6.32) соответственно на $\dot{p}_j$ и на $\dot{q}_j$ и сложим все уравнения. Мы получим

$$0=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\dot{p}_j+\frac{\partial H}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j\right)=\frac{dH}{dt},$$

откуда интегрированием получаем первый интеграл канонической системы (6.32)

$$H(q\,|\,p)=h=\mathrm{const}. \tag{6.33}$$

В том случае, когда уравнения (6.32) определяют движение материальной системы, обладающей силовой функцией, то H определяется формулой (6.31′), и если живая сила T и силовая функция U не зависят от времени, то мы имеем первый интеграл

$$H\equiv T_2-T_0-U=h,$$

совпадающий с обобщенным интегралом Якоби уравнений Лагранжа.

Если T есть однородный многочлен второй степени относительно импульсов p, то предыдущий интеграл принимает вид

$$H\equiv T-U=h,$$

и является интегралом энергии или живых сил.

Другой простейший тип интеграла системы (6.32) мы будем иметь в том случае, когда характеристическая функция H не зависит от какой-либо из переменных q; действительно, если, например, H не зависит от q_1, то

$$\frac{\partial H}{\partial q_1}\equiv 0,$$

и из (6.32) следует

$$p_1=c_1=\mathrm{const}.$$

Интегралы такого рода называются иногда интегралами обобщенных кинетических моментов или интегралами моментов количества движения.

Если система (6.32) описывает движение материальной системы, то q_1 есть циклическая координата, и указанный интеграл совпадает с интегралом (6.15) уравнений Лагранжа.

3. Вообще редко когда удается отыскать какие-либо другие интегралы канонической системы общего вида, кроме уже указанных. Однако полезно иметь в виду важное свойство интегралов канонической системы, выражаемое так называемой теоремой Пуассона.

Будем предполагать, что (6.32) есть произвольная каноническая система, характеристическая функция которой есть некоторая заданная функция канонических переменных q, p и вообще времени t.

Найдем условие, при котором равенство вида

$$\Phi(q\,|\,p\,|\,t)=C \tag{6.34}$$

является одним из первых интегралов системы (6.32).

Для этого полная производная от функции Φ по t в силу уравнений (6.32) должна быть равна тождественно нулю; но

$$\frac{d\Phi}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\sum_{s=1}^{k}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial\Phi}{\partial p_s}\dot{p}_s\right),$$

а заменяя здесь $\dot{q}_s$ и $\dot{p}_s$ их выражениями из (6.32), мы получим равенство

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\sum_{s=1}^{k}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial q_s}\frac{\partial H}{\partial p_s}-\frac{\partial\Phi}{\partial p_s}\frac{\partial H}{\partial q_s}\right)=0, \tag{6.35}$$

которое и представляет собой искомое условие. Наоборот, всякая функция $\Phi(q|p|t)$, удовлетворяющая уравнению (6.35) и приравненная произвольной постоянной, доставит некоторый первый интеграл системы (6.32).

Условие (6.35) можно записать короче, воспользовавшись символом, называемым скобкой Пуассона.

Пусть

$$F(q\,|\,p\,|\,t),\quad \Phi(q\,|\,p\,|\,t)$$

— две произвольные функции канонических переменных и времени, однозначные и непрерывные вместе со своими частными производными первого порядка в некоторой области изменения независимых переменных.

Скобкой Пуассона от пары функций F и Φ называется следующее выражение:

$$(F,\,\Phi)=\sum_{s=1}^{k}\left(\frac{\partial F}{\partial q_s}\frac{\partial\Phi}{\partial p_s}-\frac{\partial F}{\partial p_s}\frac{\partial\Phi}{\partial q_s}\right). \tag{6.36}$$

Тогда условие, что $\Phi=C$ является первым интегралом канонической системы (6.32), можно записать в виде

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+(\Phi,\,H)=0. \tag{6.35'}$$

Ясно, что если H не зависит от времени, то этому условию удовлетворяет сама функция H, т. е. равенство

$$\Phi = H(q \mid p) = \text{const}$$

есть интеграл канонической системы, что нам уже известно.

Отметим простейшие свойства скобок Пуассона, которыми нам придется здесь воспользоваться.

Прежде всего заметим, что если одна из двух функций есть величина постоянная, то скобка Пуассона равна нулю, а если функции переставить или у одной из них изменить знак, то и скобка Пуассона также изменит знак. В самом деле, из (6.36) выводим сразу

$$(F, C) = 0, \quad (\Phi, F) = -(F, \Phi), \quad (F, -\Phi) = -(F, \Phi).$$

Далее, дифференцируя (6.36) по t, входящему явно, мы получим без труда следующую формулу:

$$\frac{\partial (F, \Phi)}{\partial t} = \left(\frac{\partial F}{\partial t}, \Phi\right) + \left(F, \frac{\partial \Phi}{\partial t}\right). \tag{6.37}$$

Получим теперь замечательное тождество, выведенное Якоби, которое имеет вид

$$(F, (\Phi, \Psi)) + (\Phi, (\Psi, F)) + (\Psi, (F, \Phi)) = 0, \tag{6.38}$$

где

$$F(q \mid p \mid t), \quad \Phi(q \mid p \mid t), \quad \Psi(q \mid p \mid t)$$

суть три произвольные функции переменных q, p и времени, удовлетворяющие в некоторой области общим условиям непрерывности и дифференцируемости.

Чтобы доказать тождество Якоби, сделаем сначала следующее замечание. Пусть $A_j(q \mid p \mid t)$ $(j = 1, 2, \ldots, 2k)$ суть какие-либо функции от канонических переменных и времени.

Положим

$$A(F) = \sum_{s=1}^{k} \left[A_s \frac{\partial F}{\partial q_s} + A_{k+s} \frac{\partial F}{\partial p_s}\right].$$

Вводя в рассмотрение вторую систему такого же числа функций $B_j(q \mid p \mid t)$, положим также

$$B(F) = \sum_{s=1}^{k} \left[B_s \frac{\partial F}{\partial q_s} + B_{k+s} \frac{\partial F}{\partial p_s}\right].$$

Тогда, как нетрудно проверить непосредственно, разность

$$A(B(F)) - B(A(F))$$

не содержит производных второго порядка от функции F.

Составим теперь три скобки Пуассона,

$$F_1 = (\Phi, \Psi), \quad \Phi_1 = (\Psi, F), \quad \Psi_1 = (F, \Phi), \tag{6.39}$$

и покажем, что сумма

$$(F, F_1) + (\Phi, F_1) + (\Psi, \Psi_1) \tag{6.39'}$$

равна тождественно нулю *).

Действительно, каждый член суммы (6.39′) есть произведение частной производной второго порядка на две частные производные первого порядка. Поэтому достаточно показать, что сумма (6.39′) вовсе не содержит производных второго порядка. Покажем, например, что эта сумма не содержит вторых производных от F, т. е. что все члены, содержащие эти производные, взаимно сокращаются. В самом деле, члены, содержащие вторые производные от F, входят только в сумму $(\Phi, \Phi_1) + (\Psi, \Psi_1)$, причем можно написать

$$(\Phi, \Phi_1) + (\Psi, \Psi_1) = (\Phi, (\Psi, F)) - (\Psi, (\Phi, F)).$$

Но так как скобка Пуассона линейна относительно производных каждой из функций, то мы можем положить

$$(\Phi, F) = A(F), \quad (\Psi, F) = B(F);$$

тогда выражение $(\Phi, \Phi_1) + (\Psi, \Psi_1)$ запишется в виде

$$(\Phi, \Phi_1) + (\Psi, \Psi_1) = A(B(F)) - B(A(F)),$$

а эта величина, как было отмечено, не содержит вторых производных от функции F. Аналогично показывается, что сумма (6.39′) не содержит вторых частных производных также и функций Φ и Ψ. Следовательно, сумма (6.39′) тождественно равна нулю и тождество Якоби (6.38) доказано.

Теперь легко вывести теорему Пуассона, которую можно сформулировать следующим образом:

Теорема Пуассона. Если $F = C_1$ и $\Phi = C_2$ суть два первых интеграла канонической системы, то $(F, \Phi) = C_3$ также есть интеграл этой системы.

Действительно, так как F и Φ — интегралы системы (6.32), то по (6.35′) имеем тождественно

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (F, H) = 0, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + (\Phi, H) = 0. \tag{6.40}$$

Применим тождество Якоби к трем функциям, H, F и Φ, что дает

$$(H, (F, \Phi)) + (F, (\Phi, H)) + (\Phi, (H, F)) = 0.$$

---

*) К. Якоби, Лекции по динамике (перев. с нем., ОНТИ, 1936), или А. И. Лурье, Аналитическая механика, Физматгиз, 1961. См. также Уинтнер, Аналитические основы небесной механики, перев. с англ., «Наука», 1967.

Это тождество при помощи тождеств (6.40) и отмеченных выше свойств скобок Пуассона можно переписать в виде

$$\left(F, \frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial t}, \Phi\right)+((F, \Phi), H)=0,$$

или, используя (6.37), в виде

$$\frac{\partial (F, \Phi)}{\partial t}+((F, \Phi), H)=0,$$

откуда в силу условия (6.35′) находим, что

$$(F, \Phi)=C_3=\text{const} \tag{6.40′}$$

есть также интеграл канонической системы (6.32).

Не следует думать, что, зная некоторые интегралы системы канонических уравнений, мы можем всегда выводить при помощи теоремы Пуассона новые интегралы. Действительно, может оказаться, что скобка (F, Φ) приводится тождественно к постоянной или образует уже известный интеграл.

Если функция Гамильтона H не зависит от времени, то уравнения (6.32), как уже известно, всегда имеют интеграл

$$H(q\,|\,p)=h.$$

Пусть

$$\Phi(q\,|\,p\,|\,t)=C \tag{6.41}$$

есть какой-то другой интеграл той же системы (6.32). Тогда, по теореме Пуассона,

$$(H, \Phi)=C' \tag{6.41′}$$

также будет интегралом системы (6.32). Но, с другой стороны, по условию (6.35′), мы имеем также тождественно

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+(\Phi, H)=0, \tag{6.41″}$$

и интеграл (6.41′) приведется к виду

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}=C'.$$

Если интеграл (6.41′) не зависит от времени, то имеем тождество

$$(\Phi, H)\equiv 0,$$

и из двух интегралов $H=h$ и $\Phi=C$ не получается нового интеграла.

4. Чтобы дать примеры канонических уравнений, рассмотрим сначала задачу о движении материальной точки под действием силы, обладающей не зависящей от времени силовой функцией.

В сферических координатах живая сила определяется формулой (6.25), а поэтому, полагая $p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$, имеем

$$p_1 = m\dot{r}, \quad p_2 = mr^2\dot{\varphi}, \quad p_3 = mr^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda}.$$

В канонических переменных живая сила примет вид

$$T = \frac{1}{2m}\left(p_1^2 + \frac{p_2^2}{r^2} + \frac{p_3^2}{r^2 \cos^2 \varphi}\right)$$

и уравнения движения могут быть написаны в виде

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (j = 1,\ 2,\ 3),$$

где функция Гамильтона определяется формулой

$$H = T - U.$$

Очевидно, что в этом примере существует интеграл $H = h$, являющийся интегралом энергии. Если, кроме того, силовая функция не зависит от долготы λ, то H тоже не зависит от λ, и мы имеем еще один интеграл

$$\Phi = p_3 = mr^2 \cos^2 \varphi \cdot \dot{\lambda} = c_3 = \mathrm{const}.$$

Легко проверить, что в этом случае

$$(\Phi,\ H) \equiv 0,$$

и теорема Пуассона не дает нового интеграла.

Для второго примера возьмем уравнения движения материальной точки в системе координат, вращающейся вокруг оси аппликат с постоянной угловой скоростью n. Кроме того, предположим, что действующая сила имеет силовую функцию, не зависящую от времени.

Живая сила определится в этом случае по формуле (6.26), где нужно положить $\dot{v} = n$, т. е.

$$T = \frac{m}{2}\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2n\,(x\dot{y} - y\dot{x}) + n^2\,(x^2 + y^2)\right],$$

откуда находим выражения для импульсов

$$p_1 = m\,(\dot{x} - ny), \quad p_2 = m\,(\dot{y} + nx), \quad p_3 = m\dot{z},$$

и уравнения движения могут быть написаны в виде (6.32) с характеристической функцией:

$$H = T_2 - T_0 - U = \frac{1}{2m}\left[(p_1 + mnq_2)^2 + (p_2 - mnq_1)^2 + p_3^2\right] - \Omega,$$

где, как и ранее,

$$\Omega = T_0 + U = \frac{mn^2}{2}(q_1^2 + q_2^2) + U.$$

Очевидно, что в этом примере также существует интеграл

$$H = h,$$

являющийся интегралом Якоби.

Нахождение какого-либо другого интеграла этой задачи в силу теоремы Пуассона приводится к разысканию решения уравнения в частных производных первого порядка (6.35), где Φ есть неизвестная функция. Такие решения до сих пор не найдены.

§ 5. Канонические преобразования

1. Канонические уравнения обладают одним замечательным свойством, которое заключается в том, что они не изменяют своего вида при некоторых преобразованиях зависимых переменных q и p.

Это свойство формулируется обычно в виде теоремы, называемой теоремой Якоби *).

Рассмотрим произвольно заданную каноническую систему

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k), \qquad (6.42)$$

полностью определяемую заданием характеристической функции

$$H = H(t \mid q \mid p),$$

которую будем предполагать однозначной и непрерывной функцией независимых переменных t, q, p в некоторой области их изменения, обладающей непрерывными частными производными первого порядка **).

Пусть, далее,

$$\psi = \psi(t \mid q \mid \xi),$$

есть произвольно заданная, однозначная и непрерывная функция от k переменных $q_1, q_2, \ldots, q_k$, k новых переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ и вообще от t.

---

*) К. Якоби, Лекции по динамике (перев. с нем., ОНТИ, 1936), или Т. Леви-Чивита и У. Амальди, Курс теоретической механики, т. 2, ч. 2 (перев. с итальянского, ИЛ, 1951), а также Уинтнер, Аналитические основы небесной механики (перев. с англ., «Наука», 1967).

**) Рассматриваемые канонические уравнения вовсе не обязательно являются уравнениями движения какой-либо материальной системы.

Мы предположим, сверх того, что ψ имеет непрерывные частные производные первого и второго порядков и что якобиан

$$\bar{\psi}=\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial q_j\partial\xi_s}\right|$$

не равен тождественно нулю..

Введем теперь вместо переменных q_j и p_j новые переменные, ξ_j и η_j, посредством соотношений

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_j}=p_j,\quad \frac{\partial\psi}{\partial\xi_j}=-\eta_j\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k),\tag{6.43}$$

исходя из которых можно выразить и старые переменные через новые и, наоборот, новые через старые.

Действительно, так как, по предположению, функциональный определитель $\bar{\psi}$ не есть нуль, то уравнения

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi_j}=-\eta_j\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$$

разрешимы относительно величин q и позволяют выразить эти переменные как однозначные функции от t, ξ, η. Подставляя полученные выражения в равенства

$$p_j=\frac{\partial\psi}{\partial q_j}\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

мы получим также переменные p как однозначные функции от ξ, η, t. Аналогичное рассуждение покажет, что ξ, η являются однозначными функциями от t, p, q.

Итак, мы можем написать

$$q_j=q_j(t\,|\,\xi\,|\,\eta)\quad p_j=p_j(t\,|\,\xi\,|\,\eta).\tag{6.43'}$$

Теорема, которую мы хотим доказать, формулируется следующим образом:

Теорема Якоби. Если уравнения (6.42) преобразуются к новым переменным ξ, η посредством подстановки (6.43), то уравнения, определяющие новые переменные, также будут иметь каноническую форму и напишутся в виде

$$\frac{d\xi_j}{dt}=\frac{\partial R}{\partial\eta_j},\quad \frac{d\eta_j}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial\xi_j}\qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k),\tag{6.44}$$

где новая характеристическая функция R определяется формулой

$$R=H+\frac{\partial\psi}{\partial t},\tag{6.45}$$

в которой H и $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ должны быть выражены через ξ и η при помощи соотношений (6.43').

Доказательство. Считая, что характеристическая функция H зависит от ξ и η через посредство q и p, вычислим частную производную от H по η_j. Мы имеем

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j}=\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial H}{\partial q_s}\frac{\partial q_s}{\partial \eta_j}+\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial H}{\partial p_s}\frac{\partial p_s}{\partial \eta_j},$$

что в силу уравнений (6.42) приводится к виду

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j}=-\sum_{s=1}^{k}\frac{dp_s}{dt}\frac{\partial q_s}{\partial \eta_j}+\sum_{s=1}^{k}\frac{dq_s}{dt}\frac{\partial p_s}{\partial \eta_j}.$$

Далее из соотношений (6.43) находим

$$\frac{\partial p_s}{\partial \eta_j}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s\,\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \eta_j},$$

вследствие чего последнее равенство принимает вид

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j}=-\sum_{s=1}^{k}\frac{dp_s}{dt}\frac{\partial q_s}{\partial \eta_j}+\sum_{s=1}^{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{dq_s}{dt}\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s\,\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial \eta_j}.$$

Заменяя в первой сумме индекс s на i и изменяя порядок суммирования во второй сумме, мы напишем предыдущее равенство в следующем виде:

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial q_i}{\partial \eta_j}\left[-\frac{dp_i}{dt}+\sum_{s=1}^{k}\frac{dq_s}{dt}\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i\,\partial q_s}\right].$$

Дифференцируя теперь равенство

$$p_i=\frac{\partial \psi}{\partial q_i}$$

полным образом по t, получаем

$$\frac{dp_i}{dt}=\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i\,\partial q_s}\frac{dq_s}{dt}+\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i\,\partial \xi_s}\frac{d\xi_s}{dt}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i\,\partial t}.$$

Поэтому

$$\frac{\partial H}{\partial \eta_j}=-\sum_{i=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}\frac{\partial q_i}{\partial \eta_j}\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i\,\partial \xi_s}\frac{d\xi_s}{dt}-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial q_i}{\partial \eta_j}\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i\,\partial t}.$$

Коэффициент при производной $\dot{\xi}_s$ в этом выражении равен

$$-\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial q_i}{\partial \eta_j}\frac{\partial^2 \psi}{\partial q_i\,\partial \xi_s}.$$

Но если будем дифференцировать соотношение

$$-\eta_s = \frac{\partial\psi}{\partial\xi_s}$$

по величинам $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_k$, то получим для $j \neq s$:

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_s\,\partial q_i}\,\frac{\partial q_i}{\partial\eta_j},$$

и для $j = s$:

$$-1 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2\psi}{\partial\xi_s\,\partial q_i}\,\frac{\partial q_i}{\partial\eta_j}.$$

Следовательно, в выражении для $\frac{\partial H}{\partial\eta_j}$ из двойной суммы остается только один член, для которого $s = j$, и мы найдем

$$\frac{\partial H}{\partial\eta_j} = \frac{d\xi_j}{dt} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial q_i}\,\frac{\partial q_i}{\partial\eta_j}.$$

Полагая теперь

$$R = H + \frac{\partial\psi}{\partial t},$$

мы напишем последнее уравнение в следующем виде:

$$\frac{d\xi_j}{dt} = \frac{\partial R}{\partial\eta_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

и, следовательно, половина теоремы доказана.

Подобным же образом доказывается и вторая половина теоремы. Прежде всего, вычисляя частную производную от H по ξ_j, имеем

$$\frac{\partial H}{\partial\xi_j} = \sum_{s=1}^{k}\left(\frac{\partial H}{\partial q_s}\,\frac{\partial q_s}{\partial\xi_j} + \frac{\partial H}{\partial p_s}\,\frac{\partial p_s}{\partial\xi_j}\right) = \sum_{s=1}^{k}\left(-\frac{dp_s}{dt}\,\frac{\partial q_s}{\partial\xi_j} + \frac{dq_s}{dt}\,\frac{\partial p_s}{\partial\xi_j}\right).$$

Дифференцируя затем соотношение

$$p_s = \frac{\partial\psi}{\partial q_s}$$

частным образом по ξ_j и полным образом по t, получим

$$\frac{\partial p_s}{\partial\xi_j} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2\psi}{\partial q_s\,\partial q_i}\,\frac{\partial q_i}{\partial\xi_j} + \frac{\partial^2\psi}{\partial q_s\,\partial\xi_j},$$

$$\frac{dp_s}{dt} = \sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial q_s\,\partial q_i}\,\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial^2\psi}{\partial q_s\,\partial\xi_i}\,\frac{d\xi_i}{dt}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial q_s\,\partial t},$$

поэтому выражение для $\frac{\partial H}{\partial \xi_j}$ напишется в виде

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_j} = -\sum_{s=1}^{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial \xi_i} \frac{d\xi_i}{dt} - \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial t} + \sum_{s=1}^{k} \frac{dq_s}{dt} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial \xi_j}.$$

Для упрощения правой части последнего равенства заметим, что коэффициент при $\dot{\xi}_i$ в первой сумме равен

$$-\sum_{s=1}^{k} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial \xi_i}.$$

Но, дифференцируя по ξ_j соотношение

$$-\eta_i = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_i},$$

получим

$$0 = \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial q_s} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial \xi_j},$$

откуда следует, что упомянутый коэффициент приводится к одночленному выражению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_i \partial \xi_j},$$

и производная $\frac{\partial H}{\partial \xi_j}$ напишется (после замены индекса i в первой сумме на s) в виде

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_j} = \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_s \partial \xi_j} \frac{d\xi_s}{dt} + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial \xi_j} \frac{dq_s}{dt} - \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial t} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j}.$$

С другой стороны, дифференцируя соотношение

$$-\eta_j = \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j}$$

полным образом по t, получим

$$-\frac{d\eta_j}{dt} = \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial q_s} \frac{dq_s}{dt} + \sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial \xi_s} \frac{d\xi_s}{dt} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial t}.$$

Вычитая это равенство из предыдущего, найдем

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_j} + \frac{d\eta_j}{dt} = -\sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial q_s \partial t} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi_j \partial t}.$$

Так как

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)=\frac{\partial^2 \psi}{\partial t\, \partial \xi_j}+\sum_{s=1}^{k} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t\, \partial q_s} \frac{\partial q_s}{\partial \xi_j},$$

то окончательно

$$\frac{d\eta_j}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial \xi_j} \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Таким образом, теорема доказана полностью.

Заметим, что, изменяя несколько обозначения для зависимых переменных, мы можем получить другие виды записи преобразования, в результате которого каноническая система (6.42) переходит в каноническую систему (6.44) с характеристической функцией (6.45).

Таким образом, каждое из трех следующих преобразований:

1) $\psi=\psi(t \mid p \mid \eta)$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial p}=q, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta}=-\xi,$$

2) $\psi=\psi(t \mid q \mid \eta)$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial q}=p, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \eta}=\xi,$$

3) $\psi=\psi(t \mid p \mid \xi)$,

$$\frac{\partial \psi}{\partial p}=q, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi}=\eta$$

также будет каноническим преобразованием.

Примечание. Если формулы первоначального преобразования написать в виде

$$\frac{\partial \psi}{\partial q}=p, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi}=\eta$$

(что сводится просто к замене η на $-\eta$), то преобразованные уравнения будут иметь вид

$$\frac{d\xi_j}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial \eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{dt}=\frac{\partial R}{\partial \xi_j}. \tag{6.44'}$$

2. Если функция преобразования ψ не зависит от времени, то формулы преобразования также не будут содержать t, а поэтому вместо (6.43′) мы будем иметь соотношения вида

$$q_j=q_j(\xi \mid \eta), \quad p_j=p_j(\xi \mid \eta). \tag{6.43''}$$

Кроме того, в этом случае

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}\equiv 0, \quad R\equiv H,$$

так что характеристическая функция преобразованной системы получится простой подстановкой в первоначальную характеристическую функцию H вместо q и p их выражений (6.43″).

Полезно рассматривать этот частный случай как отдельную теорему, которая более полно может быть сформулирована следующим образом:

Каноническая система

$$\frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_j},\quad \frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_j},$$

переходит в каноническую систему того же вида

$$\frac{d\xi_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \eta_j},\quad \frac{d\eta_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \xi_j},$$

если преобразование переменных устанавливается одним из следующих четырех способов:

1) $\psi=\psi(q\,|\,\xi)$,
$$\frac{\partial\psi}{\partial q}=p,\quad \frac{\partial\psi}{\partial\xi}=-\eta;$$

2) $\psi=\psi(p\,|\,\eta)$,
$$\frac{\partial\psi}{\partial p}=q,\quad \frac{\partial\psi}{\partial\eta}=-\xi;$$

3) $\psi=\psi(q\,|\,\eta)$,
$$\frac{\partial\psi}{\partial q}=p,\quad \frac{\partial\psi}{\partial\eta}=\xi;$$

4) $\psi=\psi(p\,|\,\xi)$,
$$\frac{\partial\psi}{\partial p}=q,\quad \frac{\partial\psi}{\partial\xi}=\eta,$$

причем во всех случаях функция преобразования ψ есть любая однозначная, непрерывная функция указанных аргументов (в некоторой области их изменения), обладающая непрерывными частными производными первого и второго порядков.

Теорема Якоби может быть сформулирована еще, как указал Пуанкаре *), другим, весьма изящным образом. Действительно, рассмотрим, например, функцию преобразования вида $\psi(q\,|\,\xi)$ и

---

*) А. Пуанкаре, Лекции по небесной механике, перев. с франц., «Наука», 1965.

найдем ее полный дифференциал. Мы будем иметь

$$d\psi=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_j}dq_j+\frac{\partial\psi}{\partial\xi_j}d\xi_j\right),$$

что можно представить с помощью формул преобразования в виде

$$d\psi(q\,|\,\xi)=\sum_{j=1}^{k}(p_j\,dq_j-\eta_j\,d\xi_j),$$

откуда следует, что выражение

$$\sum_{j=1}^{k}(p_j\,dq_j-\eta_j\,d\xi_j) \tag{6.45}$$

есть полный дифференциал.

Наоборот, пусть заданы формулы преобразования (6.43″). Если разрешить уравнения (6.43″) относительно p и η, то получим соотношения вида

$$p_j=p_j(q\,|\,\xi),\quad \eta_j=\eta_j(q\,|\,\xi).$$

Допустим, что после подстановки этих значений в выражение (6.45) последнее станет полным дифференциалом некоторой функции $\psi(q\,|\,\xi)$ переменных q и ξ.

Тогда мы можем написать

$$\sum_{j=1}^{k}(p_j\,dq_j-\eta_j\,d\xi_j)=d\psi=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial\psi}{\partial q_j}dq_j+\frac{\partial\psi}{\partial\xi_j}d\xi_j\right),$$

откуда имеем, очевидно,

$$p_j=\frac{\partial\psi}{\partial q_j},\qquad -\eta_j=\frac{\partial\psi}{\partial\xi_j},$$

т. е. функция $\psi(q\,|\,\xi)$ есть функция канонического преобразования.

Аналогичный результат получим также, рассматривая и любой из остальных случаев преобразования, вследствие чего теорему Якоби можно сформулировать еще следующим образом:

Канонические уравнения не изменяют своего вида при всех преобразованиях переменных, при которых одно из четырех выражений

$$\sum_{j=1}^{k}(p_j\,dq_j-\eta_j\,d\xi_j),\qquad \sum_{j=1}^{k}(p_j\,dq_j+\xi_j\,d\eta_j),$$

$$\sum_{j=1}^{k}(q_j\,dp_j-\xi_j\,d\eta_j),\qquad \sum_{j=1}^{k}(q_j\,dp_j+\eta_j\,d\xi_j),$$

есть полный дифференциал*).

---

*) Предполагается, что преобразование не зависит от времени.

Эта формулировка теоремы Якоби удобна тем, что при ее применении нам не нужно знать функцию преобразования.

Рассмотрим, например, преобразование *)

$$q_1 = \sqrt{2\xi_1}\cos\eta_1, \quad p_1 = \sqrt{2\xi_1}\sin\eta_1,$$
$$q_s = \xi_s, \qquad p_s = \eta_s \qquad (s = 2, 3, \ldots, k).$$

Так как

$$q_1\,dp_1 = 2\xi_1\cos^2\eta_1\,d\eta_1 + \sin\eta_1\cos\eta_1\,d\xi_1,$$

то

$$q_1\,dp_1 - \xi_1\,d\eta_1 = \xi_1\cos 2\eta_1\,d\eta_1 + \frac{1}{2}\sin 2\eta_1\,d\xi_1 = d\left(\frac{1}{2}\,\xi_1\sin 2\eta_1\right),$$

и мы находим, что выражение

$$\sum_{j=1}^{k}(q_j\,dp_j - \xi_j\,d\eta_j) = d\left(\frac{1}{2}\,\xi_1\sin 2\eta_1\right)$$

есть полный дифференциал. Поэтому указанное преобразование есть каноническое.

Рассмотрим еще линейное преобразование вида

$$q_j = \sum_{s=1}^{k}\alpha_{js}\xi_s, \quad p_j = \sum_{s=1}^{k}\beta_{js}\eta_s, \tag{6.46}$$

где α и β — постоянные коэффициенты. Предположим, что эти постоянные таковы, что мы имеем тождественно

$$\sum_{j=1}^{k} q_j p_j = \sum_{j=1}^{k}\xi_j\eta_j. \tag{6.46$'$}$$

Тогда преобразование (6.46) есть каноническое. Действительно, из (6.46) следует, что dp связаны с $d\eta$ теми же линейными соотношениями, как и p с η. Поэтому в тождестве (6.46′) мы можем заменить p_j и η_j на dp_j и $d\eta_j$, что приводит к следующему тождеству:

$$\sum_{j=1}^{k} q_j\,dp_j = \sum_{j=1}^{k}\xi_j\,d\eta_j,$$

откуда

$$\sum_{j=1}^{k}(q_j\,dp_j - \xi_j\,d\eta_j) = 0,$$

что, очевидно, есть полный дифференциал.

---

*) Этот пример показывает, сверх того, что можно преобразовывать не все канонические переменные, а только некоторые пары из них, не изменяя вовсе остальных переменных.

Возьмем теперь частный случай линейного преобразования, когда $\beta_{js}=\alpha_{js}$, т. е. когда

$$q_j=\sum_{s=1}^{k}\alpha_{js}\xi_s, \qquad p_j=\sum_{s=1}^{k}\alpha_{js}\eta_s. \qquad (6.46'')$$

Покажем, что если это преобразование является ортогональным, то оно также будет каноническим.

Действительно, если преобразование (6.46″), определяемое коэффициентом α_{js}, ортогонально, то выполняются следующие условия *):

$$\sum_{s=1}^{k}\alpha_{js}^2=1, \qquad \sum_{s=1}^{k}\alpha_{js}\alpha_{ls}=0 \qquad (l\neq j),$$

откуда вытекают соотношения

$$\sum_{j=1}^{k}q_j^2=\sum_{j=1}^{k}\xi_j^2, \qquad \sum_{j=1}^{k}p_j^2=\sum_{j=1}^{k}\eta_j^2,$$

$$\sum_{j=1}^{k}(q_j+p_j)^2=\sum_{j=1}^{k}(\xi_j+\eta_j)^2,$$

из которых в свою очередь следует

$$\sum_{j=1}^{k}q_jp_j=\sum_{j=1}^{k}\xi_j\eta_j,$$

т. е. преобразование (4.46″) есть каноническое.

Примечание. Функция преобразования ψ есть произвольно заданная функция от k старых и k новых переменных. Поэтому этой функции можно придать любую желаемую форму. Например, в случаях 3) и 4) общего канонического преобразования можно положить:

3*) $\psi(t\,|\,q\,|\,\eta)=\sum_{j=1}^{k}q_j\eta_j+\psi^*(t\,|\,q\,|\,\eta)$, так что формулы преобразования напишутся в виде

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial q}=p-\eta, \qquad \frac{\partial\psi^*}{\partial\eta}=\xi-q,$$

и

4*) $\psi(t\,|p\,|\,\xi)=\sum_{j=1}^{k}p_j\xi_j+\psi^*(t\,|\,p\,|\,\xi)$, с формулами преобразования

$$\frac{\partial\psi^*}{\partial p}=q-\xi, \qquad \frac{\partial\psi^*}{\partial\xi}=\eta-p.$$

---

*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 3 (любое издание), или А. Г. Курош, Курс высшей алгебры (любое издание).

§ 6. Метод Гамильтона — Якоби

1. Из теории канонических преобразований вытекает примечательный способ нахождения общего решения какой угодно канонической системы.

Пусть нам нужно проинтегрировать систему

$$\frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_j}, \tag{6.47}$$

где характеристическая функция H есть заданная функция времени и канонических переменных q и p.

Как показано в предыдущем параграфе, если нам дана функция $\psi(t|q|\xi)$ старых переменных q и новых переменных ξ от t, то, делая преобразование переменных по формулам

$$\frac{\partial \psi}{\partial q_j}=p_j, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \xi_j}=-\eta_j, \tag{6.48}$$

мы получим преобразованные уравнения в виде

$$\frac{d\xi_j}{dt}=\frac{\partial R}{\partial \eta_j}, \quad \frac{d\eta_j}{dt}=-\frac{\partial R}{\partial \xi_j}, \tag{6.47'}$$

где

$$R=\frac{\partial \psi}{\partial t}+H \tag{6.48'}$$

есть новая характеристическая функция.

Если нам удастся проинтегрировать преобразованную систему (6.47′), то мы будем знать новые переменные ξ и η в функции времени и $2k$ произвольных постоянных, а тогда по формулам (6.48) мы получим также и первоначальные переменные q и p как функции t и $2k$ произвольных постоянных, т. е. найдем общее решение, или общий интеграл заданной системы (6.47).

Поэтому можно поставить следующую задачу: *считая функцию преобразования ψ неизвестной, найти или подобрать ее таким образом, чтобы преобразованная система могла быть разрешена.*

Мы достигнем этой цели, подбирая, например, функцию ψ так, чтобы новая характеристическая функция R была равна тождественно нулю. Действительно, тогда уравнения (6.47′) будут иметь простейший вид

$$\frac{d\xi_j}{dt}=0, \quad \frac{d\eta_j}{dt}=0, \tag{6.47''}$$

и непосредственное их интегрирование дает

$$\xi_j=\alpha_j, \quad \eta_j=-\beta_j, \tag{6.49}$$

где α и β — постоянные интегрирования, и наша задача решена.

Итак, функцию преобразования ψ нужно определить из условия

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+H=0, \tag{6.48''}$$

после чего по формулам (6.48) с помощью (6.49) получим

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_j}=p_j, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_j}=\beta_j, \tag{6.50}$$

а эти равенства и представляют собой общий интеграл системы (6.47), ибо дают возможность определить неизвестные величины q и p как функции времени и $2k$ произвольных постоянных α и β.

Посмотрим теперь, что представляет собой условие (6.48″). Так как характеристическая функция H зависит от t, q и p, а, с другой стороны, по формулам (6.50) должно быть $p_j=\frac{\partial\psi}{\partial q_j}$, то, заменяя в условии (6.48″) величины p этими производными, мы напишем условие (6.48″) в следующем виде:

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+H\left(t\,|\,q\,|\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0, \tag{6.51}$$

или, более подробно,

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+H\left(t;\ q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_k;\ \frac{\partial\psi}{\partial q_1},\ \frac{\partial\psi}{\partial q_2},\ \ldots,\ \frac{\partial\psi}{\partial q_k}\right)=0.$$

Таким образом условие (6.48″) представляет собой уравнение в частных производных первого порядка, называемое уравнением Гамильтона — Якоби.

Неизвестной функцией в этом уравнении является искомая функция преобразования ψ, которая должна содержать, кроме $k+1$ независимых переменных t и q, еще k величин α, являющихся произвольными постоянными.

Таким образом, чтобы найти функцию ψ, являющуюся функцией канонического преобразования и дающую общий интеграл системы (6.47), мы должны отыскать такое решение уравнения (6.51), которое заключает в себе k произвольных постоянных.

В теории дифференциальных уравнений с частными производными такое решение называется полным интегралом, и наша задача приводится теперь к нахождению полного интеграла уравнения (6.51) *).

---

*) Собственно говоря, полным интегралом называется такое решение уравнения с частными производными, которое содержит столько же произвольных постоянных, сколько имеется независимых переменных. Но так как сама функция ψ в уравнение (6.51) не входит, то одна из постоянных является аддитивной и здесь не существенна. См., например, В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1953, или В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 4.

Однако, вообще говоря, задача о нахождении решения уравнения с частными производными ничуть не проще интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений (6.47).

В теории дифференциальных уравнений показывается, притом, что обе эти задачи совершенно эквивалентны, так что если удается найти полный интеграл уравнения (6.51), то в таких случаях удается также проинтегрировать и каноническую систему непосредственно.

Однако с теоретической точки зрения метод Гамильтона — Якоби представляет большой интерес, ибо является источником разнообразных приближенных методов интегрирования уравнений движения в задачах небесной механики и позволяет придать этим методам наиболее простую и удобную форму.

Если характеристическая функция H не содержит явно времени, то уравнение Гамильтона — Якоби можно несколько упростить. Действительно, сделаем в уравнении

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+H\left(q\,\middle|\,\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0 \tag{6.51'}$$

подстановку

$$\psi=-ht+W, \tag{6.52}$$

где h — произвольная постоянная, а W — новая неизвестная функция, зависящая только от величин q (т. е. не содержащая t).

Мы будем иметь

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-h,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial q}=\frac{\partial W}{\partial q},$$

и уравнение (6.51′) примет следующий вид:

$$H\left(q\,\middle|\,\frac{\partial W}{\partial q}\right)=h. \tag{6.53}$$

Это уравнение немного проще уравнения (6.51′), так как в него не входит t и, следовательно, независимых переменных на одно меньше. Найдя какое-нибудь решение этого уравнения, зависящее, кроме h, еще от $k-1$ произвольных постоянных α_2, α_3, ..., α_k, мы получим полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби по формуле (6.52).

Применяя теперь теорему Гамильтона — Якоби, мы можем написать общий интеграл канонической системы (6.47), где $H=H(q/p)$, в следующем виде:

$$\frac{\partial W}{\partial h}=t+\beta,\qquad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2}=\beta_2,\ \ldots,\ \frac{\partial W}{\partial \alpha_k}=\beta_k, \tag{6.54}$$

$$\frac{\partial W}{\partial q_1}=p_1,\qquad \frac{\partial W}{\partial q_2}=p_2,\ \ldots,\ \frac{\partial W}{\partial q_k}=p_k, \tag{6.54'}$$

с произвольными постоянными

$$h,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots,\ \alpha_k,$$
$$\beta,\ \beta_2,\ \beta_3,\ \ldots,\ \beta_k.$$

Все уравнения (6.54), кроме первого, не содержат независимой переменной t. Следовательно, мы можем определить из них какие-нибудь $k-1$ из величин q в функции одной из них, например, q_1, и произвольных постоянных.

Таким образом, мы можем написать:

$$q_s = q_s(q_1, h\,|\,\alpha\,|\,\beta) \qquad (s=2, 3, \ldots, k). \tag{6.55}$$

Уравнения (6.55) не содержат времени и поэтому дают только геометрическую картину движения. Эти уравнения называются еще уравнениями траектории, так как траекторией называется, как обычно, геометрическое место точек одного измерения в пространстве многих измерений.

Подставляя затем выражения (6.55) в первое из уравнений (6.54), мы получим соотношение между t и q_1, с помощью которого можем определить q_1, а потом и все остальные q в функции времени и произвольных постоянных. После этого уравнения (6.54′) дадут также величины p.

2. Уравнение Гамильтона — Якоби представляет собой нелинейное уравнение с частными производными и решение этого уравнения может быть найдено только в немногих частных случаях.

Лиувилль первый указал случай, когда уравнение Гамильтона — Якоби интегрируется в квадратурах. Позднее, более общий случай указал Штеккель, и последующие работы были посвящены различным обобщениям результатов этих двух ученых. Мы ограничимся здесь рассмотрением случаев, разобранных Лиувиллем и Штеккелем, как представляющих наибольший интерес для приложений в небесной механике.

Случай Лиувилля мы рассматривали уже в § 2, как пример интегрирования в квадратурах уравнений Лагранжа. Поэтому остается только показать, что в этом случае может быть также найден и полный интеграл соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби.

Возьмем формулы (6.16) и построим с их помощью характеристическую функцию соответствующей канонической системы.

Так как

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot q_j} = BA_j(q_j)\,\dot q_j,$$

то

$$H = \frac{1}{B}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{p_j^2}{2A_j(q_j)} - U_j(q_j)\right].$$

Эта характеристическая функция не зависит от t, а поэтому уравнение Гамильтона — Якоби напишется в виде

$$\frac{1}{B}\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{1}{2A_j(q_j)}\left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)^2 - U_j(q_j)\right] = h,$$

или, после замены B его значением,

$$\sum_{j=1}^{k}\left[\frac{1}{2A_j(q_j)}\left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)^2 - U_j(q_j) - hB_j(q_j)\right] = 0. \qquad (6.56)$$

Чтобы найти решение этого уравнения, зависящее от $k-1$ произвольных постоянных, заметим, что левая его часть является суммой k слагаемых, каждое из которых содержит только одну из переменных q. Поэтому будем искать решение уравнения также в виде суммы, каждое из слагаемых которой зависит только от одной из переменных q, т. е. положим *)

$$W = \sum_{j=1}^{k} W_j(q_j). \qquad (6.56')$$

Подставляя это выражение для W в уравнение (6.56), мы увидим, что оно удовлетворяется, если приравнять каждое слагаемое в отдельности произвольной постоянной, т. е. положить

$$\frac{1}{2A_j(q_j)}\left(\frac{dW_j}{dq_j}\right)^2 - U_j(q_j) - hB_j(q_j) = \alpha_j,$$

при условии, что

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_j = 0.$$

Таким образом, каждая из функций W_j определяется простой квадратурой

$$W_j(q_j) = \int \sqrt{2A_j(q_j)\,[U_j(q_j) + hB_j(q_j) + \alpha_j]}\,dq_j,$$

и мы получим решение уравнения Гамильтона — Якоби (6.56) в виде

$$W = \sum_{j=1}^{k}\int\sqrt{2A_j(U_j + hB_j + \alpha_j)}\,dq_j,$$

которое содержит k произвольных постоянных.

---

*) Применяемый здесь прием нахождения полного интеграла уравнения в частных производных первого порядка есть тот же метод «разделения переменных», который мы использовали уже в теории притяжения для нахождения частных решений уравнения Лапласа.

Общий интеграл соответствующей канонической системы согласно (6.54), (6.54′) и (6.56′) напишется в следующем виде:

$$t+\beta=\sum_{j=1}^{k}\int\frac{A_jB_j\,dq_j}{\sqrt{2A_j(U_j+hB_j+\alpha_j)}},$$

$$\beta_j=\int\frac{A_j\,dq_j}{\sqrt{2A_j(U_j+hB_j+\alpha_j)}}-\int\frac{A_1\,dq_1}{\sqrt{2A_1(U_1+hB_1+\alpha_1)}}\qquad(j\neq 1),$$

$$p_j=\sqrt{2A_j(U_j+hB_j+\alpha_j)}\qquad(j=1,2,\ldots,k).$$

Рассмотрим теперь случай интегрируемости, указанный Штеккелем. Пусть даны $k(k+1)$ функций, каждая из которых зависит только от одной из переменных q:

$$\varphi_{ji}(q_j),\quad U_j(q_j)\qquad(j,\ i,=1,2,\ldots,k),$$

и таких, что определитель $\Delta=|\varphi_{ji}(q_j)|$ не равен тождественно нулю. Тогда, если живая сила T и силовая функция U определяются формулами

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k}A_jp_j^2,\qquad U=\sum_{j=1}^{k}A_jU_j(q_j),\tag{6.57}$$

где

$$A_j=\frac{1}{\Delta}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{j1}}\qquad(j=1,2,\ldots,k),$$

то уравнение Гамильтона — Якоби интегрируется в квадратурах.

Действительно, характеристическая функция

$$H=T-U=\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{2}A_jp_j^2-A_jU_j\right)$$

не зависит от t и поэтому уравнение Гамильтона — Якоби напишется в виде

$$\sum_{j=1}^{k}A_j\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)^2-2U_j(q_j)\right]=2h.\tag{6.57′}$$

Чтобы привести это уравнение к квадратурам, заметим, что из формулы

$$\Delta=\sum_{j=1}^{k}\varphi_{j1}\frac{\partial\Delta}{\partial\varphi_{j1}}$$

и выражений для A_j следует, что

$$\sum_{j=1}^{k}\varphi_{j1}A_j=1.$$

С помощью последнего равенства уравнение (6.57′) примет вид

$$\sum_{j=1}^{k} A_j\left[\left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right)^2 - 2U_j(q_j) - 2h\varphi_{j1}(q_j)\right] = 0. \tag{6.58}$$

Теперь можем применить способ разделения переменных и искать решение уравнения (6.58) в виде суммы

$$W = \sum_{j=1}^{k} W_j(q_j).$$

Тогда уравнение (6.58) удовлетворяется, если положить

$$\left(\frac{dW_j}{dq_j}\right)^2 = 2U_j(q_j) + 2h\varphi_{j1}(q_j) + \sum_{i=2}^{k} \alpha_i\varphi_{ji}(q_j), \tag{6.58′}$$

где $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_k$ — произвольные постоянные *).

Определяя затем W_j квадратурой и беря сумму полученных выражений, найдем окончательно:

$$W = \sum_{j=1}^{k} \int \sqrt{2U_j + 2h\varphi_{j1} + \sum_{i=2}^{k} \alpha_i\varphi_{ji}}\, dq_j. \tag{6.59}$$

Теперь по формулам (6.54) и (6.54′) получим общий интеграл соответствующей канонической системы:

$$t + \beta = \sum_{j=1}^{k} \int \frac{\varphi_{j1}\, dq_j}{\sqrt{2U_j + 2h\varphi_{j1} + \sum_{i=2}^{k} \alpha_i\varphi_{ji}}},$$

$$\beta_j = \int \frac{\varphi_{jj}\, dq_j}{\sqrt{2U_j + 2h\varphi_{j1} + \sum_{i=2}^{k} \alpha_i\varphi_{ji}}} \quad (j \neq 1),$$

$$p_j = \sqrt{2U_j + 2h\varphi_{j1} + \sum_{i=2}^{k} \alpha_i\varphi_{ji}}.$$

---

*) Действительно, подставляя выражения (6.58′) в уравнение (6.58), мы представим левую его часть в виде

$$\sum_{j=1}^{k} A_j \sum_{i=2}^{k} \alpha_i\varphi_{ji} = \sum_{i=2}^{k} \alpha_i \sum_{j=1}^{k} A_j\varphi_{ji},$$

а заменяя здесь A_j их значениями, будем иметь

$$\sum_{j=1}^{k} A_j\varphi_{ji} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{k} \varphi_{ji} \frac{\partial \Delta}{\partial \varphi_{j1}}.$$

В силу известного свойства определителей правая часть последнего равенства равна тождественно нулю для всякого $i=2, 3, \ldots, k$.

3. Возвращаясь теперь к общей канонической системе

$$\frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_j},\quad \frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_j},\tag{6.60}$$

рассмотрим весьма важный для последующих приложений способ ее интегрирования, называемый методом изменения произвольных постоянных.

Разложим характеристическую функцию $H(t|q|p)$ произвольным образом на сумму двух слагаемых, полагая $H(t|q|p)=$ $=H_0(t|q|p)+H_1(t|q|p)$, и рассмотрим каноническую систему с упрощенной характеристической функцией $H_0(t|q|p)$:

$$\frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial H_0}{\partial p_j},\quad \frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial H_0}{\partial q_j}.\tag{6.60$'$}$$

Предположим, что соответствующее системе (6.60′) уравнение Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+H_0\left(t\,|\,q\,|\,\frac{\partial\psi}{\partial q}\right)=0\tag{6.61}$$

мы сумели каким-то способом проинтегрировать, т. е. нашли решение этого уравнения $\psi(t|q|\alpha)$, зависящее от k произвольных постоянных α.

Тогда по формулам (6.50) мы найдем общий интеграл упрощенной системы (6.60′) в следующем виде:

$$\frac{\partial\psi}{\partial q_j}=p_j,\quad \frac{\partial\psi}{\partial\alpha_j}=\beta_j,\tag{6.62}$$

а решая эти уравнения относительно q и p, мы получим общее решение системы (6.60′):

$$q_j=q_j(t\,|\alpha\,|\beta),\quad p_j=p_j(t\,|\alpha\,|\beta).\tag{6.62$'$}$$

Функции (6.62′) удовлетворяют (в силу самого способа их получения) уравнениям (6.60′), каковы бы ни были значения произвольных постоянных α и β, но они, конечно, не удовлетворяют первоначальной системе (6.60).

Однако, если считать величины α и β не постоянными, а некоторыми функциями времени, мы можем подобрать эти функции таким образом, чтобы выражения (6.62′) удовлетворяли также уравнениям (6.60).

В этом и заключается основная идея метода изменения произвольных постоянных, обоснованного Лагранжем и приспособленного Якоби для канонических систем *).

---

*) Собственно говоря, первоисточником метода вариации постоянных являются «Математические начала натуральной философии» И. Ньютона. См. перев. с лат. акад. А. Н. Крылова, Собрание сочинений, т. VII. См. также «Историко-библиографический очерк» в первом издании этой книги.

С математической точки зрения этот метод представляет собой просто замену переменных q и p переменными α и β посредством формул преобразования (6.62) с функцией преобразования ψ, удовлетворяющей уравнению (6.61).

Поэтому на основании теоремы Якоби новые переменные α и β определятся канонической системой с характеристической функцией

$$R = H + \frac{\partial\psi}{\partial t} = H - H_0 = H_1. \qquad (6.63)$$

В силу примечания к теореме Якоби эта каноническая система будет иметь вид

$$\frac{d\alpha_j}{dt} = -\frac{\partial H_1}{\partial\beta_j}, \quad \frac{d\beta_j}{dt} = \frac{\partial H_1}{\partial\alpha_j}. \qquad (6.63')$$

Решая систему (6.63′), мы получим α и β как функции времени и $2k$ произвольных постоянных α' и β' в виде

$$\alpha_j = \alpha_j(t \mid \alpha' \mid \beta'), \quad \beta_j = \beta_j(t \mid \alpha' \mid \beta'), \qquad (6.63'')$$

а подставляя эти выражения в формулы (6.62′), мы найдем также общее решение заданной канонической системы.

Заметим, что уравнения (6.60) называются часто уравнениями промежуточного или невозмущенного движения. Величины α и β называют тогда каноническими элементами, а H_1 — возмущающей (или пертурбационной) функцией.

Если характеристическая функция не зависит от времени, то естественно выбрать H_0 также не зависящей от времени, а тогда вместо уравнения (6.61) будет

$$H_0\left(q \,\Big|\, \frac{\partial W}{\partial q}\right) = h. \qquad (6.61')$$

Если $W(q \mid \alpha \mid h)$ есть решение этого уравнения, зависящее, кроме h, еще от $k-1$ произвольных постоянных α, то общий интеграл упрощенной системы (невозмущенного движения) определится формулами

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial W}{\partial h} = t + \beta, & \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \ \ldots, & \dfrac{\partial W}{\partial \alpha_k} = \beta_k, \\ \dfrac{\partial W}{\partial q_1} = p_1, & \dfrac{\partial W}{\partial q_2} = p_2, \ \ldots, & \dfrac{\partial W}{\partial q_k} = p_k, \end{array}\right\} \qquad (6.62')$$

которые и будут формулами преобразования к новым переменным; для их определения будем иметь те же уравнения (6.63′), в которых нужно только положить $\alpha_1 = h$ и $\beta_1 = \beta$.

Отметим, что иногда бывает удобно взять за одну из новых переменных $t + \beta$ вместо β, что не изменит канонического вида уравнений, но слегка изменит характеристическую функцию. Действительно, сделаем в уравнениях (6.63) подстановку

$$\begin{matrix} t+\beta=\beta_1^*, & \beta_s=\beta_s^*, \\ h=\alpha_1^*, & \alpha_s=\alpha_s^*, \end{matrix} \qquad (s\neq 1).$$

Тогда

$$\frac{d\beta_1^*}{dt}=1+\frac{d\beta}{dt}=1+\frac{\partial H_1}{\partial h}=\frac{\partial (H_1+\alpha_1^*)}{\partial \alpha_1^*}, \qquad \frac{\partial H_1}{\partial \beta}=\frac{\partial H_1}{\partial \beta_1^*}.$$

Полагая

$$H_1^*=H_1+\alpha_1^*,$$

будем иметь вместо системы (6.63) следующую:

$$\frac{d\alpha_j^*}{dt}=-\frac{\partial H_1^*}{\partial \beta_j^*}, \quad \frac{d\beta_j^*}{dt}=\frac{\partial H_1^*}{\partial \alpha_j^*}. \tag{6.64}$$

Общее решение этой системы запишется в виде

$$\alpha_j^*=\alpha_j^*(t\,|\,\tilde{\alpha}\,|\,\tilde{\beta}), \quad \beta_j^*=\beta_j^*(t\,|\,\tilde{\alpha}\,|\,\tilde{\beta}). \tag{6.64$'$}$$

Разрешая уравнения (6.62′) относительно канонических переменных, мы получим общее решение уравнений невозмущенного движения в виде

$$q_j=q_j(\alpha^*\,|\,\beta^*), \quad p_j=p_j(\alpha^*\,|\,\beta^*), \tag{6.65}$$

а заменяя здесь α^* и β^* выражениями (6.64′), мы найдем также общее решение первоначальных уравнений — *уравнений возмущенного движения*.

ГЛАВА VII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОСТУПАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

§ 1. Постановка основной задачи небесной механики

1. Как было отмечено в конце предисловия первого издания этой книги *), мы условились называть небесной механикой тот раздел астрономии, который посвящен изучению движений небесных тел или, лучше сказать, небесных объектов. Последнее понятие включает в себя как естественные небесные образования (частицы космической пыли, газовые облака, планеты, кометы, отдельные звезды, звездные системы, туманности и т. д.), так и искусственные небесные тела (искусственные спутники Земли, Луны, Марса, Венеры, космические корабли, межпланетные станции и т. п.), число которых начиная с 1957 г. необыкновенно быстро растет.

Изучить движение какого-либо небесного тела это значит, с одной стороны, установить общие законы, характеризующие это движение в целом, а с другой стороны, получить возможность определять для всякого момента времени положение и скорость рассматриваемого тела по отношению к другим телам Вселенной.

Эти две части исследования всякого движения известны под названиями качественного и количественного анализа движения и, строго говоря, не могут быть отделены друг от друга, если мы ставим своей целью возможно более полное изучение окружающего нас мира.

Однако при рассмотрении отдельных частных задач мы обычно интересуемся какими-либо определенными целями, вследствие чего останавливаем свое внимание либо только на качественной либо только на количественной стороне исследования. Так, например, для составления таблиц движения планет

---

*) Г. Н. Дубошин, Небесная механика, Физматгиз, 1963.

солнечной системы нам нужно получать только числовые значения координат планет, а для исследования эволюции солнечной системы нам необходимы сведения об общих законах движения.

Движение всякого тела составляется, как известно из теоретической механики, из поступательного движения собственного центра масс (центра инерции), из вращательного движения вокруг центра инерции и из изменения формы и структуры тела*).

Эти три части изучения движения также, вообще говоря, не могут быть отделены одна от другой и должны рассматриваться совместно.

Но такое обширное, комплексное исследование всегда оказывается недоступным благодаря своей сложности и возникающим вследствие этого математическим трудностям. Поэтому на практике эти три части разделяют и каждую из них рассматривают отдельно, посвящая ей особый раздел науки.

Всякое движение происходит вследствие совместного действия ряда сил. Для исследования движения необходимо прежде всего точно знать характер каждой силы и законы, определяющие ее изменение. Если это известно, то изучение или исследование движения сводится к составлению дифференциальных уравнений движения и к последующему исследованию этих уравнений и их интегралов.

Силы, обусловливающие движения небесных тел, как естественных, так и искусственных, чрезвычайно многочисленны и разнообразны по своему характеру и происхождению. Законы, определяющие их изменение, в некоторых случаях известны только весьма приблизительно, а в других случаях и совершенно не известны, вследствие чего изучение движений с абсолютной точностью и во всех подробностях становится фактически невозможным.

Поэтому мы оказываемся вынужденными заранее отказаться от такой явно безнадежной задачи и заменить ее другой, более простой задачей — приближенным исследованием движений небесных тел.

Эта задача приводит нас к хорошо известному и широко применяющемуся почти во всех отраслях знания методу последовательных приближений, основная идея которого состоит в замене интересующей нас, но очень сложной задачи рядом более простых, с каждым новым шагом все усложняющихся задач. Применяя этот основной метод, мы прежде всего упрощаем нашу задачу, отбрасывая все усложняющие ее

---

*) Вместо центра инерции (или центра масс) иногда выгоднее рассматривать какую-либо другую точку, неизменно связанную с телом и, может быть, даже не принадлежащую этому телу. Так, например, мы поступали в части первой, рассматривая притяжения тел.

обстоятельства, с тем, чтобы такую упрощенную задачу можно было решить до конца. Эта упрощенная задача, конечно, может значительно отличаться от действительной задачи и ее решение может дать только некоторое приближение к действительности, которое уместно назвать первым приближением*).

Принимая затем во внимание некоторые из отброшенных вначале обстоятельств, мы ставим другую задачу, решение которой дает нам второе приближение к действительности.

Таким же образом мы поступаем и далее, строя третье и последующие приближения, результаты каждого из которых должны все меньше и меньше отличаться от действительности.

Вставая на путь последовательных приближений, мы должны прежде всего выбрать некоторый объект, движение которого может нас интересовать, а затем отобрать те причины, которые влияют (по нашему мнению!) на движение этого объекта и которые мы соглашаемся принимать во внимание.

Выбор объекта обусловливается тем, что задача о совместном исследовании движений всех тел Вселенной не имеет смысла, хотя бы потому, что многие небесные тела нам еще не известны и с каждым днем открываются (или создаются!) все новые и новые небесные тела.

Кроме того, мы оказываемся вынужденными рассматривать большей частью только такие небесные тела, которые могут наблюдаться (в настоящее время, или в будущем) с достаточной уверенностью при помощи астрономических инструментов, дающих нам числовую информацию о движениях в пространстве.

Поэтому первые задачи небесной механики заключались в изучении движений тел нашей солнечной системы, т. е. планет, их спутников, комет, астероидов, метеоритов и различных комбинаций из перечисленных объектов.

При этом делалось молчаливое допущение о том, что кроме солнечной системы ничего более в природе не существует, что наша система находится как бы в одиночестве во всем необъятном мировом пространстве. Такое допущение основывается, конечно, на том, что расстояния от Солнца даже до ближайших звезд и вообще расстояния между двумя любыми звездными системами настолько велики, что на интересующем нас промежутке времени их влияния друг на друга ничтожны и ими можно пренебречь. Таким образом, мы можем рассматривать солнечную систему изолированно от всех прочих звезд и можем изучать движения тел, принадлежащих к этой системе так, как будто ничего другого в природе и не существует.

---

*) Иногда такое первоначальное упрощение называют нулевым приближением.

В дальнейшем вследствие накопления обширного наблюдательного материала стало возможным ставить задачи и о движениях в других звездных системах, например, в системах двойных или, вообще, кратных звезд, а затем и в галактиках.

Но естественно, что каждая такая система, будь то двойная звезда или галактика, также может рассматриваться изолированно от всех прочих звездных систем так, как будто бы она находится одна во всей Вселенной.

Выбрав тот или иной объект Вселенной для изучения его движения, мы должны затем, как было отмечено выше, отобрать те силы, которые могут существенно влиять на это движение и характер которых нам достаточно хорошо известен. Все прочие силы мы соглашаемся (по крайней мере временно, в первом приближении) не рассматривать и проводим исследование так, как будто бы они совершенно не существовали.

Следуя этому принципу, небесная механика сосредоточивает свое внимание прежде всего на силах притяжения, происхождение и природа которых, правда, до сих пор не известны, но наличие которых было установлено великим Ньютоном в законе всемирного тяготения, и теперь считающимся одним из основных законов природы.

Другую категорию сил, существование которых не вызывает никаких сомнений, так как их проявления известны нам из повседневного опыта, составляют силы сопротивления среды, в которой происходит движение. Особенно часто приходится принимать во внимание силу сопротивления земной атмосферы, действующую на движущиеся около Земли искусственные спутники, а также метеоры и метеориты.

Существуют также некоторые другие известные категории сил, действия которых иногда должны приниматься во внимание и законы действия которых более или менее изучены.

Проводящееся в настоящее время широкое изучение космического пространства позволяет уточнить наши знания о природе некоторых космических сил и законах их действия и обнаруживать новые силы, ранее не известные. В дальнейшем, несомненно, будут выявляться и другие источники сил, которые, возможно, придется в будущем принимать во внимание.

Но основной силой, принимаемой во внимание во всех случаях в небесной механике, является, безусловно, сила ньютонианского притяжения, определяемая законом Ньютона, которую мы подробно рассматривали в первой части этой книги — теории притяжения.

2. Установив характер сил, которые мы соглашаемся рассматривать, мы можем затем составить дифференциальные уравнения движения тел, принадлежащих к некоторой материальной системе, относительно какой-нибудь подходящим образом выбранной системы координат и прийти, таким образом, к чисто математической задаче, решение которой и составляет главную и первоначальную цель небесной механики.

Как известно из теоретической механики, центр масс материальной системы, не подверженной действиям внешних сил, движется в абсолютном пространстве прямолинейно и равномерно *).

Так как мы согласились изучать любую звездную систему изолированно от всей остальной Вселенной, то всякая такая система (например, солнечная система) всегда будет обладать указанным свойством **). Это свойство определяет движение системы в целом и позволяет ограничиться исследованием движений тел относительно общего центра масс всей системы.

Далее будет показано, что если мы сумеем определить движения тел системы относительно центра масс, то уже без всяких затруднений определим и их абсолютные движения, так как движение центра масс уже известно.

Но и эта задача еще чрезвычайно сложна и мы вынуждены опять вносить в нее некоторые упрощения. Прежде всего мы строго ограничим число тел в системе, выбирая только наиболее крупные, обладающие наибольшими массами по сравнению с остальными, которые мы в первом приближении исключаем из рассмотрения. Такой отбор оправдывается тем, что тела, обладающие очень малыми массами, оказывают крайне слабые влияния на тела с бо́льшими массами, и мы можем считать в первом приближении, что эти влияния просто равны нулю. Кроме того, после того как движения крупных тел определены и изучены, можно поставить отдельную задачу о движении мелких тел, так как силы, управляющие их движениями, будут уже известны.

Второе упрощение заключается в том, что мы соглашаемся рассматривать небесные тела как абсолютно твердые, отвлекаясь, таким образом, от изменений их формы и отделяя поступательные движения тел от их вращательных движений вокруг центров масс.

---

*) Абсолютным пространством мы называем здесь все внешнее по отношению к рассматриваемой звездной системе пространство. «Абсолютной» системой координат мы будем называть систему координат, связанную с абсолютным пространством, т. е., по существу, с какой-либо другой звездной системой, весьма удаленной от той, на которой мы сосредоточиваем свое внимание. Таким образом, для солнечной системы абсолютной системой координат будет система, связанная с нашей Галактикой.

**) Положение изменится, если мы примем в расчет внешние силы. Поэтому центр масс солнечной системы в действительности движется в Галактике не прямолинейно и равномерно, что и обнаруживается точными наблюдениями.

Мы допускаем также, что массы тел системы не изменяются с течением времени, т. е. они являются величинами постоянными. Кроме того, в первом приближении мы совершенно пренебрежем эффектом сопротивления среды, т. е. будем рассматривать пространство, в котором движутся интересующие нас тела, как абсолютно пустое.

Все эти допущения, конечно, строго говоря, не соответствуют действительности, но ошибки, проистекающие от этих допущений, в большинстве случаев ничтожно малы и могут не приниматься во внимание.

Однако существуют отдельные случаи, в которых сделанные допущения оказываются несостоятельными и должны быть полностью или частично отброшены. Такие случаи могут быть рассмотрены отдельно после исследования той главной задачи, которую мы здесь ставим и которую называем основной задачей небесной механики.

Наконец, последнее упрощение, которое мы сделаем в первом приближении, заключается в том, что мы отвлекаемся от линейных размеров тел и уславливаемся все тела системы рассматривать как материальные точки.

Возможность этого допущения оправдывается соображениями, основанными на известных результатах теории притяжения, изложенных в первой части этой книги. А именно, было показано, что два тела, обладающие любой формой и произвольным внутренним строением, взаимно притягиваются с силой, почти обратно пропорциональной квадрату расстояния между их центрами масс, если линейные размеры тел весьма малы по сравнению с этим расстоянием. Кроме того, было показано, что два шара, обладающие сферической структурой, притягиваются взаимно с силой, строго пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между их центрами.

Так как звезды, планеты и их спутники имеют примерно шарообразную форму, а расстояния между небесными телами, вообще говоря, весьма велики, то соединение двух приведенных результатов теории притяжения позволяет с достаточным основанием считать, что такие небесные тела взаимно притягиваются друг к другу так же, как притягивались бы материальные точки, помещенные в центрах инерции этих тел и обладающие их массами.

Другие тела (астероиды, метеоры, искусственные небесные тела и т. п.), не обладающие правильной сферической формой, имеют зато ничтожно малые размеры, что также позволяет рассматривать их как материальные точки, по крайней мере до тех пор, пока они не делаются слишком близкими к большому телу.

Изложенные соображения позволяют сформулировать задачу, которую и можно назвать основной задачей небесной механики:

Изучить движение материальной системы, состоящей из конечного числа свободных материальных точек, обладающих постоянными массами и движущихся в абсолютно пустом пространстве под действием сил взаимных притяжений, определяемых законом всемирного тяготения.

Сформулированная задача представляет собой, очевидно, некоторую искусственную математическую схему, которая, строго говоря, не соответствует реальной физической задаче о движении реальных небесных тел, заменяемой в первом приближении этой схемой.

Однако ввиду малости факторов, отброшенных в первом приближении, движения материальных точек в нащей схеме будут мало отличаться от движений настоящих небесных тел, по крайней мере в течение некоторого промежутка времени.

Сказанное вполне подтверждается астрономическими наблюдениями, показывающими, что отличия искусственной математической теории от действительности, вообще говоря, достаточно малы. В редких случаях обнаруживаются сколько-нибудь значительные отклонения, происходящие от недостаточности установленной теории. Однако существование таких случаев показывает, что в небесной механике невозможно ограничиться одним только первым приближением. Это заключение делается еще более справедливым, если мы захотим распространить нашу математическую теорию на очень большие промежутки времени, так как в этом случае отклонения теории от действительности могут сделаться настолько большими, что неудовлетворительность первого приближения окажется совершенно очевидной.

3. Математическая схема, которая кладется в основу небесной механики, является весьма удобным и гибким аппаратом, могущим быть приложенным к приближенному исследованию многочисленных и разнообразных задач астрономии и даже других областей науки.

Движения больших планет солнечной системы и движения звезд в звездном скоплении, движения спутников и движения малых планет и комет, движения межпланетных станций и космических кораблей, движение мельчайшей частицы космической пыли и движение сгущения в первоначальной туманности — все эти задачи, по крайней мере на первом этапе своего исследования, основываются на схеме движения материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Ввиду такой исключительной важности понятия «материальная точка» полезно напомнить здесь точное его определение, которое может быть сформулировано следующим образом:

Материальной точкой называется всякое тело, линейные размеры которого весьма малы по сравнению с расстояниями, могущими играть роль в его движении.

Таким образом, например, искусственный спутник Земли может рассматриваться как материальная точка, когда исследуется его поступательное движение, но тот же спутник должен рассматриваться как тело, имеющее определенную форму, когда ставится задача об изучении его вращательного движения вокруг центра масс.

Сама Земля может рассматриваться как материальная точка, когда исследуется ее движение вокруг Солнца и должна рассматриваться как тело при изучении ее вращения вокруг своей оси и т. д.

Заканчивая этот параграф, мы хотим еще раз подчеркнуть, что математическая теория движения некоторого количества материальных точек, которую мы будем рассматривать в этой главе, является только первым приближением задачи о действительном движении небесных тел (как естественных, так и искусственных). Это первое приближение даже в том случае, если бы оно могло быть осуществлено с абсолютной математической строгостью и полнотой, всегда нуждается в исправлениях, которые приходится вносить, чтобы приблизиться к реальной астрономической задаче.

Характер этих поправок, определяющих второе, третье и последующие приближения, в большой мере зависит от общего состояния науки в рассматриваемую эпоху, и несомненно, что если в настоящее время количество этих поправок не очень велико, то с течением времени, в связи с общим прогрессом науки, число их может сильно возрасти и тогда неизбежно встанет вопрос о пересмотре основных классических результатов механики вообще и небесной механики в частности, и возможно, придется создавать небесную механику заново, на основании новых принципов, быть может, совершенно отличных от современных.

Если говорить не о глубокой, коренной перестройке, а только о некоторых изменениях или улучшениях, связанных с прогрессом науки вообще, то они, конечно, происходят в небесной механике постоянно и особенно заметны за последние двадцать-тридцать лет. Кроме того, бурное развитие техники, которое мы наблюдаем за последнее, особенно за послевоенное, время, неизбежно сказывается также и на развитии всех отделов астрономии.

Для небесной механики особенно существенным является появление быстродействующих вычислительных машин, позволяющих теперь производить с необыкновенной быстротой и легкостью такие вычисления, о которых не могли даже и мечтать вычислители 18-го и 19-го веков.

Эти вычисления, со своей стороны, способствуют также и развитию математических (аналитических) теорий в небесной механике, которые в свою очередь требуют применения и новейших достижений математики.

Но ясно, что прежде чем говорить об этих последних достижениях, необходимо сначала ознакомиться с основными задачами и основными методами небесной механики.

§ 2. Задача многих тел в абсолютных осях

1. Как было выяснено в предыдущем параграфе, основной задачей небесной механики является задача о движении системы, состоящей из некоторого конечного числа материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Эта задача и называется задачей многих тел, частными случаями которой являются задачи двух, трех, четырех и т. д. тел, к которым приводятся задачи о движении различных конкретных небесных тел *).

Так как для вывода дифференциальных уравнений движения и установления их основных свойств число материальных точек системы не имеет существенного значения, то будем считать число этих точек произвольным и обозначим его через $n+1$, а материальные точки, образующие систему, обозначим буквами $M_0, M_1, \ldots, M_n$ **).

Возьмем теперь некоторую систему прямоугольных декартовых координат $O\xi\eta\zeta$ с началом в произвольно выбранной точке O пространства и с неизменными направлениями осей.

Обозначим массу материальной точки M_i через m_i, а ее координаты (так же как и в гл. I) через ξ_i, η_i, ζ_i ($i = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, n$). Эти координаты будут функциями времени t, и наша

---

*) Правильнее было бы назвать эту задачу задачей о движении многих материальных точек, но термин тело будет напоминать нам, что рассматривается хотя и приближенная, но все же астрономическая задача. Кроме того, если все тела системы являются шарами, обладающими сферическим строением, то их движения (поступательные) не отличаются от движений материальных точек (см. часть I, главы II и V).

**) Точка M_0 будет представлять обычно главное тело, которое по каким-либо причинам играет особую роль. Так, в теории движения больших планет M_0 обозначает Солнце, в теории движения спутников Юпитера M_0 обозначает Юпитер и т. д. Вовсе не обязательно, чтобы главное тело имело наибольшую массу! В кратной звездной системе примерно с одинаковыми массами за главное тело может быть выбрана любая из звезд этой системы.

задача состоит, таким образом, в определении $3(n+1)$ неизвестных функций одной независимой переменной.

Дифференциальные уравнения движения системы будут принадлежать к типу уравнений (6.1), правые части которых составляются по правилам § 3 гл. I.

Поэтому дифференциальные уравнения движения системы взаимно притягивающихся материальных точек напишутся в виде

$$m_i\ddot{\xi}_i = \Xi_i, \quad m_i\ddot{\eta}_i = \mathrm{H}_i, \quad m_i\ddot{\zeta}_i = \mathrm{Z}_i, \tag{7.1}$$

где составляющие по осям координат равнодействующей всех сил, действующих на точку M_i, определятся формулами *)

$$\left.\begin{aligned} \Xi_i &= f\sum_{j=0}^{n}{}' m_i m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}^3}, \\ \mathrm{H}_i &= f\sum_{j=0}^{n}{}' m_i m_j \frac{\eta_j - \eta_i}{\Delta_{ij}^3}, \\ \mathrm{Z}_i &= f\sum_{j=0}^{n}{}' m_i m_j \frac{\zeta_j - \zeta_i}{\Delta_{ij}^3}, \end{aligned}\right\} \tag{7.2}$$

где

$$\Delta_{ij} = \Delta_{ji} = \sqrt{(\xi_j - \xi_i)^2 + (\eta_j - \eta_i)^2 + (\zeta_j - \zeta_i)^2} \tag{7.3}$$

есть взаимное расстояние между точками M_i и M_j.

В главе I было показано, что составляющие силы, действующей на точку M_i, т. е. величины (7.2), являются частными производными по координатам этой точки от одной и той же функции, называемой силовой функцией системы, U, которая определяется формулой

$$U = \frac{1}{2} f \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n}{}' \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}. \tag{7.4}$$

Таким образом, имеем

$$\Xi_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad \mathrm{H}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad \mathrm{Z}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \tag{7.2$'$}$$

и уравнения (7.1) напишутся в виде

$$m_i\ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad m_i\ddot{\eta}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad m_i\ddot{\zeta}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}. \tag{7.1$'$}$$

---

*) «Штрих» при знаке суммы обозначает, что при суммировании должен быть пропущен член, для которого $j=i$.

Уравнения (7.1) или (7.1′) представляют собой систему $3(n+1)$ совместных дифференциальных уравнений второго порядка, определяющих неизвестные функции — абсолютные координаты движущихся материальных точек.

Для полного определения функций, удовлетворяющих уравнениям (7.1), необходимо еще знать начальные условия, т. е. числовые значения этих функций (координат точек) и их первых производных (составляющих абсолютных скоростей точек) для некоторого момента времени t_0, принимаемого за начальный (начальная эпоха или просто эпоха).

Эти начальные значения должны быть заданы и составляют систему $6(n+1)$ действительных чисел

$$\xi_i^0, \quad \eta_i^0, \quad \zeta_i^0, \quad \dot{\xi}_i^0, \quad \dot{\eta}_i^0, \quad \dot{\zeta}_i^0, \tag{7.5}$$

определяющих начальное состояние нашей системы точек.

Общее решение системы (7.1) представится формулами вида

$$\left.\begin{aligned} \xi_i &= \xi_i(t \mid \xi^0, \ \eta^0, \ \zeta^0 \mid \dot{\xi}^0, \ \dot{\eta}^0, \ \dot{\zeta}^0), \\ \eta_i &= \eta_i(t \mid \xi^0, \ \eta^0, \ \zeta^0 \mid \dot{\xi}^0, \ \dot{\eta}^0, \ \dot{\zeta}^0), \\ \zeta_i &= \zeta_i(t \mid \xi^0, \ \eta^0, \ \zeta^0 \mid \dot{\xi}^0, \ \dot{\eta}^0, \ \dot{\zeta}^0), \end{aligned}\right\} \tag{7.5′}$$

и задача о движении системы взаимно притягивающихся точек приводится к следующей математической задаче:

Определить функции ξ_i, η_i, ζ_i ($i=0, 1, 2, \ldots, n$), удовлетворяющие совместно уравнениям (7.1) и начальным условиям (7.5) для всех значений времени $t \geqslant t_0$.

Отметим, что функция называется определенной в каком-либо промежутке времени, если известны свойства функции в этом промежутке и установлено правило, при помощи которого можно вычислять значение функции и ее производной (или производных) для любого момента времени в этом промежутке.

Определяя движение системы для $t \geqslant t_0$, мы узнаем ее судьбу в будущем. Чтобы узнать также прошедшую судьбу системы, нужно, очевидно, определить движение и для $t<t_0$.

Так как уравнения (7.1) не изменяются при замене t на $-t$, то мы получим значения функций для $t<t_0$, заменяя в формулах (7.5′) переменную t на t_0-t, вследствие чего движение будет определено для всех значений времени от $-\infty$ до $+\infty$.

2. Силовая функция U, входящая в уравнения (7.1′), зависит только от взаимных расстояний между точками M_0, $M_1, \ldots, M_n$ и, следовательно, не зависит от выбора системы координат. Полезно заметить также, что силовая функция не зависит ни от производных $\dot{\xi}$, $\dot{\eta}$, $\dot{\zeta}$, ни от времени (явно).

Функция U, как видно из формулы (7.4), есть алгебраическая (иррациональная) функция, определенная для любых вещественных значений координат и принимающая только неотрицательные значения. Она обращается в нуль только в том случае, когда все взаимные расстояния делаются бесконечно большими, т. е. когда все точки M_i «разлетаются» друг от друга в бесконечность.

Наоборот, функция U обращается в бесконечность всякий раз, когда хотя бы одно из взаимных расстояний делается равным нулю, т. е. когда хотя бы две из всех точек системы сталкиваются (соударяются) в одной точке пространства.

Выведем теперь два свойства силовой функции, вытекающие из ее независимости от выбора координатной системы.

Действительно, так как функция U не зависит от выбора координат, то она не изменит своего значения при любом параллельном преобразовании системы координат. Сместим начало координат вдоль оси $O\xi$ на бесконечно малую величину $\Delta\xi$, вследствие чего всякая из координат ξ_i получит приращение $\Delta\xi$, а координаты η_i и ζ_i не изменятся. Так как взаимные расстояния Δ_{ij} зависят только от разностей координат, то они также не изменятся, а поэтому функция U тоже не изменится и, следовательно, ее полное приращение будет равно нулю.

Но приращение функции U в общем случае определяется формулой

$$dU=\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi_i}d\xi_i+\frac{\partial U}{\partial \eta_i}d\eta_i+\frac{\partial U}{\partial \zeta_i}d\zeta_i\right), \tag{7.6}$$

и так как в рассматриваемом случае

$$d\xi_i=\Delta\xi,\quad d\eta_i=d\zeta_i=0,\quad dU=0,$$

то получим, сокращая на $\Delta\xi$, $\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{\partial U}{\partial \xi_i}=0.$

В силу равноправности координатных осей имеем три подобные равенства:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial U}{\partial \xi_i}=0,\quad \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial U}{\partial \eta_i}=0,\quad \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial U}{\partial \zeta_i}=0. \tag{7.6'}$$

Чтобы получить второе свойство, повернем систему координат вокруг одной из осей координат, например вокруг оси $O\zeta$, на бесконечно малый угол $\Delta\varphi$. Тогда, очевидно, координаты ζ_i

не изменятся, а координаты ξ_i и η_i получат соответственно приращения *) (рис. 40)

$$d\xi_i = -\eta_i \Delta\varphi, \quad d\eta_i = +\xi_i \Delta\varphi.$$

Ни одно из взаимных расстояний не изменится, а поэтому имеем $dU=0$ и формула (7.6) дает (после сокращения на $\Delta\varphi$)

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n}\left(\xi_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} - \eta_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i}\right) &= 0, \\ \sum_{i=0}^{n}\left(\zeta_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} - \xi_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}\right) &= 0, \\ \sum_{i=0}^{n}\left(\eta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} - \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i}\right) &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (7.6'')$$

причем последние два соотношения написаны по очевидной аналогии и могут быть выведены совершенно так же, как и первое.

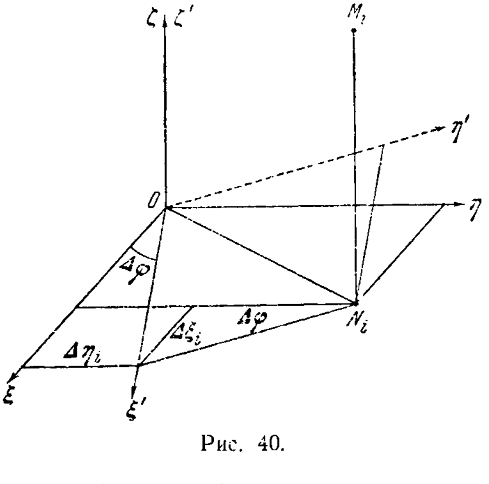


Рис. 40.

Соотношения (7.6′) и (7.6″) могут быть получены и непосредственно из выражений (7.2).

---

*) Действительно, обозначая новые координаты точки M_i через ξ_i' и η_i' $(\zeta_i'=0)$, мы имеем по формулам преобразования

$$\xi_i' = \xi_i \cos\Delta\varphi - \eta_i \sin\Delta\varphi, \quad \eta_i' = \xi_i \sin\Delta\varphi + \eta_i \cos\Delta\varphi.$$

Ввиду малости угла $\Delta\varphi$ его синус можно заменить самим углом, а косинус — единицей. Поэтому $\xi_i' = \xi_i - \eta_i \cdot \Delta\varphi$, $\eta_i' = \xi_i \cdot \Delta\varphi + \eta_i$, откуда получаем

$$d\xi_i = \xi_i' - \xi_i = -\eta_i \Delta\varphi, \quad d\eta_i = \eta_i' - \eta_i = +\xi_i \Delta\varphi.$$

Действительно, мы имеем, например,

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\partial U}{\partial \xi_i} = \sum_{i=0}^{n} \Xi_i = f \sum_{i=0}^{n} {\sum_{j=0}^{n}}' m_i m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}^3} \equiv 0,$$

и точно так же

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\xi_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} - \eta_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} \right) = \sum_{i=0}^{n} (\xi_i \mathrm{H}_i - \eta_i \Xi_i) =$$

$$= f \sum_{i=0}^{n} {\sum_{j=0}^{n}}' m_i m_j \frac{\xi_i \eta_j - \xi_j \eta_i}{\Delta_{ij}^3} \equiv 0.$$

Отметим еще одно очевидное свойство силовой функции. Формула (7.4) показывает, что U есть однородная функция от переменных ξ_i, η_i, ζ_i с измерением -1, а поэтому в силу теоремы Эйлера об однородных функциях мы имеем

$$\sum_{i=0}^{n} \left(\xi_i \frac{\partial U}{\partial \xi_i} + \eta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} + \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \right) = -U. \qquad (7.7)$$

3. Уравнения движения взаимно притягивающихся точек образуют систему $6(n+1)$-го порядка и для полного ее интегрирования нужно получить либо ее общее решение, содержащее $6(n+1)$ произвольных постоянных, либо ее общий интеграл, т. е. совокупность $6(n+1)$ независимых между собой первых интегралов. Общие принципы механики позволяют сразу получить десять из этих $6(n+1)$ первых интегралов. Однако предпочтительнее вывести эти интегралы из самих уравнений (7.1) или (7.1′).

Выведем эти десять первых интегралов, называемых обычно классическими интегралами задачи многих тел.

Прежде всего, складывая все уравнения (7.1) или (7.1′) для каждой координаты в отдельности (для $i=0, 1, \ldots, n$) и имея в виду соотношения (7.6′), мы получим следующие три уравнения:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \ddot{\xi}_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \ddot{\eta}_i = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \ddot{\zeta}_i = 0. \qquad (7.8)$$

Уравнения (7.8) являются следствиями уравнений (7.1) и замечательны тем, что левые их части представляют собой точные производные по t. Поэтому уравнения (7.8) можно непосредственно интегрировать, что дает следующие три первых интеграла:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \dot{\xi}_i = a_1, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \dot{\eta}_i = a_2, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \dot{\zeta}_i = a_3. \qquad (7.8')$$

Уравнения (7.8′) также, очевидно, можно интегрировать, что дает еще три первых интеграла:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i\xi_i = a_1t + b_1, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i\eta_i = a_2t + b_2, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i\zeta_i = a_3t + b_3, \qquad (7.8'')$$

где b_1, b_2, b_3 — три новые произвольные постоянные.

Уравнения (7.8′) и (7.8″), которые можно написать еще все вместе в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n} m_i\dot\xi_i = a_1, \quad &\sum_{i=0}^{n} m_i(\xi_i - t\dot\xi_i) = b_1,\\ &\sum_{i=0}^{n} m_i\dot\eta_i = a_2, \quad &\sum_{i=0}^{n} m_i(\eta_i - t\dot\eta_i) = b_2,\\ &\sum_{i=0}^{n} m_i\dot\zeta_i = a_3, \quad &\sum_{i=0}^{n} m_i(\zeta_i - t\dot\zeta_i) = b_3, \end{aligned}\right\} \qquad (7.8''')$$

называются *интегралами движения центра масс* (или центра инерции), так как эти интегралы определяют движение центра масс системы материальных точек относительно абсолютных осей.

Действительно, обозначая координаты центра масс нашей системы через $\bar\xi$, $\bar\eta$, $\bar\zeta$, мы имеем

$$\bar\xi = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{n} m_i\xi_i, \quad \bar\eta = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{n} m_i\eta_i, \quad \bar\zeta = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{n} m_i\zeta_i, \qquad (7.9)$$

где

$$m = \sum_{i=0}^{n} m_i$$

есть полная масса всей системы.

Теперь интегралы (7.8′) и (7.8″) дают:

$$\left.\begin{aligned} &\bar\xi = \frac{a_1}{m}t + \frac{b_1}{m}, \quad &\dot{\bar\xi} = \frac{a_1}{m},\\ &\bar\eta = \frac{a_2}{m}t + \frac{b_2}{m}, \quad &\dot{\bar\eta} = \frac{a_2}{m},\\ &\bar\zeta = \frac{a_3}{m}t + \frac{b_3}{m}, \quad &\dot{\bar\zeta} = \frac{a_3}{m}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.9')$$

Эти формулы показывают, что центр масс нашей системы точек движется в абсолютном пространстве прямолинейно и равномерно.

Если Солнце и большие планеты рассматривать как материальные точки, взаимно притягивающиеся по закону Ньютона и не подверженные действиям каких-либо других сил, то выведенное свойство показывает, что вся солнечная система в целом движется относительно «неподвижных» звезд прямолинейно и равномерно. Как известно, это движение направлено примерно к созвездию Геркулеса и совершается со скоростью 20 *км/сек*.

Однако, как уже было отмечено выше (см. сноску на стр. 324), если мы примем во внимание действие звезд, составляющих нашу Галактику, то движение солнечной системы уже не может быть рассматриваемо как прямолинейное и равномерное, а должно трактоваться как равномерное, круговое, совершающееся вокруг центра Галактики.

Произвольные постоянные a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 могут быть определены (см. гл. VI, § 1) из начальных условий. Действительно, подставляя в формулы (7.8‴) вместо координат и компонентов скоростей их начальные значения и заменяя t на t_0, мы получим

$$a_1 = \sum_{i=0}^{n} m_i \dot{\xi}_i^0, \qquad b_1 = \sum_{i=0}^{n} m_i (\xi_i^0 - t_0 \dot{\xi}_i^0),$$

$$a_2 = \sum_{i=0}^{n} m_i \dot{\eta}_i^0, \qquad b_2 = \sum_{i=0}^{n} m_i (\eta_i^0 - t_0 \dot{\eta}_i^0),$$

$$a_3 = \sum_{i=0}^{n} m_i \dot{\zeta}_i^0, \qquad b_3 = \sum_{i=0}^{n} m_i (\zeta_i^0 - t_0 \dot{\zeta}_i^0).$$

Переходим к выводу следующей группы первых интегралов. Умножая второе из уравнений (7.1′) на $-\zeta_i$, третье на $+\eta_i$, складывая и суммируя по i от нуля до n, мы имеем

$$\sum_{i=0}^{n} m_i (\eta_i \ddot{\zeta}_i - \zeta_i \ddot{\eta}_i) = \sum_{i=0}^{n} \left(\eta_i \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} - \zeta_i \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \right),$$

т. е. в силу последнего из равенств (7.6″)

$$\sum_{i=0}^{n} m_i (\eta_i \ddot{\zeta}_i - \zeta_i \ddot{\eta}_i) = 0.$$

Комбинируя подобным же образом две другие пары из уравнений (7.1′) и используя остальные два равенства (7.6″), мы получим еще два уравнения, аналогичные первому. Но левые части полученных таким образом трех уравнений, являющихся следствиями уравнений движения, являются точными производными по t, а следовательно, интегрируя эти уравнения, мы получим следующие три интеграла *):

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} m_i (\eta_i \dot{\zeta}_i - \zeta_i \dot{\eta}_i) &= c_1, \\ \sum_{i=0}^{n} m_i (\zeta_i \dot{\xi}_i - \xi_i \dot{\zeta}_i) &= c_2, \\ \sum_{i=0}^{n} m_i (\xi_i \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\xi}_i) &= c_3, \end{aligned}\right\} \qquad (7.10)$$

где c_1, c_2, c_3 суть произвольные постоянные.

Уравнения (7.10) называются **интегралами площадей** или, иногда, **интегралами моментов количества движения** (или просто интегралами моментов).

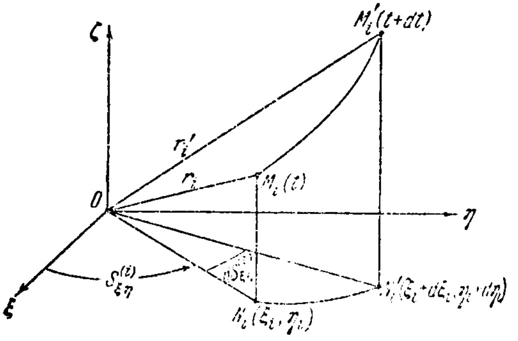


Рис. 41.

Смысл этих названий заключается в следующем. Рассмотрим общий член какой-либо из трех сумм в равенствах (7.10), например,

$$m_i (\xi_i \dot{\eta}_i - \eta_i \dot{\xi}_i) = \frac{m_i}{dt} (\xi_i \, d\eta_i - \eta_i \, d\xi_i).$$

Выражение $\xi_i d\eta_i - \eta_i d\xi_i$ представляет собой удвоенную площадь $dS^{(i)}_{\xi\eta}$ элементарного треугольника $ON_iN'_i$, образованного на плоскости $(O\xi\eta)$ проекциями точек M_i и M'_i, соответствующими моментами времени t и $t+dt$ (рис. 41). Тогда последнее из уравнений (7.10) напишется в виде

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \, dS^{(i)}_{\xi\eta} = c_3 dt.$$

---

*) Действительно,

$$\eta_i \ddot{\zeta}_i - \zeta_i \ddot{\eta}_i = (\eta_i \ddot{\zeta}_i + \dot{\eta}_i \dot{\zeta}_i) - (\zeta_i \ddot{\eta}_i + \dot{\eta}_i \dot{\zeta}_i) = \frac{d}{dt} (\eta_i \dot{\zeta}_i - \zeta_i \dot{\eta}_i).$$

Заметим еще, что любые два из уравнений (7.10) получаются из третьего циклической перестановкой букв ξ, η, ζ.

Интегрируя последнее равенство и два других, ему подобных, мы получим, как следствия интегралов (7.10), следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} m_i S^{(i)}_{\eta\zeta} &= c_1 t + c_1',\\ \sum_{i=0}^{n} m_i S^{(i)}_{\zeta\xi} &= c_2 t + c_2',\\ \sum_{i=0}^{n} m_i S^{(i)}_{\xi\eta} &= c_3 t + c_3',\end{aligned}\right\} \qquad (7.10')$$

где c_1, c_2, c_3 — три новые произвольные постоянные.

Формулы (7.10′) показывают, что суммы произведений масс точек системы на площади, описанные проекциями радиусов-векторов на координатные плоскости, изменяются пропорционально времени, что и дало повод назвать уравнения (7.10) интегралами площадей *).

Рассмотрим теперь второе название уравнений (7.10). Если $\boldsymbol{v}_i$ есть абсолютная скорость точки M_i, то вектор $m_i\boldsymbol{v}_i$ есть количество движения этой точки. Момент этого вектора относительно начала координат есть векторное произведение $m_i\boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{r}_i$ вектора количества движения на радиус-вектор $\boldsymbol{r}_i$ точки M_i и его составляющие по осям координат суть

$$m_i(\eta_i\dot{\zeta}_i - \zeta_i\dot{\eta}_i), \quad m_i(\zeta_i\dot{\xi}_i - \xi_i\dot{\zeta}_i), \quad m_i(\xi_i\dot{\eta}_i - \eta_i\dot{\xi}_i).$$

Поэтому левые части равенства (2.10) суть составляющие вектора момента количества движения всей системы материальных точек.

Интегралы (7.10) показывают, следовательно, что этот вектор остается постоянным (по величине и направлению) во все время движения. Это обстоятельство и дало повод для названия уравнений (7.10) интегралами моментов.

Вообразим теперь плоскость, проходящую через центр масс G системы и определяемую уравнением

$$c_1(\xi - \bar{\xi}) + c_2(\eta - \bar{\eta}) + c_3(\zeta - \bar{\zeta}) = 0. \qquad (7.10'')$$

Очевидно, эта плоскость сохраняет неизменную ориентацию относительно абсолютных осей и вместе с тем перпендикулярна к вектору момента количества движения системы. Эта плоскость

---

*) Полезно отметить, что равенства (7.10′) не являются интегралами уравнений движения, так как величины $S^{(i)}_{\eta\zeta}$, $S^{(i)}_{\zeta\xi}$, $S^{(i)}_{\xi\eta}$ не выражаются конечным образом через координаты и компоненты скорости точки M_i.

имеет важное значение для небесной механики и называется неизменяемой плоскостью Лапласа*).

Постоянные интегралов (7.10), называемые обычно постоянными площадей, также легко определяются по начальным условиям (7.5) очевидными формулами:

$$c_1 = \sum_{i=0}^{n} m_i (\eta_i^0 \dot{\zeta}_i^0 - \zeta_i^0 \dot{\eta}_i^0),$$

$$c_2 = \sum_{i=0}^{n} m_i (\zeta_i^0 \dot{\xi}_i^0 - \xi_i^0 \dot{\zeta}_i^0),$$

$$c_3 = \sum_{i=0}^{n} m_i (\xi_i^0 \dot{\eta}_i^0 - \eta_i^0 \dot{\xi}_i^0),$$

и зависят как от начальных положений, так и от начальных скоростей всех точек системы.

Если мы обозначим величину вектора момента количества движения всей системы через c, то будем, очевидно, иметь

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2},$$

а направляющие косинусы этого вектора будут соответственно

$$\frac{c_1}{c}, \quad \frac{c_2}{c}, \quad \frac{c_3}{c}.$$

Остается получить последний из классических интегралов уравнений (7.1). Умножим для этого уравнения (7.1′) соответственно на $\dot{\xi}_i$, $\dot{\eta}_i$, $\dot{\zeta}_i$, сложим и просуммируем по i от нуля до n. Мы получим следующее уравнение, являющееся следствием уравнений (7.1):

$$\sum_{i=0}^{n} m_i (\dot{\xi}_i \ddot{\xi}_i + \dot{\eta}_i \ddot{\eta}_i + \dot{\zeta}_i \ddot{\zeta}_i) = \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi_i} \dot{\xi}_i + \frac{\partial U}{\partial \eta_i} \dot{\eta}_i + \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \dot{\zeta}_i \right),$$

что, очевидно, можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=0}^{n} \frac{m_i}{2} (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = \frac{dU}{dt},$$

откуда, интегрируя, находим

$$\frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) = U + h, \qquad (7.11)$$

где h есть произвольная постоянная.

---

*) Оказывается, что движения всех больших планет солнечной системы происходят весьма близко от ее неизменяемой плоскости, которая, таким образом, весьма близка к плоскости эклиптики современной эпохи.

Равенство (7.11) можно еще написать в виде

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i v_i^2 = U + h, \tag{7.11'}$$

что показывает, что полная живая сила системы

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i v_i^2$$

зависит только от силовой функции, а следовательно, только от взаимных расстояний между точками M_i, и поэтому не зависит от выбора системы координат.

Вследствие этого обстоятельства уравнение (7.11) называется интегралом живой силы (или интегралом живых сил).

Так как, кроме того, величина $-U$ есть потенциальная энергия всей системы, то, переписав равенство (7.11′) в виде

$$T - U = h,$$

мы видим, что полная энергия системы остается неизменной во все время движения, вследствие чего уравнение (7.11) называется еще интегралом энергии*).

Таким образом, движение системы взаимно притягивающихся материальных точек принадлежит к классу консервативных движений.

Постоянная живых сил (или постоянная энергии) h определяется начальными условиями (7.5) и мы можем написать

$$h = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i v_i^{0^2} - U_0,$$

где

$$v_i^0 = \sqrt{\dot{\xi}_i^{0^2} + \dot{\eta}_i^{0^2} + \dot{\zeta}_i^{0^2}}$$

есть начальная скорость точки M_i, а

$$U_0 = \frac{1}{2} f \sum_{i=0}^{n} {\sum_{j=0}^{n}}' \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}^0}$$

— начальное значение силовой функции, где

$$\Delta_{ij}^0 = \sqrt{(\xi_i^0 - \xi_j^0)^2 + (\eta_i^0 - \eta_j^0)^2 + (\zeta_i^0 - \zeta_j^0)^2}$$

суть начальные взаимные расстояния.

---

*) Весь этот вывод представляет собой частный случай общего вывода интеграла энергии произвольной системы уравнений Лагранжа в случае существования силовой функции (см. § 2 гл. VI).

Отметим, что постоянная h зависит только от начальной конфигурации точек системы и от величин их начальных скоростей, но не зависит от направлений начальных скоростей.

4. Найденные десять классических интегралов являются единственными известными до сих пор интегралами задачи многих тел и имеют, как мы видели, простое механическое значение.

Из этих десяти интегралов только три (а именно, вторая группа интегралов движения центра масс (7.8″)) содержат время t явным образом. В остальные семь интегралов время явно не входит.

Весьма существенным является также то обстоятельство, что левые части всех десяти классических интегралов суть простые алгебраические функции от координат и их первых производных по времени.

При этом левые части интегралов движения центра масс (7.8‴) суть *линейные функции* указанных переменных, а левые части интегралов площадей (7.10) — *билинейные функции* тех же величин*), или целые однородные функции второй степени. Интеграл живых сил (7.11) является *однородной функцией второй степени* относительно составляющих скоростей, но относительно координат является функцией иррациональной, так как содержит координаты под знаками квадратных корней.

Знание только десяти первых интегралов задачи является совершенно недостаточным (при $n>1$) для ее решения, а поэтому издавна предпринимались попытки найти остальные недостающие интегралы или хотя бы некоторые из них, кроме классических.

Все эти попытки оставались безуспешными, но продолжались упорно до конца 19-го столетия, пока не выяснилось, что они совершенно бесполезны.

Действительно, в 1887 г. Брунс доказал, что уравнения движения (7.1) или (7.1′) для $n=2$ (т. е. для задачи трех тел) не имеют никаких других интегралов, левые части которых были бы алгебраическими функциями прямоугольных координат и их производных.

Доказательство Брунса было вскоре распространено французским математиком Пенлеве на задачу какого угодно (конечного!) числа тел. В 1889 г. Пуанкаре, рассматривая задачу трех тел, доказал, что уравнения движения не имеют даже трансцендентных интегралов, выражающихся через однозначные ана-

---

*) То есть левые части интегралов площадей линейны в отдельности относительно координат ξ, η, ζ и в отдельности относительно скоростей $\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta}$.

литические функции, а Пенлеве обобщил и это доказательство на задачу многих тел *).

Упомянутые доказательства показывают, что вопрос о нахождении новых интегралов задачи многих тел (даже ее простейшего случая — задачи трех тел) имеет теперь только теоретическое значение, так как эти интегралы были бы чрезвычайно сложными для того, чтобы иметь какое-либо практическое приложение.

Посмотрим теперь, какую пользу может нам принести знание известных, классических интегралов.

Так как знание каждого первого интеграла системы обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет принципиально понизить порядок системы на одну единицу, то при помощи десяти классических интегралов уравнений (7.1) мы имеем возможность понизить порядок этой системы на десять единиц.

Это преобразование можно выполнить, во всяком случае теоретически, либо исключая из уравнений движения, записанных в виде системы уравнений первого порядка, какие-нибудь десять из неизвестных функций либо выражая все $6n+6$ неизвестных через $6n-4$ новых независимых переменных, которые могут быть выбраны совершенно произвольно, при том лишь условии, чтобы все классические интегралы тождественно удовлетворялись.

Получив тем или иным способом из системы (7.1) систему уравнений $6n-4$-го порядка, мы можем понизить порядок полученной системы еще на одну единицу, исключая dt (время t явно в уравнения движения не входит!) и принимая, таким образом, за независимую переменную одну из определяемых функций. Когда преобразованная таким образом система будет проинтегрирована (если это возможно, разумеется), время t найдется при помощи одной квадратуры и общая задача приведется, следовательно, к интегрированию системы $6n-5$-го порядка и к одной квадратуре.

Наконец, можно еще понизить порядок системы на одну единицу, используя то обстоятельство, что действующие силы зависят исключительно от взаимных расстояний между точками системы.

Окончательно, после всех указанных приведений, мы получим систему уравнений, порядок которой равен $6n-6$ и после

---

*) Доказательства теорем Брунса и Пуанкаре можно найти в сокращенном виде в книге Е. Т. Уиттекера, Аналитическая динамика, перев. с англ., ОНТИ, 1937. См. также Г. Н. Дубошин, Небесная механика. Аналитические и качественные методы, «Наука», 1964, и Уинтнер, Аналитические основы небесной механики, перев. с англ., «Наука», 1967.

интегрирования которой нужно будет выполнить еще две квадратуры.

Однако, хотя все указанные приведения и можно выполнить фактически ценой весьма громоздких и сложных выкладок, но они приводят к очень сложным и несимметричным уравнениям, рассмотрение которых мало облегчает дальнейшее решение задачи.

Действительно, для главной задачи небесной механики — задачи о движении больших планет солнечной системы, где число планет равно девяти *), первоначальный порядок уравнений абсолютного движения есть $6\cdot 9+6=60$. Если выполнить все возможные понижения порядка, то мы получим систему уравнений $6\cdot 9-6=48$, для которой мы не знаем никаких интегралов, а поэтому можем решать ее только приближенными методами.

Но ясно, что для процедуры приближенного решения почти совершенно безразлично, будет ли порядок системы равен 60 или 48, а сложность уравнений, наоборот, имеет весьма существенное значение.

Легко только понизить порядок системы (7.1) на шесть единиц при помощи интегралов движения центра масс. Действительно, левые части интегралов (7.8‴) линейны, как уже отмечалось, относительно координат и составляющих скоростей точек системы, а это обстоятельство и позволяет без всякого труда выполнить преобразования, связанные с использованием этих интегралов. При этом очевидно, что понижение порядка можно произвести бесчисленным множеством способов, из которых естественно выбрать наиболее простые и удобные.

Важнейшие из этих способов мы рассмотрим в следующем параграфе.

5. В заключение этого параграфа, посвященного дифференциальным уравнениям абсолютного движения, используем последнее свойство силовой функции — свойство ее однородности, выражаемое формулой (7.7) — для вывода одного замечательного уравнения, связывающего только взаимные расстояния между материальными точками.

Для этого умножим уравнения (7.1) соответственно на ξ_i, η_i, ζ_i и просуммируем затем по i от нуля до n.

В силу формулы (7.7) мы получим

$$\sum_{i=0}^{n} m_i(\xi_i\ddot{\xi}_i+\eta_i\ddot{\eta}_i+\zeta_i\ddot{\zeta}_i)=-U.$$

---

*) Меркурий, Венера, Земля с Луной, Марс со спутниками, Юпитер со спутниками, Сатурн со спутниками, Уран со спутниками, Нептун со спутниками и Плутон.

Складывая это равенство с интегралом живых сил (7.11), умноженным на 2, найдем

$$\sum_{i=0}^{n} m_i (\xi_i\ddot{\xi}_i + \dot{\xi}_i^2 + \eta_i\ddot{\eta}_i + \dot{\eta}_i^2 + \zeta_i\ddot{\zeta}_i + \dot{\zeta}_i^2) = U + 2h,$$

что можно переписать также в виде

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n} m_i (\xi_i\dot{\xi}_i + \eta_i\dot{\eta}_i + \zeta_i\dot{\zeta}_i) = U + 2h,$$

или в виде

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_{i=0}^{n} m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) = 2U + 4h. \tag{7.12}$$

Положим

$$I = \sum_{i=0}^{n} m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2), \tag{7.13}$$

так что I есть момент инерции всей системы материальных точек относительно начала координат.

Тогда уравнение (7.12) напишется чрезвычайно просто следующим образом:

$$\ddot{I} = 2U + 4h. \tag{7.12$'$}$$

Уравнение (7.12′), связывающее полярный момент инерции системы с ее силовой функцией, зависит от выбора системы координат, так как содержит расстояния r_i точек системы M_i до начала координат O.

Преобразуем теперь это уравнение таким образом, чтобы вместо расстояний r_i в него входили только взаимные расстояния Δ_{ij}.

Для этого используем следующее алгебраическое тождество, называемое тождеством Лагранжа и которое легко проверить непосредственно:

$$\sum_{i=0}^{k} a_i^2 \times \sum_{i=0}^{k} b_i^2 = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_i\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k}\sum_{i=0}^{k}(a_i b_j - a_j b_i)^2, \tag{7.14}$$

где a_i и b_i обозначают какие угодно величины и k есть любое целое положительное число.

Полагая в тождестве (7.14) $k = n$ и заменяя a_i на $\sqrt{m_i}$, а b_i, последовательно, на $\sqrt{m_i}\,\xi_i$, $\sqrt{m_i}\,\eta_i$, $\sqrt{m_i}\,\zeta_i$, мы будем иметь три следующие тождества:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \times \sum_{i=0}^{n} m_i \xi_i^2 = \left(\sum_{i=0}^{n} m_i \xi_i\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} m_i m_j (\xi_j - \xi_i)^2,$$

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \times \sum_{i=0}^{n} m_i \eta_i^2 = \left(\sum_{i=0}^{n} m_i \eta_i\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} m_i m_j (\eta_j - \eta_i)^2,$$

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \times \sum_{i=0}^{n} m_i \zeta_i^2 = \left(\sum_{i=0}^{n} m_i \zeta_i\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} m_i m_j (\zeta_j - \zeta_i)^2,$$

складывая которые, получим

$$mI = m \sum_{i=0}^{n} m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2) = \left(\sum_{i=0}^{n} m_i \xi_i\right)^2 + \left(\sum_{i=0}^{n} m_i \eta_i\right)^2 + \\ + \left(\sum_{i=0}^{n} m_i \zeta_i\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} m_i m_j \Delta_{ij}^2. \qquad (7.15)$$

Используя теперь формулы (7.8″), мы напишем равенство (7.15) в следующем виде:

$$mI = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} m_i m_j \Delta_{ij}^2 + (a_1 t + b_1) + (a_2 t + b_2)^2 + (a_3 t + b_3)^2. \qquad (7.16)$$

Положим

$$R = \frac{1}{2m} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} m_i m_j \Delta_{ij}^2. \qquad (7.17)$$

Очевидно, что R есть величина, не зависящая от выбора системы координат, имеющая размерность момента инерции. Теперь равенство (7.16) напишется в виде

$$I = \frac{1}{m} [(a_1 t + b_1)^2 + (a_2 t + b_2)^2 + (a_3 t + b_3)^2] + R. \qquad (7.16')$$

Дифференцируя дважды это равенство по t, найдем

$$\ddot{I} = \frac{2}{m} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + \ddot{R},$$

а исключая из этого равенства и из (7.12′) величину $\ddot{I}$, получим

$$\ddot{R} = 2U + 4h', \qquad (7.17')$$

где

$$h' = h - \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{2m}.$$

Уравнение (7.17′), связывающее только взаимные расстояния между материальными точками и не зависящее поэтому от выбора системы координат, играет важную роль в качественных исследованиях движений небесных тел и называется уравнением Лагранжа — Якоби*).

§ 3. Дифференциальные уравнения относительного движения задачи многих тел

Дифференциальные уравнения абсолютного движения взаимно притягивающихся материальных точек мало удобны для практического использования при изучении движений реальных небесных тел.

Действительно, формулы, служащие для вычисления эфемерид, должны содержать численные значения произвольных постоянных интегрирования, которые в свою очередь определяются заданными числовыми значениями координат и их производных в начальный момент t_0.

Но известно, что определить из наблюдений абсолютные координаты и абсолютные скорости небесных тел принципиально невозможно. Поэтому пользоваться абсолютной, в строгом смысле этого слова, системой координат для изучения движений небесных тел мы также не можем. Если же условиться называть абсолютными координатами числа, определяющие положения небесных тел в изучаемой системе (например, в солнечной системе) относительно другой небесной системы, весьма удаленной от рассматриваемой, то здесь мы сталкиваемся с затруднениями чисто технического характера. В самом деле, при современном состоянии астрономической техники невозможно определить при помощи астрономических инструментов координаты планет, например, относительно системы координат, связанной с Галактикой. Поэтому пользоваться абсолютными и в таком понимании этого слова координатами мы также фактически не можем.

Астрономические наблюдения дают нам только относительные положения и скорости небесных тел, а поэтому естественно и удобно ставить задачу об определении относительных движений.

1. В предыдущем параграфе мы установили, что центр масс системы материальных точек M_0, M_1, ... , M_n движется относительно абсолютных осей координат прямолинейно и равномерно. Это свойство определяет движение всей системы в целом

---

*) Эти свойства рассматриваются в моей книге «Небесная механика. Аналитические и качественные методы», «Наука», 1964. Одно применение формулы (7.17′) будет дано в гл. XIII.

и позволяет нам ограничиться изучением движений отдельных ее точек относительно общего центра масс.

Рассмотрим уравнения движения системы взаимно притягивающихся точек в абсолютных осях:

$$m_i\ddot{\xi}_i = \Xi_i, \quad m_i\ddot{\eta}_i = \mathrm{H}_i, \quad m_i\ddot{\zeta}_i = \mathrm{Z}_i \qquad (7.18)$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$\Xi_i = f\sum_{j=0}^{n}{}' m_i m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{\Delta_{ij}^3} = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \ \ldots \qquad (7.18')$$

зависят только от разностей одноименных координат точек M_i и являются частными производными от силовой функции

$$U = \frac{1}{2} f \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}. \qquad (7.19)$$

Пусть G — центр масс всей системы и $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ — его абсолютные координаты, которые в силу интегралов движения центра масс суть линейные функции времени (см. формулы (7.9')).

Перейдем теперь от абсолютной системы координат $O\xi\eta\zeta$ к относительной, начало которой возьмем в точке G_0. Оси этой новой системы координат $G\xi'\eta'\zeta'$ примем параллельными соответствующим осям старой системы, так что переход от прежней системы (абсолютной) к новой (относительной) определяется формулами параллельного преобразования координат *).

Таким образом, если ξ_i', η_i', ζ_i' суть новые координаты точки M_i, то имеем следующие формулы преобразования:

$$\xi_i = \xi_i' + \bar{\xi}, \quad \eta_i = \eta_i' + \bar{\eta}, \quad \zeta_i = \zeta_i' + \bar{\zeta}. \qquad (7.20)$$

Из этих формул следует, что преобразованные дифференциальные уравнения движения будут иметь в точности такой же вид, как и первоначальные уравнения (7.18). Действительно, так как величины $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ суть линейные функции времени, то их вторые производные тождественно равны нулю, а, с другой стороны,

$$\xi_j - \xi_i = \xi_j' - \xi_i', \ \ldots$$

для всякой пары значков i и j.

---

*) Введенная нами система координат с началом в центре масс всей системы материальных точек называется иногда «барицентрической» системой, а координаты ξ', η', ζ' — «барицентрическими» координатами.

Поэтому уравнения относительного движения в барицентрической системе координат напишутся следующим образом:

$$m_i\ddot{\xi}'_i = \Xi'_i, \quad m_i\ddot{\eta}'_i = \mathrm{H}'_i, \quad m_i\ddot{\zeta}'_i = \mathrm{Z}'_i \tag{7.18'}$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где

$$\Xi'_i = f \sum_{j=0}^{n}{}' m_i m_j \frac{\xi'_j - \xi'_i}{\Delta^3_{ij}},$$

и аналогичные выражения имеем для величин Π'_i и Z'_i.

Выражение для силовой функции (7.19) не изменится, а взаимные расстояния в новой системе координат определятся формулой

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(\xi'_j - \xi'_i)^2 + (\eta'_j - \eta'_i)^2 + (\zeta'_j - \zeta'_i)^2}.$$

Очевидно, что мы имеем также

$$\Xi'_i = \frac{\partial U}{\partial \xi'_i}, \quad \mathrm{H}'_i = \frac{\partial U}{\partial \eta'_i}, \quad \mathrm{Z}'_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta'_i},$$

так что уравнения, определяющие барицентрические координаты, могут быть написаны еще в виде *)

$$m_i\ddot{\xi}'_i = \frac{\partial U}{\partial \xi'_i}, \quad m_i\ddot{\eta}'_i = \frac{\partial U}{\partial \eta'_i}, \quad m_i\ddot{\zeta}'_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta'_i}. \tag{7.18''}$$

Уравнения (7.18′) и (7.18″) имеют такой же вид, как и уравнения (7.1) и (7.1′) соответственно. Поэтому уравнения относительного движения в барицентрической системе имеют такие же первые интегралы, как и уравнения абсолютного движения. При этом, к тому же, интегралы движения центра масс тождественно удовлетворяются, так как в новой системе координат центр масс совпадает с началом координат G и остается неподвижным.

---

*) Уравнения (7.18″) легко вывести также из уравнений Лагранжа (6.8′). В самом деле, живая сила T в новых координатах имеет вид

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i \left[\left(\dot{\xi}'_i + \frac{a_1}{m}\right)^2 + \left(\dot{\eta}'_i + \frac{a_2}{m}\right)^2 + \left(\dot{\zeta}'_i + \frac{a_3}{m}\right)^2\right].$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}'_i} = m_i\left(\dot{\xi}'_i + \frac{a_1}{m}\right), \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}'_i}\right) = m_i\ddot{\xi}'_i, \quad \frac{\partial T}{\partial \xi'_i} = 0$$

и, следовательно, уравнения Лагранжа приводятся опять к уравнениям (7.18″). Следует заметить, что при этом преобразовании роль обобщенных координат q играют барицентрические координаты.

Следовательно, относительные координаты точек системы в барицентрической системе не являются независимыми и связаны между собой следующими тремя соотношениями:

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \xi_i' = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \eta_i' = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \zeta_i' = 0. \tag{7.21}$$

Такими же соотношениями связаны производные (относительные скорости) от барицентрических координат

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \dot{\xi}_i' = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \dot{\eta}_i' = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} m_i \dot{\zeta}_i' = 0. \tag{7.21$'$}$$

Из этих соотношений мы можем выразить какие-нибудь три из переменных ξ', η', ζ', например, координаты ξ_0', η_0', ζ_0' точки M_0, через остальные, что дает

$$\xi_0' = -\frac{1}{m_0} \sum_{i=1}^{n} m_i \xi_i', \quad \eta_0' = -\frac{1}{m_0} \sum_{i=1}^{n} m_i \eta_i', \quad \zeta_0' = -\frac{1}{m_0} \sum_{i=1}^{n} m_i \zeta_i'. \tag{7.21$''$}$$

Исключая при помощи этих формул неизвестные ξ_0', η_0'; ζ_0' из уравнений (7.18′), мы получим систему $3n$ уравнений второго порядка с $3n$ неизвестными — координатами точек $M_1, \ldots, M_n$.

Таким образом, порядок преобразованной системы уравнений будет равен $6n$, т. е. на шесть единиц меньше порядка системы уравнений абсолютного движения.

Нетрудно убедиться, что преобразованная система уравнений движения может быть написана в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{\xi}_i' &= -\frac{(m_0+m_i)\xi_i' + \sum_{j=1}^{n}{}' m_j \xi_j'}{\Delta_{i0}^3} + f \sum_{j=1}^{n}{}' m_j \frac{\xi_j' - \xi_i'}{\Delta_{ij}^3}, \\
\ddot{\eta}_i' &= -\frac{(m_0+m_i)\eta_i' + \sum_{j=1}^{n}{}' m_j \eta_j'}{\Delta_{i0}^3} + f \sum_{j=1}^{n}{}' m_j \frac{\eta_j' - \eta_i'}{\Delta_{ij}^3}, \\
\ddot{\zeta}_i' &= -\frac{(m_0+m_i)\zeta_i' + \sum_{j=1}^{n}{}' m_j \zeta_j'}{\Delta_{i0}^3} + f \sum_{j=1}^{n}{}' m_j \frac{\zeta_j' - \zeta_i'}{\Delta_{ij}^3},
\end{aligned}\right\} \tag{7.22}$$

где

$$m_0 \Delta_{i0}^2 = \left[(m_0+m_i)\xi_i' + \sum_{j=1}^{n}{}' m_j \xi_j'\right]^2 + \\ + \left[(m_0+m_i)\eta_i' + \sum_{j=1}^{n}{}' m_j \eta_j'\right]^2 + \left[(m_0+m_i)\zeta_i' + \sum_{j=1}^{n}{}' m_j \zeta_j'\right]^2.$$

Уравнения (7.22) имеют только четыре первых интеграла, а именно — три интеграла площадей и интеграл живых сил.

Эти интегралы можно, конечно, вывести непосредственно из уравнений (7.22) при помощи процедуры, аналогичной (но более громоздкой) той, которая позволила вывести интегралы абсолютных уравнений движения. Но проще поступить иначе. Напишем сначала соответствующие интегралы системы (7.18″), которые, как уже замечено, имеют такой же вид, как и интегралы уравнений абсолютного движения, а затем исключим из написанных интегралов координаты и компоненты скорости точки M_0 при помощи формул (7.21) и (7.21′).

В результате мы получим следующие интегралы:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{m_0}\left[\sum_{j=1}^{n} m_j\eta'_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j\dot{\zeta}'_j - \sum_{j=1}^{n} m_j\zeta'_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j\dot{\eta}'_j\right] + \\
&\qquad\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{n} m_i(\eta'_i\dot{\zeta}'_i - \zeta'_i\dot{\eta}'_i) = c'_1, \\
&\frac{1}{m_0}\left[\sum_{j=1}^{n} m_j\zeta'_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j\dot{\xi}'_j - \sum_{j=1}^{n} m_j\xi'_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j\dot{\zeta}'_j\right] + \\
&\qquad\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{n} m_i(\zeta'_i\dot{\xi}'_i - \xi'_i\dot{\zeta}'_i) = c'_2, \\
&\frac{1}{m_0}\left[\sum_{j=1}^{n} m_j\xi'_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j\dot{\eta}'_j - \sum_{j=1}^{n} m_j\eta'_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j\dot{\xi}'_j\right] + \\
&\qquad\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{n} m_i(\xi'_i\dot{\eta}'_i - \eta'_i\dot{\xi}'_i) = c'_3,
\end{aligned}\right\} \quad (7.22')$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2m_0}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} m_j\dot{\xi}'_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} m_j\dot{\eta}'_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} m_j\dot{\zeta}'_j\right)^2\right] + \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\dot{\xi}'^2_i + \dot{\eta}'^2_i + \dot{\zeta}'^2_i\right) = U + h', \quad (7.22'')
\end{aligned}$$

где c'_1, c'_2, c'_3 и и h' — суть произвольные постоянные, определяемые начальными значениями барицентрических координат и их производных точек $M_1, \ldots, M_n$.

Мы видим, что уравнения (7.22) и их интегралы имеют более сложный и громоздкий вид, чем соответствующие уравнения абсолютного движения.

Заметим, что уравнения (7.22) можно, конечно, записать и в виде (7.18″), но индекс i будет принимать значения только 1, 2, ..., n, а из силовой функции U должны быть исключены координаты точки M_0 при помощи формул (7.21″).

2. Перейдем теперь от барицентрической системы координат к другой относительной системе, иногда более удобной, с началом в одной из движущихся точек M_i и с неизменными направлениями осей.

Возьмем за начало новой системы координат точку M_0, а новые оси $\overrightarrow{M_0x}$, $\overrightarrow{M_0y}$, $\overrightarrow{M_0z}$ будем считать параллельными соответственным осям старой системы $G\xi'\eta'\zeta'$ или, что то же, осям абсолютной системы $O\xi\eta\zeta$ *).

Обозначая координаты точки M_i ($i=1, 2, \ldots, n$) буквами x_i, y_i, z_i, имеем по формулам параллельного преобразования координат

$$x_i=\xi'_i-\xi'_0,\quad y_i=\eta'_i-\eta'_0,\quad z_i=\zeta'_i-\zeta'_0. \tag{7.23}$$

Используя формулы (7.21″), мы исключим координаты точки M_0 и выразим координаты остальных точек в новой системе только через барицентрические координаты тех же точек, т. е. получим

$$m_0x_i=(m_0+m_i)\xi'_i+\sum_{j=1}^{n}{}'m_i\xi'_j, \tag{7.23'}$$

и подобные же выражения для двух других координат.

Чтобы получить дифференциальные уравнения, определяющие относительные координаты x_i, y_i, z_i, продифференцируем прежде всего дважды формулы (7.23), что дает **)

$$\ddot{x}_i=\ddot{\xi}'_i-\ddot{\xi}'_0,$$

а затем заменим $\ddot{\xi}'_i$ и $\ddot{\xi}'_0$ их выражениями из уравнений (7.22) и (7.18′).

Обозначая расстояния точек M_i ($i=1, 2, \ldots, n$) до точки M_0 через r_i, т. е. полагая

$$\Delta_{i0}=r_i=\sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2},$$

---

*) Система $M_0\,xyz$ не имеет общего названия. Если же рассматривается задача о движении больших планет и если точка M_0 изображает Солнце, то эта система координат называется гелиоцентрической. Если рассматривается задача о движении спутников (естественных или искусственных) и точка M_0 изображает центральную планету, то система $M_0\,xyz$ называется обычно по имени планеты, т. е. геоцентрической, селеноцентрической, ареоцентрической (по греческому имени планеты Марс — Арес), венероцентрической, сатурноцентрической и т. д.

**) Для сокращения мы проделаем необходимые выкладки только для одного уравнения, после чего два других напишем по аналогии.

и имея в виду, что

$$\xi'_j - \xi'_i = x_j - x_i, \ldots,$$

мы с помощью формул (7.23) будем иметь

$$\ddot{x}_i = -f\frac{m_0 x_i}{r_i^3} + f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j \frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3} - f\frac{m_i x_i}{r_i^3} - f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j \frac{x_j}{r_j^3},$$

где

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2},$$

и штрих при знаке суммы по-прежнему обозначает, что при суммировании должен быть пропущен член, для которого $j = i$.

Окончательно мы напишем уравнения относительного движения в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{x}_i + f(m_0 + m_i)\frac{x_i}{r_i^3} = f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\left(\frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_j^3}\right),\\ &\ddot{y}_i + f(m_0 + m_i)\frac{y_i}{r_i^3} = f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\left(\frac{y_j - y_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{y_j}{r_j^3}\right),\\ &\ddot{z}_i + f(m_0 + m_i)\frac{z_i}{r_i^3} = f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\left(\frac{z_j - z_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{z_j}{r_j^3}\right)\\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \end{aligned}\right\} \qquad (7.24)$$

Правые части этих уравнений можно представить также в виде частных производных от некоторых функций координат всех точек нашей материальной системы. Действительно, положим

$$R_i = f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j R_{ij} \qquad (7.25)$$

$$R_{ij} = \frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j}{r_j^3}. \qquad (7.25')$$

Тогда, как легко проверить непосредственно, имеем

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial x_i} = \frac{x_j - x_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{x_j}{r_j^3}.$$

Полагая еще для сокращения

$$\mu_i = f(m_0 + m_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

мы представим уравнения (7.24) в следующей классической форме:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}_i + \frac{\mu_i x_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial x_i},\\ \ddot{y}_i + \frac{\mu_i y_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial y_i},\\ \ddot{z}_i + \frac{\mu_i z_i}{r_i^3} &= \frac{\partial R_i}{\partial z_i}.\end{aligned}\right\} \qquad (7.24')$$

Функции R_i называются **возмущающими функциями** (или пертурбационными функциями), так как они определяют действия притяжений (возмущений), которые испытывают точки M_i со стороны всех остальных точек системы (кроме точки M_0). Это название — возмущающие функции — возникло в задаче о движении больших планет солнечной системы, массы которых малы по сравнению с массой Солнца — точки M_0. Действительно, каждая из девяти больших планет испытывает действие притяжения Солнца и действия притяжения всех остальных восьми планет. Так как массы всех больших планет достаточно малы по сравнению с массой Солнца (ни одна из этих масс не превышает одной тысячной доли массы Солнца), то действие Солнца является главной причиной, управляющей движениями каждой планеты, а действия всех остальных восьми планет весьма малы по сравнению с действием Солнца и могут (как это естественно кажется!) производить только незначительные, вообще говоря, изменения в движении каждой отдельной планеты вокруг Солнца. Эти незначительные изменения принято называть **возмущениями**, а отсюда и появилось название для функций R_i.

Следует отметить, что каждая из точек M_i имеет свою собственную функцию R_i, в то время как силовая функция — одна для всей системы.

Определив из уравнений (7.24′) относительные координаты x_i, y_i, z_i точек M_i, мы можем найти и барицентрические координаты всех точек системы.

Действительно, прибавляя к обеим частям формулы

$$m_0\xi_0' = -\sum_{j=1}^{n} m_j\xi_j'$$

величину $\xi_0'\sum_{j=1}^{n} m_j$, мы получим $\left(m = \sum_{i=0}^{n} m_i\right)$

$$m\xi_0' = -\sum_{j=1}^{n} m_j(\xi_j' - \xi_0') = -\sum_{j=1}^{n} m_j x_j,$$

откуда с помощью формул (7.23) найдем *)

$$\left.\begin{aligned}
&\xi_i' = x_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j x_j,\\
&\eta_i' = y_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j y_j,\\
&\zeta_i' = z_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j z_j\\
&(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).
\end{aligned}\right\} \qquad (7.26)$$

Заменяя теперь в равенствах (7.22′) и (7.22″), которые являются интегралами уравнений (7.22), барицентрические координаты их выражениями (7.26), мы получим соответствующие интегралы уравнений относительного движения (7.24) (или (7.24′)). Произведем эту замену только в первом из уравнений (7.22′), ибо два других получаются из первого циклической перестановкой букв. Отметим прежде всего, что из формул (7.26) мы имеем

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \xi_j' = \sum_{j=1}^{n} m_j x_j - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j x_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j = \frac{m_0}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j x_j,$$

а следовательно, также

$$\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{\xi}_j' = \frac{m_0}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{x}_j,$$

и аналогичные формулы для двух других координат.

С помощью этих формул и соотношений (7.26) мы перепишем первый из интегралов (7.22′) следующим образом:

$$\frac{m_0}{m^2}\left[\sum_{j=1}^{n} m_j y_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{z}_j - \sum_{j=1}^{n} m_j z_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{y}_j\right] +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} m_i \left\{\left[y_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j y_j\right]\left[\dot{z}_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{z}_j\right] -\right.$$
$$\left. - \left[z_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j z_j\right]\left[\dot{y}_i - \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n} m_j \dot{y}_j\right]\right\} = c_1',$$

---

*) Эти формулы пригодны также и для точки M_0, так как $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

откуда после упрощений получаем первый из интегралов системы уравнений относительного движения (7.24), а затем и два остальных циклической перестановкой букв, в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{m}\left[\sum_{j=1}^{n} m_j y_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{z}_j - \sum_{j=1}^{n} m_j z_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{y}_j\right] + \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i \dot{z}_i - z_i \dot{y}_i) = c'_1, \\
&-\frac{1}{m}\left[\sum_{j=1}^{n} m_j z_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{x}_j - \sum_{j=1}^{n} m_j x_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{z}_j\right] + \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{n} m_i (z_i \dot{x}_i - x_i \dot{z}_i) = c'_2, \\
&-\frac{1}{m}\left[\sum_{j=1}^{n} m_j x_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{y}_j - \sum_{j=1}^{n} m_j y_j \times \sum_{j=1}^{n} m_j \dot{x}_j\right] + \\
&\qquad\qquad + \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i \dot{y}_i - y_i \dot{x}_i) = c'_3.
\end{aligned}\right\} \qquad (7.27)$$

Преобразуя таким же образом равенство (7.22″), мы получим четвертый интеграл системы уравнений относительного движения, аналогичный интегралу живых сил в абсолютном движении.

Этот последний интеграл напишется в виде

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2m}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{x}_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{y}_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{z}_i\right)^2\right] + \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2 + \dot{z}_i^2) = U + h'. \qquad (7.27')
\end{aligned}$$

Хотя равенства (7.27) и (7.27′) не имеют уже столь же ясного механического или геометрического значения, как в абсолютном движении, но и для них сохраняется та же терминология. Поэтому равенства (7.27) называются тоже *интегралами площадей*, а равенство (7.27′) — *интегралом живых сил* относительного движения.

Произвольные постоянные c'_1, c'_2, c'_3 и h' могут быть определены через начальные значения

$$x_i^0,\ y_i^0,\ z_i^0,\ \dot{x}_i^0,\ \dot{y}_i^0,\ \dot{z}_i^0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

относительных координат и их первых производных (составляющих относительных скоростей). Для солнечной системы, например, эти начальные значения могут быть выведены из результатов наблюдений планет, а значит, могут быть фактически определены.

Полученные интегралы позволяют понизить порядок системы уравнений (7.24) на четыре единицы, но это понижение фактически не производится, так как требует длинных и громоздких выкладок, в результате которых получаются слишком сложные и громоздкие уравнения, с которыми неудобно иметь дело на практике (т. е. для фактического вычисления эфемерид планет).

Поэтому интегралы (7.27) и (7.27′) не играют большой роли при решении задачи и могут быть использованы только для некоторых теоретических выводов или как контрольные формулы для некоторой (далеко не полной!) проверки правильности произведенных вычислений (например, на быстродействующих вычислительных машинах).

3. Уравнения (7.24) могут быть получены, конечно, также преобразованием уравнений абсолютного движения (7.1), так как из формул (7.20) и (7.23) следует также, что

$$x_i = \xi_i - \xi_0, \quad y_i = \eta_i - \eta_0, \quad z_i = \zeta_i - \zeta_0.$$

Поэтому и интегралы (7.27) и (7.27′) можно вывести также и преобразованием интегралов абсолютного движения.

Уравнения (7.24) можно вывести также и непосредственно. Действительно, рассмотрим систему материальных точек M_0, M_1, ..., M_n, взаимно притягивающихся по закону Ньютона, и условимся рассматривать движения точек M_1, M_2, ..., M_n относительно точки M_0.

Возьмем декартову систему прямоугольных координат M_0xyz с началом в точке M_0 и с неизменными направлениями осей.

Координаты точки M_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ опять обозначим через x_i, y_i, z_i. Тогда проекции относительной скорости и относительного ускорения в движении точки M_i будут соответственно $\dot{x}_i$, $\dot{y}_i$, $\dot{z}_i$ и $\ddot{x}_i$, $\ddot{y}_i$, $\ddot{z}_i$.

Чтобы получить дифференциальные уравнения движения системы материальных точек, нужно выразить составляющие ускорения через координаты движущихся точек, применяя второй закон динамики Ньютона, согласно которому составляющая ускорения точки по любой координатной оси равна сумме составляющих по той же оси всех сил, действующих на эту точку, поделенной на ее массу. Но это правило справедливо только для неподвижной системы координат и поэтому в нашем случае, где система координат движется вместе с точкой M_0, непосредственно неприменимо.

Чтобы иметь возможность применить второй закон Ньютона в этом случае, нужно предварительно «остановить» точку M_0, для чего необходимо сообщить этой точке ускорения, равные по величине и противоположные по направлениям тем ускорениям, которые ей сообщают притяжения точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

Но тогда мы должны и каждой из точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ сообщить такие же ускорения, вследствие чего относительные движения точек M_i могут рассматриваться как абсолютные.

Подсчитаем теперь все ускорения, приложенные к точке M_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ в проекции на ось $\overrightarrow{M_0x}$.

Прежде всего, точка M_i находится под действием притяжения точки M_0, что дает следующую составляющую полного ускорения $\ddot{x}_i$ этой точки:

$$-fm_0\frac{x_i}{r_i^3}.$$

Далее, как сказано выше, мы должны приложить к точке M_i составляющие ускорений

$$-fm_1\frac{x_1}{r_1^3},\quad -fm_2\frac{x_2}{r_2^3},\quad \ldots,\quad -fm_n\frac{x_n}{r_n^3},$$

представляющие собой величины, обратные по знаку составляющим ускорений, сообщаемых действиями притяжений точек M_1, $M_2, \ldots, M_n$ движению точки M_0.

Наконец, точка M_i находится под действием притяжений всех остальных точек M_j $(j=1, 2, \ldots, n, j\neq i)$, которые дают следующие составляющие полного ускорения точки M_i:

$$-fm_1\frac{x_i-x_1}{\Delta_{i1}^3},\quad -fm_2\frac{x_i-x_2}{\Delta_{i2}^3},\quad \ldots,\quad -fm_n\frac{x_i-x_n}{\Delta_{in}^3}.$$

Складывая все выписанные составляющие, мы получим проекцию на ось абсцисс полного ускорения в движении точки M_i, что дает следующее равенство:

$$\ddot{x}_i=-fm_0\frac{x_i}{r_i^3}-fm_1\frac{x_1}{r_1^3}-\ldots-fm_n\frac{x_n}{r_n^3}+$$
$$+fm_1\frac{x_1-x_i}{\Delta_{i1}^3}+fm_2\frac{x_2-x_i}{\Delta_{i2}^3}+\ldots+fm_n\frac{x_n-x_i}{\Delta_{in}^3},$$

которое можно, очевидно, переписать в виде

$$\ddot{x}_i=-f(m_0+m_i)\frac{x_i}{r_i^3}+\sum_{j=1}^{n} m_j\left(\frac{x_j-x_i}{\Delta_{ij}^3}-\frac{x_j}{r_j^3}\right),$$

а это и есть первое из уравнений (7.24); остальные два уравнения получаются таким же образом.

Но, получив уравнения (7.24) непосредственно, не опираясь на уравнения абсолютного движения, мы не можем уже получить интегралы этих уравнений преобразованием известных интегралов уравнений абсолютного движения, а должны вывести эти интегралы из самих уравнений (7.24).

Это нетрудно сделать, но потребует выполнения довольно громоздких выкладок, которые для сокращения мы производить не будем, предоставляя читателю проделать эти выкладки в качестве полезного упражнения.

§ 4. Уравнения движения в координатах Якоби

1. Уравнения относительного движения системы взаимно притягивающихся материальных точек в виде (7.24) обладают тем существенным недостатком (уже отмеченным выше), что их правые части являются частными производными от различных функций, так как каждая из точек M_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ имеет свою собственную возмущающую функцию R_i.

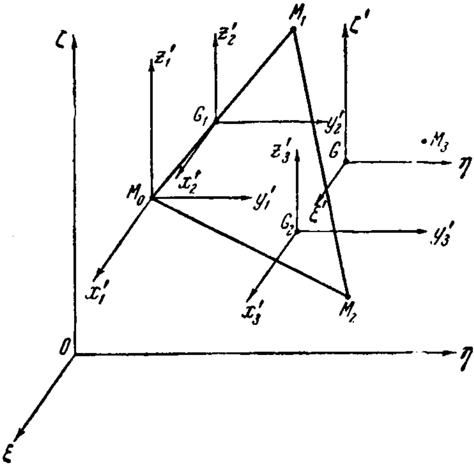


Рис. 42.

Этот недостаток, весьма существенный с теоретической точки зрения, можно устранить, выбирая относительные координаты каким-либо другим способом.

Рассмотрим преобразование переменных, называемое **преобразованием Якоби**.

Обозначим через G_i центр масс подсистемы материальных точек $M_0, M_1, \ldots, M_i$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$, так что G_0 совпадает с M_0, а G_n есть центр масс всей системы, обозначенный ранее через G.

Введем в рассмотрение n систем прямоугольных координат, начало каждой из которых помещается в одной из точек G_j $(j=0, 1, \ldots, n-1)$, а одноименные оси которых все параллельны друг другу и параллельны соответствующим осям барицентрической системы $G\xi'\eta'\zeta'$, а также, конечно, осям абсолютной системы $O\xi\eta\zeta$ (см. рис. 42 для случая $n=3$).

Пусть x_i', y_i', z_i' суть координаты точки M_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ в системе координат $G_{i-1}x_i'y_i'z_i'$ с началом в точке G_{i-1}.

Покажем, что относительные координаты x'_i, y'_i, z'_i, называемые также координатами Якоби, определяются уравнениями, имеющими симметричный вид и содержащими частные производные от одной и той же функции, а именно, от силовой функции U материальной системы.

Для вывода дифференциальных уравнений в координатах Якоби воспользуемся уравнениями Лагранжа (см. § 1 гл. VI), принимая за обобщенные координаты q_j координаты Якоби x'_i, y'_i, z'_i. Тогда искомые дифференциальные уравнения можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}'_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial x'_i}=\frac{\partial U}{\partial x'_i}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}'_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial y'_i}=\frac{\partial U}{\partial y'_i}, \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}'_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial z'_i}=\frac{\partial U}{\partial z'_i}, \end{aligned}\right\} \qquad (7.28)$$

и нам остается только выразить живую силу системы T и силовую функцию U через новые координаты.

Так как выражения для T и для U в функции барицентрических или абсолютных координат нам известны, то наша задача приводится теперь к нахождению формул, связывающих координаты Якоби с барицентрическими или с абсолютными координатами.

Более удобно найти соотношения между координатами Якоби и барицентрическими координатами, а поэтому выведем формулы преобразования, связывающие величины x'_i, y'_i, z'_i с величинами ξ'_i, η'_i, ζ'_i.

Обозначим барицентрические координаты точки G_j через $\overline{\xi}'_j$, $\overline{\eta}'_j$, $\overline{\zeta}'_j$. Тогда формулы параллельного преобразования координат дают соотношения

$$\xi'_i=x'_i+\overline{\xi}'_{i-1},\quad \eta'_i=y'_i+\overline{\eta}'_{i-1},\quad \zeta'_i=z'_i+\overline{\zeta}'_{i-1} \qquad (7.29)$$

и

$$x'_i=\xi'_i-\overline{\xi}'_{i-1},\quad y'_i=\eta'_i-\overline{\eta}'_{i-1},\quad z'_i=\zeta'_i-\overline{\zeta}'_{i-1}. \qquad (7.29')$$

Обозначим далее через σ_i массу подсистемы материальных точек M_0, M_1, ..., M_i, т. е. положим

$$\sigma_i=m_0+m_1+\ldots+m_{i-1}+m_i=\sum_{j=0}^{i} m_j,$$

причем очевидно, что $\sigma_0=m_0$ и $\sigma_n=m$.

Тогда по свойствам центра масс системы материальных точек имеем *)

$$\sigma_i \bar{\xi}'_i = \sum_{j=0}^{i} m_j \xi'_j \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{7.30}$$

Теперь формулы (7.29′) дают

$$\sigma_{i-1} x'_i = \sigma_{i-1} \xi'_i - \sigma_{i-1} \bar{\xi}'_{i-1} = \xi'_i \sum_{j=0}^{i-1} m_j - \sum_{j=0}^{i-1} m_j \xi'_j,$$

откуда находим

$$x'_i = \frac{1}{\sigma_{i-1}} \sum_{j=0}^{i-1} m_j (\xi'_i - \xi'_j). \tag{7.31}$$

Таким образом, формулы (7.31) выражают новые координаты точек (координаты Якоби) через старые (барицентрические) **).

Выразим теперь, наоборот, барицентрические координаты через координаты Якоби.

Для этого заметим прежде всего, что из формул (7.30) вытекает следующее соотношение ***):

$$m_k \xi'_k = \sigma_k \bar{\xi}'_k - \sigma_{k-1} \bar{\xi}'_{k-1}. \tag{7.32}$$

Заменяя в (7.32) m_k на $\sigma_k - \sigma_{k-1}$, а координаты точек G_k и G_{k-1} их выражениями из (7.29), мы получим

$$(\sigma_k - \sigma_{k-1}) \xi'_k = \sigma_k (\xi'_{k+1} - x'_{k+1}) - \sigma_{k-1} (\xi'_k - x'_k),$$

откуда найдем

$$\xi'_{k+1} - \xi'_k = x'_{k+1} - \frac{\sigma_{k-1}}{\sigma_k} x'_k. \tag{7.32′}$$

Придавая здесь индексу k значения $0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ i-1$ и складывая получающиеся равенства, будем иметь ****)

$$\xi'_i - \xi'_0 = x_i + \sum_{k=1}^{i-1} \frac{m_k x'_k}{\sigma_k}. \tag{7.32″}$$

Умножая равенства (7.32″) соответственно на m_i и суммируя по i от 1 до n, мы получим (используя также формулы (7.21″))

$$\xi'_0 = -\sum_{k=1}^{n} \frac{m_k x'_k}{\sigma_k}, \tag{7.32‴}$$

---

*) Очевидно, достаточно писать все формулы и производить все выкладки только для одной координаты, например, для абсциссы.

**) В частности, формулы (7.31) дают $x'_1 = \xi'_1 - \xi'_0$, что очевидно.

***) Здесь просто сумма разбита на две части и индекс i заменен на k.

****) Так как $\xi'_i - \xi'_0 = x_i$, то формулы (7.32″) связывают также координаты, отнесенные к системе $M_0 xyz$ с координатами Якоби.

что дает ξ'_0, после чего формулы (7.32″) дадут и все остальные барицентрические координаты

$$\xi'_i = x'_i - \sum_{k=i}^{n} \frac{m_k x'_k}{\sigma_k}. \tag{7.33}$$

Эти формулы показывают, что якобиевские координаты точек M_i ($i=1, 2, \ldots, n$) полностью определяют положение всей системы $n+1$ точек в барицентрической, а значит, и в абсолютной системе координат.

Теперь из формул (7.32″) выводим также, считая $j>i$,

$$\xi'_j - \xi'_i = x'_j - x'_i + \sum_{k=i}^{j-1} \frac{m_k x'_k}{\sigma_k},$$

что позволяет выразить через новые координаты все взаимные расстояния между точками, а значит, также и силовую функцию U.

2. Найдем теперь выражение для живой силы T. Заменим для этого в формуле (7.32), написанной для $k=i$, величину ξ'_i ее выражением (7.29), что дает

$$m_i x'_i = \sigma_i \bar{\xi}'_i - \sigma_i \bar{\xi}'_{i-1}.$$

Дифференцируя это соотношение и то, из которого оно получено, мы имеем два следующих равенства:

$$m_i \dot{\xi}'_i = \sigma_i \dot{\bar{\xi}}'_i - \sigma_{i-1} \dot{\bar{\xi}}'_{i-1},$$

$$m_i \dot{x}'_i = \sigma_i \dot{\bar{\xi}}'_i - \sigma_i \dot{\bar{\xi}}'_{i-1}.$$

Возводя каждое из этих равенств в квадрат и исключая из полученных равенств произведение $\dot{\bar{\xi}}'_i \dot{\bar{\xi}}'_{i-1}$, найдем следующее соотношение:

$$m_i \dot{\xi}'^2_i - \frac{m_i \sigma_{i-1}}{\sigma_i} \dot{x}'^2_i = \sigma_i \dot{\bar{\xi}}'^2_i - \sigma_{i-1} \dot{\bar{\xi}}'^2_{i-1},$$

из которого, суммируя по i от 1 до n, получим

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\xi}'^2_i - \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \sigma_{i-1}}{\sigma_i} \dot{x}'^2_i = \sigma_n \dot{\bar{\xi}}'^2_n - \sigma_0 \dot{\bar{\xi}}'^2_0.$$

Но $\bar{\xi}'_0 = \xi'_0$ и $\bar{\xi}'_n = 0$, так что имеем окончательно

$$\sum_{i=0}^{n} m_i \dot{\xi}'^2_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \sigma_{i-1}}{\sigma_i} \dot{x}'^2_i.$$

Написав подобные же равенства для двух других координат, мы выведем, что

$$T' = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\dot{\xi}_i'^2 + \dot{\eta}_i'^2 + \dot{\zeta}_i'^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{m_i\sigma_{i-1}}{\sigma_i}\left(\dot{x}_i'^2 + \dot{y}_i'^2 + \dot{z}_i'^2\right).$$

Величина T' отличается от живой силы T только на постоянную. Действительно, мы можем написать

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i(\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i\left[(\dot{\xi}_i' + \dot{\bar{\xi}})^2 + (\dot{\eta}_i' + \dot{\bar{\eta}})^2 + (\dot{\zeta}_i' + \dot{\bar{\zeta}})^2\right] =$$

$$= T' + \dot{\bar{\xi}}\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\xi}_i' + \dot{\bar{\eta}}\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\eta}_i' + \dot{\bar{\zeta}}\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\zeta}_i' + \frac{m}{2}(\dot{\bar{\xi}}^2 + \dot{\bar{\eta}}^2 + \dot{\bar{\zeta}}^2),$$

откуда, используя свойства центра масс, найдем

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i'\left(\dot{x}_i'^2 + \dot{y}_i'^2 + \dot{z}_i'^2\right) + \frac{1}{2m}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2), \tag{7.34}$$

где положено

$$m_i' = \frac{m_i\sigma_{i-1}}{\sigma_i} = \frac{m_i(m_0 + m_1 + \ldots + m_{i-1})}{m_0 + m_1 + \ldots + m_{i-1} + m_i} \tag{7.34'}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Постоянные m_i', зависящие только от масс материальных точек, называются иногда «приведенными массами». Легко видеть, что если масса m_0 значительно превосходит все остальные массы (как это имеет место в солнечной системе, если точка M_0 обозначает Солнце), то истинные массы m_i и приведенные массы m_i' суть величины одного и того же порядка.

Теперь по формулам (7.28) получим окончательно уравнения движения нашей материальной системы в координатах Якоби в следующей симметричной форме:

$$\left.\begin{aligned} m_i'\ddot{x}_i' &= \frac{\partial U}{\partial x_i'},\\ m_i'\ddot{y}_i' &= \frac{\partial U}{\partial y_i'},\\ m_i'\ddot{z}_i' &= \frac{\partial U}{\partial z_i'}\end{aligned}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{7.35}$$

где силовая функция определяется обычной формулой

$$U=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \tag{7.36}$$

но взаимные расстояния Δ_{ij} выражаются через координаты Якоби более сложно, чем через абсолютные координаты. Действительно, мы имеем

$$\Delta_{ij}^2=\left(x'_j-x'_i+\sum_{k=i}^{j-1}\frac{m_k x'_k}{\sigma_k}\right)^2+\\+\left(y'_j-y'_i+\sum_{k=i}^{j-1}\frac{m_k y'_k}{\sigma_k}\right)^2+\left(z'_j-z'_i+\sum_{k=i}^{j-1}\frac{m_k z'_k}{\sigma_k}\right)^2.$$

Уравнения (7.35) образуют систему $3n$ дифференциальных уравнений второго порядка, так что общий порядок системы есть $6n$, т. е. на шесть единиц ниже порядка системы уравнений абсолютного движения.

Уравнения (7.35) можно, конечно, вывести также прямым преобразованием при помощи формул (7.32″) и (7.33) из уравнений (7.18″). Поэтому и интегралы системы (7.35) можно получить из интегралов системы (7.18″) при помощи такого же преобразования.

При этом легко проверить, что соотношения (7.21) и (7.21′) удовлетворяются тождественно, а интегралы площадей и живой силы напишутся совершенно в такой же форме, как и соответствующие интегралы системы (7.18″), или как интегралы уравнений абсолютного движения *).

Таким образом, система (7.35) имеет следующие четыре интеграла:

$$\left.\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} m'_i(y'_i\dot{z}'_i-z'_i\dot{y}'_i)&=c'_1,\\ \sum_{i=1}^{n} m'_i(z'_i\dot{x}'_i-x'_i\dot{z}'_i)&=c'_2,\\ \sum_{i=1}^{n} m'_i(x'_i\dot{y}'_i-y'_i\dot{x}'_i)&=c'_3,\end{aligned}\right\} \tag{7.37}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m'_i\left(\dot{x}'^2_i+\dot{y}'^2_i+\dot{z}'^2_i\right)=U+h', \tag{7.37′}$$

---

*) Соотношения (7.21) и (7.21′) нельзя называть, как это иногда делают, интегралами уравнений движения. Действительно, эти равенства не содержат никаких произвольных постоянных, а поэтому их можно назвать только разве инвариантными соотношениями, позволяющими исключить из уравнений движения какие-либо три координаты какой-либо из точек системы.

произвольные постоянные которых могут быть определены через начальные значения

$$x_i'^0,\ y_i'^0,\ z_i'^0,\ \dot{x}_i'^0,\ \dot{y}_i'^0,\ \dot{z}_i'^0$$

координат Якоби и их первых производных.

Уравнения (7.35) можно также рассматривать как дифференциальные уравнения абсолютного движения системы n «фиктивных» материальных точек M_i', обладающих массами m_i', в поле сил, определяемом силовой функцией U, зависящей только от координат x_i', y_i', z_i' этих точек.

Тогда интегралы площадей и интеграл живых сил можно написать сразу, основываясь на свойствах силовой функции, зависящей только от взаимных расстояний между точками и остающейся поэтому инвариантной при преобразовании координат.

Заметим еще, что интеграл живых сил следует также из уравнений (7.28) в силу свойств уравнений Лагранжа.

§ 5. Другие виды дифференциальных уравнений движения задачи многих тел

1. Прямоугольные декартовские координаты (абсолютные или относительные) в ряде случаев оказываются по тем или иным причинам неудобными для применения в некоторых конкретных задачах небесной механики и тогда их заменяют какими-либо другими, более подходящими переменными.

Рассмотрим сначала простейшую, не прямолинейную систему, а именно, систему цилиндрических координат.

Если желательно преобразовать к этой системе координат абсолютные уравнения движения (7.1), или (7.1′), то нужно положить:

$$\xi_i = \rho_i \cos\lambda_i, \quad \eta_i = \rho_i \sin\lambda_i, \quad \zeta_i = \zeta_i, \tag{7.38}$$

где ρ_i есть проекция радиуса-вектора r_i точки M_i на плоскость $O\xi\eta$, а λ_i — угол, образуемый этой проекцией с положительным направлением оси абсцисс (долгота) *).

Тогда (см. § 3 гл. VI) уравнения движения напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\rho}_i - \rho_i\dot{\lambda}_i^2 &= \frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial \rho_i}, \\ \frac{d}{dt}(\rho_i^2\dot{\lambda}_i) &= \frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial \lambda_i}, \\ \ddot{\zeta}_i &= \frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial \zeta_i}. \end{aligned}\right\} \tag{7.38′}$$

---

*) В системе координат (7.38) за основную плоскость взята плоскость $O\xi\eta$ и за основное направление — ось абсцисс. Ясно, что такой выбор не является обязательным и за основную плоскость можно взять любую координатную плоскость.

Силовая функция U, входящая в эти уравнения, определяется той же формулой (7.4′), но взаимные расстояния Δ_{ij} должны быть выражены через новые переменные (7.38). Таким образом,

$$\Delta_{ij}^2=\rho_i^2+\rho_j^2-2\rho_i\rho_j\cos(\lambda_i-\lambda_j)+(\zeta_i-\zeta_j)^2,$$

а правые части уравнений (7.38′), т. е. выражения для частных производных от силовой функции по цилиндрическим координатам, найдутся по формулам, приведенным в § 4 гл. I.

Уравнения (7.38′) имеют, разумеется, те же классические интегралы, как и уравнения (7.1), но эти интегралы нужно преобразовать к новым переменным при помощи формул (7.38).

Например, интеграл живой силы напишется следующим образом:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i(\dot\rho_i^2+\rho_i^2\dot\lambda_i^2+\dot\zeta_i^2)=U+h.$$

Выражения для других интегралов не представляют большого интереса и мы их выписывать не будем. Можно преобразовать к цилиндрическим координатам и уравнения в барицентрических координатах (7.22).

Полагая

$$\xi_i'=\rho_i'\cos\lambda_i',\quad \eta_i'=\rho_i'\sin\lambda_i',\quad \zeta_i'=\zeta_i',$$

мы будем иметь вместо уравнений (7.22) следующие:

$$\ddot\rho_i'^2-\rho_i'\dot\lambda_i'^2=\mathrm{P}_i',\quad \frac{d}{dt}(\rho_i'^2\dot\lambda_i')=\Lambda_i',\quad \ddot\zeta_i'=\mathrm{Z}_i',$$

где, как легко проверить,

$$\mathrm{P}_i'=-f\frac{(m_0+m_i)\rho_i'+\sum\limits_{j=1}^{n}{}' m_j\rho_j'\cos(\lambda_i'-\lambda_j')}{\Delta_{i0}^3}+$$

$$+f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\frac{\rho_j'\cos(\lambda_i'-\lambda_j')-\rho_i'}{\Delta_{ij}^3},$$

$$\Lambda_i'=\frac{f}{\Delta_{i0}^3}\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\rho_j'\sin(\lambda_i'-\lambda_j')-f\sum_{j=1}^{n}{}'\frac{m_j\rho_j'\sin(\lambda_i'-\lambda_j')}{\Delta_{ij}^3},$$

$$\mathrm{Z}_i'=-f\frac{(m_0+m_i)\zeta_i'+\sum\limits_{j=1}^{n}{}' m_j\zeta_j'}{\Delta_{i0}^3}+f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\frac{\zeta_i'-\zeta_j'}{\Delta_{ij}^3},$$

причем взаимные расстояния определяются формулами

$$\Delta_{i0}^2 = \left[\left(1+\frac{m_i}{m_0}\right)\rho'_i\cos\lambda'_i + {\sum_{j=1}^{n}}' \frac{m_j}{m_0}\rho'_j\cos\lambda'_j\right]^2 + \left[\left(1+\frac{m_i}{m_0}\right)\rho'_i\sin\lambda'_i + {\sum_{j=1}^{n}}' \frac{m_j}{m_0}\rho'_j\sin\lambda'_j\right]^2 + \left[\left(1+\frac{m_i}{m_0}\right)\zeta'_i + {\sum_{j=1}^{n}}' m_j\zeta'_j\right]^2$$

и

$$\Delta_{ij}^2 = \rho_i'^2 + \rho_j'^2 - 2\rho'_i\rho'_j\cos(\lambda'_i - \lambda'_j) + (\zeta'_i - \zeta'_j)^2$$

$$(i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ j \neq i).$$

Четыре первых интеграла этих уравнений получатся из интегралов уравнений (7.22) простым преобразованием к новым переменным. Эти довольно громоздкие выражения мы приводить здесь не будем.

Рассмотрим теперь преобразование уравнений относительного движения (7.24) или (7.24′) к цилиндрическим кооординатам.

Положим предварительно

$$\Omega_i = \frac{f(m_0+m_i)}{r_i} + R_i \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Тогда уравнения (7.24′) напишутся в виде

$$\ddot{x}_i = \frac{\partial\Omega_i}{\partial x_i},\quad \ddot{y}_i = \frac{\partial\Omega_i}{\partial y_i},\quad \ddot{z}_i = \frac{\partial\Omega_i}{\partial z_i}. \tag{7.39}$$

Переходя теперь к цилиндрическим координатам по формулам *)

$$x_i = \rho_i\cos\lambda_i,\quad y_i = \rho_i\sin\lambda_i,\quad z_i = z_i, \tag{7.39′}$$

мы получим следующие уравнения:

$$\ddot{\rho}_i - \rho_i\dot{\lambda}_i^2 = \frac{\partial\Omega_i}{\partial\rho_i},\quad \frac{d}{dt}(\rho_i^2\dot{\lambda}_i) = \frac{\partial\Omega_i}{\partial\lambda_i},\quad \ddot{z}_i = \frac{\partial\Omega_i}{\partial z_i}, \tag{7.39″}$$

где функции Ω_i определяются формулами

$$\Omega_i = \frac{f(m_0+m_i)}{\sqrt{\rho_i^2+z_i^2}} + f{\sum_{j=1}^{n}}' m_j\left[\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{\rho_i\rho_j\cos(\lambda_i-\lambda_j)+z_iz_j}{(\rho_j^2+z_j^2)^{3/2}}\right],$$

---

*) Здесь ρ_i обозначает проекцию радиуса-вектора $r_i = \overline{M_0M_i}$ точки M_0 на плоскость xy, а λ_i — угол, образуемый этой проекцией с положительным направлением оси $\overrightarrow{M_0x}$,

причем

$$\Delta_{ij}^2=\rho_i^2+\rho_j^2-2\rho_i\rho_j\cos(\lambda_i-\lambda_j)+(z_i-z_j)^2.$$

Составляя частные производные от Ω_i, мы найдем

$$\frac{\partial\Omega_i}{\partial\rho_i}=-\frac{f(m_0+m_i)\rho_i}{(\rho_i^2+z_i^2)^{3/2}}+$$
$$+f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\left[\frac{\rho_j\cos(\lambda_i-\lambda_j)-\rho_i}{\Delta_{ij}^3}-\frac{\rho_j\cos(\lambda_i-\lambda_j)}{(\rho_j^2+z_j^2)^{3/2}}\right],$$

$$\frac{\partial\Omega_i}{\partial\lambda_i}=-f\rho_i\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\rho_j\left[\frac{1}{\Delta_{ij}^3}-\frac{1}{(\rho_j^2+z_j^2)^{3/2}}\right]\sin(\lambda_i-\lambda_j),$$

$$\frac{\partial\Omega_i}{\partial z_i}=-\frac{f(m_0+m_i)z_i}{(\rho_i^2+z_i^2)^{3/2}}+f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\left[\frac{z_j-z_i}{\Delta_{ij}^3}-\frac{z_j}{(\rho_i^2+z_i^2)^{3/2}}\right].$$

Первые интегралы уравнений (7.39″), получаемые преобразованием интегралов (7.27) и (7.27′) при помощи формул (7.39′), мы также приводить здесь не будем.

Дифференциальные уравнения в координатах Якоби, конечно, тоже можно преобразовать к цилиндрическим координатам, вводя для каждой из точек M_i свою систему цилиндрических координат, связанную с собственной прямоугольной системой $G_{i-1}x_i'y_i'z_i'$.

Так как уравнения (7.35) имеют совершенно такой же вид, как и уравнения (7.1′), то и преобразованные к цилиндрическим координатам уравнения будут иметь такой же вид, как и уравнения (7.38′), только их правые части, написанные в раскрытом виде (т. е. после выполнения частных дифференцирований силовой функции U), будут значительно сложнее, чем правые части уравнений (7.38′), и мы их приводить не будем.

2. Рассмотрим теперь уравнения движения системы взаимно притягивающихся материальных точек в сферических координатах.

Преобразуем абсолютные координаты точек M_i при помощи формул

$$\xi_i=r_i\cos\varphi_i\cos\lambda_i,\quad \eta_i=r_i\cos\varphi_i\sin\lambda_i,\quad \zeta_i=r_i\sin\varphi_i \tag{7.40}$$
$$(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где $r_i=\overline{OM_i}$ есть радиус-вектор точки M_i; λ_i — так же как и в цилиндрической системе, — угол, образованный проекцией радиуса-вектора на плоскость $O\xi\eta$ с положительным направлением оси $O\xi$, и φ_i — угол, образованный радиусом-вектором с плоскостью $O\xi\eta$ (см. рис. 38).

Уравнения движения в полярных координатах напишутся по образцу уравнений (6.25′) § 3 гл. VI в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r}_i - r_i\dot{\varphi}_i^2 - r_i\dot{\lambda}_i^2\cos^2\varphi_i &= \frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial r_i}, \\ \frac{d}{dt}(r_i^2\dot{\varphi}_i) + r_i^2\dot{\lambda}_i^2\sin\varphi_i\cos\varphi_i &= \frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial \varphi_i}, \\ \frac{d}{dt}(r_i^2\dot{\lambda}_i^2\cos^2\varphi_i) &= \frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial \lambda_i} \\ (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n)&, \end{aligned}\right\} \qquad (7.40')$$

Силовая функция сохраняет свой вид (7.4), но взаимные расстояния определятся по формулам

$$\Delta_{ij}^2 = r_i^2 + r_j^2 - 2r_ir_j\cos\gamma_{ij},$$

где

$$\cos\gamma_{ij} = \sin\varphi_i\sin\varphi_j + \cos\varphi_i\cos\varphi_j\cos(\lambda_i - \lambda_j),$$

так что γ_{ij} есть угол, образованный ридусами-векторами точек M_i и M_j.

Составляя выражения частных производных от U по сферическим координатам, мы будем иметь (см. § 4 гл. I)

$$\frac{\partial U}{\partial r_i} = -fm_i\sum_{j=0}^{n}{}' m_j\frac{r_i - r_j\cos\gamma_{ij}}{\Delta_{ij}^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_i} = -fm_ir_i\cos\varphi_i\sum_{j=0}^{n}{}' m_jr_j\cos\varphi_j\frac{\sin(\lambda_i - \lambda_j)}{\Delta_{ij}^3},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_i} = fm_ir_i\sum_{j=0}^{n}{}' m_jr_j\frac{\cos\varphi_i\sin\varphi_j - \sin\varphi_i\cos\varphi_j\cos(\lambda_i - \lambda_j)}{\Delta_{ij}^3}.$$

Преобразуя теперь уравнения движения относительно точки M_0, написанные в виде (7.39), к сферическим координатам по формулам, подобным (7.40),

$$x_i = r_i\cos\varphi_i\cos\lambda_i,\quad y_i = r_i\cos\varphi_i\sin\lambda_i,\quad z_i = r_i\sin\varphi_i \qquad (7.41)$$
$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где r_i обозначают расстояния точек M_i от точки M_0, а λ_i и φ_i имеют значения, аналогичные предыдущим, мы получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r}_i - r_i\dot{\varphi}_i^2 - r_i\dot{\lambda}_i\cos^2\varphi_i &= \frac{\partial\Omega_i}{\partial r_i}, \\ \frac{d}{dt}(r_i^2\dot{\varphi}_i) + r_i^2\dot{\lambda}_i^2\sin\varphi_i\cos\varphi_i &= \frac{\partial\Omega_i}{\partial\varphi_i}, \\ \frac{d}{dt}(r_i^2\dot{\lambda}_i\cos^2\varphi_i) &= \frac{\partial\Omega_i}{\partial\lambda_i}, \end{aligned}\right\} \qquad (7.41')$$

где

$$\Omega_i = \frac{f(m_0+m_i)}{r_i} + f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\left(\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{r_i\cos\gamma_{ij}}{r_j^2}\right),$$

причем

$$r_i = \sqrt{x_i^2+y_i^2+z_i^2},$$

а взаимные расстояния выражаются такими же формулами, как и для уравнений абсолютного движения.

Правые части уравнений (7.41′) выразятся следующими формулами:

$$\frac{\partial\Omega_i}{\partial r_i} = -\frac{f(m_0+m_i)}{r_i^2} + f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\left(\frac{r_j\cos\gamma_{ij}-r_i}{\Delta_{ij}^3} - \frac{\cos\gamma_{ij}}{r_j^2}\right),$$

$$\frac{\partial\Omega_i}{\partial\lambda_i} = -fr_i\cos\varphi_i\sum_{j=1}^{n}{}' m_jr_j\cos\varphi_j\left(\frac{1}{\Delta_{ij}^3} - \frac{1}{r_j^3}\right)\sin(\lambda_i-\lambda_j),$$

$$\frac{\partial\Omega_i}{\partial\varphi_i} = fr_i\sum_{j=1}^{n}{}' m_jr_j\left(\frac{1}{\Delta_{ij}^3} - \frac{1}{r_j^3}\right)[\cos\varphi_i\sin\varphi_j - \sin\varphi_i\cos\varphi_j\cos(\lambda_i-\lambda_j)].$$

Аналогично можно преобразовать и уравнения движения в координатах Якоби, вводя (так же, как было указано выше) для каждой точки M_i собственную систему сферических координат, связанную с собственной прямоугольной системой $G_{i-1}x_i'y_i'z_i'$.

Уравнения движения будут иметь такой же вид, как и уравнения (7.40′), однако, так как силовая функция зависит от координат Якоби гораздо более сложным образом, чем от обыкновенных прямоугольных координат, то и ее частные производные по полярным координатам также будут иметь довольно сложные выражения, и мы их приводить не будем.

Уравнения движения относительно точки M_0 в цилиндрических координатах (7.39′) или в сферических координатах (7.41′) особенно удобны для исследования движений планет солнечной системы.

Действительно, все большие планеты движутся почти в одной плоскости по орбитам, очень близким к круговым. Поэтому, принимая упомянутую плоскость *) за основную координатную плоскость, мы добьемся того, что радиусы-векторы планет (т. е. их гелиоцентрические расстояния), так же как и их проекции на

---

*) Как было уже отмечено выше, все большие планеты движутся почти в неизменяемой плоскости солнечной системы, которая проходит почти через центр Солнца, так как центр масс всей солнечной системы очень близок к центру Солнца.

основную плоскость (длительное время, по крайней мере), будут мало отличаться от некоторых постоянных величин (радиусов приближенных круговых орбит!), а аппликаты z_i и широты φ_i будут, вообще, весьма малы.

Это обстоятельство значительно упрощает приближенное интегрирование уравнений движения больших планет.

3. Рассмотрим еще одно специальное преобразование уравнений движения, использованное вначале Клеро в одной частной задаче (в теории движения Луны), а затем Лапласом в более общем случае.

Будем исходить из уравнений движения системы материальных точек, находящихся под действием заданных сил, в цилиндрических координатах

$$\ddot{\rho}_i - \rho_i\dot{\lambda}_i^2 = \mathrm{P}_i, \quad \frac{d}{dt}(\rho_i^2\dot{\lambda}_i) = \Lambda_i, \quad \ddot{z}_i = \mathrm{Z}_i \qquad (7.42)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n),$$

где P_i, Λ_i, Z_i суть заданные функции величин ρ_1, λ_1, z_1, ..., ρ_n, λ_n, z_n и их первых производных по времени, но не зависят явно от времени t. Тогда, как известно, исключая время из уравнений движения и принимая за независимую переменную любую из координат, мы можем понизить порядок системы (7.42) на одну единицу. Наиболее удобно взять за новую независимую переменную одну из долгот λ_1, λ_2, ..., λ_n, например, λ_k (где k — любое из ряда чисел 1, 2, ..., n).

Преобразуем уравнения (7.42) введением новой переменной, полагая для упрощения письма $\lambda_k = \lambda$, и введем, кроме того, вместо зависимых переменных ρ_i и z_i новые зависимые переменные, u_i и s_i, посредством формул

$$u_i = \frac{1}{\rho_i}, \quad s_i = \frac{z_i}{\rho_i}, \qquad (7.42')$$

так что u_i есть обратное значение проекции радиуса-вектора ρ_i точки M_i на плоскость $z=0$, а s_i есть тангенс широты этой точки.

Положим теперь

$$\rho_i^2\dot{\lambda}_i = \Gamma_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \qquad (7.43)$$

Тогда старая и новая независимые переменные будут связаны следующим соотношением:

$$\frac{d\lambda}{dt} = u_k^2\Gamma_k. \qquad (7.43')$$

Производная по времени от какой-либо функции Φ выразится через производную той же функции по λ следующим образом:

$$\dot{\Phi} = \frac{d\Phi}{dt} = u_k^2\Gamma_k\frac{d\Phi}{d\lambda}. \qquad (7.44)$$

Отсюда, в частности, имеем

$$\left.\begin{aligned}\dot{\rho}_i &= u_k^2\Gamma_k\frac{d\rho_i}{d\lambda}, & \dot{z}_i &= u_k^2\Gamma_k\frac{dz_i}{d\lambda},\\ \dot{\lambda}_i &= u_k^2\Gamma_k\frac{d\lambda_i}{d\lambda}, & \dot{\Gamma}_i &= u_k^2\Gamma_k\frac{d\Gamma_i}{d\lambda}.\end{aligned}\right\} \tag{7.44'}$$

Далее, из формулы (7.44) выводим

$$\ddot{\Phi} = \frac{d^2\Phi}{dt^2} = u_k^2\Gamma_k\frac{d}{d\lambda}\left(u_k^2\Gamma_k\frac{d\Phi}{d\lambda}\right), \tag{7.44''}$$

откуда получаем

$$\ddot{\rho}_i = u_k^2\Gamma_k\frac{d}{d\lambda}\left(u_k^2\Gamma_k\frac{d\rho_i}{d\lambda}\right) = -u_k^2\Gamma_k\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{u_k^2\Gamma_k}{u_i^2}\frac{du_i}{d\lambda}\right),$$

$$\ddot{z}_i = u_k^2\Gamma_k\frac{d}{d\lambda}\left(u_k^2\Gamma_k\frac{dz_i}{d\lambda}\right) = u_k^2\Gamma_k\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{u_k^2\Gamma_k}{u_i^2}\left(u_i\frac{ds_i}{d\lambda} - s_i\frac{du_i}{d\lambda}\right)\right].$$

Теперь уравнения (7.42) примут следующий вид:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{u_k^2\Gamma_k}{u_i^2}\frac{du_i}{d\lambda}\right) + \frac{u_k^2\Gamma_k}{u_i}\left(\frac{d\lambda_i}{d\lambda}\right)^2 = -\frac{P_i}{u_k^2\Gamma_k},$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left[\frac{u_k^2\Gamma_k}{u_i^2}\left(u_i\frac{ds_i}{d\lambda} - s_i\frac{du_i}{d\lambda}\right)\right] = \frac{Z_i}{u_k^2\Gamma_k},$$

$$\frac{d\Gamma_i}{d\lambda} = \frac{\Lambda_i}{u_k^2\Gamma_k},$$

причем в выражениях для P_i, Z_i, Λ_i величины ρ_i, z_i, λ_i, $\dot{\rho}_i$, $\dot{z}_i$, $\dot{\lambda}_i$ должны быть заменены их выражениями в функции новых переменных по формулам (7.43) и (7.44').

Чтобы привести написанные уравнения к окончательному виду, исключим из них производную от Γ_k по λ при помощи формулы

$$\frac{d\Gamma_k}{d\lambda} = \frac{\Lambda_k}{u_k^2\Gamma_k}, \tag{7.45}$$

затем из второго уравнения исключим при помощи первого вторую производную от u_i по λ и, наконец, заметим, что в силу (7.43) и (7.43') имеем для $i \neq k$

$$\Gamma_i = \frac{u_k^2\Gamma_k}{u_i^2}\frac{d\lambda_i}{d\lambda}.$$

В результате указанных преобразований и соответствующих упрощений уравнения движения системы n материальных точек приведутся к следующему виду:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2u_i}{d\lambda^2}+\varkappa_i^2u_i=U_i,\\ &\frac{d^2s_i}{d\lambda^2}+\varkappa_i^2s_i=S_i,\\ &\frac{d^2\lambda_i}{d\lambda^2}=L_i \qquad (i\neq k), \end{aligned}\right\} \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{7.46}$$

где

$$\varkappa_i=\frac{d\lambda_i}{d\lambda},$$

$$U_i=-\frac{u_i^2}{u_k^4\Gamma_k^2}\left\{\mathrm{P}_i+u_k^2\left[\frac{\Lambda_k}{u_i^2}+\Gamma_k^2\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{u_k^2}{u_i^2}\right)\right]\frac{du_i}{d\lambda}\right\},$$

$$S_i=-\frac{u_i}{u_k^4\Gamma_k^2}\left\{\mathrm{P}_is_i-\mathrm{Z}_i+u_k^2\left[\frac{\Lambda_k}{u_i}+\Gamma_k^2\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{u_k^2}{u_i^2}\right)\right]\frac{ds_i}{d\lambda}\right\},$$

$$L_i=\frac{u_i^2}{u_k^4\Gamma_k^2}\left\{\Lambda_i-u_k^2\left[\frac{\Lambda_k}{u_i^2}+\Gamma_k^2\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{u_k^2}{u_i^2}\right)\right]\frac{d\lambda_i}{d\lambda}\right\} \qquad (i\neq k).$$

Входящая в уравнения (7.46) вспомогательная переменная Γ_k определяется уравнением (7.45), которое может быть присоединено к системе (7.46).

Проинтегрировав уравнения (7.46) и (7.45), мы получим величины u_i, s_i, λ_i и Γ_k в функции независимой переменной λ и $6n-1$ произвольных постоянных. После этого из уравнения (7.43′) простой квадратурой определим и время t, как функцию переменной λ, по формуле:

$$t-t_0=\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{d\lambda}{u_k^2\Gamma_k}, \tag{7.47}$$

где λ_0 можно рассматривать как последнюю произвольную постоянную.

Разрешая уравнение (7.47) относительно λ, мы определим эту величину как функцию времени, а затем без труда получим и все остальные переменные в зависимости от времени и $6n$ произвольных постоянных.

Заметим еще, что из уравнения (7.45) интегрированием мы найдем

$$\Gamma_k^2=\gamma^2+2\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{\Lambda_k\,d\lambda}{u_k^2}.$$

где γ^2 есть произвольная постоянная.

Подставляя это выражение в уравнения (7.46), мы исключим эту вспомогательную переменную, но превратим уравнения движения из дифференциальных в интегро-дифференциальные, что, впрочем, не очень усложнит процесс приближенного интегрирования этих уравнений *).

В заключение этого раздела рассмотрим случай, когда

$$\mathrm{P}_i = \frac{\partial\Omega_i}{\partial\rho_i},$$

$$\Lambda_i = \frac{\partial\Omega_i}{\partial\lambda_i},$$

$$\mathrm{Z}_i = \frac{\partial\Omega_i}{\partial z_i},$$

где функции Ω_i зависят только от координат ρ_i, z_i, λ_i точек M_i. Тогда величины P_i и Z_i легко выразить через производные от Ω_i по переменным u_i и s_i. Действительно, мы имеем

$$\mathrm{P}_i = \frac{\partial\Omega_i}{\partial\rho_i} = \frac{\partial\Omega_i}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial\rho_i} + \frac{\partial\Omega_i}{\partial s_i}\frac{\partial s_i}{\partial\rho_i} = -u_i^2\frac{\partial\Omega_i}{\partial u_i} - s_i u_i \frac{\partial\Omega_i}{\partial s_i},$$

$$\mathrm{Z}_i = \frac{\partial\Omega_i}{\partial z_i} = \frac{\partial\Omega_i}{\partial s_i}\frac{\partial s_i}{\partial z_i} = u_i \frac{\partial\Omega_i}{\partial s_i},$$

где

$$\Omega_i = \frac{f\,(m_0 + m_i)\,u_i}{\sqrt{1+s_i^2}} + f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j \left[\frac{1}{\Delta_{ij}} - \frac{u_j^2\,(s_i s_j + \cos\,(\lambda_i - \lambda_j))}{u_i\left(1+s_j^2\right)^{3/2}}\right], \tag{7.48}$$

а взаимные расстояния определятся формулой

$$\Delta_{ij} = \frac{1}{u_i u_j}\sqrt{u_i^2 + u_j^2 - 2u_i u_j \cos\left(\lambda_i - \lambda_j\right) + \left(s_i u_j - s_j u_i\right)^2}.$$

---

*) Полезно отметить, что уравнения движения, соответствующие $i=k$, имеют гораздо более простой вид, чем все остальные уравнения. Действительно, $\varkappa_k = 1$, и мы можем написать

$$\frac{d^2u_k}{d\lambda^2} + u_k = U_k, \qquad \frac{d^2s_k}{d\lambda^2} + s_k = S_k,$$

где, как легко видеть,

$$U_k = -\frac{1}{u_k^2\Gamma_k^2}\left(\mathrm{P}_k + \Lambda_k \frac{du_k}{d\lambda}\right),$$

$$S_k = -\frac{1}{u_k^3\Gamma_k^2}\left(\mathrm{P}_k s_k - Z_k + u_k\Lambda_k\frac{ds_k}{d\lambda}\right).$$

С помощью этих формул выражения для величин U_l, S_l, L_l приведутся к следующему виду:

$$U_l=\frac{u_l^2}{u_k^4\Gamma_k^2}\left\{u_l^2\frac{\partial\Omega_l}{\partial u_l}+s_lu_l\frac{\partial\Omega_l}{\partial s_l}-u_k^2\left[\frac{1}{u_l^2}\frac{\partial\Omega_k}{\partial\lambda}+\Gamma_k^2\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{u_k^2}{u_l^2}\right)\right]\frac{du_l}{d\lambda}\right\},$$

$$S_l=\frac{u_l}{u_k^4\Gamma_k^2}\left\{u_l^2s_l\frac{\partial\Omega_l}{\partial u_l}+u_l(1+s_l^2)\frac{\partial\Omega_l}{\partial s_l}-\right.$$
$$\left.-u_k^2\left[\frac{1}{u_l}\frac{\partial\Omega_k}{\partial\lambda}+\Gamma_k^2\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{u_k^2}{u_l^2}\right)\right]\frac{ds_l}{d\lambda}\right\},$$

$$L_l=\frac{u_l^2}{u_k^4\Gamma_k^2}\left\{\frac{\partial\Omega_l}{\partial\lambda_l}-u_k^2\left[\frac{1}{u_l^2}\frac{\partial\Omega_k}{\partial\lambda}+\Gamma_k^2\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{u_k^2}{u_l^2}\right)\right]\frac{d\lambda_l}{d\lambda}\right\}\qquad(i\neq k),$$

где *)

$$\Gamma_k^2=\gamma^2+2\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{1}{u_k^2}\frac{\partial\Omega_k}{\partial\lambda}\,d\lambda.$$

Чтобы получить развернутые выражения для величин P_i, Z_i, Λ_i, входящих в правые части уравнений (7.46), нужно вычислить частные производные от функций Ω_i, определяемых формулой (7.48), и произвести затем надлежащие подстановки.

Можно также воспользоваться выражениями для частных производных от функций Ω_i, приведенных в конце раздела первого.

---

*) Полагая $i=k$, мы получим, в частности, выражения для функций U_k и S_k, подставляя которые в уравнения, определяющие движение точки M_k, найдем

$$\frac{d^2u_k}{d\lambda^2}+u_k=\frac{1}{\Gamma_k^2}\left[\frac{\partial\Omega_k}{\partial u_k}+\frac{s_k}{u_k}\frac{\partial\Omega_k}{\partial s_k}-\frac{1}{u_k^2}\frac{\partial\Omega_k}{\partial\lambda}\frac{du_k}{\partial\lambda}\right],$$

$$\frac{d^2s_k}{d\lambda}+s_k=\frac{1}{\Gamma_k^2}\left[\frac{s_k}{u_k}\frac{\partial\Omega_k}{\partial u_k}+\frac{1+s_k^2}{u_k^2}\frac{\partial\Omega_k}{\partial s_k}-\frac{1}{u_k^2}\frac{\partial\Omega_k}{\partial\lambda}\frac{ds_k}{d\lambda}\right],$$

причем

$$\frac{dt}{d\lambda}=\frac{1}{u_k^2\Gamma_k}.$$

Заменяя в этих производных величины ρ_i и z_i их выражениями через новые переменные, мы будем иметь

$$\mathrm{P}_i = -\frac{f\,(m_0+m_i)\,u_i^2}{\left(1+s_i^2\right)^{3/2}} + {}$$

$$+ f \sum_{j=1}^{n}{}' m_j \left[\frac{u_i \cos(\lambda_i-\lambda_j)-u_j}{u_i u_j \Delta_{ij}^3} - \frac{u_j^2 \cos(\lambda_i-\lambda_j)}{\left(1+s_j^2\right)^{3/2}}\right],$$

$$\mathrm{Z}_i = -\frac{f\,(m_0+m_i)\,s_i u_i^2}{\left(1+s_i^2\right)^{3/2}} + f \sum_{j=1}^{n}{}' m_j \left[\frac{u_i s_j - s_i u_j}{u_i u_j \Lambda_{ij}^3} - \frac{s_j u_j^2}{\left(1+s_j^2\right)^{3/2}}\right],$$

$$\Lambda_i = -\frac{f}{u_i} \sum_{j=1}^{n}{}' \frac{m_j}{u_j} \left[\frac{1}{\Delta_{ij}^3} - \frac{u_j^3}{\left(1+s_j^2\right)^{3/2}}\right] \sin(\lambda_i-\lambda_j).$$

Полагая в последней из этих формул $i=k$ и заменяя λ_k на λ, мы найдем также выражение для производной $\frac{\partial\Omega_k}{\partial\lambda}$, после чего получим Γ_k^2 по формуле

$$\Gamma_k^2 = \gamma^2 - 2f \sum_{j=1}^{n}{}' m_j \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{\sin(\lambda-\lambda_j)}{u_k^3 u_j} \left[\frac{1}{\Delta_{kj}^3} - \frac{u_j^3}{\left(1+s_j^2\right)^{3/2}}\right] d\lambda.$$

4. Дифференциальные уравнения движения системы взаимно притягивающихся материальных точек можно также записать и в гамильтоновой (канонической) форме.

Рассмотрим сначала уравнения движения (7.1′) в абсолютных прямоугольных координатах

$$m_i\ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad m_i\ddot{\eta}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, \quad m_i\ddot{\zeta}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i} \tag{7.49}$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где U есть силовая функция, и обозначим, как обычно, через T полную живую силу системы, т. е. положим

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i \left(\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2\right). \tag{7.50}$$

Чтобы написать уравнения (7.49) в канонической форме, достаточно принять ξ_i, η_i, ζ_i за лагранжевы координаты и ввести импульсы формулами

$$u_i = m_i\dot{\xi}_i, \quad v_i = m_i\dot{\eta}_i, \quad w_i = m_i\dot{\zeta}_i.$$

Полагая теперь

$$H = T - U = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} \frac{u_i^2 + v_i^2 + w_i^2}{m_i} - U, \tag{7.50'}$$

мы можем написать систему (7.49) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial u_i}, && \frac{d\eta_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial v_i}, && \frac{d\zeta_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial w_i}, \\ &\frac{du_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \xi_i}, && \frac{dv_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \eta_i}, && \frac{dw_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \zeta_i}. \end{aligned}\right\} \tag{7.49'}$$

Те же уравнения (7.49′) можно написать гораздо короче, вводя подходящие обозначения для обобщенных координат.

Действительно, будем обозначать все координаты одной буквой q_j $(j = 1, 2, \ldots, 3n+3)$, так что

$$\xi_i = q_{3i+1}, \quad \eta_i = q_{3i+2}, \quad \zeta_i = q_{3i+3} \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

и введем для симметрии новые обозначения для масс точек, полагая

$$m_i = \mu_{3i+1} = \mu_{3i+2} = \mu_{3i+3} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда живая сила системы определится формулой

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3n+3} \mu_j \dot{q}_j^2, \tag{7.50''}$$

откуда получим выражения для обобщенных импульсов

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = \mu_j \dot{q}_j,$$

вследствие чего уравнения (7.49′) примут следующий вид*):

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \tag{7.49''}$$

где

$$H = T - U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3n+3} \frac{p_j^2}{\mu_j} - U.$$

Классические интегралы системы (7.49″) получатся из интегралов (7.8′), (7.10) и (7.11) простым переходом к новым

---

*) Эти уравнения часто пишут еще проще, вводя в рассмотрение вектор q с компонентами q_j и соответствующий ему вектор p с компонентами p_j. Тогда уравнения (7.49″) можно написать в виде

$$\dot{q} = H_p, \quad \dot{p} = -H_q.$$

переменным и новым обозначениям и напишутся следующим образом:

интегралы движения центра масс:

$$\sum_{i=0}^{n} p_{3i+1} = a_1, \quad \sum_{i=0}^{n} (\mu_{3i+1} q_{3i+1} - t p_{3i+1}) = b_1,$$

$$\sum_{i=0}^{n} p_{3i+2} = a_2, \quad \sum_{i=0}^{n} (\mu_{3i+2} q_{3i+2} - t p_{3i+2}) = b_2,$$

$$\sum_{i=0}^{n} p_{3i+3} = a_3, \quad \sum_{i=0}^{n} (\mu_{3i+3} q_{3i+3} - t p_{3i+3}) = b_3,$$

интегралы площадей:

$$\sum_{i=0}^{n} (q_{3i+2} p_{3i+3} - q_{3i+3} p_{3i+2}) = c_1,$$

$$\sum_{i=0}^{n} (q_{3i+3} p_{3i+1} - q_{3i+1} p_{3i+3}) = c_2,$$

$$\sum_{i=0}^{n} (q_{3i+1} p_{3i+2} - q_{3i+2} p_{3i+1}) = c_3$$

и, наконец, интеграл живой силы

$$H = h.$$

Совершенно аналогично можно привести к канонической форме и уравнения (7.35), т. е. уравнения относительного движения в координатах Якоби.

Полагая

$$u'_i = m'_i \dot{x}'_i, \quad v'_i = m'_i \dot{y}'_i, \quad w'_i = m'_i \dot{z}'_i$$

и

$$H' = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i'^2 + v_i'^2 + w_i'^2}{m'_i} - U,$$

мы напишем уравнения (7.35) в форме

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx'_i}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial u'_i}, & \frac{dy'_i}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial v'_i}, & \frac{dz'_i}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial w'_i}, \\ \frac{du'_i}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial x'_i}, & \frac{dv'_i}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial y'_i}, & \frac{dw'_i}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial z'_i} \end{aligned}\right\} \quad (7.51)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Уравнения (7.51) также можно записать более кратко, вводя новые обозначения для координат Якоби и приведенных масс. Действительно, положим

$$x'_i = q'_{3i-2}, \quad y'_i = q'_{3i-1}, \quad z'_i = q'_{3i}$$

и

$$m'_i = \mu'_{3i-2} = \mu'_{3i-1} = \mu'_{3i}.$$

Тогда

$$T'_i = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3n} \mu'_j \dot{q}'^2_j,$$

и уравнениям (7.50) можно придать вид

$$\frac{dq'_j}{dt} = \frac{\partial H'}{\partial p'_j}, \quad \frac{dp'_j}{dt} = -\frac{\partial H'}{\partial q'_j} \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ 3n). \quad (7.51')$$

Интегралы системы (7.51′) выведем из интегралов (7.37) и (7.37′) переходом к новым обозначениям переменных, что дает

$$\sum_{i=1}^{n} \left(q'_{3i-1}p'_{3i} - q'_{3i}p'_{3i-1}\right) = c'_1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(q'_{3i}p'_{3i-2} - q'_{3i-2}p'_{3i}\right) = c'_2,$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(q'_{3i-2}p'_{3i-1} - q'_{3i-1}p'_{3i-2}\right) = c'_3,$$

$$H' = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3n} \frac{p'^2_j}{\mu'_j} - U = h'.$$

Уравнения движения в цилиндрических или сферических координатах также легко привести к каноническому виду. Действительно, рассмотрим уравнения движения (7.38′) в абсолютных цилиндрических координатах. В этих координатах живая сила нашей материальной системы имеет следующее выражение:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n} m_i\left(\dot{\rho}_i^2 + \rho_i^2\dot{\lambda}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2\right).$$

Принимая величины ρ_i, λ_i, ζ_i за лагранжевы координаты, мы определим соответствующие им импульсы формулами

$$\mathrm{P}_i = m_i\dot{\rho}_i, \quad \Lambda_i = m_i\rho_i^2\dot{\lambda}_i, \quad \mathrm{Z}_i = m_i\dot{\zeta}_i,$$

откуда следует, что уравнения (7.38′) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\rho_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathrm{P}_i}, & \frac{d\mathrm{P}_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \rho_i}, \\ \frac{d\lambda_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \Lambda_i}, & \frac{d\Lambda_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda_i}, \\ \frac{d\zeta_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathrm{Z}_i}, & \frac{d\mathrm{Z}_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \zeta_i}, \end{aligned}\right\} \tag{7.52}$$

где

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{m_i}\left[\mathrm{P}_i^2 + \frac{\Lambda_i^2}{\rho_i^2} + \mathrm{Z}_i^2\right] - U$$

есть соответствующая характеристическая функция.

Приведем еще к гамильтоновой форме относительные уравнения движения в координатах Якоби, преобразованные предварительно к сферическим координатам с помощью формул

$$x'_i = r'_i\cos\varphi'_i\cos\lambda'_i, \quad y'_i = r'_i\cos\varphi'_i\sin\lambda'_i, \quad z'_i = r'_i\sin\varphi'_i.$$

Тогда живая сила системы T' определится формулой

$$T' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m'_i\left[\dot{r}_i'^2 + r_i'^2\dot{\varphi}_i'^2 + r_i'^2\cos^2\varphi'_i\cdot\dot{\lambda}_i'^2\right].$$

Примем величины r'_i, φ'_i, λ'_i за обобщенные лагранжевы координаты и введем соответствующие им обобщенные импульсы формулами *)

$$R'_i = m'_i\dot{r}'_i, \quad \Phi'_i = m'_i r_i'^2\dot{\varphi}'_i, \quad L'_i = r_i'^2\cos^2\varphi'_i\cdot\lambda'_i.$$

Тогда относительное движение системы определится следующими каноническими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr'_i}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial R'_i}, & \frac{dR'_i}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial r'_i}, \\ \frac{d\varphi'_i}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial \Phi'_i}, & \frac{d\Phi'_i}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial \varphi'_i}, \\ \frac{d\lambda'_i}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial L'_i}, & \frac{dL'_i}{dt} &= -\frac{\partial H'}{d\lambda'_i} \\ & (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \end{aligned}\right\} \tag{7.53}$$

где

$$H' = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m'_i}\left[R_i'^2 + \frac{\Phi_i'^2}{r_i'^2} + \frac{L_i'^2}{r_i'^2\cos^2\varphi'_i}\right] - U.$$

---

*) Здесь R, Φ, L, так же как и Р, Λ, Z, обозначают импульсы, а не составляющие сил, как выше.

Полезно напомнить, что x'_i, y'_i, z'_i суть декартовы координаты точки M_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ в системе координат $G_{i-1}x'_i y'_i z'_i$ с началом в центре инерции системы точек $M_0, M_1, \ldots, M_i$ и с неизменными направлениями осей.

Уравнения движения системы в координатах x_i, y_i, z_i, определяющих положения точек M_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ относительно точки M_0, можно также привести к канонической форме следующим образом.

Рассмотрим живую силу T в относительных координатах, которая определяется формулой

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)-\\ -\frac{1}{2m}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{x}_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{y}_i\right)^2+\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{z}_i\right)^2\right]. \quad (7.54)$$

Рассматривая относительные координаты x_i, y_i, z_i как лагранжевы, мы определим соответствующие им импульсы формулами

$$\left.\begin{aligned} u_i&=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}=m_i\dot{x}_i-\frac{m_i}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{x}_i=m_i\dot{\xi}'_i,\\ v_i&=\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}=m_i\dot{y}_i-\frac{m_i}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{y}_i=m_i\dot{\eta}'_i,\\ w_i&=\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i}=m_i\dot{z}_i-\frac{m_i}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\dot{z}_i=m_i\dot{\zeta}'_i. \end{aligned}\right\} \quad (7.54')$$

Полагая затем

$$H=T-U,$$

мы можем написать следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial u_i}, & \frac{du_i}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial x_i},\\ \frac{dy_i}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial v_i}, & \frac{dv_i}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial y_i},\\ \frac{dz_i}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial w_i}, & \frac{dw_i}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial z_i} \end{aligned}\right\} \quad (i=1, 2, \ldots, n). \quad (7.55)$$

Характеристическую функцию H нужно выразить через канонические переменные x_i, y_i, z_i, u_i, v_i, w_i. Так как взаимные расстояния Δ_{ij} уже были выражены через относительные координаты, то силовая функция U также уже выражена через канонические переменные.

Остается выразить через импульсы u_i, v_i, w_i живую силу T. Но легко видеть, что обобщенные импульсы, соответствующие относительным координатам, являются импульсами в барицентрической системе координат, а поэтому из формул (7.23′) найдем выражения составляющих скоростей через барицентрические скорости, а значит, и через обобщенные импульсы

$$m_i\dot{x}_i = u_i + \frac{m_i}{m_0}\sum_{j=1}^{n} u_j,$$

$$m_i\dot{y}_i = v_i + \frac{m_i}{m_0}\sum_{j=1}^{n} v_j,$$

$$m_i\dot{z}_i = w_i + \frac{m_i}{m_0}\sum_{j=1}^{n} w_j.$$

Подставив эти выражения в формулу (7.54), мы и получим нужное выражение живой силы, а следовательно, и характеристической функции H в канонических переменных.

Следует отметить, что канонические уравнения в координатах x_i, y_i, z_i имеют более сложный вид, чем уравнения в канонических координатах Якоби.

ГЛАВА VIII

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

В начале предыдущей главы говорилось, что во многих случаях реально существующие небесные тела можно рассматривать как материальные точки, движущиеся в абсолютно пустом пространстве под действием сил взаимных притяжений согласно закону всемирного тяготения Ньютона.

При этих предположениях мы установили дифференциальные уравнения движения тел-точек и таким образом выяснили природу той математической задачи, к которой приводится в первом приближении исследование движения планет, их спутников, комет, астероидов, искусственных небесных тел и т. п.

Однако не всегда можно довольствоваться таким первым приближением, и в ряде существенно важных случаев приходится усложнять первоначально поставленную задачу, вводя дополнительные гипотезы или условия, вследствие чего рассматриваемая задача делается более близкой к действительности.

Так, иногда приходится вводить в рассмотрение, кроме сил взаимных притяжений, некоторые другие силы. В других случаях оказывается невозможным рассматривать реальные небесные тела как материальные точки и приходится принимать во внимание влияние их формы и физического строения. Например, при исследовании движений близких спутников больших планет, особенно в задаче о движении искусственных спутников Земли (ИСЗ), Луны (ИСЛ) или какой-либо другой планеты, необходимо учитывать отклонение формы планеты от сферической и эффект ее неоднородности.

При изучении вращательного движения небесного тела вокруг его собственного центра инерции (центра масс) приходится рассматривать это небесное тело как «тело» в собственном смысле этого слова, так как задача о вращательном движении материальной точки явно не имеет никакого смысла.

Наконец, может случиться, что вращение тела вокруг его центра инерции оказывает влияние на поступательное его движение, вследствие чего действительное (т. е. наблюдаемое) поступательное движение небесного тела может оказаться несколько отличным от поступательного движения тела, если его считать материальной точкой.

Разумеется, такое общее движение невозможно рассматривать во всей его общности и мы вынуждены поэтому и здесь ввести некоторые упрощающие предположения.

Мы будем рассматривать только неизменяемые твердые тела (или абсолютно твердые), элементарные частицы которых взаимно притягиваются по закону Ньютона. Вследствие действия этих сил взаимных притяжений каждое тело будет обладать и поступательным движением и вращательным вокруг своего центра инерции. Такое общее, или совместное движение мы будем называть поступательно-вращательным движением.

В действительности небесные тела не являются материальными точками, но они не являются, конечно, и абсолютно твердыми телами, а всегда обладают известной степенью пластичности или даже представляют собой жидкие (или газообразные, или пылевые) образования. Поэтому, рассматривая задачу о движении неизменяемых твердых тел, мы делаем только следующий шаг на пути последовательных приближений к естественным условиям природы.

§ 1. Дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения неизменяемых твердых тел

1. Рассмотрим материальную систему, состоящую из $n+1$ абсолютно твердых материальных тел M_0, M_1, ..., M_n, из которых никакие два не имеют общей части.

Как было установлено в гл. I (см. § 9 и 10 гл. I *)), положение и ориентация каждого тела M_i в абсолютной системе декартовых координат $O\xi\eta\zeta$ может быть определена шестью независимыми параметрами

$$\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i,\ \psi_i,\ \varphi_i,\ \vartheta_i, \tag{8.1}$$

т. е. тремя координатами ξ_i, η_i, ζ_i центра приведения G_i тела M_i и тремя эйлеровыми углами ψ_i, φ_i, ϑ_i, определяющими ориентацию «собственной» системы осей, неизменно связанных с телом M_i (см. рис. 43 для случая $n=2$).

В этой главе за центр приведения мы будем принимать центр инерции каждого тела, а за оси собственной системы коорди-

---

*) См. также Г. К. Суслов, Теоретическая механика, ОНТИ, 1944, или А. И. Лурье, Аналитическая механика, Физматгиз, 1961.

нат — центральные, главные оси инерции тела (т. е. оси инерции с началом в центре инерции!).

Обозначим, как обычно, через p_i, q_i, r_i проекции угловой скорости вращения тела на оси собственной системы координат. Эти

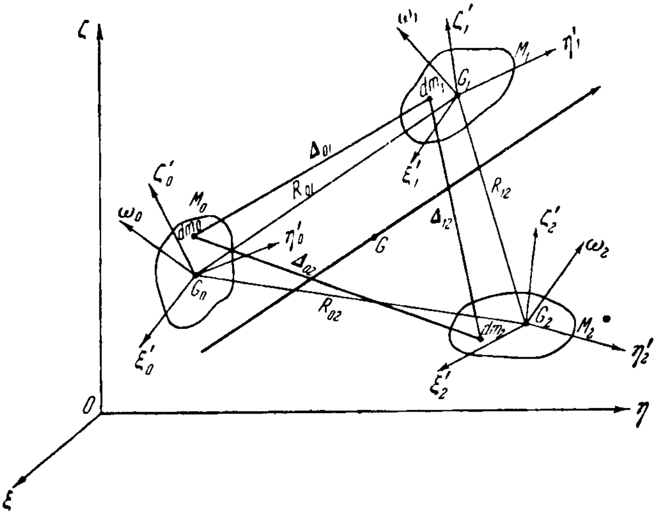


Рис. 43.

величины связаны с эйлеровыми углами тела известными кинематическими уравнениями Эйлера, имеющими вид

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \sin\varphi_i \sin\vartheta_i \cdot \dot{\psi}_i + \cos\varphi_i \cdot \dot{\vartheta}_i, \\ q_i &= \cos\varphi_i \sin\vartheta_i \cdot \dot{\psi}_i - \sin\varphi_i \cdot \dot{\vartheta}_i, \\ r_i &= \cos\vartheta_i \cdot \dot{\psi}_i + \dot{\varphi}_i. \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

Тогда, если m_i есть масса тела M_i и A_i, B_i, C_i — его главные, центральные моменты инерции, живая сила T_i этого тела определится следующей формулой:

$$T_i = \frac{1}{2} m_i (\dot{\xi}_i^2 + \dot{\eta}_i^2 + \dot{\zeta}_i^2) + \frac{1}{2} (A_i p_i^2 + B_i q_i^2 + C_i r_i^2), \tag{8.3}$$

а если T есть полная живая сила всей системы, то

$$T = \sum_{i=0}^{n} T_i. \tag{8.3'}$$

Полная силовая функция всей нашей материальной системы выражается (см. § 10 гл. I) формулой

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n}{}' U_{ij}, \tag{8.4}$$

где

$$U_{ij}=f\int\limits_{(M_i)}\int\limits_{(M_j)}\frac{dm_i\,dm_j}{\Delta_{ij}} \tag{8.4'}$$

есть силовая функция взаимного притяжения двух тел M_i и M_j, являющаяся некоторой функцией шести величин (8.1) тела M_i и шести аналогичных величин тела M_j.

Полная силовая функция U является поэтому некоторой функцией от $6n+6$ независимых переменных, определяющих положения и ориентации всех тел системы. Полезно отметить, что силовая функция не зависит ни от времени (явно), ни от производных величин (8.1).

Дифференциальные уравнения движения системы взаимно притягивающихся тел могут быть написаны при помощи общих уравнений Лагранжа второго рода (см. уравнения (6.8) гл. VI), где за обобщенные координаты q нужно взять переменные (8.1), полностью определяющие положение системы (в обобщенном смысле) относительно абсолютных осей $O\xi\eta\zeta$.

Так как силовая функция U не зависит от производных обобщенных координат (8.1), а живая сила T в силу уравнений (8.2) не зависит от прецессионных углов ψ_i, то уравнения Лагранжа в нашем случае будут иметь такой вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\xi_i}\right)=\frac{\partial U}{\partial\xi_i}, &&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\psi_i}\right)=\frac{\partial U}{\partial\psi_i},\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\eta_i}\right)=\frac{\partial U}{\partial\eta_i}, &&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial\varphi_i}=\frac{\partial U}{\partial\varphi_i},\\
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\zeta_i}\right)=\frac{\partial U}{\partial\zeta_i}, &&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot\vartheta_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial\vartheta_i}=\frac{\partial U}{\partial\vartheta_i}.
\end{aligned}\right\} \tag{8.5}$$

Подставляя сюда выражение для T, разрешая вторую группу уравнений (8.5) относительно производных $\dot p_i$, $\dot q_i$, $\dot r_i$ и присоединяя к получившимся уравнениям кинематические уравнения Эйлера, мы напишем полную систему дифференциальных уравнений поступательно-вращательного движения системы абсолютно твердых тел в следующем виде:

$$m_i\ddot\xi_i=\frac{\partial U}{\partial\xi_i},\qquad m_i\ddot\eta_i=\frac{\partial U}{\partial\eta_i},\qquad m_i\ddot\zeta_i=\frac{\partial U}{\partial\zeta_i}, \tag{8.6}$$

$$\left.\begin{aligned}
&A_i\dot p_i-(B_i-C_i)\,q_ir_i=\left(\frac{\partial U}{\partial\psi_i}-\cos\vartheta_i\frac{\partial U}{\partial\varphi_i}\right)\frac{\sin\varphi_i}{\sin\vartheta_i}+\cos\varphi_i\frac{\partial U}{\partial\vartheta_i},\\
&B_i\dot q_i-(C_i-A_i)\,r_ip_i=\left(\frac{\partial U}{\partial\psi_i}-\cos\vartheta_i\frac{\partial U}{\partial\varphi_i}\right)\frac{\cos\varphi_i}{\sin\vartheta_i}-\sin\varphi_i\frac{\partial U}{\partial\vartheta_i},\\
&C_i\dot r_i-(A_i-B_i)\,p_iq_i=\frac{\partial U}{\partial\varphi_i}.
\end{aligned}\right\} \tag{8.6'}$$

2. В написанные уравнения входят вспомогательные переменные — проекции угловых скоростей ω_i тел системы p_i, q_i, r_i. Эти переменные можно исключить при помощи кинематических уравнений Эйлера (8.2), в результате чего получим уравнения, связывающие только переменные (8.1) всех тел системы.

Произведя это исключение и разрешив полученные уравнения относительно вторых производных от углов Эйлера, мы представим дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения еще в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} m_i\ddot{\xi}_i &= \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, & m_i\ddot{\eta}_i &= \frac{\partial U}{\partial \eta_i}, & m_i\ddot{\zeta}_i &= \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \\ \ddot{\psi}_i &= \Psi_i, & \ddot{\varphi}_i &= \Phi_i, & \ddot{\vartheta}_i &= \Theta_i, \end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

где положено для сокращения:

$$\left.\begin{aligned} \sin\vartheta_i\cdot\Psi_i &= \vartheta_i(\dot{\varphi}_i-\dot{\psi}_i\cos\vartheta_i)+\left(\frac{1}{A_i}-\frac{1}{B_i}\right)\sin\varphi_i\cos\varphi_i\frac{\partial U}{\partial\vartheta_i}+ \\ &+\operatorname{cos\,ec}\vartheta_i\left(\frac{\sin^2\varphi_i}{A_i}+\frac{\cos^2\varphi_i}{B_i}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial\psi_i}-\cos\vartheta_i\frac{\partial U}{\partial\varphi_i}\right)+ \\ &+\frac{1}{2}(\dot{\varphi}_i+\dot{\psi}_i\cos\vartheta_i)\left[\left(\frac{B_i-C_i}{A_i}+\frac{C_i-A_i}{B_i}\right)\sin 2\varphi_i\sin\vartheta_i\cdot\dot{\psi}_i+\right. \\ &\qquad\left.+\left(\frac{C_i-A_i}{B_i}\cos^2\varphi_i-\frac{B_i-C_i}{A_i}\sin^2\varphi_i\right)\dot{\vartheta}_i\right]; \\ \Phi_i &= \frac{1}{C_i}\frac{\partial U}{\partial\varphi_i}+\dot{\vartheta}_i\dot{\psi}_i\sin\vartheta_i-\cos\vartheta_i\cdot\Psi_i+ \\ &\qquad+\frac{A_i-B_i}{C_i}(\sin\varphi_i\sin\vartheta_i\cdot\dot{\psi}_i+\cos\varphi_i\cdot\dot{\vartheta}_i)\times \\ &\qquad\qquad\times(\cos\varphi_i\sin\vartheta_i\cdot\dot{\psi}_i-\sin\varphi_i\cdot\dot{\vartheta}_i); \\ \Theta_i &= -\sin\vartheta_i\cdot\dot{\psi}_i\dot{\varphi}_i+\left(\frac{\cos^2\varphi_i}{A_i}+\frac{\sin^2\varphi_i}{B_i}\right)\frac{\partial U}{\partial\vartheta_i}+ \\ &+\left(\frac{1}{A_i}-\frac{1}{B_i}\right)\frac{\sin 2\varphi_i}{2\sin\vartheta_i}\left(\frac{\partial U}{\partial\psi_i}-\cos\vartheta_i\frac{\partial U}{\partial\varphi_i}\right)+ \\ &+(\cos\vartheta_i\cdot\dot{\psi}_i+\dot{\varphi}_i)\left[\left(\frac{B_i-C_i}{A_i}\cos^2\varphi_i-\frac{C_i-A_i}{B_i}\sin^2\varphi_i\right)\sin\vartheta_i\cdot\dot{\psi}_i+\right. \\ &\qquad\left.+\frac{1}{2}\left(\frac{C_i-B_i}{A_i}+\frac{A_i-C_i}{B_i}\right)\sin 2\varphi_i\cdot\dot{\vartheta}_i\right]. \end{aligned}\right\} \tag{8.7′}$$

Если какое-нибудь из тел системы обладает геометрической и механической (или динамической) симметрией относительно некоторой оси, неизменно связанной с телом, то выражения (8.7′) для этого тела значительно упростятся. В самом деле, примем ось симметрии тела (пусть это будет тело M_0) за ось аппликат собственной системы координат $G_0\xi_0'\eta_0'\zeta_0'$. Тогда (см. гл. V первой части) $A_0 = B_0$ и силовая функция U не зависит от угла собственного вращения тела M_0. Поэтому предыдущие формулы дают

$$\left.\begin{aligned}\sin\vartheta_0\cdot\Psi_0 &= -2\cos\vartheta_0\cdot\dot\vartheta_0\dot\psi_0 + \frac{C_0}{A_0}\dot\vartheta_0(\dot\psi_0\cos\vartheta_0+\dot\varphi_0)+\\ &\qquad\qquad + \frac{\operatorname{cosec}\vartheta_0}{A_0}\frac{\partial U}{\partial\psi_0},\\ \Phi_0 &= \dot\vartheta_0\dot\psi_0\sin\vartheta_0 - \cos\vartheta_0\cdot\Psi_0,\\ \Theta_0 &= \sin\vartheta_0\cos\vartheta_0\cdot\dot\psi_0^2 -\\ &\qquad - \frac{C_0}{A_0}\dot\psi_0(\dot\psi_0\cos\vartheta_0+\dot\varphi_0)\sin\vartheta_0 + \frac{1}{A_0}\frac{\partial U}{\partial\vartheta_0}.\end{aligned}\right\}\quad(8.7'')$$

Если каждое из тел M_i обладает симметрией относительно некоторой оси, то к виду (8.7″) можно привести выражения (8.7′) для всех тел системы. Действительно, выражения (8.7′) упрощаются только за счет выбора собственной системы координат, а эти системы для различных тел заведомо не зависят друг от друга, поэтому ось симметрии каждого тела можно принять за ось аппликат собственной системы координат.

§ 2. Первые интегралы уравнений поступательно-вращательного движения

Уравнения (8.7) образуют систему $6n+6$ дифференциальных уравнений второго порядка, т. е. представляют собой совместную систему $12(n+1)$-го порядка. Поэтому общий интеграл этой системы, дающий полное решение рассматриваемой задачи, должен состоять из $12(n+1)$ независимых первых интегралов и должен содержать такое же число произвольных постоянных, которые могли бы быть однозначно определены начальными значениями величин (8.1) и их первых производных по времени.

Однако, так же как и дифференциальные уравнения движения взаимно притягивающихся материальных точек, уравнения поступательно-вращательного движения неизменяемых тел имеют в общем случае только десять первых интегралов, вытекающих из принципов сохранения движения центра инерции, момента количества движения и полной энергии системы.

Эти интегралы выводятся, так же как и для уравнений движения точек, при помощи свойств силовой функции, вполне аналогичных свойствам силовой функции системы материальных точек. Рассмотрим сначала эти свойства.

1. Силовая функция системы взаимно притягивающихся тел (8.4), очевидно, не зависит от выбора абсолютной системы коор-

динат $O\xi\eta\zeta$, а поэтому остается неизменной при любом (не изменяющем масштабов) преобразовании координат. Следовательно, при всяком бесконечно малом преобразовании системы координат полное приращение силовой функции, определяемое следующей общей формулой,

$$dU=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{\partial U}{\partial\xi_i}d\xi_i+\frac{\partial U}{\partial\eta_i}d\eta_i+\frac{\partial U}{\partial\zeta_i}d\zeta_i+\frac{\partial U}{\partial\psi_i}d\psi_i+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial U}{\partial\varphi_i}d\varphi_i+\frac{\partial U}{\partial\vartheta_i}d\vartheta_i\right], \quad (8.8)$$

должно быть равно нулю.

Сместим начало координат абсолютной системы $O\xi\eta\zeta$ вдоль оси абсцисс на бесконечно малую величину α, не изменяя направлений осей. Тогда абсциссы ξ_i всех точек G_i получат одно и то же приращение α, а ординаты и аппликаты не изменятся. Так как направления координатных осей остаются при указанном преобразовании неизменными, то эйлеровы углы всех тел системы также не изменятся.

Итак, при сделанном преобразовании переменные (8.1) получат следующие приращения:

$$d\xi_i=\alpha,\quad d\eta_i=0,\quad d\zeta_i=0,$$
$$d\psi_i=0,\quad d\varphi_i=0,\quad d\vartheta_i=0.$$

Приращение силовой функции должно быть равно нулю, вследствие чего формула (8.8) дает следующее соотношение между частными производными функции U:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial U}{\partial\xi_i}=0.$$

Смещая подобным же образом начало координат абсолютной системы вдоль оси $O\eta$ и вдоль оси $O\zeta$ и рассуждая так же, как и выше, мы получим еще два подобных же соотношения. В результате имеем следующие три равенства:

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial U}{\partial\xi_i}=0,\quad \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial U}{\partial\eta_i}=0,\quad \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial U}{\partial\zeta_i}=0. \quad (8.9)$$

Повернем теперь систему абсолютных осей вокруг оси $O\xi$ на бесконечно малый угол ω. Тогда переменные (8.1) получат следующие приращения:

$$d\xi_i=0,\quad d\eta_i=-\omega\cdot\zeta_i,\quad d\zeta_i=+\omega\cdot\eta_i,$$
$$d\psi_i=-\frac{\sin\psi_i\cos\vartheta_i}{\sin\vartheta_i}\cdot\omega,\quad d\varphi_i=\frac{\sin\psi_i}{\sin\vartheta_i}\cdot\omega,\quad d\vartheta_i=\cos\psi_i\cdot\omega.$$

В самом деле, приращения прямоугольных координат точек G_i в силу взаимной независимости всех переменных (8.1), определятся так же, как и приращения прямоугольных координат материальных точек, выведенные в § 2 гл. VII. Что же касается приращений эйлеровых углов (не зависящих от приращений координат точек G_i), то они могут быть выведены следующим образом: рассмотрим сферу произвольного радиуса с центром в точке G_i (рис. 44). Пусть ξ, η, ζ — точки пересечения этой сферы прямыми, параллельными координатным осям системы $O\xi\eta\zeta$, а ξ', η', ζ' — точки пересечения сферы осями собственной системы координат тела M_i. Большой круг $(\xi\eta)$ есть линия пересечения сферы плоскостью, параллельной плоскости $O\xi\eta$, а большой круг $(\xi'\eta')$ — пересечение сферы плоскостью $G_i\xi'_i\eta'_i$ собственной системы. Точка N есть точка пересечения сферы с линией узлов плоскости $G_i\xi'_i\eta'_i$ на плоскости, параллельной плоскости $O\xi\eta$.

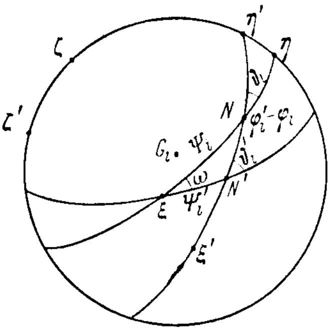


Рис. 44.

После поворота системы координат $O\xi\eta\zeta$ вокруг оси $O\xi$ на угол ω точка N займет новое положение на сфере N'. В образовавшемся бесконечно малом сферическом треугольнике $\xi NN'$ стороны равны:

$$\widehat{\xi N}=\psi_i,\quad \widehat{\xi N'}=\psi'_i=\psi_i+d\psi_i,\quad \widehat{NN'}=\varphi'_i-\varphi_i=d\varphi_i.$$

Далее, внутренний угол при точке ξ равен ω, внутренний угол при точке N равен ϑ_i и, наконец, внешний угол при точке N' равен $\vartheta'_i=\vartheta_i+d\vartheta_i$.

Применяя теперь к треугольнику $\xi NN'$ основные формулы сферической тригонометрии, мы получим следующие соотношения:

$$\frac{\sin\psi_i}{\sin(180^\circ-\vartheta'_i)}=\frac{\sin(\varphi'_i-\varphi_i)}{\sin\omega},$$

$$\sin\omega\cos\psi_i=\cos(180^\circ-\vartheta'_i)\sin\vartheta_i+\sin(180^\circ-\vartheta'_i)\cos\vartheta_i\cos(\varphi'_i-\varphi_i),$$

$$\sin\psi'_i\cos\omega=\cos(\varphi'_i-\varphi_i)\sin\psi_i-\sin(\varphi'_i-\varphi_i)\cos\psi_i\cos\vartheta_i.$$

Принимая теперь во внимание, что синус бесконечно малого угла можно заменить самим углом, а косинус — единицей, мы получим из написанных формул приведенные выше выражения для приращений эйлеровых углов.

Аналогичным образом выведем следующие приращения переменных (8.1), получающиеся при повороте координатной системы $O\xi\eta\zeta$ на бесконечно малый угол ω вокруг оси $O\eta$:

$$
\begin{gathered}
d\xi_i = +\omega\cdot\zeta_i, \qquad d\eta_i = 0, \qquad d\zeta_i = -\omega\cdot\xi_i,\\
d\psi_i = \frac{\cos\psi_i\cos\vartheta_i}{\sin\vartheta_i}\cdot\omega, \qquad d\varphi_i = -\frac{\cos\psi_i}{\sin\vartheta_i}\cdot\omega, \qquad d\vartheta_i = \sin\psi_i\cdot\omega.
\end{gathered}
$$

Наконец, поворачивая систему координат $O\xi\eta\zeta$ на бесконечно малый угол ω вокруг оси $O\zeta$, выведем следующие приращения переменных (8.1):

$$
\begin{gathered}
d\xi_i = -\omega\cdot\eta_i, \qquad d\eta_i = +\omega\cdot\xi_i, \qquad d\zeta_i = 0,\\
d\psi_i = \omega, \qquad d\varphi_i = 0, \qquad d\vartheta_i = 0.
\end{gathered}
$$

При каждом из этих трех бесконечно малых преобразований силовая функция U остается неизменной, а поэтому из формулы (8.8) получим следующие три соотношения между частными производными функции U:

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n}\left(\eta_i\frac{\partial U}{\partial\zeta_i} - \zeta_i\frac{\partial U}{\partial\eta_i} - \frac{\sin\psi_i\cos\vartheta_i}{\sin\vartheta_i}\frac{\partial U}{\partial\psi_i} + \right.\\
&\qquad\qquad\left. + \frac{\sin\psi_i}{\sin\vartheta_i}\frac{\partial U}{\partial\varphi_i} + \cos\psi_i\frac{\partial U}{\partial\vartheta_i}\right) = 0,\\
&\sum_{i=0}^{n}\left(\zeta_i\frac{\partial U}{\partial\xi_i} - \xi_i\frac{\partial U}{\partial\zeta_i} + \frac{\cos\psi_i\cos\vartheta_i}{\sin\vartheta_i}\frac{\partial U}{\partial\psi_i} - \frac{\cos\psi_i}{\sin\vartheta_i}\frac{\partial U}{\partial\varphi_i} + \right.\\
&\qquad\qquad\left. + \sin\psi_i\frac{\partial U}{\partial\vartheta_i}\right) = 0,\\
&\sum_{i=0}^{n}\left(\xi_i\frac{\partial U}{\partial\eta_i} - \eta_i\frac{\partial U}{\partial\xi_i} + \frac{\partial U}{\partial\psi_i}\right) = 0.
\end{aligned}
\right\}
\tag{8.10}
$$

2. Переходим теперь к выводу классических интегралов системы уравнений поступательно-вращательного движения (8.7)

Для этого просуммируем по индексу i каждое из равенств группы уравнений (8.6), что дает следующие три уравнения, являющиеся следствиями уравнений (8.6), а также уравнений (8.7):

$$
\sum_{i=0}^{n} m_i\ddot{\xi}_i = \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial U}{\partial\xi_i}, \qquad \sum_{i=0}^{n} m_i\ddot{\eta}_i = \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial U}{\partial\eta_i}, \qquad \sum_{i=0}^{n} m_i\ddot{\zeta}_i = \sum_{i=0}^{n}\frac{\partial U}{\partial\zeta_i}.
$$

Отсюда, вследствие соотношений (8.9), находим следующие уравнения:

$$
\sum_{i=0}^{n} m_i\ddot{\xi}_i = 0, \qquad \sum_{i=0}^{n} m_i\ddot{\eta}_i = 0, \qquad \sum_{i=0}^{n} m_i\ddot{\zeta}_i = 0,
$$

интегрируя которые, мы дважды получим первую группу первых интегралов уравнений (8.7):

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\xi}_i = a_1, \quad &&\sum_{i=0}^{n} m_i\xi_i = a_1t + b_1,\\
&\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\eta}_i = a_2, \quad &&\sum_{i=0}^{n} m_i\eta_i = a_2t + b_2,\\
&\sum_{i=0}^{n} m_i\dot{\zeta}_i = a_3, \quad &&\sum_{i=0}^{n} m_i\zeta_i = a_3t + b_3.
\end{aligned}\right\} \tag{8.11}$$

Эти уравнения имеют совершенно такой же вид, как и интегралы (7.8′), (7.8″) уравнений абсолютного движения системы материальных точек и имеют, кроме того, такой же механический смысл. Действительно, так как согласно принятому условию точки G_i являются центрами инерции тел M_i ($i=0$, 1, 2, ..., n) то координаты центра инерции всей системы $n+1$ тел, которые обозначим через $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$, определятся формулами

$$\bar{\xi} = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{n} m_i\xi_i, \quad \bar{\eta} = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{n} m_i\eta_i, \quad \bar{\zeta} = \frac{1}{m}\sum_{i=0}^{n} m_i\zeta_i, \tag{8.12}$$

где

$$m = \sum_{i=0}^{n} m_i$$

обозначает полную массу всей системы тел.

Формулы (8.11) и (8.12) дают

$$\begin{aligned}
&\bar{\xi} = \frac{a_1}{m}t + \frac{b_1}{m}, \quad &&\bar{\eta} = \frac{a_2}{m}t + \frac{b_2}{m}, \quad &&\bar{\zeta} = \frac{a_3}{m}t + \frac{b_3}{m},\\
&\dot{\bar{\xi}} = \frac{a_1}{m}, &&\dot{\bar{\eta}} = \frac{a_2}{m}, &&\dot{\bar{\zeta}} = \frac{a_3}{m}.
\end{aligned}$$

Эти уравнения показывают, что центр инерции G всей системы тел движется в абсолютном пространстве прямолинейно и равномерно.

Поэтому интегралы (8.11) называются (так же как и в задаче о движении взаимно притягивающихся точек) интегралами движения центра инерции*).

Вторая группа первых интегралов системы (8.7), выражающих принцип сохранения момента количества движения всей системы, получается несколько более длинным и громоздким

---

*) На рис. 42 прямолинейная траектория центра масс G всей системы тел (для случая $n=2$) изображена жирной линией. Точка G изображена для того же момента, как и три тела M_0, M_1 и M_2.

путем, но совершенно таким же способом, как и интегралы движения центра инерции.

Для сокращения мы выведем только один из интегралов моментов, после чего напишем сразу и два остальные по аналогии при помощи циклической перестановки букв и значков.

Умножим второе и третье из уравнений группы (8.6) соответственно на $-\zeta_i$ и $+\eta_i$, уравнения группы (8.6′) соответственно на $a_{11}^{(i)}$, $a_{12}^{(i)}$, $a_{13}^{(i)}$ и, наконец, кинематические уравнения Эйлера (8.2) соответственно на $A_i\dot{a}_{11}^{(i)}$, $B_i\dot{a}_{12}^{(i)}$, $C_i\dot{a}_{13}^{(i}$ *). Сложим после этого восемь получившихся равенств и просуммируем по индексу i от нуля до n.

Обозначая для сокращения правые части равенств (8.6) временно буквами P_i, Q_i, R_i, мы получим в результате следующее уравнение, являющееся следствием всех уравнений (8.2), (8.6) и (8.6′), а значит, и уравнений (8.7):

$$\sum_{i=0}^{n}\left[m_i(\eta_i\ddot{\zeta}_i-\zeta_i\ddot{\eta}_i)+A_i\dot{p}_i a_{11}^{(i)}+B_i\dot{q}_i a_{12}^{(i)}+C_i\dot{r}_i a_{13}^{(i)}+\right.$$

$$\left.+A_i p_i\dot{a}_{11}^{(i)}+B_i q_i\dot{a}_{12}^{(i)}+C_i r_i\dot{a}_{13}^{(i)}\right]=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\left[\eta_i\frac{\partial U}{\partial\zeta_i}-\zeta_i\frac{\partial U}{\partial\eta_i}+(B_i-C_i)q_i r_i a_{11}^{(i)}+(C_i-A_i)r_i p_i a_{12}^{(i)}+\right.$$

$$+(A_i-B_i)p_i q_i a_{13}^{(i)}+A_i p_i\dot{a}_{11}^{(i)}+B_i q_i\dot{a}_{12}^{(i)}+C_i r_i\dot{a}_{13}^{(i)}+$$

$$\left.+P_i a_{11}^{(i)}+Q_i a_{12}^{(i)}+R_i a_{13}^{(i)}\right].$$

Легко видеть, что левая часть последнего равенства есть точная производная по t.

Преобразуем теперь правую часть этого равенства. Для этого воспользуемся формулами **)

$$\dot{a}_{11}^{(i)}=r_i a_{12}^{(i)}-q_i a_{13}^{(i)},\quad \dot{a}_{12}^{(i)}=p_i a_{13}^{(i)}-r_i a_{11}^{(i)},\quad \dot{a}_{13}^{(i)}=q_i a_{11}^{(i)}-p_i a_{12}^{(i)},$$

затем подставим вместо P_i, Q_i, R_i их выражения (т. е. правые части уравнений (8.6′)) и произведем, наконец, необходимые сокращения и упрощения.

---

*) $a_{ks}^{(i)}$ суть направляющие косинусы собственных осей тела M_i в системе $O\xi\eta\zeta$, так что $a_{11}^{(i)}$, $a_{12}^{(i)}$, $a_{13}^{(i)}$ суть косинусы углов, образуемых собственными осями тела M_i с осью $O\xi$. Величины $a_{ks}^{(i)}$ выражаются через эйлеровы углы тела M_i формулами (1.27) гл. I части первой.

**) См., например, Г. К. Суслов, Теоретическая механика. Впрочем, эти формулы нетрудно получить, дифференцируя формулы, подобные (1.27), и преобразуя полученные выражения при помощи формул (8.2).

Тогда предыдущее равенство перепишется в следующем виде:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n}\left[m_i(\eta_i\dot{\zeta}_i-\zeta_i\dot{\eta}_i)+A_i p_i a_{11}^{(i)}+B_i q_i a_{12}^{(i)}+C_i r_i a_{13}^{(i)}\right]=$$
$$=\sum_{i=0}^{n}\left[\eta_i\frac{\partial U}{\partial\zeta_i}-\zeta_i\frac{\partial U}{\partial\eta_i}+\frac{\sin\psi_i}{\sin\vartheta_i}\frac{\partial U}{\partial\varphi_i}-\frac{\sin\psi_i\cos\vartheta_i}{\sin\vartheta_i}\frac{\partial U}{\partial\psi_i}+\cos\psi_i\frac{\partial U}{\partial\vartheta_i}\right].$$

Но в силу первого из соотношений (8.10) правая часть последнего равенства равна нулю, а поэтому выражение, стоящее под знаком производной в левой части, есть величина постоянная, что и дает первый из интегралов момента количества движения.

Подобным же образом, как уже было отмечено выше, получаются и другие два интеграла, которые легко также выводятся из найденного первого циклической перестановкой букв ξ, η, ζ и заменой первого индекса «1» у направляющих косинусов индексами «2» и «3» соответственно.

Выведенные три интеграла напишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n}\left[m_i(\eta_i\dot{\zeta}_i-\zeta_i\dot{\eta}_i)+A_i p_i a_{11}^{(i)}+B_i q_i a_{12}^{(i)}+C_i r_i a_{13}^{(i)}\right]=c_1,\\
&\sum_{i=0}^{n}\left[m_i(\zeta_i\dot{\xi}_i-\xi_i\dot{\zeta}_i)+A_i p_i a_{21}^{(i)}+B_i q_i a_{22}^{(i)}+C_i r_i a_{23}^{(i)}\right]=c_2,\\
&\sum_{i=0}^{n}\left[m_i(\xi_i\dot{\eta}_i-\eta_i\dot{\xi}_i)+A_i p_i a_{31}^{(i)}+B_i q_i a_{32}^{(i)}+C_i r_i a_{33}^{(i)}\right]=c_3,
\end{aligned}\right\}\qquad(8.13)$$

где c_1, c_2, c_3 обозначают три произвольные постоянные интегрирования.

Так как левые части равенств (8.13) представляют собой проекции на абсолютные оси вектора полного момента количества движения всей системы тел, то интегралы (8.13) действительно можно назвать интегралами момента количества движения или, более просто, интегралами моментов.

Наконец, последний интеграл — интеграл живой силы или интеграл энергии — можно написать сразу, имея в виду, что уравнения (8.7) суть преобразованные уравнения (8.5), которые, как уравнения Лагранжа второго рода, имеют всегда интеграл $T-U=h$.

Этот последний интеграл напишется в следующем виде:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\left[m_i(\dot{\xi}_i^2+\dot{\eta}_i^2+\dot{\zeta}_i^2)+A_i p_i^2+B_i q_i^2+C_i r_i^2\right]=U+h,\qquad(8.14)$$

где h — произвольная постоянная.

Итак, дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения системы абсолютно твердых взаимно притягивающихся тел имеют такие же десять первых интегралов, как и уравнения поступательного движения системы взаимно притягивающихся материальных точек.

При этом выведенные интегралы имеют место независимо от вида и структуры тел системы, а также при любом их числе.

3. Если все тела системы вполне произвольны, то уравнения поступательно-вращательного движения не имеют других интегралов, кроме десяти указанных*). Но в частных случаях уравнения (8.7) могут иметь еще некоторые другие интегралы.

Действительно, пусть некоторые тела системы, например M_0, M_1, ..., M_k $(k \leqslant n)$, суть шары, обладающие сферической структурой. Тогда для каждого из этих тел любые три взаимно перпендикулярные прямые, проходящие через центр шара, являются главными, центральными осями инерции (центр такого шара является также его центром инерции). Поэтому очевидно, что

$$A_i = B_i = C_i \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

и, кроме того, ясно, что силовая функция U не зависит от эйлеровых углов ψ_i, φ_i, ϑ_i $(i=0, 1, 2, \ldots, k)$.

Тогда

$$\frac{\partial U}{\partial \psi_i} = \frac{\partial U}{\partial \varphi_i} = \frac{\partial U}{\partial \vartheta_i} = 0 \qquad (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

и уравнения (8.6′) дают немедленно

$$p_i = p_i^{(0)} = \text{const}, \quad q_i = q_i^{(0)} = \text{const}, \quad r_i = r_i^{(0)} = \text{const} \qquad (8.15)$$
$$(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k),$$

а это и есть дополнительные интегралы уравнений задачи в рассматриваемом случае.

Интегралы (8.15) показывают, что угловая скорость ω_i вращения каждого из тел M_0, M_1, ..., M_k остается постоянной по величине и направлению относительно собственной для каждого тела системы координат. Но так как главные оси инерции, принятые за оси собственной системы координат, для каждого из тел M_i $(i=0, 1, \ldots, k)$ совершенно произвольны, то отсюда

---

*) Лучше сказать, что в общем случае нам неизвестны никакие другие интегралы уравнений (8.7), кроме десяти классических. Отметим, что эти десять интегралов получены независимо друг от друга В. В. Белецким и Г. Н. Дубошиным. См. Г. Н. Дубошин, О дифференциальных уравнениях поступательно-вращательного движения, Астрон. журн. 35, вып. 2, 1958, и В. В. Белецкий, Некоторые вопросы поступательно-вращательного движения твердого тела в ньютоновском поле сил, Сб. «Искусственные спутники Земли», Изд-во АН СССР, 1963.

следует, что угловая скорость вращения каждого из этих тел будет оставаться постоянной (по величине и направлению) и относительно абсолютной системы координат. Иными словами, каждое из этих тел-шаров будет вращаться равномерно вокруг некоторой неизменной оси, определяемой исключительно начальными условиями задачи.

Так как силовая функция U не зависит от эйлеровых углов тел-шаров, то уравнения (8.6) и (8.6′) не будут содержать этих переменных, а поэтому порядок системы, определяющий остальные неизвестные, будет на $6k$ единиц ниже порядка первоначальной системы (8.7).

Особого внимания заслуживает случай, когда $k=n$, т. е. когда каждое из тел системы есть шар, обладающий сферическим распределением плотностей.

Тогда силовая функция U совершенно не зависит от эйлеровых углов, и уравнения (8.7) приводятся только к системе (8.6), определяющей поступательные движения точек G_i — центров шаров, как материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Вращательное движение тел-шаров не зависит от их поступательных движений и может быть определено без всякого труда.

Действительно, вращательное движение каждого тела-шара определяется независимой системой уравнений группы (8.2), которая представляет собой систему трех дифференциальных уравнений первого порядка относительно эйлеровых углов каждого тела.

Решение этих уравнений может быть написано сразу, если заметить, что благодаря произволу выбора собственной для каждого тела системы координат эту собственную систему можно выбрать так, чтобы ось $G_i \zeta_i'$ совпадала с направлением вектора ω_i угловой скорости вращения тела. Тогда будем иметь

$$p_i=0, \quad q_i=0, \quad r_i=\omega_i=\mathrm{const},$$

и уравнения (8.2) дадут, как легко убедиться,

$$\psi_i=\psi_i^{(0)}=\mathrm{const}, \quad \vartheta_i=\vartheta_i^{(0)}=\mathrm{const}, \quad \varphi_i=\omega_i(t-t_0)+\varphi_i^{(0)}.$$

Второй важный для приложений частный случай будем иметь тогда, когда каждое из $k+1$ тел (например, тела M_0, M_1, ..., M_k) есть тело вращения, обладающее осесимметричным распределением плотностей (ось симметрии распределения плотностей должна совпадать с осью поверхности вращения, ограничивающей тело извне).

Тогда центр симметрии такого тела обязательно лежит на оси симметрии, которую и можно принять за ось аппликат собственной для такого тела системы координат. В этом случае *)

$$A_i = B_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, k),$$

а силовая функция U не зависит от углов $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$.

Поэтому третьи уравнения группы (8.6′) дают

$$r_i = r_i^{(0)} = \text{const} \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k). \tag{8.15′}$$

Эти интегралы позволяют понизить порядок системы на $2k$ единиц, так что решение задачи приведется к интегрированию системы $12(n+1) - 2k$-го порядка и определению затем переменных $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ простыми квадратурами соответствующих уравнений (8.2), которые дают

$$\varphi_i = \varphi_i^{(0)} + r_i^{(0)}(t - t_0) - \int_{t_0}^{t} \dot{\psi}_i \cos\vartheta_i\,dt \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Полезно отметить, что в рассмотренном случае переменные углы собственного вращения тел $M_0, M_1, \ldots, M_k$ являются циклическими координатами системы. В самом деле, силовая функция U не зависит, как уже было замечено, от величин $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_k$. Живая сила T_i тела M_i, определяемая формулой (8.3), также не зависит от φ_i, так как

$$A_i p_i^2 + B_i q_i^2 = A_i(\sin^2\vartheta_i \cdot \dot{\psi}_i^2 + \dot{\vartheta}_i^2) \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Следовательно, полная живая сила системы T также не зависит от величин $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$, т. е. эти величины являются, действительно, циклическими координатами.

Тогда уравнения (8.5) дают

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} = c_i = \text{const} \qquad (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k).$$

Но

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_i} = \frac{\partial T_i}{\partial \dot{\varphi}_i} = C_i r_i,$$

и мы опять приходим к интегралам (8.15′).

§ 3. Дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения в относительных осях

1. Десять классических интегралов (8.11), (8.13) и (8.14) уравнений поступательно-вращательного движения $n+1$ тел в абсолютной системе координат позволяют, конечно, понизить порядок системы (8.7) на десять единиц.

---

*) См. § 4 гл. V этой книги, а также любой курс теоретической механики, например, книгу Г. К. Суслова, Теоретическая механика.

Однако, так же как и в случае задачи о движении взаимно притягивающихся материальных точек, эффективным для практических приложений оказывается лишь использование для понижения порядка системы (8.7) шести интегралов движения центра инерции всей системы.

Для понижения порядка системы (8.7) перейдем от абсолютной системы координат $O\xi\eta\zeta$ к относительной с началом в одной из точек G_i. Для определенности, возьмем начало координат новой системы в точке G_0, оставляя направления осей координат неизменными и параллельными соответствующим осям абсолютной системы (рис. 45).

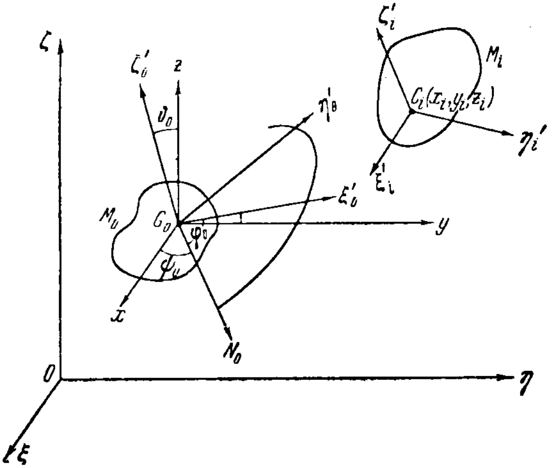


Рис. 45.

Обозначим относительные координаты тела M_i (т. е. центра инерции G_i тела M_i) через x_i, y_i, z_i, так что будем иметь для $i=1, 2, \ldots, n$:

$$x_i=\xi_i-\xi_0, \quad y_i=\eta_i-\eta_0, \quad z_i=\zeta_i-\zeta_0. \tag{8.16}$$

Другие переменные, т. е. эйлеровы углы всех тел системы, не изменятся, так как направления новых осей совпадают, как принято, с направлениями абсолютных осей.

Так как силовая функция U_{ij} взаимного притяжения двух тел M_i и M_j зависит только от разностей координат точек G_i и G_j *), то полная силовая функция U всей системы (8.4′) зави-

---

*) См. § 10 гл. I и § 6 гл. V. Это свойство и было использовано для вывода интегралов движения центра инерции в предыдущем параграфе.

сит только от разностей абсолютных координат всех точек G_i и так как в силу (8.16)

$$\xi_j-\xi_i=x_j-x_i,\quad \eta_j-\eta_i=y_j-y_i,\quad \zeta_j-\zeta_i=z_j-z_i,$$

то после преобразования к новым переменным U будет функцией от $3n$ относительных координат точек G_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ и от $3(n+1)$ эйлеровых углов всех $n+1$ тел системы.

Чтобы получить преобразованные уравнения, заметим, что, например,

$$\ddot{x}_i=\ddot{\xi}_i-\ddot{\xi}_0=\frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial \xi_i}-\frac{1}{m_0}\frac{\partial U}{\partial \xi_0}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Но очевидно, что

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_0}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial U_{j0}}{\partial \xi_0}=-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial U_{j0}}{\partial x_j}.$$

Далее имеем

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_i}=\frac{\partial U}{\partial x_i}=\sum_{j=0}^{n}{}'\,\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_i}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

что позволяет написать

$$\frac{1}{m_i}\frac{\partial U}{\partial \xi_i}-\frac{1}{m_0}\frac{\partial U}{\partial \xi_0}=\frac{1}{m_i}\sum_{j=0}^{n}{}'\,\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_i}+\frac{1}{m_0}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial U_{j0}}{\partial x_j}=$$
$$=\frac{m_0+m_i}{m_0m_i}\frac{\partial U_{i0}}{\partial x_i}+\frac{1}{m_i}\sum_{j=1}^{n}{}'\,\frac{\partial U_{ij}}{\partial x_i}+\frac{1}{m_0}\sum_{j=1}^{n}{}'\,\frac{\partial U_{j0}}{\partial x_j}=$$
$$=\frac{m_0+m_i}{m_0m_i}\frac{\partial U_{i0}}{\partial x_i}+\frac{\partial R_i}{\partial x_i}\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где положено для сокращения

$$R_i=\sum_{j=1}^{n}{}'\left\{\frac{1}{m_i}U_{ij}+\frac{1}{m_0}\left[x_i\frac{\partial U_{j0}}{\partial x_j}+y_i\frac{\partial U_{j0}}{\partial y_j}+z_i\frac{\partial U_{j0}}{\partial z_j}\right]\right\}.\qquad (8.17)$$

Составляя таким же образом выражения для вторых производных от y_i и z_i, мы можем написать уравнения поступательного движения тел $M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_n$ в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}_i&=\frac{m_0+m_i}{m_0m_i}\frac{\partial U_{i0}}{\partial x_i}+\frac{\partial R_i}{\partial x_i},\\ \ddot{y}_i&=\frac{m_0+m_i}{m_0m_i}\frac{\partial U_{i0}}{\partial y_i}+\frac{\partial R_i}{\partial y_i},\\ \ddot{z}_i&=\frac{m_0+m_i}{m_0m_i}\frac{\partial U_{i0}}{\partial z_i}+\frac{\partial R_i}{\partial z_i}.\end{aligned}\right\}\qquad (8.18)$$

Присоединяя к уравнениям (8.18) уравнения (8.6′) и (8.2), которые остаются неизменными*), мы получим полную систему уравнений второго порядка с таким же числом неизвестных функций:

$$\left.\begin{aligned} x_1,\ y_1,\ z_1,\ \ldots,\ x_n,\ y_n,\ z_n,\\ \psi_0,\ \varphi_0,\ \vartheta_0,\ \psi_1,\ \varphi_1,\ \vartheta_1,\ \ldots,\ \psi_n,\ \varphi_n,\ \vartheta_n. \end{aligned}\right\} \qquad (8.19)$$

Для полученных уравнений можно написать четыре первых интеграла, преобразуя интегралы (8.13) и (8.14) к новым переменным. Мы не будем выписывать эти интегралы и заметим только, что те члены в равенствах (8.13) и (8.14), которые зависят от поступательного движения тел, должны быть заменены членами, совокупности которых образуют левые части равенств (7.27) и (7.27′), являющихся интегралами уравнений относительного движения материальных точек.

Если тело M_0 есть шар (или шаровой слой), обладающий сферическим распределением плотностей, то U не зависит от углов ψ_0, φ_0, ϑ_0, а поэтому из уравнений (8.2) и (8.6) можно отбросить те, для которых $i=0$. Оставшиеся уравнения этих двух групп и уравнения (8.16) образуют тогда совместную систему порядка $12n$ с таким же числом неизвестных функций**).

2. Движения тел M_1, M_2, …, M_n можно отнести также к системе осей координат, совпадающих с главными центральными осями инерции тела M_0, т. е. к системе координат, у которой и положение начала и направления осей не будут оставаться неизменными с течением времени***).

При переходе к такой системе координат изменятся уравнения и поступательного и вращательного движения. Чтобы получить эти уравнения, нужно только выразить живую силу всей системы T в новых координатах, а затем написать вновь уравнения типа (8.5). Не останавливаясь для сокращения на промежуточных выкладках, мы приведем искомые уравнения в их окончательной форме.

Пусть x'_i, y'_i, z'_i суть координаты точек G_i относительно главных осей инерции тела M_0, т. е. относительно системы $G_0\xi'_0\eta'_0\zeta'_0$ (см. рис. 44); пусть, далее, p'_i, q'_i, r'_i суть проекции угловой скорости относительного движения тела M_i на главные центральные оси инерции этого тела и, наконец, p_0, q_0, r_0 — проекции угловой скорости тела M_0 на его оси инерции.

---

*) Нужно только, само собой разумеется, выразить силовую функцию U через относительные координаты. Конечно, выражение для U можно представить только рядом, как это было сделано для двух тел в гл. V.

**) В число неизвестных функций включаются также первые производные от относительных координат и эйлеровых углов.

***) См., например, Г. К. Суслов, Теоретическая механика, а также мою статью в Астрон. журн. 35, вып. 2, 1958.

Тогда уравнения поступательно-вращательного движения напишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{x}_i' + 2(q_0\dot{z}_i' - r_0\dot{y}_i') + z_i'\dot{q}_0 - y_i'\dot{r}_0 - x_i'\omega_0^2 + \\
&\qquad + p_0(p_0x_i' + q_0y_i' + r_0z_i') = \frac{m_0+m_i}{m_0m_i}\frac{\partial U_{i0}}{\partial x_i'} + \frac{\partial R_i}{\partial x_i'}, \\
&\ddot{y}_i' + 2(r_0\dot{x}_i' - p_0\dot{z}_i') + x_i'\dot{r}_0 - z_i'\dot{p}_0 - y_i'\omega_0^2 + \\
&\qquad + q_0(p_0x_i' + q_0y_i' + r_0z_i') = \frac{m_0+m_i}{m_0m_i}\frac{\partial U_{i0}}{\partial y_i'} + \frac{\partial R_i}{\partial y_i'}, \\
&\ddot{z}_i' + 2(p_0\dot{y}_i' - q_0\dot{x}_i') + y_i'\dot{p}_0 - x_i'\dot{q}_0 - z_i'\omega_0^2 + \\
&+ r_0(p_0x_i' + q_0y_i' + r_0z_i') = \frac{m_0+m_i}{m_0m_i}\frac{\partial U_{i0}}{\partial z_i'} + \frac{\partial R_i}{\partial z_i'},
\end{aligned}\right\}\qquad (8.20)$$

$$\left.\begin{aligned}
&A_i(\dot{p}_i' + \dot{p}_0^{(i)}) - (B_i - C_i)(q_i' + q_0^{(i)})(r_i' + r_0^{(i)}) = \\
&\qquad = \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_i'} - \cos\vartheta_i'\frac{\partial U}{\partial \varphi_i'}\right]\frac{\sin\varphi_i'}{\sin\vartheta_i'} + \cos\varphi_i'\frac{\partial U}{\partial \vartheta_i'}, \\
&B_i(\dot{q}_i' + \dot{q}_0^{(i)}) - (C_i - A_i)(r_i' + r_0^{(i)})(p_i' + p_0^{(i)}) = \\
&\qquad = \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_i'} - \cos\vartheta_i'\frac{\partial U}{\partial \varphi_i'}\right]\frac{\cos\varphi_i'}{\sin\vartheta_i'} - \sin\varphi_i'\frac{\partial U}{\partial \vartheta_i'}, \\
&\quad C_i(\dot{r}_i' + \dot{r}_0^{(i)}) - (A_i - B_i)(p_i' + p_0^{(i)})(q_i' + q_0^{(i)}) = \frac{\partial U}{\partial \varphi_i'},
\end{aligned}\right\}\qquad (8.20)'$$

$$\left.\begin{aligned}
&A_0\dot{p}_0 - (B_0 - C_0)q_0r_0 = \\
&\qquad = \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_0} - \cos\vartheta_0\frac{\partial U}{\partial \varphi_0}\right]\frac{\sin\varphi_0}{\sin\vartheta_0} + \cos\varphi_0\frac{\partial U}{\partial \vartheta_0}, \\
&B_0\dot{q}_0 - (C_0 - A_0)r_0p_0 = \\
&\qquad = \left[\frac{\partial U}{\partial \psi_0} - \cos\vartheta_0\frac{\partial U}{\partial \varphi_0}\right]\frac{\cos\varphi_0}{\sin\vartheta_0} - \sin\varphi_0\frac{\partial U}{\partial \vartheta_0}, \\
&C_0\dot{r}_0 - (A_0 - B_0)p_0q_0 = \frac{\partial U}{\partial \varphi_0},
\end{aligned}\right\}\qquad (8.20'')$$

где

$$\begin{aligned}
\omega_0^2 &= p_0^2 + q_0^2 + r_0^2, \\
p_0^{(i)} &= a_{11}'^{(i)}p_0 + a_{21}'^{(i)}q_0 + a_{31}'^{(i)}r_0, \\
q_0^{(i)} &= a_{12}'^{(i)}p_0 + a_{22}'^{(i)}q_0 + a_{32}'^{(i)}r_0, \\
r_0^{(i)} &= a_{13}'^{(i)}p_0 + a_{23}'^{(i)}q_0 + a_{33}'^{(i)}r_0,
\end{aligned}$$

и $a_{sk}^{\prime(i)}$ суть направляющие косинусы главных центральных осей инерции тела M_i по отношению к осям $G_0x'y'z'$.

Эти направляющие косинусы, а также величины p_i', q_i', r_i' и p_0, q_0, r_0 связаны с углами Эйлера ψ_i', φ_i', ϑ_i' и ψ_0, φ_0, ϑ_0 формулами, совершенно подобными формулам (1.27) и (8.2), так что выписывать эти формулы заново нет необходимости.

Силовая функция U, а также функции U_{i0} и R_i должны быть выражены через новые переменные, т. е. через

$$\left.\begin{array}{c} x_1',\ y_1',\ z_1',\ \ldots,\ x_n',\ y_n',\ z_n', \\ \psi_0,\ \varphi_0,\ \vartheta_0,\ \psi_1',\ \varphi_1',\ \vartheta_1',\ \ldots,\ \psi_n',\ \varphi_n',\ \vartheta_n', \end{array}\right\} \qquad (8.21)$$

которые и являются неизвестными функциями в этой задаче.

Уравнения (8.20) значительно упрощаются, если тело M_0 есть шар (или шаровой слой), обладающий сферическим распределением плотностей. Действительно, в этом случае, как было отмечено выше, $A_0=B_0=C_0$, и силовая функция не зависит от углов Эйлера ψ_0, φ_0, ϑ_0. Поэтому уравнения (8.20″) дают опять

$$p_0=\text{const},\quad q_0=\text{const},\quad r_0=\text{const}.$$

Таким образом, тело M_0 вращается вокруг неизменной оси с постоянной угловой скоростью ω_0. Выбирая теперь упомянутую неизменную ось за ось аппликат собственной для тела M_0 системы координат, мы будем иметь

$$p_0=0,\quad q_0=0,\quad r_0=\omega_0.$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} p_0^{(i)} &= a_{31}^{\prime(i)} r_0 = \omega_0 \sin\varphi_i' \sin\vartheta_i', \\ q_0^{(i)} &= a_{32}^{\prime(i)} r_0 = \omega_0 \cos\varphi_i' \sin\vartheta_i', \\ r_0^{(i)} &= a_{33}^{\prime(i)} r_0 = \omega_0 \cos\vartheta_i'. \end{aligned}$$

Полагая затем для сокращения

$$\bar{p}_i = p_i' + p_0^{(i)},\quad \bar{q}_i = q_i' + q_0^{(i)},\quad \bar{r}_i = r_i' + r_0^{(i)},$$

мы напишем уравнения поступательно-вращательного движения тел M_1, M_2, ..., M_n относительно вращающейся равномерно вместе с телом M_0 системы координат в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{x}'_i - 2\omega_0\dot{y}'_i - \omega_0^2 x'_i = \frac{m_0+m_i}{m_0 m_i}\frac{\partial U_{i0}}{\partial x'_i} + \frac{\partial R_i}{\partial x'_i},\\
&\ddot{y}'_i + 2\omega_0\dot{x}'_i - \omega_0^2 y'_i = \frac{m_0+m_i}{m_0 m_i}\frac{\partial U_{i0}}{\partial y'_i} + \frac{\partial R_i}{\partial y'_i},\\
&\ddot{z}'_i = \frac{m_0+m_i}{m_0 m_i}\frac{\partial U_{i0}}{\partial z'_i} + \frac{\partial R_i}{\partial z'_i},
\end{aligned}\right\} \qquad (8.22)$$

$$\left.\begin{aligned}
&A_i\dot{\bar{p}}_i - (B_i - C_i)\bar{q}_i\bar{r}_i = \left[\frac{\partial U}{\partial\psi'_i} - \cos\vartheta'_i\frac{\partial U}{\partial\varphi'_i}\right]\frac{\sin\varphi'_i}{\sin\vartheta'_i} + \cos\varphi'_i\frac{\partial U}{\partial\vartheta'_i},\\
&B_i\dot{\bar{q}}_i - (C_i - A_i)\bar{r}_i\bar{p}_i = \left[\frac{\partial U}{\partial\psi'_i} - \cos\vartheta'_i\frac{\partial U}{\partial\varphi'_i}\right]\frac{\cos\varphi'_i}{\sin\vartheta'_i} - \sin\varphi'_i\frac{\partial U}{\partial\vartheta'_i},\\
&C_i\dot{\bar{r}}_i - (A_i - B_i)\bar{p}_i\bar{q}_i = \frac{\partial U}{\partial\varphi'_i},
\end{aligned}\right\} \qquad (8.22')$$

$$\left.\begin{aligned}
&\bar{p}_i = (\dot{\psi}'_i + \omega_0)\sin\varphi'_i\sin\vartheta'_i + \dot{\vartheta}'_i\cos\varphi'_i,\\
&\bar{q}_i = (\dot{\psi}'_i + \omega_0)\cos\varphi'_i\sin\vartheta'_i - \dot{\vartheta}'_i\sin\varphi'_i,\\
&\bar{r}_i = (\dot{\psi}'_i + \omega_0)\cos\vartheta'_i + \dot{\varphi}'_i.
\end{aligned}\right\} \qquad (8.22'')$$

В частности, когда тело M_0 есть шар и $n=1$, мы напишем уравнения (8.22), отбрасывая для простоты значки, в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}' - 2\omega_0\dot{y}' - \omega_0^2 x' = \frac{m_0+m}{m_0 m}\frac{\partial U}{\partial x'},\\
&\ddot{y}' + 2\omega_0\dot{x}' - \omega_0^2 y' = \frac{m_0+m}{m_0 m}\frac{\partial U}{\partial y'},\\
&\ddot{z}' = \frac{m_0+m}{m_0 m}\frac{\partial U}{\partial z'},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&A\dot{\bar{p}} - (B - C)\bar{q}\bar{r} = \left[\frac{\partial U}{\partial\psi'} - \cos\vartheta'\frac{\partial U}{\partial\varphi'}\right]\frac{\sin\varphi'}{\sin\vartheta'} + \cos\varphi'\frac{\partial U}{\partial\vartheta'},\\
&B\dot{\bar{q}} - (C - A)\bar{r}\bar{p} = \left[\frac{\partial U}{\partial\psi'} - \cos\vartheta'\frac{\partial U}{\partial\varphi'}\right]\frac{\cos\varphi'}{\sin\vartheta'} - \sin\varphi'\frac{\partial U}{\partial\vartheta'},\\
&C\dot{\bar{r}} - (A - B)\bar{p}\bar{q} = \frac{\partial U}{\partial\varphi'},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\bar{p} = (\dot{\psi}' + \omega_0)\sin\varphi'\sin\vartheta' + \dot{\vartheta}'\cos\varphi',\\
&\bar{q} = (\dot{\psi}' + \omega_0)\cos\varphi'\sin\vartheta' - \dot{\vartheta}'\sin\varphi',\\
&\bar{r} = (\dot{\psi}' + \omega_0)\cos\vartheta' + \dot{\varphi}',
\end{aligned}$$

где

$$U=f\int\limits_{(M_0)} dm_0 \int\limits_{(M)} \frac{dm}{\Delta}=fm_0\int\limits_{(M)} \frac{dm}{\Delta},$$

есть функция только шести переменных,

$$x',\ y',\ z',\ \psi',\ \varphi',\ \vartheta',$$

т. е. трех координат x', y', z' центра инерции тела M во вращающейся равномерно системе координат, связанной с телом-шаром M_0, а ψ', φ', ϑ' суть эйлеровы углы, определяющие ориентацию тела M в той же системе координат.

Если тело M также есть шар (или шаровой слой), обладающий сферическим распределением плотностей, то $A=B=C$, и силовая функция не зависит от углов ψ', φ', ϑ'.

Поэтому предыдущие уравнения дают $\bar{p}=\text{const}$, $\bar{q}=\text{const}$, $\bar{r}=\text{const}$, а первые три уравнения определяют поступательное движение тела M относительно осей, неизменно связанных с телом M_0.

§ 4. Приближенные уравнения поступательно-вращательного движения

1. Для интегрирования дифференциальных уравнений поступательно-вращательного движения как в абсолютных так и в относительных осях необходимо знать выражение силовой функции U, в зависимости от тех зависимых переменных, которые желательно определить. Однако в общем случае силовая функция представляется (см. формулы (8.4) и (8.4′)) в виде суммы интегралов, каждый из которых имеет кратность не меньшую двух и не большую шести. Все эти интегралы вообще не вычисляются в конечном виде и могут быть выражены только при помощи бесконечных рядов того или иного вида.

В § 6 гл. V было показано, как можно получить разложение силовой функции взаимного притяжения двух тел, независимо от их формы и структуры. Применяя полученные там формулы к любым двум телам M_i и M_j, мы будем иметь следующие разложения:

$$U_{ij}=f\sum_{s=0}^{\infty}\frac{U_{ij}^{(s)}}{R_{ij}^{2s+1}}, \tag{8.23}$$

где в абсолютной системе координат

$$R_{ij}=\sqrt{(\xi_j-\xi_i)^2+(\eta_j-\eta_i)^2+(\zeta_j-\zeta_i)^2}$$

есть расстояние между центрами инерции G_i и G_j рассматриваемых тел, а $U_{ij}^{(s)}$ — некоторые многочлены относительно абсолютных координат G_i и G_j, коэффициенты которых зависят от эйлеровых углов обоих тел.

Первые члены разложений (8.23), как было выведено в § 6 гл. V, имеют следующий вид:

$$U_{ij}=f\frac{m_i m_j}{R_{ij}}+fm_j\frac{A_i+B_i+C_i-3I_i^{(i,\,j)}}{2R_{ij}^3}+\\+fm_i\frac{A_j+B_j+C_j-3I_j^{(i,\,j)}}{2R_{ij}^3}+\ldots, \tag{8.24}$$

где $I_i^{(i,\,j)}$ и $I_j^{(i,\,j)}$ суть моменты инерции тел M_i и M_j относительно прямой, проходящей через центры инерции этих тел, т. е.

$$\left.\begin{aligned}I_i^{(i,\,j)}&=A_i\alpha_{ij}^2+B_i\beta_{ij}^2+C_i\gamma_{ij}^2,\\ I_j^{(i,\,j)}&=A_j\alpha_{ji}^2+B_j\beta_{ji}^2+C_j\gamma_{ji}^2,\end{aligned}\right\} \tag{8.25}$$

где α_{ij}, β_{ij}, γ_{ij} суть косинусы углов, образуемых прямой G_iG_j с главными центральными осями инерции тела *) M_i, а α_{ji}, β_{ji}, γ_{ji} суть аналогичные величины для тела M_j.

Поэтому имеем (аналогично формулам § 6 гл. V)

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{ij}&=(\cos\psi_i\cos\varphi_i-\sin\psi_i\sin\varphi_i\cos\vartheta_i)\frac{\xi_j-\xi_i}{R_{ij}}+\\&\quad+(\sin\psi_i\cos\varphi_i+\cos\psi_i\sin\varphi_i\cos\vartheta_i)\frac{\eta_j-\eta_i}{R_{ij}}+\\&\quad+\sin\varphi_i\sin\vartheta_i\frac{\zeta_j-\zeta_i}{R_{ij}},\\ \beta_{ij}&=(-\cos\psi_i\sin\varphi_i-\sin\psi_i\cos\varphi_i\cos\vartheta_i)\frac{\xi_j-\xi_i}{R_{ij}}+\\&\quad+(-\sin\psi_i\sin\varphi_i+\cos\psi_i\cos\varphi_i\cos\vartheta_i)\frac{\eta_j-\eta_i}{R_{ij}}+\\&\quad+\cos\varphi_i\sin\vartheta_i\frac{\zeta_j-\zeta_i}{R_{ij}},\\ \gamma_{ij}&=\sin\psi_i\sin\vartheta_i\frac{\xi_j-\xi_i}{R_{ij}}-\cos\psi_i\sin\vartheta_i\frac{\eta_j-\eta_i}{R_{ij}}+\\&\quad+\cos\vartheta_i\frac{\zeta_j-\zeta_i}{R_{ij}}.\end{aligned}\right\} \tag{8.26}$$

---

*) Напоминаем, что главные центральные оси инерции каждого тела приняты за оси собственной для этого тела системы координат. Отметим еще, что $\alpha_{ji}\neq\alpha_{ij}$, $\beta_{ji}\neq\beta_{ij}$, $\gamma_{ji}\neq\gamma_{ij}$.

Величины α_{ji}, β_{ji}, γ_{ji} получатся из формул (8.26) простой заменой ψ_i, φ_i, ϑ_i на эйлеровы углы тела M_j, т. е. на ψ_j, φ_j, ϑ_j.

2. Рассмотрим теперь вопрос о расщеплении полной системы дифференциальных уравнений поступательно-вращательного движения тел на две независимые или полунезависимые системы уравнений, каждая из которых определяла бы отдельно поступательные или вращательные движения.

В § 2 этой главы было уже отмечено, что если каждое тело системы есть шар (или шаровой слой), обладающий сферическим распределением плотностей, то полная силовая функция системы приводится к виду

$$U^{(0)}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}U_{ij}^{(0)}=\frac{1}{2}f\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{m_i m_j}{R_{ij}} \tag{8.27}$$

и зависит только от координат точек G_i. Поэтому в этом случае уравнения абсолютного движения (8.7) распадаются на две независимые системы, одна из которых,

$$m_i\ddot{\xi}_i=\frac{\partial U^{(0)}}{\partial \xi_i},\qquad m_i\ddot{\eta}_i=\frac{\partial U^{(0)}}{\partial \eta_i},\qquad m_i\ddot{\zeta}_i=\frac{\partial U^{(0)}}{\partial \zeta_i}, \tag{8.28}$$

определяет только поступательные движения наших тел-шаров, а вторая показывает, что каждое из тел-шаров M_i вращается вокруг неизменной оси, проходящей через его центр, с постоянной угловой скоростью.

Таким образом, в этом (впрочем, довольно тривиальном) случае мы имеем полное расщепление общей системы.

Совершенно очевидно, что во всяком другом случае мы не будем иметь полного расщепления системы (8.7) на две независимые системы, так как силовая функция U обязательно будет зависеть и от координат точек G_i и от эйлеровых углов тел M_i.

Однако в конкретных задачах небесной механики мы не имеем возможности составить полное выражение U и принуждены использовать только ее приближенное выражение, представляемое суммой нескольких первых членов рядов вида (8.23).

Рассматривая опять систему произвольных твердых тел, посмотрим теперь, с какой степенью приближения, считая все расстояния достаточно большими по сравнению с линейными размерами тел, можно отделить уравнения поступательного движения от уравнений вращательного движения и получить, таким образом, вместо одной, весьма сложной, задачи — две, каждая из которых несколько проще.

Первые члены рядов (8.23) даются формулами (8.24), в которых первые члены суть величины первого порядка относительно обратных расстояний, а вторые — третьего порядка *).

---

*) Все остальные члены рядов (8.23) суть величины порядка выше третьего относительно обратных расстояний R_{ij}.

Считая, что наименьшее из обратных расстояний R_{ij} между телами системы таково, что третья степень его обратного значения есть величина настолько малая, что ею можно пренебречь, мы можем заменить полную силовую функцию U ее приближенным выражением U^0 по формуле (8.27)*). В этом приближении силовая функция будет зависеть только от прямоугольных координат точек G_i, а поэтому общие уравнения поступательно-вращательного движения разделятся на две системы.

Первая система, система (8.28), определит только поступательные движения тел, так же как если бы каждое из них было материальной точкой, а вторая система, получаемая из (8.6′) заменой U на U^0, которая не зависит от углов Эйлера, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} A_i\dot{p}_i-(B_i-C_i)\,q_ir_i&=0,\\ B_i\dot{q}_i-(C_i-A_i)\,r_ip_i&=0,\\ C_i\dot{r}_i-(A_i-B_i)\,p_iq_i&=0\\ (i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n).& \end{aligned}\right\} \qquad (8.28')$$

Таким образом, при указанной степени приближения силовой функции поступательные и вращательные движения тел не зависят друг от друга. Кроме того, очевидно, что вся система (8.28′) распадается на $n+1$ независимых систем, каждая из которых определяет вращательное движение каждого из тел системы так, как будто бы оно не подвергается воздействиям внешних сил (случай Эйлера вращения абсолютно твердого тела). Известно, что каждая из систем (8.28′) интегрируется в квадратурах при помощи эллиптических функций.

Если же кубами обратных расстояний пренебречь невозможно, то силовая функция необходимо будет зависеть от всех переменных (8.1), и уравнения (8.6), (8.6′) или (8.7) не разделятся на две независимые системы.

Однако более правильно отбрасывать члены выше известного порядка *не в силовой функции*, а в самих дифференциальных уравнениях, т. е. в частных производных от силовой функции по переменным (8.1).

Дифференцируя разложение (8.23) по переменным (8.1), мы получим соответствующие разложения для составляющих силы притяжения, действующей на тело M_i (со стороны тела M_j), и для составляющих момента этой силы, т. е. получим разложения правых частей уравнений (8.6) и (8.6′) или (8.7).

---

*) Обратные значения взаимных расстояний, превышающих наименьшее, очевидно, суть величины еще более малые, так что их третьими степенями также можно пренебречь.

Таким образом, получим следующие разложения:

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi_i}=f\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{\dfrac{\partial U_{ij}^{(k)}}{\partial \xi_i}}{R_{ij}^{2k+1}}+\frac{(2k+1)(\xi_j-\xi_i)}{R_{ij}^{2k+3}}U_{ij}^{(k)}\right\} \tag{8.29}$$

(аналогично для двух других составляющих) и

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial \varphi_i}=f\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\dfrac{\partial U_{ij}^{(k)}}{\partial \varphi_i}}{R_{ij}^{2k+1}} \tag{8.29'}$$

(аналогично для двух других производных).

Далее, очевидно, можем написать

$$\frac{\partial U}{\partial \xi_i}=\sum_{j=0}^{n}{}' \frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi_i}, \tag{8.30}$$

и

$$\frac{\partial U}{\partial \varphi_i}=\sum_{j=0}^{n}{}' \frac{\partial U_{ij}}{\partial \varphi_i} \tag{8.30'}$$

(аналогично и для всех остальных производных).

Если ограничиться приближенным выражением (8.24) силовой функции взаимного притяжения двух тел, то получим соответственно:

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi_i}=fm_im_j\frac{\xi_j-\xi_i}{R_{ij}^3}+\frac{3}{2}fm_i\left[A_j+B_j+C_j-3I_j^{(i,\,j)}\right]\frac{\xi_j-\xi_i}{R_{ij}^5}+\\+\frac{3}{2}fm_j\left[A_i+B_i+C_i-3I_i^{(i,\,j)}\right]\frac{\xi_j-\xi_i}{R_{ij}^5}-\\-\frac{3}{2}\frac{fm_i}{R_{ij}^3}\frac{\partial I_i^{(i,\,j)}}{\partial \xi_i}-\frac{3}{2}\frac{fm_j}{R_{ij}^3}\frac{\partial I_j^{(i,\,j)}}{\partial \xi_i}+\ldots\end{aligned} \tag{8.31}$$

и

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial \varphi_i}=-\frac{3}{2}\frac{fm_j}{R_{ij}^3}\frac{\partial I_i^{(i,\,j)}}{\partial \varphi_i}+\ldots \tag{8.31'}$$

где, ввиду (8.25) ($s=i,\ j$),

$$\frac{\partial I_s^{(i,\,j)}}{\partial \xi_i}=2A_s\alpha_{ij}\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \xi_i}+2B_s\beta_{ij}\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial \xi_i}+2C_s\gamma_{ij}\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \xi_i},$$

$$\frac{\partial I_s^{(i,\,j)}}{\partial \varphi_i}=2A_s\alpha_{ij}\frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \varphi_i}+2B_s\beta_{ij}\frac{\partial \beta_{ij}}{\partial \varphi_i}+2C_s\gamma_{ij}\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial \varphi_i}.$$

Подобным же образом можно получить выражения и для всех остальных частных производных от U_{ij}, а значит, и от полной силовой функции U. Входящие в эти выражения производные по величинам (8.1) от направляющих косинусов находятся легко дифференцированием формул (8.26) и им подобных. Например, мы имеем

$$\frac{\partial\alpha_{ij}}{\partial\xi_i}=(\cos\psi_i\cos\varphi_i-\sin\psi_i\sin\varphi_i\cos\vartheta_i)\left[-\frac{1}{R_{ij}}+\frac{(\xi_j-\xi_i)^2}{R_{ij}^3}\right]-$$

$$-(\sin\psi_i\cos\varphi_i+\cos\psi_i\sin\varphi_i\cos\vartheta_i)\frac{(\xi_j-\xi_i)(\eta_j-\eta_i)}{R_{ij}^3}-$$

$$-\sin\varphi_i\sin\vartheta_i\frac{(\xi_j-\xi_i)(\zeta_j-\zeta_i)}{R_{ij}^3}.$$

Рассматривая полученные выражения для частных производных от силовой функции U_{ij}, мы можем заметить, что первый член в (8.31) есть величина второго порядка относительно обратного расстояния, первый член в (8.31′) — третьего порядка, а все остальные члены в (8.31) и (8.31′) соответственно выше второго и третьего порядков *).

Поэтому если в интересующей нас задаче обратная величина наименьшего из всех расстояний может рассматриваться как *малая величина первого порядка* и мы желаем сохранить в уравнениях (8.6) и (8.6′) члены одинакового порядка, то придем к следующему:

Сохраняя члены только второго порядка относительно обратных расстояний **), мы должны положить в уравнениях (8.6)

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial\xi_i}=fm_im_j\frac{\xi_j-\xi_i}{R_{ij}^3}=\frac{\partial U_{ij}^0}{\partial\xi_i},$$

а в уравнениях (8.6′) все частные производные от силовой функции должны заменить нулями. Тогда, очевидно, мы получим вместо (8.6) и (8.6′) уравнения (8.28) и (8.28′), т. е. будем иметь тот же эффект, как если бы заменили полную силовую функцию U функцией U^0.

---

*) Нужно обратить внимание на то, что величины типа $\frac{\xi_j-\xi_i}{R_{ij}}$ представляют собой направляющие косинусы и могут иметь любое числовое значение от нуля до единицы. Кроме того, нужно иметь в виду, что следующий член в (8.31) есть величина уже четвертого порядка.

**) Мы рассматриваем величину, обратную наименьшему из расстояний, как малую первого порядка. Разумеется, среди остальных обратных расстояний могут найтись величины более высокого порядка, которые могут быть отброшены. В этих случаях мы будем иметь некоторое упрощение.

Если желательно сохранить в дифференциальных уравнениях члены второго и третьего порядков, а все члены, начиная с членов четвертого порядка — отбросить, то в уравнениях (8.6) мы опять должны положить

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial \xi_i} = fm_i m_j \frac{\xi_j - \xi_i}{R_{ij}^3},$$

и тогда уравнения (8.6) опять приведутся к системе (8.28), которая не содержит эйлеровых углов и может быть интегрирована отдельно.

Но в уравнениях (8.6′) с той же точностью нужно положить

$$\frac{\partial U_{ij}}{\partial \varphi_i} = -\frac{3}{2} \frac{fm_j}{R_{ij}^3} \frac{\partial I_i^{(i,\ j)}}{\partial \varphi_i}.$$

Тогда правые части уравнений (8.6′) будут функциями и эйлеровых углов и координат точек G_i. Предполагая, что уравнения поступательного движения (8.28) (т. е. уравнения, определяющие движение системы взаимно притягивающихся материальных точек) проинтегрированы, мы можем подставить в уравнения (8.6′) вместо координат ξ_i, η_i, ζ_i найденные выражения их в функции времени и произвольных постоянных, после чего правые части уравнений (8.6′) сделаются функциями эйлеровых углов и времени. Эти уравнения образуют тогда совместную систему порядка $6n+6$ и интегрирование этих уравнений определит вращательные движения тел системы с принятой степенью точности.

Легко теперь видеть, что в следующем приближении, т. е. когда мы пожелаем сохранить в уравнениях (8.6) и (8.6′) все члены до четвертого порядка включительно, эти уравнения уже не будут распадаться на две независимые (или полунезависимые) системы и должны интегрироваться совместно.

Рассмотрим теперь вопрос об интегралах приближенных уравнений поступательно-вращательного движения.

Представим для этой цели полную силовую функцию U_{ij} в следующем виде:

$$U_{ij} = U_{ij}^0 + U_{ij}^{(1)} + \ldots, \tag{8.32}$$

где

$$U_{ij}^{(1)} = fm_j \frac{A_i + B_i + C_i - 3I_i^{(i,\ j)}}{2R_{ij}^3} + fm_i \frac{A_j + B_j + C_j - 3I_j^{(i,\ j)}}{2R_{ij}^3}, \tag{8.32′}$$

а все невыписанные члены имеют более высокий порядок.

Сохраняя в дифференциальных уравнениях (8.6) и (8.6′) только члены второго и третьего порядков (относительно обратных расстояний) мы, по существу, заменяем в уравнениях (8.6) полную силовую функцию функцией U^0, а в уравнениях (8.6′) — функцией $U^{(1)}$. Тогда уравнения (8.6) превращаются в уравнения (8.28) и имеют все десять классических интегралов.

Что касается уравнений (8.6′), определяющих вращательные движения тел, когда их поступательные движения уже известны, то здесь дело обстоит следующим образом.

Интегралы движения центра инерции не зависят от вращательных движений тел, поэтому к системе (8.6′) эти интегралы не имеют никакого отношения.

Интегралы (8.13) и (8.14) справедливы для полной системы уравнений поступательно-вращательного движения и сохраняются также при замене точной силовой функции ее приближением.

В силу уравнений поступательного движения (8.28) момент количества движения (поступательного) сохраняет постоянное значение во все время движения, а поэтому мы имеем также равенства

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n}(A_ip_ia_{11}^{(i)}+B_iq_ia_{12}^{(i)}+C_ir_ia_{13}^{(i)})=\bar{c}_1,\\
&\sum_{i=0}^{n}(A_ip_ia_{21}^{(i)}+B_iq_ia_{22}^{(i)}+C_ir_ia_{23}^{(i)})=\bar{c}_2,\\
&\sum_{i=0}^{n}(A_ip_ia_{31}^{(i)}+B_iq_ia_{32}^{(i)}+C_ir_ia_{33}^{(i)})=\bar{c}_3,
\end{aligned}\right\}\qquad(8.33)$$

представляющие собой первые интегралы уравнений вращательного движения и выражающие принцип сохранения момента вращательного движения системы.

Далее, для системы (8.28) имеем еще интеграл живой силы, который имеет вид

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}m_i(\dot{\xi}_i^2+\dot{\eta}_i^2+\dot{\zeta}_i^2)=U^0+h^0.\qquad(8.34)$$

В силу этого соотношения равенство (8.14) примет следующую форму:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}(A_ip_i^2+B_iq_i^2+C_ir_i^2)=U^{(1)}+h^{(1)},\qquad(8.34')$$

и может рассматриваться как **приближенный интеграл** уравнений вращательного движения.

§ 5. Канонические уравнения поступательно-вращательного движения

В заключение этой главы представим уравнения поступательно-вращательного движения в абсолютных осях (8.7) в канонической форме, что, очевидно, возможно, так как упомянутые уравнения являются следствиями уравнений (8.5), которые суть уравнения Лагранжа второго рода.

Примем за обобщенные координаты Лагранжа абсолютные координаты точек G_i и эйлеровы углы тел системы и определим сопряженные им канонические импульсы посредством общих формул:

$$\left.\begin{aligned}
&u_i=\frac{\partial T}{\partial\dot\xi_i}=m_i\dot\xi_i,\quad v_i=\frac{\partial T}{\partial\dot\eta_i}=m_i\dot\eta_i,\quad w_i=\frac{\partial T}{\partial\dot\zeta_i}=m_i\dot\zeta_i,\\
&\Psi_i=\frac{\partial T}{\partial\dot\psi_i}=A_ip_i\sin\varphi_i\sin\vartheta_i+B_iq_i\cos\varphi_i\sin\vartheta_i+C_ir_i\cos\vartheta_i,\\
&\Phi_i=\frac{\partial T}{\partial\dot\varphi_i}=C_ir_i,\\
&\Theta_i=\frac{\partial T}{\partial\dot\vartheta_i}=A_ip_i\cos\varphi_i-B_iq_i\sin\varphi_i.
\end{aligned}\right\}\qquad(8.35)$$

Тогда характеристическая (или гамильтонова) функция определится формулой

$$H=T-U=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}\{m_i(\dot\xi_i^2+\dot\eta_i^2+\dot\zeta_i^2)+A_ip_i^2+B_iq_i^2+C_ir_i^2\}-U\qquad(8.36)$$

и представляет полную энергию рассматриваемой системы взаимно притягивающихся тел.

Теперь уравнения поступательно-вращательного движения напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\dot\xi_i=\frac{\partial H}{\partial u_i},\quad \dot u_i=-\frac{\partial H}{\partial\xi_i},\quad \dot\psi_i=\frac{\partial H}{\partial\Psi_i},\quad \dot\Psi_i=-\frac{\partial H}{\partial\psi_i},\\
&\dot\eta_i=\frac{\partial H}{\partial v_i},\quad \dot v_i=-\frac{\partial H}{\partial\eta_i},\quad \dot\varphi_i=\frac{\partial H}{\partial\Phi_i},\quad \dot\Phi_i=-\frac{\partial H}{\partial\varphi_i},\\
&\dot\zeta_i=\frac{\partial H}{\partial w_i},\quad \dot w_i=-\frac{\partial H}{\partial\zeta_i},\quad \dot\vartheta_i=\frac{\partial H}{\partial\Theta_i},\quad \dot\Theta_i=-\frac{\partial H}{\partial\vartheta_i}.
\end{aligned}\right\}\qquad(8.37)$$

Остается выразить характеристическую функцию H через канонические переменные, для чего достаточно в выражение (8.3) для кинетической энергии тела M_i подставить вместо производных от абсолютных координат и эйлеровых углов их выражения через обобщенные скорости, определяемые формулами (8.35), из которых находим:

$$\dot{\xi}_i = \frac{1}{m_i} u_i, \qquad \dot{\eta}_i = \frac{1}{m_i} v_i, \qquad \dot{\zeta}_i = \frac{1}{m_i} w_i,$$

$$\left.\begin{aligned} p_i &= \frac{\operatorname{cosec} \vartheta_i}{A_i} [\Psi_i \sin \varphi_i - \Phi_i \sin \varphi_i \cos \vartheta_i + \Theta_i \cos \varphi_i \sin \vartheta_i], \\ q_i &= \frac{\operatorname{cosec} \vartheta_i}{B_i} [\Psi_i \cos \varphi_i - \Phi_i \cos \varphi_i \cos \vartheta_i - \Theta_i \sin \varphi_i \sin \vartheta_i], \\ r_i &= \frac{1}{C_i} \Phi_i. \end{aligned}\right\} \quad (8.35')$$

Подставляя эти выражения в формулу (8.3), получим

$$T_i = \frac{1}{2m_i} (u_i^2 + v_i^2 + w_i^2) + \\ + \frac{\operatorname{cosec}^2 \vartheta_i}{2A_i} [\Psi_i \sin \varphi_i - \Phi_i \sin \varphi_i \cos \vartheta_i + \Theta_i \cos \varphi_i \sin \vartheta_i]^2 + \\ + \frac{\operatorname{cosec}^2 \vartheta_i}{2B_i} [\Psi_i \cos \varphi_i - \Phi_i \cos \varphi_i \cos \vartheta_i - \Theta_i \sin \varphi_i \sin \vartheta_i]^2 + \frac{1}{2C_i} \Phi_i^2,$$

после чего найдем полную живую силу (кинетическую энергию) по формуле (8.3′) и функцию Гамильтона по формуле (8.36) *).

Система (8.37) представляет собой, так же как и уравнения абсолютного движения, систему $12(n+1)$ дифференциальных уравнений первого порядка с таким же числом неизвестных функций, которыми являются канонические переменные — абсолютные координаты точек G_i, эйлеровы углы и импульсы, определяемые формулами (8.35).

Уравнения (8.37) имеют, разумеется, те же десять первых интегралов, которые получаются из соотношений (8.11), (8.13) и (8.14) заменой истинных скоростей их выражениями (8.35′).

---

*) Буквы Ψ, Φ, Θ в этом параграфе обозначают, конечно, другие величины, чем в уравнениях (8.7).

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

НЕВОЗМУЩЕННОЕ КЕПЛЕРОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

ГЛАВА IX

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

§ 1. Дифференциальные уравнения невозмущенного кеплеровского движения

1. В этой главе будет подробно рассмотрен важный частный случай общей задачи многих тел (материальных точек!), когда система состоит всего из двух материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Дифференциальные уравнения движения в этой задаче, называемой обычно задачей двух тел, можно, конечно, вывести непосредственно, но можно и написать сразу, полагая в общей задаче $n=1$.

В абсолютной системе координат мы получим нужные уравнения из уравнений (7.1) и формул (7.2) (см. § 1 гл. VII) в виде

$$\left.\begin{aligned}
m_0\ddot{\xi}_0 &= fm_0m_1\frac{\xi_1-\xi_0}{\Delta_{01}^3}, & m_1\ddot{\xi}_1 &= fm_1m_0\frac{\xi_0-\xi_1}{\Delta_{10}^3},\\
m_0\ddot{\eta}_0 &= fm_0m_1\frac{\eta_1-\eta_0}{\Delta_{01}^3}, & m_1\ddot{\eta}_1 &= fm_1m_0\frac{\eta_0-\eta_1}{\Delta_{10}^3},\\
m_0\ddot{\zeta}_0 &= fm_0m_1\frac{\zeta_1-\zeta_0}{\Delta_{01}^3}, & m_1\ddot{\zeta}_1 &= fm_1m_0\frac{\zeta_0-\zeta_1}{\Delta_{10}^3},
\end{aligned}\right\} \qquad (9.1)$$

где

$$\Delta_{10}=\Delta_{01}=\sqrt{(\xi_1-\xi_0)^2+(\eta_1-\eta_0)^2+(\zeta_1-\zeta_0)^2}=\Delta.$$

Вводя в рассмотрение силовую функцию, которая в этой задаче приводится к одному члену (см. общую формулу (7.4))

$$U=f\frac{m_0m_1}{\Delta}, \qquad (9.2)$$

мы можем также написать уравнения (9.1) в виде

$$m_i\ddot{\xi}_i=\frac{\partial U}{\partial\xi_i}, \quad m_i\ddot{\eta}_i=\frac{\partial U}{\partial\eta_i}, \quad m_i\ddot{\zeta}_i=\frac{\partial U}{\partial\zeta_i} \qquad (i=0,\ 1). \qquad (9.1')$$

Шесть уравнений (9.1) образуют систему двенадцатого порядка, для которой мы можем написать десять первых интегралов, получающихся из (7.8″), (7.10) и (7.11) при $n=1$:

$$\left.\begin{aligned} m_0\xi_0+m_1\xi_1&=a_1t+b_1, & m_0\dot{\xi}_0+m_1\dot{\xi}_1&=a_1,\\ m_0\eta_0+m_1\eta_1&=a_2t+b_2, & m_0\dot{\eta}_0+m_1\dot{\eta}_1&=a_2,\\ m_0\zeta_0+m_1\zeta_1&=a_3t+b_3, & m_0\dot{\zeta}_0+m_1\dot{\zeta}_1&=a_3, \end{aligned}\right\} \tag{9.3}$$

$$\left.\begin{aligned} m_0(\eta_0\dot{\zeta}_0-\zeta_0\dot{\eta}_0)+m_1(\eta_1\dot{\zeta}_1-\zeta_1\dot{\eta}_1)&=c_1,\\ m_0(\zeta_0\dot{\xi}_0-\xi_0\dot{\zeta}_0)+m_1(\zeta_1\dot{\xi}_1-\xi_1\dot{\zeta}_1)&=c_2,\\ m_0(\xi_0\dot{\eta}_0-\eta_0\dot{\xi}_0)+m_1(\xi_1\dot{\eta}_1-\eta_1\dot{\xi}_1)&=c_3, \end{aligned}\right\} \tag{9.3′}$$

$$T=\frac{1}{2}m_0\left(\dot{\xi}_0^2+\dot{\eta}_0^2+\dot{\zeta}_0^2\right)+\frac{1}{2}m_1\left(\dot{\xi}_1^2+\dot{\eta}_1^2+\dot{\zeta}_1^2\right)=U+h. \tag{9.3″}$$

При помощи этих десяти интегралов можно было бы понизить порядок системы (9.1) на десять единиц, а исключая еще время, привести окончательно эту систему к одному дифференциальному уравнению первого порядка, разрешаемому квадратурой.

Однако сначала мы используем для понижения порядка системы (9.1) только шесть первых интегралов (9.3), определяющих движение центра масс двух точек M_0 и M_1 в абсолютных осях.

Отнесем движения обеих материальных точек M_0 и M_1 к барицентрической системе координат с началом в центре масс G и с неизменными направлениями осей. Тогда уравнения относительного движения точки M_1 получатся из общих уравнений (7.22) и напишутся, как легко проверить, следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi}_1'&=-\frac{fm_0^3}{(m_0+m_1)^2}\,\frac{\xi_1'}{r_1'^3},\\ \ddot{\eta}_1'&=-\frac{fm_0^3}{(m_0+m_1)^2}\,\frac{\eta_1'}{r_1'^3},\\ \ddot{\zeta}_1'&=-\frac{fm_0^3}{(m_0+m_1)^2}\,\frac{\zeta_1'}{r_1'^3}, \end{aligned}\right\} \tag{9.4}$$

где

$$r_1'=\sqrt{\xi_1'^2+\eta_1'^2+\zeta_1'^2}$$

есть расстояние точки M_1 от начала координат, т. е. от центра масс G обеих точек.

Система (9.4) есть система шестого порядка, определяющая относительное движение точки M_1. Как будет показано следующем параграфе, эту систему можно полностью проинтегрировать, т. е. получить барицентрические координаты ξ_1', η_1', ζ_1' точки M_1 как явные функции времени и шести произвольных постоянных интегрирования. После этого барицентрические координаты точки M_0 найдутся весьма просто без всякого интегрирования.

Действительно, из формул (7.21) или просто по свойствам центра масс мы имеем

$$m_0\xi_0'+m_1\xi_1'=0,\quad m_0\eta_0'+m_1\eta_1'=0,\quad m_0\zeta_0'+m_1\zeta_1'=0,$$

откуда

$$\xi_0'=-\frac{m_1}{m_0}\xi_1',\quad \eta_0'=-\frac{m_1}{m_0}\eta_1',\quad \zeta_0'=-\frac{m_1}{m_0}\zeta_1'.$$

Кроме того, отсюда следует, что координаты точки M_0 удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\xi}_0'&=-\frac{fm_1^3}{(m_0+m_1)^2}\frac{\xi_0'}{r_0'^3},\\ \ddot{\eta}_0'&=-\frac{fm_1^3}{(m_0+m_1)^2}\frac{\eta_0'}{r_0'^3},\\ \ddot{\zeta}_0'&=-\frac{fm_1^3}{(m_0+m_1)^2}\frac{\zeta_0'}{r_0'^3},\end{aligned}\right\}\qquad (9.4')$$

где

$$r_0'=\frac{m_1}{m_0}r_1'=\sqrt{\xi_0'^2+\eta_0'^2+\zeta_0'^2}.$$

Мы видим, что системы (9.4) и (9.4′) имеют совершенно одинаковый вид, отличаясь только зависящим от масс точек множителем в правых частях этих уравнений.

Отсюда можно заключить, что движения точек M_0 и M_1 в одной и той же барицентрической системе координат обладают одинаковыми свойствами и совершенно подобны друг другу.

Уравнения (9.4) являются точными уравнениями задачи двух тел-точек, но в некоторых случаях эти уравнения можно также рассматривать как уравнения первого приближения в общей задаче многих тел (рассматриваемых как материальные точки).

Действительно, вернемся опять к уравнениям (7.22) гл. VII, определяющим относительные движения n тел-точек в барицентрической системе координат.

Предположим, что массы тел-точек M_1, M_2, ..., M_n, как это часто бывает в конкретных астрономических задачах, весьма малы по сравнению с массой тела M_0.

Допустим также, что взаимные расстояния Δ_{ij} никогда не делаются слишком малыми. Тогда все члены в правых частях уравнений (7.22), кроме членов, имеющих множителем сумму масс m_0+m_i, будут весьма малыми, что дает основание пренебречь этими членами и получить, таким образом, уравнения, мало отличающиеся от точных уравнений рассматриваемой задачи.

Делая это, мы получим вместо точных уравнений (7.22) приближенные уравнения, которые напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi}'_i &= -\frac{fm_0^3}{(m_0+m_i)^2}\frac{\xi'_i}{r_i'^3}, \\ \ddot{\eta}'_i &= -\frac{fm_0^3}{(m_0+m_i)^2}\frac{\eta'_i}{r_i'^3}, \\ \ddot{\zeta}'_i &= -\frac{fm_0^3}{(m_0+m_i)^2}\frac{\zeta'_i}{r_i'^3}, \end{aligned}\right\} \tag{9.4''}$$

где величины

$$r'_i = \sqrt{\xi_i'^2 + \eta_i'^2 + \zeta_i'^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

обозначают, так же как и выше, расстояния точек M_i от их общего центра масс G.

Так как правые части уравнений (9.4″) зависят от барицентрических координат только одной точки M_i, то система (9.4″) состоит из n отдельных независимых систем, каждая из которых описывает в первом приближении движение только одной из точек M_i.

Очевидно, что эти уравнения первого приближения (9.4″) имеют совершенно такой же вид, как и точные уравнения (9.4) задачи двух тел-точек. Поэтому и для решения точной задачи двух тел и для решения приближенной задачи многих тел нужно интегрировать одну и ту же систему дифференциальных уравнений типа (9.4).

2. Рассмотрим теперь уравнения (7.24) гл. VII, определяющие движения тел-точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ относительно точки M_0.

В простейшем случае, когда $n=1$, мы получим уравнения движения точки M_1 относительно точки M_0 в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_1 + f(m_0+m_1)\frac{x_1}{r_1^3} &= 0, \\ \ddot{y}_1 + f(m_0+m_1)\frac{y_1}{r_1^3} &= 0, \\ \ddot{z}_1 + f(m_0+m_1)\frac{z_1}{r_1^3} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{9.5}$$

где

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

есть расстояние точки M_1 от точки M_0, которое называется также радиусом-вектором движущейся точки.

Если $n \neq 1$, но все массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$ весьма малы по сравнению с массой m_0, то, пренебрегая в первом приближении всеми членами в (7.24), имеющими множителем одну из малых масс, мы получим следующую систему уравнений первого приближения:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_i + f(m_0 + m_i)\frac{x_i}{r_i^3} &= 0, \\ \ddot{y}_i + f(m_0 + m_i)\frac{y_i}{r_i^3} &= 0, \\ \ddot{z}_i + f(m_0 + m_i)\frac{z_i}{r_i^3} &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (9.5')$$

где

$$r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

суть радиусы-векторы движущихся точек.

Очевидно, что система (9.5′) распадается на n независимых систем, каждая из которых определяет движение одной из точек M_i относительно точки M_0 так, как если бы все остальные точки не существовали. По этой причине в астрономических задачах уравнения (9.5′) называются дифференциальными уравнениями невозмущенного движения, а точные уравнения относительного движения (7.24) в задаче многих тел-точек называются соответственно дифференциальными уравнениями возмущенного движения.

Мы видим, что уравнения (9.5) и (9.5′) имеют в точности такую же форму, что и уравнения (9.4) или (9.4′), отличаясь друг от друга только значением постоянного множителя, зависящего от масс. Таким образом, мы опять приходим к той же самой математической задаче, что и ранее.

К такой же форме уравнений мы придем, исходя из уравнений относительного движения в координатах Якоби. Действительно, рассмотрим уравнения (7.35) гл. VII, предполагая опять, что масса m_0 велика по сравнению со всеми остальными массами, и пренебрежем в правых частях (7.35) всеми членами, содержащими множителями одну из малых масс. В выражении для Δ_{0i} также пренебрежем такими же членами. В результате мы получим следующие уравнения первого приближения в рассматриваемой задаче:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}'_i &= -\frac{fm_0\sigma_i}{\sigma_{i-1}}\frac{x'_i}{r'^3_i},\\ \ddot{y}'_i &= -\frac{fm_0\sigma_i}{\sigma_{i-1}}\frac{y'_i}{r'^3_i},\\ \ddot{z}'_i &= -\frac{fm_0\sigma_i}{\sigma_{i-1}}\frac{z'_i}{r'^3_i},\end{aligned}\right\} \qquad (9.6)$$

где

$$r'_i = \sqrt{x'^2_i + y'^2_i + z'^2_i} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

и

$$\sigma_i = m_0 + m_1 + \ldots + m_i.$$

Мы видим, что уравнения (9.6) имеют такую же форму, как и все рассмотренные выше уравнения, либо в задаче двух тел-точек, либо в первом приближении к задаче многих тел в барицентрических или относительных координатах.

Итак, все рассмотренные нами здесь задачи приводят к одной и той же математической задаче, которая заключается в интегрировании системы трех дифференциальных уравнений второго порядка с тремя неизвестными функциями, которую мы вообще будем записывать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{\mu x}{r^3},\\ \ddot{y} &= -\frac{\mu y}{r^3},\\ \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{r^3},\end{aligned}\right\} \qquad (9.7)$$

где μ есть некоторая постоянная, зависящая от масс m_0 и m точек M_0 и M, а

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

есть расстояние движущейся точки от начала координат.

В интегрировании и исследовании системы уравнений (9.7) и заключается теория невозмущенного кеплеровского движения*).

---

*) Мы так называем движение, определяемое уравнениями (9.7), поскольку, как будет показано далее, это движение подчиняется законам Кеплера, известным, впрочем, и из курса общей астрономии. Согласно этим законам движение точки происходит в неизменной плоскости, причем орбита (или траектория) точки есть кривая второго порядка и площадь, описываемая радиусом-вектором, изменяется пропорционально времени.

3. В уравнениях невозмущенного движения (9.7) неизвестными функциями являются прямоугольные декартовы координаты движущейся точки M относительно системы координат $Oxyz$ (см. рис. 45) с неизменными направлениями осей.

Иногда оказывается более удобным, или выгодным, пользоваться какими-либо другими координатами, например, цилиндрическими или сферическими, или же относить изучаемое движение к прямоугольным осям, изменяющим свои направления в пространстве. Соответствующие дифференциальные уравнения легко получить из уравнений (9.7) посредством преобразования координат или вывести из общих уравнений Лагранжа, или, наконец, вывести из общих уравнений задачи многих тел в криволинейных координатах, приведенных в гл. VII.

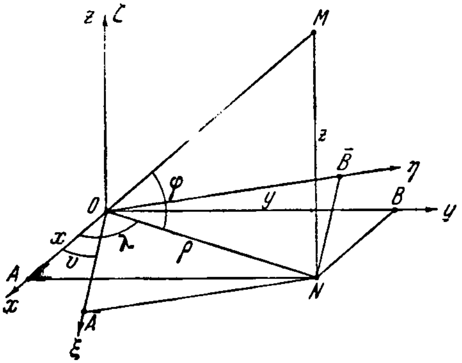


Рис. 46.

Чтобы воспользоваться уравнениями Лагранжа, нужно исходить из выражений живой силы и силовой функции в системе $Oxyz$, которые определяются формулами

$$T=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2),\quad U=\frac{\mu}{r}. \tag{9.8}$$

Переходя к цилиндрической системе координат (рис. 46), в которой долгота λ отсчитывается от оси Ox к оси Oy, а ρ есть проекция радиуса-вектора r на плоскость Oxy, мы имеем

$$x=\rho\cos\lambda,\quad y=\rho\sin\lambda,\quad r=\sqrt{\rho^2+z^2},$$

вследствие чего получаем

$$T=\frac{1}{2}(\dot{\rho}^2+\rho^2\dot{\lambda}^2+\dot{z}^2),\quad U=\frac{\mu}{\sqrt{\rho^2+z^2}}. \tag{9.8'}$$

Принимая теперь за обобщенные координаты Лагранжа величины ρ, λ, z, с помощью уравнений Лагранжа мы получим

$$\left.\begin{aligned}\ddot{\rho}-\rho\dot{\lambda}^2&=\frac{\partial U}{\partial\rho}=-\frac{\mu\rho}{r^3},\\ \frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\lambda})&=\frac{\partial U}{\partial\lambda}=0,\\ z&=\frac{\partial U}{\partial z}=-\frac{\mu z}{r^3}.\end{aligned}\right\} \tag{9.9}$$

Переходя теперь к сферическим координатам по формулам

$$x = r\cos\varphi\cos\lambda, \quad y = r\cos\varphi\sin\lambda, \quad z = r\sin\varphi,$$

мы имеем соответственно

$$T = \frac{1}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 + r^2\cos^2\varphi\cdot\dot\lambda^2), \quad U = \frac{\mu}{r}, \tag{9.8''}$$

откуда с помощью уравнений Лагранжа получим уравнения нашей задачи в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} \ddot r - r\dot\varphi^2 - r\dot\lambda^2\cos^2\varphi &= \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\mu}{r^2}, \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot\varphi) + r^2\dot\lambda^2\sin\varphi\cos\varphi &= \frac{\partial U}{\partial\varphi} = 0, \\ \frac{d}{dt}(r^2\dot\lambda\cos^2\varphi) &= \frac{\partial U}{\partial\lambda} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{9.9'}$$

Отнесем затем движение точки M к прямоугольной системе координат, вращающейся равномерно вокруг оси Oz. Тогда

$$x = \xi\cos v - \eta\sin v, \quad y = \xi\sin v + \eta\cos v, \quad z = \zeta,$$

где (см. рис. 46)

$$v = \angle\, xO\xi = n(t - t_0), \quad n = \mathrm{const},$$

и живая сила T определится формулой *)

$$T = \frac{1}{2}[\dot\xi^2 + \dot\eta^2 + \dot\zeta^2 + 2n(\xi\dot\eta - \eta\dot\xi) + n^2(\xi^2 + \eta^2)]. \tag{9.8'''}$$

Уравнения движения во вращающихся осях напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot\xi - 2n\dot\eta - n^2\xi &= \frac{\partial U}{\partial\xi} = -\frac{\mu\xi}{r^3}, \\ \ddot\eta + 2n\dot\xi - n^2\eta &= \frac{\partial U}{\partial\eta} = -\frac{\mu\eta}{r^3}, \\ \ddot\zeta &= \frac{\partial U}{\partial\zeta} = -\frac{\mu\zeta}{r^3}. \end{aligned}\right\} \tag{9.9''}$$

Очень простой вид принимают уравнения невозмущенного движения в переменных Клеро — Лапласа. Эти уравнения можно вывести из общих уравнений Клеро — Лапласа (7.46) гл. VII либо получить непосредственно из уравнений (9.9), полагая

$$u = \frac{1}{\rho}, \quad s = \frac{z}{\rho}$$

---

*) Силовая функция, очевидно, не изменится, т. е. $U = \frac{\mu}{r}$ и $r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$. Дополнительные члены в левых частях уравнений (9.9) суть составляющие ускорения Кориолиса и центробежного.

и принимая за независимую переменную долготу λ вместо времени.

Действительно, второе из уравнений (9.9) дает

$$\rho^2\dot{\lambda} = c = \text{const},$$

с помощью чего, обозначая дифференцирования по λ штрихами, находим

$$\ddot{\rho} = -c^2u^2u'', \quad \ddot{z} = c^2u^2(us'' - su''), \tag{9.10}$$

и уравнения (9.9) приводятся к виду

$$\left.\begin{aligned} &u'' + u = \frac{\mu}{c^2}(1+s^2)^{-\frac{3}{2}}, \\ &s'' + s = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9.10'}$$

образуя систему двух уравнений с двумя неизвестными функциями u и s, после интегрирования которой определим квадратурой и время t в зависимости от λ.

4. Наконец, уравнения невозмущенного движения можно записать и в канонической форме, что позволит применить для интегрирования этих уравнений метод Гамильтона — Якоби.

Действительно, принимая за обобщенные координаты Лагранжа величины x, y, z, а за импульсы — производные $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, мы представим систему (9.7) в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \dot{x}}, & \frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \dot{y}}, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \dot{z}}, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{9.11}$$

где характеристическая функция определяется формулой

$$H = T - U = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu}{r}. \tag{9.12}$$

Если мы желаем воспользоваться сферическими координатами r, φ, λ, то, вводя обобщенные импульсы по формулам

$$R = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = \dot{r}, \quad \Phi = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = r^2\dot{\varphi}, \quad \Lambda = \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = r^2\cos^2\varphi \cdot \dot{\lambda}$$

где T определяется формулой (9.8″), мы получим уравнения невозмущенного движения в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dr}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial R}, & \frac{dR}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial r}, \\ \frac{d\varphi}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial \Phi}, & \frac{d\Phi}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \\ \frac{d\lambda}{dt}&=\frac{\partial H}{\partial \Lambda}, & \frac{d\Lambda}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial \lambda}, \end{aligned}\right\} \tag{9.13}$$

где

$$H=\frac{1}{2}\left(R^2+\frac{\Phi^2}{r^2}+\frac{\Lambda^2}{r^2\cos^2\varphi}\right)-\frac{\mu}{r} \tag{9.14}$$

есть функция Гамильтона, выраженная в новых канонических переменных.

Примечание. Мы получили уравнения невозмущенного движения, рассматривая задачу двух тел (т. е. задачу о движении системы двух взаимно притягивающихся материальных точек), либо первое приближение общей задачи многих тел (т. е. задачи о движении системы любого числа материальных точек, взаимно притягивающихся по закону Ньютона и не подверженных никаким другим силам). Однако те же уравнения невозмущенного движения можно получить, рассматривая первое приближение и в более общей задаче.

Действительно, пусть, например, поставлена задача о движении одной материальной точки, находящейся под действием некоторых заданных сил.

Обозначая проекции полного ускорения точки на некоторые неподвижные оси координат через X^*, Y^*, Z^*, мы будем иметь уравнения движения точки в следующем виде:

$$\ddot{x}=X^*, \quad \ddot{y}=Y^*, \quad \ddot{z}=Z^*. \tag{9.15}$$

Правые части этих уравнений надлежит рассматривать как заданные функции времени t, координат движущейся точки M, x, y, z и составляющих ее скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

Допустим, что правые части (9.15) можно представить в виде

$$X^*=X_0+X, \quad Y^*=Y_0+Y, \quad Z^*=Z_0+Z,$$

причем так, что уравнения

$$\ddot{x}=X_0, \quad \ddot{y}=Y_0, \quad \ddot{z}=Z_0 \tag{9.15′}$$

оказываются полностью интегрируемыми.

Тогда, производя это интегрирование, мы получаем некоторое первое приближение нашей задачи, которое может оказаться близким к точному решению уравнений (9.15). Поэтому уравнения (9.15′) называются обычно в механике уравнениями первого приближения, а в астрономии (в небесной механике) эти уравнения называются уравнениями невозмущенного движения, тогда как точные уравнения (9.15) называют уравнениями возмущенного движения.

Характер невозмущенного движения зависит, конечно, от выбора величин X_0, Y_0, Z_0, которые подчинены единственному условию, а именно, должны быть такими, чтобы уравнения (9.15′) можно было проинтегрировать.

Если величины X_0, Y_0, Z_0 можно определить формулами

$$X_0 = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad Y_0 = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad Z_0 = -\frac{\mu z}{r^3},$$

где μ есть некоторая постоянная, то уравнения (9.15′) делаются тождественными уравнениям (9.7), которые мы назвали уравнениями невозмущенного кеплеровского движения, так как далее будет показано, что движение, определяемое этими уравнениями, подчиняется законам Кеплера.

Для примера напишем уравнения движения точки в поле притяжения неизменяемого, неподвижного, твердого тела. Беря начало прямоугольных координат в центре масс тела, мы можем написать силовую функцию притяжения тела на точку единичной массы в виде (см. § 2 гл. V)

$$U = \frac{fm}{r} + f\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n(x, y, z)}{r^{2n+1}} = U_0 + R.$$

Таким образом, полагая

$$X_0 = \frac{\partial U_0}{\partial x}, \quad Y_0 = \frac{\partial U_0}{\partial y}, \quad Z_0 = \frac{\partial U_0}{\partial z},$$

т. е. пренебрегая в первом приближении формой и структурой притягивающего тела, мы получим уравнения вида (9.7) ($\mu = fm$), определяющие невозмущенное кеплеровское движение точки.

Величины

$$X = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial R}{\partial z}$$

являются составляющими возмущающего ускорения, а поэтому функция

$$R = f\sum_{n=1}^{\infty} \frac{U_n(x, y, z)}{r^{2n+1}}$$

является возмущающей функцией задачи.

Заметим в заключение, что невозмущенное движение, определяемое в общем случае уравнениями (9.15′), вообще не является кеплеровским движением, так как не подчиняется законам Кеплера.

§ 2. Первые интегралы дифференциальных уравнений невозмущенного движения

1. Переходим к задаче об интегрировании дифференциальных уравнений невозмущенного кеплеровского движения.

Рассмотрим сначала уравнения (9.7), определяющие невозмущенное движение в прямоугольных декартовых координатах:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\mu x}{r^3}, \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu y}{r^3}, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{r^3}, \end{aligned}\right\} \tag{9.16}$$

где μ есть некоторая постоянная, а r — радиус-вектор движущейся точки, так что

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Система (9.16) представляет собой систему трех дифференциальных уравнений второго порядка, которую можно также записать в виде системы уравнений первого порядка (9.11), т. е. в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x}, & \frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{\mu x}{r^3}, \\ \frac{dy}{dt} &= \dot{y}, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= -\frac{\mu y}{r^3}, \\ \frac{dz}{dt} &= \dot{z}, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= -\frac{\mu z}{r^3}. \end{aligned}\right\} \tag{9.16′}$$

Таким образом, система уравнений невозмущенного кеплеровского движения представляет собой систему шестого порядка, а поэтому общий интеграл этой системы образует совокупность шести независимых между собой первых интегралов, к нахождению которых и сводится задача об интегрировании системы (9.16).

Так как уравнения (9.16) можно рассматривать как частный случай уравнений относительного движения задачи многих тел (при $n=1$), то четыре из шести первых интегралов можно было бы написать сразу.

Однако из методических соображений мы предпочитаем вывести все интегралы уравнений (9.16) непосредственно.

Выведем сначала интегралы площадей или момента количества движения.

Умножим для этого второе из уравнений (9.16) на $-z$, третье на $+y$ и сложим оба уравнения. Затем умножим первое из уравнений (9.16) на $+z$, третье на $-x$ и также сложим их. Наконец, умножим второе из уравнений (9.16) на $+x$, первое на $-y$ и опять сложим. В результате мы получим следующие три уравнения, являющиеся непосредственным следствием уравнений движения (9.16):

$$y\ddot{z} - z\ddot{y} = \frac{d}{dt}(y\dot{z} - z\dot{y}) = 0.$$

$$z\ddot{x} - x\ddot{z} = \frac{d}{dt}(z\dot{x} - x\dot{z}) = 0,$$

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = \frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = 0.$$

Интегрируя эти уравнения и обозначая через c_1, c_2, c_3 три произвольные постоянные, мы получим следующие три первые интеграла уравнений (9.16):

$$\left.\begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= c_1, \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= c_2, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= c_3. \end{aligned}\right\} \tag{9.17}$$

Эти уравнения и называются интегралами площадей или интегралами момента количества движения. Произвольные постоянные c_1, c_2, c_3 называются обычно постоянными площадей.

Переходим к выводу интеграла живой силы или интеграла энергии. Для этого умножим уравнения (9.16) соответственно на $2\dot{x}$, $2\dot{y}$, $2\dot{z}$ и сложим все три равенства. Мы получим следующее уравнение, также являющееся следствием уравнений движения:

$$2\dot{x}\ddot{x} + 2\dot{y}\ddot{y} + 2\dot{z}\ddot{z} = -\frac{2\mu}{r^3}(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}).$$

Но, дифференцируя равенство $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, мы найдем

$$x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z} = r\dot{r},$$

вследствие чего предыдущее уравнение примет вид

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = -\frac{2\mu}{r^2}\dot{r} = \frac{d}{dt}\left(\frac{2\mu}{r}\right),$$

откуда интегрированием найдем

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \frac{2\mu}{r} + h. \tag{9.18}$$

Произвольная постоянная h называется постоянной энергии.

Обозначим теперь через V скорость движущейся точки. Тогда

$$V^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2,$$

и уравнение (9.18) может быть написано в виде

$$V^2 = \frac{2\mu}{r} + h. \tag{9.18'}$$

Интегралы (9.17) и (9.18) являются, конечно, частными случаями интегралов задачи многих тел. Но уравнения (9.16) имеют еще другие интегралы, которые раньше нам не встречались и которые существуют только в задаче о невозмущенном кеплеровском движении. Эти интегралы, к выводу которых мы сейчас перейдем, впервые были получены Лапласом и называются по этой причине интегралами Лапласа.

Выведем предварительно некоторое вспомогательное соотношение между радиусом-вектором r и его производными.

Положим для этого

$$r' = \mathbf{r}\dot{\mathbf{r}} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}, \tag{9.19}$$

так что r' есть скалярное произведение векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{V}$. Дифференцируя равенство (9.19), мы получим

$$\dot{r}' = x\ddot{x} + y\ddot{y} + z\ddot{z} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2.$$

Исключая отсюда вторые производные при помощи уравнений движения (9.16) и квадрат скорости при помощи (9.18), мы найдем

$$\dot{r}' = \frac{\mu}{r} + h. \tag{9.19'}$$

Дифференцируя теперь (9.19'), получим нужное нам соотношение

$$\ddot{r}' = -\frac{\mu r'}{r^3}. \tag{9.19''}$$

Это уравнение имеет такой же вид, как и каждое из уравнений (9.16). Поэтому, комбинируя это уравнение с каждым из уравнений (9.16), мы получим соотношения, имеющие такую же форму, что и интегралы площадей.

Действительно, умножая первое из уравнений (9.16) на $-r'$, уравнение (9.19) на $+x$ и складывая оба полученные равенства, мы имеем

$$x\ddot{r}' - r'\ddot{x} = \frac{d}{dt}(x\dot{r}' - r'\dot{x}),$$

и аналогично.

$$y\ddot{r}' - r'\ddot{y} = \frac{d}{dt}(y\dot{r}' - r'\dot{y}),$$

$$z\ddot{r}' - r'\ddot{z} = \frac{d}{dt}(z\dot{r}' - r'\dot{z}).$$

Интегрируя последние три уравнения и обозначая через f_1, f_2, f_3 три произвольные постоянные, мы получим следующие три соотношения:

$$\left.\begin{aligned} x\dot{r}' - r'\dot{x} &= f_1, \\ y\dot{r}' - r'\dot{y} &= f_2, \\ z\dot{r}' - r'\dot{z} &= f_3. \end{aligned}\right\} \qquad (9.20)$$

Эти уравнения и называются **интегралами Лапласа**.

Интегралы Лапласа можно представить еще в другой форме, делая левые их части явными функциями от координат и составляющих скорости движущейся точки.

Исключим для этого h из равенства (9.19′) и из интеграла живой силы (9.18′) и напишем результат исключения в виде

$$\dot{r}' = -\frac{\mu}{r} + V^2.$$

Подставляя теперь в уравнения (9.20) вместо $\dot{r}'$ полученное его выражение и вместо r' величину $r\dot{r}$, мы напишем интегралы Лапласа в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} xV^2 - \frac{\mu x}{r} - r\dot{r}\dot{x} &= f_1, \\ yV^2 - \frac{\mu y}{r} - r\dot{r}\dot{y} &= f_2, \\ zV^2 - \frac{\mu z}{r} - r\dot{r}\dot{z} &= f_3. \end{aligned}\right\} \qquad (9.20')$$

Наконец, заменяя здесь V^2 и $r\dot{r}$ их выражениями, мы можем написать найденные интегралы еще в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\mu x}{r} + \dot{y}(x\dot{y} - y\dot{x}) - \dot{z}(z\dot{x} - x\dot{z}) &= f_1, \\ -\frac{\mu y}{r} + \dot{z}(y\dot{z} - z\dot{y}) - \dot{x}(x\dot{y} - y\dot{x}) &= f_2, \\ -\frac{\mu z}{r} + \dot{x}(z\dot{x} - x\dot{z}) - \dot{y}(y\dot{z} - z\dot{y}) &= f_3, \end{aligned}\right\} \qquad (9.20'')$$

или, еще, учитывая интегралы площадей (9.17), в виде

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\mu x}{r} + c_3\dot y - c_2\dot z &= f_1, \\ -\frac{\mu y}{r} + c_1\dot z - c_3\dot x &= f_2, \\ -\frac{\mu z}{r} + c_2\dot x - c_1\dot y &= f_3. \end{aligned}\right\} \tag{9.20'''}$$

2. Итак, мы нашли **семь первых интегралов** уравнений невозмущенного движения — три интеграла площадей, интеграл живой силы и три интеграла Лапласа, т. е. как будто даже больше чем нужно, так как общий интеграл системы (9.16) должен состоять из шести независимых первых интегралов.

Однако найденные семь интегралов не могут составить общего интеграла системы (9.16), во-первых, по той причине, что ни один из этих интегралов **не содержит времени**, а во-вторых, потому, что эти семь интегралов **не являются независимыми**. Действительно, мы сейчас покажем, что между найденными семью интегралами существуют два тождественных соотношения. Для этого умножим равенства (9.17) соответственно на равенства (9.20) и результаты сложим. Мы получим

$$(y\dot z - z\dot y)(x\dot r' - r'\dot x) + (z\dot x - x\dot z)(y\dot r' - r'\dot y) +$$
$$+ (x\dot y - y\dot x)(z\dot r' - r'\dot z) = c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3$$

что можно написать также следующим образом:

$$\dot r' [x(y\dot z - z\dot y) + y(z\dot x - x\dot z) + z(x\dot y - y\dot x)] +$$
$$+ r' [\dot x(z\dot y - y\dot z) + \dot y(x\dot z - z\dot x) + \dot z(y\dot x - x\dot y)] = c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3.$$

Легко видеть, что каждая из квадратных скобок в левой части последнего равенства равна тождественно нулю, а поэтому мы получаем следующее соотношение:

$$c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3 = 0, \tag{9.21}$$

которое имеет простой геометрический смысл. Действительно, c_1, c_2, c_3 суть проекции на оси координат вектора момента количества движения (точнее говоря, момента скорости) движущейся точки.

Величины f_1, f_2, f_3 также можно рассматривать как проекции некоторого вектора, который назовем **вектором Лапласа** и обозначим через $\boldsymbol{f}$.

Тогда равенство (9.21) выражает условие перпендикулярности двух указанных векторов.

Выведем теперь второе соотношение между семью найденными интегралами. Для этого возведем каждое из равенств (9.17) в квадрат и сложим три получившихся равенства, что даст соотношение

$$c_1^2+c_2^2+c_3^2=(y\dot{z}-z\dot{y})^2+(z\dot{x}-x\dot{z})^2+(x\dot{y}-y\dot{x})^2,$$

которое с помощью тождества Лагранжа *) может быть написано в виде

$$c_1^2+c_2^2+c_3^2=(x^2+y^2+z^2)(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-(x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z})^2,$$

откуда с помощью формул (9.18) и (9.19) имеем

$$c_1^2+c_2^2+c_3^2=r^2\left(\frac{2\mu}{r}+h\right)-r'^2. \tag{9.22}$$

Далее, из уравнений (9.20) получаем

$$f_1^2+f_2^2+f_3^2=r^2\dot{r}'^2-2r'^2\dot{r}'+r'^2V^2,$$

откуда при помощи (9.18′) и (9.19′) выводим

$$f_1^2+f_2^2+f_3^2=r^2\left(\frac{\mu}{r}+h\right)^2-hr'^2. \tag{9.22′}$$

Исключая теперь r'^2 из (9.22) и (9.22′), мы получим после упрощений

$$f_1^2+f_2^2+f_3^2=\mu^2+h(c_1^2+c_2^2+c_3^2), \tag{9.23}$$

что представляет собой второе соотношение между семью первыми интегралами невозмущенного движения.

Из найденных соотношений (9.21) и (9.23) мы можем выразить какие-нибудь две из семи постоянных

$$c_1,\ c_2,\ c_3,\ h,\ f_1,\ f_2,\ f_3 \tag{9.24}$$

через пять остальных, которые остаются произвольными.

Это показывает, что из семи найденных нами интегралов уравнений (9.16) или (9.16′) только пять являются независимыми, а поэтому эти семь интегралов не образуют общего интеграла системы уравнений невозмущенного движения. Но последний недостающий интеграл может быть найден теперь довольно легко простой квадратурой.

Действительно, из уравнений (9.17), (9.18) и (9.20) в силу соотношений (9.21) и (9.23) мы можем выразить какие-нибудь пять величин из

$$x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}$$

---

*) См. (7.14) гл. VII. В нашем случае нужно положить $k=3$, $a_1=x$, $a_2=y$, $a_3=z$, $b_1=\dot{x}$, $b_2=\dot{y}$, $b_3=\dot{z}$.

через шестую. Например, мы можем выразить величины y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ через x и, разумеется, через произвольные постоянные (9.24). Выполнив это, мы получим соотношения вида *)

$$\left.\begin{aligned} y&=\varphi_1(x;\ h\,|\,c\,|\,f),\\ z&=\varphi_2(x;\ h\,|\,c\,|\,f),\\ \dot{x}&=\varphi_3(x;\ h\,|\,c\,|\,f),\\ \dot{y}&=\varphi_4(x;\ h\,|\,c\,|\,f),\\ \dot{z}&=\varphi_5(x;\ h\,|\,c\,|\,f). \end{aligned}\right\} \tag{9.25}$$

Возьмем теперь какое-нибудь из уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\dot{x},\quad \frac{dy}{dt}=\dot{y},\quad \frac{dz}{dt}=\dot{z},$$

например, первое, и напишем его, используя (9.25), следующим образом:

$$\frac{dx}{dt}=\varphi_3(x;\ h\,|\,c\,|\,f).$$

Это соотношение представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка с переменными x и t, которое интегрируется разделением переменных.

Выполняя это интегрирование, мы получим соотношение

$$\int\frac{dx}{\varphi_3(x;\ h\,|\,c\,|\,f)}=t+g,$$

где g обозначает шестую произвольную постоянную.

Из последнего уравнения принципиально возможно определить координату x как функцию независимой переменной t, так что мы можем написать

$$x=\chi_1(t;\ h,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ g).$$

Подставляя затем найденное выражение для x в формулы (9.25), мы определим также все остальные неизвестные, вследствие чего получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x&=\chi_1(t;\ h,\ g\,|\,c\,|\,f),\\ y&=\chi_2(t;\ h,\ g\,|\,c\,|\,f),\\ z&=\chi_3(t;\ h,\ g\,|\,c\,|\,f), \end{aligned}\right\} \tag{9.26}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}&=\chi_4(t;\ h,\ g\,|\,c\,|\,f),\\ \dot{y}&=\chi_5(t;\ h,\ g\,|\,c\,|\,f),\\ \dot{z}&=\chi_6(t;\ h,\ g\,|\,c\,|\,f). \end{aligned}\right\} \tag{9.26'}$$

---

*) Как было условлено в гл. VI, мы пишем здесь для сокращения $\varphi(x;\ h|c|f)$ вместо $\varphi(x;\ h, c_1, c_2, c_3, f_1, f_2, f_3)$.

Эти уравнения представляют собой шесть соотношений между неизвестными функциями, временем и шестью произвольными постоянными, а поэтому составляют общий интеграл уравнений движения (9.16). Так как, кроме того, уравнения (9.26) и (9.26′) дают явные выражения для неизвестных величин в зависимости от времени и надлежащего числа произвольных постоянных, то они представляют также общее решение уравнений движения.

При этом равенства (9.26) представляют параметрические уравнения траектории движущейся точки *) и дают возможность определить ее координаты для любого момента времени.

Формулы (9.26′) определяют составляющие скорости движущейся точки для любого момента времени, а следовательно, величину и направление скорости. Действительно, величину скорости получаем по формуле

$$V=\sqrt{\chi_4^2+\chi_5^2+\chi_6^2},$$

а направление скорости определяется ее направляющими косинусами, которые соответственно равны

$$\frac{\chi_4}{V}, \quad \frac{\chi_5}{V}, \quad \frac{\chi_6}{V}.$$

3. Произвольные постоянные, входящие в формулы общего интеграла или в общее решение (9.26), (9.26′), могут быть однозначно определены через начальные значения неизвестных функций (координат и проекций скорости), которые обычно являются данными задачи.

Выберем некоторый момент времени t_0, который условимся считать начальным моментом **), и обозначим соответствующие этому моменту значения координат и составляющих скорости через

$$x_0, \; y_0, \; z_0, \; \dot{x}_0, \; \dot{y}_0, \; \dot{z}_0. \tag{9.27}$$

Эти величины и называются начальными значениями или начальными данными рассматриваемой задачи и

---

*) Например, это будет траектория планеты в ее относительном движении вокруг Солнца, или траектория ИСЗ в его движении вокруг Земли. Заметим, что сама кривая, по которой движется точка, в астрономии обыкновенно называется орбитой. Латинское слово orbita означало «дорога», «колея».

**) Начальный момент t_0, называемый в астрономии также начальной эпохой (или просто эпохой), может быть выбран произвольно и подбирается обычно из различных практических соображений. Например, в задаче о движении ИСЗ за начальный момент принимают обычно момент «выхода на орбиту», в который перестает действовать выводная реактивная сила.

представляют шесть независимых чисел, которые могут быть заданы произвольно *).

По величинам (9.27), которые можно рассматривать как основные начальные данные, нетрудно определить также начальные значения и ряда других величин. Таким образом, начальное значение радиуса-вектора r_0 и величину начальной скорости V_0 определим при помощи формул

$$r_0 = + \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}, \quad V_0 = + \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2} \tag{9.27$'$}$$

и начальное значение r_0' скалярного произведения радиуса-вектора на скорость по формуле

$$r_0' = x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 + z_0\dot{z}_0. \tag{9.27$''$}$$

Теперь формулы (9.17) дают

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= y_0\dot{z}_0 - z_0\dot{y}_0, \\ c_2 &= z_0\dot{x}_0 - x_0\dot{z}_0, \\ c_3 &= x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0. \end{aligned}\right\} \tag{9.28}$$

Эти величины суть проекции вектора момента количества движения (точнее, момента скорости) точки M на оси координат. Величину, или модуль, этого вектора получим по формуле

$$c = + \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}, \tag{9.28$'$}$$

а его направляющие косинусы будут соответственно равны

$$\frac{c_1}{c}, \quad \frac{c_2}{c}, \quad \frac{c_3}{c}. \tag{9.28$''$}$$

Далее из (9.18′) получаем

$$h = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}, \tag{9.29}$$

т. е. величину полной энергии движущейся точки.

Остается определить постоянные Лапласа. Сначала из (9.19′) найдем начальное значение величины $\dot{r}'$ по формуле

$$\dot{r}_0' = \frac{\mu}{r_0} + h = V_0^2 - \frac{\mu}{r_0}, \tag{9.30}$$

---

*) В действительном движении начальные значения суть числа вещественные. Однако, вообще говоря, эти начальные значения могут быть какими угодно комплексными числами.

после чего формулы (9.20) дают

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= x_0\dot{r}'_0 - r'_0\dot{x}_0, \\ f_2 &= y_0\dot{r}'_0 - r'_0\dot{y}_0, \\ f_3 &= z_0\dot{r}'_0 - r'_0\dot{z}_0. \end{aligned}\right\} \tag{9.30$'$}$$

Затем находим величину, или модуль, вектора Лапласа

$$f = +\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + f_3^2} \tag{9.30$''$}$$

и его направляющие косинусы

$$\frac{f_1}{f}, \quad \frac{f_2}{f}, \quad \frac{f_3}{f}. \tag{9.30$'''$}$$

Постоянные Лапласа можно также получить из формул (9.20′) или (9.20″). Например, формулы (9.20″) дают

$$\left.\begin{aligned} f_1 &= -\frac{\mu x_0}{r_0} + c_3\dot{y}_0 - c_2\dot{z}_0, \\ f_2 &= -\frac{\mu y_0}{r_0} + c_1\dot{z}_0 - c_3\dot{x}_0, \\ f_3 &= -\frac{\mu z_0}{r_0} + c_2\dot{x}_0 - c_1\dot{y}_0. \end{aligned}\right\} \tag{9.30$^{\mathrm{IV}}$}$$

Для контроля вычисления произвольных постоянных (9.24) можно применить выведенные выше соотношения между семью первыми интегралами. Действительно, мы должны иметь

$$\left.\begin{aligned} c_1f_1 + c_2f_2 + c_3f_3 &= 0, \\ f^2 &= \mu^2 + hc^2. \end{aligned}\right\} \tag{9.31}$$

Как уже было отмечено, первое из этих соотношений выражает условие перпендикулярности двух векторов (или двух направлений) с направляющими косинусами (9.28″) и (9.30‴). Второе из этих соотношений связывает модули векторов f и c с полной энергией движущейся точки.

Чтобы определить последнюю произвольную постоянную g, положим для сокращения

$$\Phi_3(x;\ h\,|\,c\,|\,f) = \int \frac{dx}{\varphi_3(x;\ h\,|\,c\,|\,f)}.$$

Тогда шестой независимый интеграл напишется в виде

$$\Phi_3(x;\ h\,|\,c\,|\,f) = t + g,$$

откуда находим

$$g = -t_0 + \Phi_3(x_0;\ h\,|\,c\,|\,f). \tag{9.32}$$

Примечание 1. Если все начальные значения (9.27) суть числа действительные, то такими же будут и все произвольные постоянные (9.24), каждая из которых может получиться положительной или отрицательной, или равной нулю. Может оказаться также, что все три постоянные площадей равны нулю, или что равны нулю все три постоянные Лапласа. Однако второе из соотношений (9.31) показывает, что не могут быть одновременно равны нулю и постоянные площадей и постоянные Лапласа. Точно так же не могут быть одновременно равны нулю постоянные Лапласа и постоянная энергии.

Примечание 2. Подставляя найденные выражения для произвольных постоянных в формулы (9.26) и (9.26′), мы получим другое представление общего решения уравнений невозмущенного движения, в котором все неизвестные функции задачи (координаты и их первые производные по времени) выражаются через время и начальные значения этих функций. Это решение может быть написано в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= \chi_1(t;\ t_0 | r_0 | V_0), \\ y &= \chi_2(t;\ t_0 | r_0 | V_0), \\ z &= \chi_3(t;\ t_0 | r_0 | V_0), \end{aligned}\right\} \tag{9.33}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \chi_4(t;\ t_0 | r_0 | V_0), \\ \dot{y} &= \chi_5(t;\ t_0 | r_0 | V_0), \\ \dot{z} &= \chi_6(t;\ t_0 | r_0 | V_0). \end{aligned}\right\} \tag{9.33′}$$

§ 3. Общие формулы невозмущенного кеплеровского движения

1. Описанный в предыдущем параграфе способ получения общего решения уравнений невозмущенного движения не является эффективным и представляет собой скорее конструктивное доказательство существования этого общего решения.

Действительно, чтобы получить формулы (9.25), нужно разрешить уравнения (9.17), (9.18) и (9.20) относительно каких-нибудь пяти из шести неизвестных функций. Но эти уравнения являются уравнениями второй степени относительно всех шести неизвестных и содержат, кроме того, иррациональность, представляемую радиусом-вектором r. Поэтому решение этих уравнений представляет собой весьма сложную алгебраическую задачу, вообще в буквенном виде не разрешимую, и это обстоятельство заставляет нас искать другую форму общего решения, которая была бы пригодна для практических приложений.

Выведем прежде всего уравнения, содержащие только три координаты x, y, z движущейся точки и представляющие собой уравнения той пространственной кривой, которую описывает точка M во время своего движения. Эти уравнения получаются как простые следствия найденных первых интегралов.

Рассмотрим сначала интегралы площадей (9.17). Умножая эти равенства соответственно на x, y, z и складывая, мы получим следующее уравнение, являющееся следствием первых интегралов, а поэтому справедливое для любого момента времени *):

$$c_1x+c_2y+c_3z=0. \tag{9.34}$$

Уравнение (9.34) есть уравнение плоскости, проходящей через начало координат; оно показывает, что движение точки M происходит в неизменной плоскости, определяемой исключительно начальными условиями задачи, и что, следовательно, траектория, или орбита, точки M есть плоская кривая.

Так как плоскость (9.34) перпендикулярна, очевидно, к вектору момента количества движения, то она совпадает с неизменяемой плоскостью Лапласа в нашей задаче, так что орбита точки M лежит в неизменяемой плоскости.

Чтобы определить вид и расположение кривой, которую описывает движущаяся точка M, нужно иметь второе уравнение, связывающее ее координаты. Чтобы получить это второе уравнение, обратимся к интегралам Лапласа (9.20). Умножим эти уравнения на x, y, z и сложим. Мы получим следующее равенство, также являющееся первым интегралом уравнений (9.16):

$$(x^2+y^2+z^2)\dot{r}'-r'^2=f_1x+f_2y+f_3z.$$

Исключая отсюда $\dot{r}'$ и r'^2 с помощью формул (9.19′) и (9.22), мы найдем

$$\mu r=c^2-f_1x-f_2y-f_3z. \tag{9.35}$$

Это уравнение (также являющееся первым интегралом задачи) содержит только координаты точки M и представляет собой уравнение некоторой поверхности, на которой остается точка M во все время своего движения. Поэтому два уравнения, нами полученные, представляют собой общие уравнения кривой, по которой движется точка M. Эта кривая называется (как уже было замечено ранее) орбитой движущейся точки, и ее геометрические свойства вполне определяются ее общими уравнениями.

Действительно, пространственная кривая, определяемая уравнениями

$$\left.\begin{aligned} c_1x+c_2y+c_3z&=0,\\ \mu r-c^2+f_1x+f_2y+f_3z&=0, \end{aligned}\right\} \tag{9.36}$$

---

*) Отметим, что всякая комбинация первых интегралов также является первым интегралом системы (9.16).

есть линия пересечения плоскости (9.34) с поверхностью (9.35). Но уравнение (9.35) есть, очевидно, уравнение второй степени относительно координат x, y, z, и поэтому оно изображает поверхность второго порядка. Линия пересечения плоскости с поверхностью второго порядка есть кривая второго порядка, а следовательно, орбита точки M в ее невозмущенном кеплеровском движении есть некоторое коническое сечение, т. е. окружность, эллипс, парабола, гипербола или (в вырожденном случае) пара прямых, различных или сливающихся.

Рассмотрим уравнение (9.35) более внимательно. Оно показывает, что радиус-вектор r текущей точки поверхности выражается рациональным образом через координаты этой точки. Так как радиус-вектор есть расстояние точки от начала координат, то отсюда следует, что начало координат является одним из фокусов поверхности *).

Покажем теперь, что поверхность (9.35) есть поверхность вращения вокруг оси, проходящей через начало координат.

Действительно, рассмотрим прямую, определяемую уравнениями

$$\frac{x}{f_1}=\frac{y}{f_2}=\frac{z}{f_3} \tag{9.37}$$

и определяющую, следовательно, направление вектора Лапласа.

Вообразим семейство плоскостей, определяемое уравнением

$$f_1x+f_2y+f_3z=d, \tag{9.37'}$$

где d — любая постоянная (параметр семейства).

Очевидно, что всякая плоскость семейства (9.37′) перпендикулярна к прямой (9.37), которая в силу соотношения

$$c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3=0$$

лежит в плоскости (9.34), т. е. в плоскости орбиты.

Из уравнений (9.35) и (9.37′) находим

$$\mu r=c^2-d.$$

Отсюда видно, что сечение поверхности (9.35) любой плоскостью из семейства (9.37′) есть окружность, центр которой лежит на прямой (9.37). Следовательно, (9.35) есть действительно поверхность вращения вокруг оси (9.37),

---

*) В аналитической геометрии фокусом поверхности или плоской кривой называется такая точка пространства, расстояние которой от любой точки поверхности (соответственно линии) выражается рациональным образом через координаты этой точки. Фокусы кривой второго порядка имеют простые геометрические свойства.

один из фокусов которой совпадает с началом координат. Таким образом, поверхность (9.35) есть эллипсоид вращения либо параболоид вращения либо гиперболоид вращения (а в вырожденном случае — либо круглый конус либо круглый цилиндр).

Так как плоскость орбиты (9.34) проходит через ось вращения поверхности (9.37), то орбита имеет те же фокусы и те же вершины, что и эта поверхность. Отсюда заключаем, что невозмущенная орбита движущейся точки есть плоская кривая второго порядка, один из фокусов которой находится в начале координат (в центре силы притяжения) и главная, или фокальная ось, ось которой совпадает с направлением вектора Лапласа.

Эта ось орбиты называется в астрономии линией апсид; точки пересечения ее с кривой называются апсидами. Апсиды совпадают с вершинами кривой второго порядка, которая представляет орбиту, и имеют собственные названия, в зависимости от того, какое небесное тело рассматривается как центральное.

В общем случае точка орбиты, ближайшая к центру силы, называется перицентром, а наиболее удаленная — апоцентром.

Если орбита есть парабола, то вторая ее вершина лежит в бесконечности, а поэтому для параболической орбиты апоцентр не рассматривается. Если орбита есть гипербола (кривая, состоящая из двух ветвей), то движение может происходить, конечно, только по одной ее ветви, а именно по той, фокус которой находится в начале координат. Вторая вершина гиперболы лежит на другой ее ветви и по этой причине апоцентр для гиперболы также не рассматривается *).

В конкретных задачах астрономии апсиды орбиты имеют свои собственные названия. Так, если рассматривается движение планеты или кометы вокруг Солнца, то перицентр называется перигелием, а апоцентр — афелием; если рассматривается движение Луны или искусственного спутника вокруг Земли, то перицентр называется перигеем, а апоцентр — апогеем. Если рассматривается движение спутника (естественного или искусственного, безразлично) вокруг какой-нибудь из больших планет солнечной системы, то, в зависимости от названия планеты, перицентр называется перивенерием, перимарсием, перииовием, перисатурнием, периуранием, перинептунием, а апоцентр, соот-

---

*) Мы здесь имеем в виду случаи силы притяжения. Если действующая центральная сила есть сила отталкивания, обратно пропорциональная квадрату расстояния, то единственно возможной орбитой является гипербола, фокус которой (внешний) находится в центре силы. См. ниже.

ветственно, — аповенерием, апомарсием, апоиовием, апосатурнием, апоуранием, апонептунием. При рассмотрении движения искусственного спутника Луны перицентр называют перилунием или периселением, а апоцентр — аполунием или апоселением*).

2. Чтобы привести общие уравнения (9.36) к простейшему виду и получить возможность выразить каждую из координат в зависимости от времени, заметим, что в силу уравнения плоскости орбиты (9.34) три текущие координаты связаны одним соотношением, а поэтому независимыми из них являются какие-нибудь две. Иначе можно сказать, что все три координаты могут быть выражены в функции каких-нибудь двух независимых параметров, которые можно выбирать различными способами и которые будем называть координатами в плоскости орбиты или орбитальными координатами.

Мы будем рассматривать здесь две основные системы орбитальных координат, а именно прямоугольную декартову систему и связанную с ней систему полярных координат.

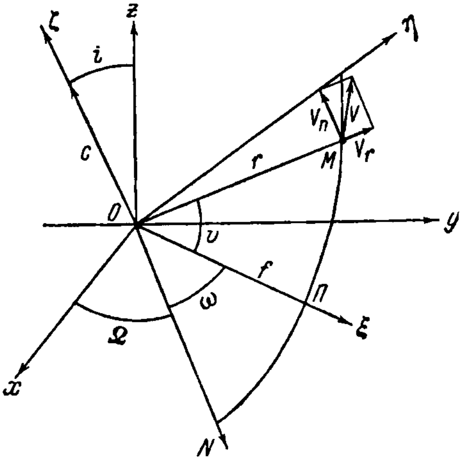


Рис. 47.

Чтобы выбрать из бесчисленного множества систем орбитальных координат наиболее удобную, рассмотрим сначала новую систему пространственных координат $O\xi\eta\zeta$, которую определим следующим образом: за плоскость $\xi O\eta$ примем плоскость орбиты (9.34); положительную ось $O\xi$ направим по оси орбиты, т. е. по прямой (9.37) в сторону ближайшей к началу координат вершины — к перицентру П; положительную ось $O\zeta$ направим по перпендикуляру к плоскости орбиты, т. е. по прямой, определяемой уравнениями

$$\frac{x}{c_1}=\frac{y}{c_2}=\frac{z}{c_3}.$$

Наконец, ось $O\eta$ выберем таким образом, чтобы систему координат $(\xi\eta\zeta)$ можно было совместить надлежащим вращением с первоначальной системой (xyz) (рис. 47).

---

*) Перииовий и апоиовий — по латинскому произношению имени Юпитера (Jove), периселений и апоселений — по имени богини Луны в греческой мифологии — Селены.

Тогда направляющие косинусы новых осей относительно старых определятся следующей таблицей:

	ξ	η	ζ
x	$\frac{f_1}{f}$	$\frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{cf}$	$\frac{c_1}{c}$
y	$\frac{f_2}{f}$	$\frac{c_3 f_1 - c_1 f_3}{cf}$	$\frac{c_2}{c}$
z	$\frac{f_3}{f}$	$\frac{c_1 f_2 - c_2 f_1}{cf}$	$\frac{c_3}{c}$.

Поэтому новые координаты выразятся через старые посредством формул:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{f_1}{f} x + \frac{f_2}{f} y + \frac{f_3}{f} z, \\ \eta &= \frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{cf} x + \frac{c_3 f_1 - c_1 f_3}{cf} y + \frac{c_1 f_2 - c_2 f_1}{cf} z, \\ \zeta &= \frac{c_1}{c} x + \frac{c_2}{c} y + \frac{c_3}{c} z. \end{aligned}\right\} \tag{9.38}$$

Обратные формулы напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{f_1}{f} \xi + \frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{cf} \eta + \frac{c_1}{c} \zeta, \\ y &= \frac{f_2}{f} \xi + \frac{c_3 f_1 - c_1 f_3}{cf} \eta + \frac{c_2}{c} \zeta, \\ z &= \frac{f_3}{f} \xi + \frac{c_1 f_2 - c_2 f_1}{cf} \eta + \frac{c_3}{c} \zeta. \end{aligned}\right\} \tag{9.38'}$$

Координаты ξ и η примем за наиболее удобные орбитальные координаты точки M, движущейся в плоскости $(\xi O \eta)$.

В системе координат $O\xi\eta\zeta$ общие уравнения орбиты (9.36) напишутся, очевидно, следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= 0, \\ \mu r &= c^2 - f\xi, \end{aligned}\right\} \tag{9.39}$$

где вследствие ортогональности преобразования координат и в силу первого из уравнений (9.39) радиус-вектор r определяется формулой

$$r = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}.$$

Так как плоскость орбиты перпендикулярна к вектору момента количества движения c, то интегралы площадей в новых координатах будут иметь вид

$$\begin{aligned} \eta\dot{\zeta} - \zeta\dot{\eta} &= 0, \\ \zeta\dot{\xi} - \xi\dot{\zeta} &= 0, \\ \xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} &= c. \end{aligned}$$

Но в новой системе координат $\zeta=0$ во все время движения и два первых из написанных уравнений удовлетворяются тождественно. Поэтому из трех интегралов площадей в орбитальной системе координат остается только один последний,

$$\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi}=c, \tag{9.40}$$

который носит название интеграла площадей в плоскости орбиты.

Введем теперь наряду с прямоугольными орбитальными координатами ξ и η полярные орбитальные координаты r и v формулами (рис. 48)

$$\xi=r\cos v, \quad \eta=r\sin v, \tag{9.41}$$

где v есть угол, образуемый радиусом-вектором движущейся точки с положительным направлением оси $O\xi$, т. е. с направлением на перицентр орбиты. Этот угол называется в астрономии истинной аномалией и отсчитывается от перицентра в положительном направлении (против часовой стрелки) от нуля до 360° или до 180°, или даже до бесконечности.

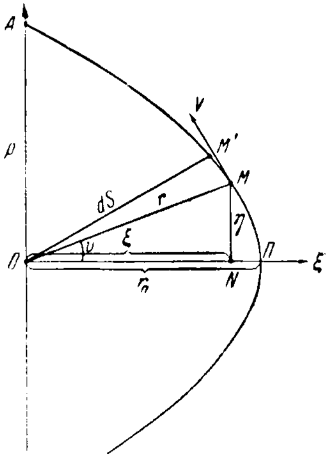


Рис. 48.

С учетом формул (9.41) второе из уравнений (9.39), или уравнение орбиты в плоскости движения (в неизменяемой плоскости), напишется следующим образом:

$$\mu\cdot r=c^2-fr\cos v$$

или

$$r=\frac{\frac{c^2}{\mu}}{1+\frac{f}{\mu}\cos v}, \tag{9.42}$$

что есть полярное уравнение кривой второго порядка, причем полюс находится в фокусе кривой и полярная ось направлена по фокальной оси кривой (см. рис. 48).

Обозначим, как обычно принято, через p параметр кривой и через e — ее эксцентриситет *). Тогда

$$p=\frac{c^2}{\mu}, \quad e=\frac{f}{\mu}, \tag{9.43}$$

---

*) Параметр кривой есть половина фокальной хорды OA, перпендикулярной к фокальной оси; $e=\frac{p-r_п}{r_п}$, где $r_п$ есть расстояние перицентра до начала координат (см. рис. 48). Параметр орбиты связан с модулем вектора c, а эксцентриситет пропорционален модулю вектора Лапласа.

и уравнение (9.42) приведется к хорошо знакомому виду

$$r=\frac{p}{1+e\cos v}. \tag{9.42'}$$

Это уравнение определяет радиус-вектор r как простую функцию истинной аномалии v. Подразумевая под r это его значение, мы получим по формулам (9.41) и орбитальные координаты ξ и η, так же как функции истинной аномалии, а тогда формулы (9.38′) дадут и пространственные координаты x, y, z в зависимости от истинной аномалии.

Действительно, так как во все время движения $\zeta=0$, то мы имеем из (9.38)

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{f_1}{f}\xi+\frac{c_2f_3-c_3f_2}{cf}\eta,\\ y&=\frac{f_2}{f}\xi+\frac{c_3f_1-c_1f_3}{cf}\eta,\\ z&=\frac{f_3}{f}\xi+\frac{c_1f_2-c_2f_1}{cf}\eta. \end{aligned}\right\} \tag{9.44}$$

Таким образом, окончательное решение задачи приводится к нахождению истинной аномалии v как функции времени.

Подставим в уравнение (9.40) вместо ξ и η их выражения из формул преобразования (9.41). Тогда

$$\left.\begin{aligned} \dot\xi&=\dot r\cos v-r\dot v\sin v,\\ \dot\eta&=\dot r\sin v+r\dot v\cos v, \end{aligned}\right\} \tag{9.41'}$$

и уравнение (9.40) приведется к виду

$$r^2\dot v=c. \tag{9.40'}$$

Это соотношение называется **интегралом площадей в плоскости орбиты в полярных координатах.**

Уравнение (9.40′) устанавливает связь между v и t. Действительно, подставляя в (9.40′) вместо r его выражение (9.42′) из уравнения орбиты, мы напишем соотношение (9.40) в следующем виде:

$$\frac{p^2\,dv}{(1+e\cos v)^2}=c\,dt.$$

Обозначая через τ тот момент времени, когда движущаяся точка попадает в перицентр, т. е. когда истинная аномалия v обращается в нуль, и интегрируя последнее равенство, мы получим

$$c(t-\tau)=p^2\int_0^v\frac{dv}{(1+e\cos v)^2}. \tag{9.45}$$

Это равенство определяет t как функцию v, а разрешая уравнение (9.45) относительно v, мы найдем формулу вида

$$v = v(t - \tau), \tag{9.45'}$$

откуда можно вычислить v для каждого значения t.

Определив v, мы найдем радиус-вектор r по формуле (9.42') и, таким образом, определим положение точки M на ее орбите. Зная r и v, найдем орбитальные координаты ξ, η, а затем и пространственные координаты x, y, z по формулам (9.44).

Все найденные формулы, кроме формулы (9.45), весьма просты и содержат только элементарные функции. Интеграл (9.45) также вычисляется элементарно, но нахождение v в зависимости от времени в общем случае составляет трансцендентную задачу, которая в конечном виде не может быть решена. Далее мы специально займемся этой задачей.

3. Чтобы получить полное решение задачи, нужно вывести еще выражения для производных $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, определяющих величину и направление скорости движущейся точки в каждый момент времени.

Прежде всего отметим, что формула (9.40') определяет секториальную скорость движущейся точки. Действительно, пусть dS есть элемент площади в полярных координатах, т. е. площадь бесконечно малого сектора с вершиной в начале координат O и с углом раствора dv (см. рис. 48). Тогда

$$dS = \frac{1}{2} r^2 dv,$$

или, по формуле (9.40'),

$$\frac{dS}{dt} = \frac{c}{2}, \tag{9.46}$$

т. е. секториальная скорость остается постоянной во все время движения.

Теперь из (9.40') находим угловую скорость движущейся точки

$$\dot{v} = \frac{c}{r^2}, \tag{9.47}$$

которая уже не является вообще постояной величиной, как секториальная скорость, а изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния r от центра притяжения *).

Дифференцируя затем формулу (9.42') по времени и заменяя в полученном выражении $\dot{v}$ ее выражением (9.47), мы найдем

---

*) Если орбита есть окружность, то $r = \text{const}$ и угловая скорость $\dot{v}$ также есть величина постоянная. Радиальная скорость в этом случае, очевидно, равна нулю.

величину $\dot{r}$, т. е. скорость изменения радиуса-вектора r, которая называется в астрономии радиальной скоростью:

$$\dot{r}=\frac{ce}{p}\sin v. \tag{9.47'}$$

Зная $\dot{v}$ и $\dot{r}$, найдем по формулам (9.41′) производные $\dot{\xi}$ и $\dot{\eta}$, т. е. составляющие скорости V движущейся точки по осям орбитальной системы координат.

После необходимых упрощений эти формулы примут вид

$$\left.\begin{aligned}\dot{\xi}&=-\frac{c}{p}\sin v,\\ \dot{\eta}&=\frac{c}{p}(e+\cos v).\end{aligned}\right\} \tag{9.48}$$

Если обозначить теперь, как принято в механике, через V_r и V_n проекции скорости V на радиус-вектор и на перпендикуляр к радиусу-вектору в плоскости орбиты (см. рис. 48), то мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned}V_r&=\dot{r}=\frac{ce}{p}\sin v,\\ V_n&=r\dot{v}=\frac{c}{p}(1+e\cos v).\end{aligned}\right\} \tag{9.48'}$$

После этого из формул (9.48) или (9.48′) получим величину скорости

$$\begin{aligned}V&=+\sqrt{\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2}=+\sqrt{V_r^2+V_n^2}=\\ &=+\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{v}^2}=+\frac{c}{p}\sqrt{1+2e\cos v+e^2}.\end{aligned} \tag{9.49}$$

Наконец, при помощи (9.48) из (9.44) найдем проекции скорости на оси пространственной системы координат

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\frac{c}{p}\left[-\frac{f_1}{f}\sin v+\frac{c_2f_3-c_3f_2}{cf}(e+\cos v)\right],\\ \dot{y}&=\frac{c}{p}\left[-\frac{f_2}{f}\sin v+\frac{c_3f_1-c_1f_3}{cf}(e+\cos v)\right],\\ \dot{z}&=\frac{c}{p}\left[-\frac{f_3}{f}\sin v+\frac{c_1f_2-c_2f_1}{cf}(e+\cos v)\right],\end{aligned}\right\} \tag{9.50}$$

откуда опять найдем

$$V=+\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}=+\frac{c}{p}\sqrt{1+2e\cos v+e^2}.$$

Кроме того, величину скорости можно определить еще из интеграла живой силы (9.18′), что дает

$$V=+\sqrt{\frac{2\mu}{r}+h}. \tag{9.49'}$$

Если из этой формулы исключить h при помощи соотношения $f^2 = \mu^2 + hc^2$ и использовать формулы (9.42′) и (9.43), то получим опять (9.49).

Заметим еще, что из уравнения плоскости орбиты (9.34) мы имеем соотношение

$$c_1\dot{x} + c_2\dot{y} + c_3\dot{z} = 0,$$

которое показывает, что вектор скорости лежит в плоскости орбиты, что, впрочем, следует также из того, что орбита есть плоская кривая, а вектор скорости всегда направлен по касательной к траектории движения (см. рис. 47).

Общее решение задачи представляют формулы (9.44), (9.41), (9.42′) и (9.50), дающие координаты x, y, z и их первые производные $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ как функции истинной аномалии v и произвольных постоянных, за которые здесь можно принять: параметр орбиты p, эксцентриситет e и шесть направляющих косинусов осей $O\xi$ и $O\eta$ в системе $(Oxyz)$. Но шесть направляющих косинусов связаны тремя соотношениями (сумма квадратов направляющих косинусов каждой оси равна единице, а сумма произведений направляющих косинусов обеих осей равна нулю), а поэтому независимыми из них являются только три. Таким образом, формулы (9.44) и (9.50) дают координаты и составляющие скорости как функции угла v и пяти произвольных постоянных. Шестая произвольная постоянная входит через выражение v как функции времени и, следовательно, общее решение содержит нужное число произвольных постоянных.

4. Вместо направляющих косинусов орбитальных осей в системе $(Oxyz)$ можно ввести другие постоянные, более удобные и более употребительные в астрономии.

Для этого заметим, что направляющие косинусы определяют ориентацию системы координат $(O\xi\eta\zeta)$ относительно системы $(Oxyz)$. Но ориентация одной системы координат относительно другой может быть определена также, как мы знаем, тремя эйлеровыми углами, которые являются независимыми между собой. Эти углы в интересующем нас случае имеют собственные названия и обозначения, издавна укоренившиеся в астрономии.

Рассмотрим линию пересечения плоскости $(\xi\eta)$, т. е. плоскости орбиты, с основной плоскостью (xy) (см. рис. 47). Эта линия называется в астрономии линией узлов, а точки ее пересечения с орбитой*) называются узлами орбиты. Тот узел орбиты, который движущаяся точка проходит, переходя из области отрицательных аппликат в область положительных,

---

*) Вообразим сферу произвольного радиуса с центром в O. Плоскости (xy) и $(\xi\eta)$ пересекают эту сферу по большим кругам. Точки пересечения этих кругов, т. е. проекции узлов орбиты на сферу, также называются узлами (см. рис. 49).

называется восходящим узлом, а противоположный — нисходящим узлом. Угол прецессии триэдра ($O\xi\eta\zeta$) есть угол между направлением на восходящий узел (направление $\overrightarrow{ON}$) и положительным направлением оси Ox. В астрономии этот угол называется долготой восходящего узла (или просто долготой узла) и обозначается буквой Ω. Угол собственного вращения триэдра ($O\xi\eta\zeta$) есть угол между направлением $\overrightarrow{ON}$ на восходящий узел и направлением положительной оси $O\xi$, или угол между направлением $\overrightarrow{ON}$ и направлением $\overrightarrow{O\Pi}$ на перицентр.

Этот угол обозначается обычно буквой ω и называется угловым расстоянием перицентра от узла*). Наконец, угол нутации триэдра ($O\xi\eta\zeta$) есть угол между положительными направлениями осей $O\zeta$ и Oz. Этот угол равен также углу, который плоскость орбиты образует с основной плоскостью (xy) и называется поэтому наклонением или наклонностью орбиты и обозначается обыкновенно буквой i**).

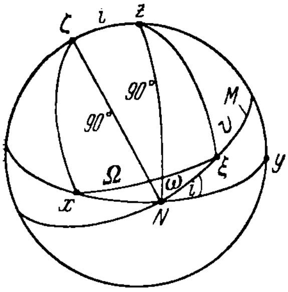


Рис. 49.

Эти три угла определяют положение плоскости орбиты в пространстве и положение линии апсид на этой плоскости, т. е. определяют расположение, или ориентацию, орбиты. Каждый из них измеряется обычным образом в радианах, или в градусах, минутах и секундах дуги.

Долгота восходящего узла Ω отсчитывается от оси Ox в сторону движения точки M от 0° до 360°. Угловое расстояние перицентра от восходящего узла отсчитывается в плоскости орбиты также в сторону движения точки M от 0° до 360°. Наконец, наклонение i отсчитывается от 0° до 180°. При этом если $0° < i < 90°$, то движение точки называется прямым, а если $90° < i < 180°$, то движение точки называется обратным.

В подавляющем большинстве случаев движения небесных тел суть прямые движения, но имеются некоторые случаи и обратных движений.

Направляющие косинусы осей триэдра ($O\xi\eta\zeta$) легко выразить через три независимых угла Ω, ω и i. Для этого нужно рассмотреть (рис. 49) соответствующие сферические треуголь-

---

*) На рис. 49 $\omega = \widehat{N\xi}$. Название угла, конечно, изменяется в зависимости от задачи. Так, в теории движения Луны угол ω называется угловым расстоянием перигея от узла и т. п.

**) На рис. 49 i есть сферический угол $\angle \xi N y$, или также дуга большого круга $\widehat{\zeta z}$.

ники и применить основную теорему сферической тригонометрии. Так, например, из треугольников ($xN\zeta$), ($yN\zeta$), ($zN\zeta$) немедленно выводим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{c_1}{c} &= \sin i \sin \Omega, \\ \frac{c_2}{c} &= -\sin i \cos \Omega, \\ \frac{c_3}{c} &= \cos i. \end{aligned}\right\} . \tag{9.51}$$

Далее, из треугольников ($xN\xi$), ($yN\xi$), ($zN\xi$) имеем:

$$\left.\begin{aligned} \frac{f_1}{f} &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \\ \frac{f_2}{f} &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i, \\ \frac{f_3}{f} &= \sin \omega \sin i. \end{aligned}\right\} \tag{9.51'}$$

Наконец, из соответствующих треугольников (не показанных на рис. 49) или из формул (9.51), (9.51′), или заменяя просто ω на $\omega+90°$ в (9.51′), найдем

$$\left.\begin{aligned} \frac{c_2 f_3 - c_3 f_2}{cf} &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i, \\ \frac{c_3 f_1 - c_1 f_3}{cf} &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i, \\ \frac{c_1 f_2 - c_2 f_1}{cf} &= \cos \omega \sin i. \end{aligned}\right\} \tag{9.51''}$$

Заменяя теперь в формулах (9.44) направляющие косинусы их выражениями (9.51′) и (9.51″), а орбитальные координаты ξ и η их выражениями (9.41), мы получим для координат x, y, z еще следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i), \\ y &= r(\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i), \\ z &= r \sin u \sin i, \end{aligned}\right\} \tag{9.52}$$

где

$$u = v + \omega. \tag{9.53}$$

Нетрудно видеть, что u есть угол, образуемый радиусом-вектором r с направлением на восходящий узел орбиты *) (см. рис. 47 или 49). Этот угол называется **аргументом широты** и играет такую же роль, как и истинная аномалия v.

---

*) Хотя этот угол обозначен той же буквой u, которой обозначено обратное расстояние $1/\rho$ в § 1, путаницы не произойдет, если остерегаться употреблять оба обозначения одновременно.

Формулы (9.52) легко также вывести непосредственно из чертежа. Для этого нужно соединить на рис. 49 дугами больших кругов точки x, y, z с точкой M и применить основную формулу сферической тригонометрии к сферическим треугольникам (xMN), (yMN) и (zMN).

Ввиду (9.53) формулы (9.52) дают явные выражения для прямоугольных пространственных координат в зависимости от истинной аномалии v и пяти постоянных: Ω, i, ω, p, e. Шестая постоянная τ и время t входят в эти формулы через переменную v.

Заметим, что выражение для v, определяемое из соотношения (9.45), содержит еще постоянные p и e. В результате координаты x, y, z представляются формулами (9.52) как функции времени t и шести произвольных постоянных

$$\Omega,\ i,\ \omega,\ p,\ e,\ \tau. \tag{9.54}$$

Эти постоянные называются элементами кеплеровской орбиты, кеплеровскими элементами невозмущенной орбиты или, когда это не может вызвать недоразумения, просто элементами орбиты.

Элементы орбиты можно разделить на три группы. К первой группе отнесем элементы

$$\Omega, \quad i, \quad \omega,$$

определяющие положение плоскости орбиты в пространстве и положение орбиты в ее плоскости. Во вторую группу включим элементы

$$p,\ e,$$

определяющие размеры орбиты и ее форму. Наконец, к третьей группе отнесем единственный элемент

$$\tau,$$

определяющий положение планеты на ее орбите в начальный момент *).

Элементы первой и второй групп суть чисто геометрические величины, связанные с двумя основными векторами — вектором момента количества движения и вектором Лапласа. При этом элементы первой группы определяют направления этих векторов, а элементы второй группы связаны с их модулями.

Так как элемент третьей группы τ связан с движением по орбите, т. е. с динамикой движения, то он называется также иногда динамическим элементом.

---

*) Положим в формуле (9.45) $t=t_0$ и обозначим начальное значение истинной аномалии v через v_0. Тогда получим соотношение вида $v_0=v(t_0-\tau)$, связывающее две постоянные — v_0 и τ.

Вместо τ можно взять какую-нибудь другую зависящую от него величину, например, истинную аномалию v_0 в начальный момент, или, как говорят астрономы, истинную аномалию эпохи.

5. Дифференцируя теперь формулы (9.52) по времени t, которое входит в координаты через посредство r и u, и заменяя в полученных выражениях $\dot{v}$ и $\dot{r}$ их значениями (9.47) и (9.47′), мы получим проекции скорости движущейся точки в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{c}{p}[e\sin v(\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i) + \\ &\qquad + (1 + e\cos v)(-\sin u\cos\Omega - \cos u\sin\Omega\cos i)],\\ \dot{y} &= \frac{c}{p}[e\sin v(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i) + \\ &\qquad + (1 + e\cos v)(-\sin u\sin\Omega + \cos u\cos\Omega\cos i)],\\ \dot{z} &= \frac{c}{p}[e\sin v\sin u\sin i + (1 + e\cos v)\cos u\sin i],\end{aligned}\right\}\qquad(9.55)$$

т. е. как функции истинной аномалии v и пяти произвольных постоянных, а значит, как функции времени и шести элементов орбиты (9.54) *).

Полученные формулы удобно также представить в несколько ином виде. Обозначим направляющие косинусы радиуса-вектора r через α, β, γ и направляющие косинусы прямой, перпендикулярной к радиусу-вектору и лежащей в плоскости орбиты, через α', β', γ' **). Тогда имеем

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \frac{x}{r} = \cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i,\\ \beta &= \frac{y}{r} = \cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i,\\ \gamma &= \frac{z}{r} = \sin u\sin i,\end{aligned}\right\}\qquad(9.56)$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha' &= \frac{d\alpha}{du} = -\sin u\cos\Omega - \cos u\sin\Omega\cos i,\\ \beta' &= \frac{d\beta}{du} = -\sin u\sin\Omega + \cos u\cos\Omega\cos i,\\ \gamma' &= \frac{d\gamma}{du} = \cos u\sin i,\end{aligned}\right\}\qquad(9.56')$$

---

*) Формулы (9.55) можно также вывести из формул (9.50), заменяя в последних направляющие косинусы их выражениями (9.51′) и (9.51″) и делая некоторые элементарные преобразования. Формулы (9.55) можно также получить и геометрическим путем.

**) Чтобы получить второе направление, нужно повернуть радиус-вектор в плоскости орбиты по направлению возрастания v на 90°.

и общее решение уравнений невозмушенного движения представится в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha r, & \dot{x} &= \frac{c}{p}\left[\alpha e \sin v + \alpha'(1+e\cos v)\right], \\ y &= \beta r, & \dot{y} &= \frac{c}{p}\left[\beta e \sin v + \beta'(1+e\cos v)\right], \\ z &= \gamma r, & \dot{z} &= \frac{c}{p}\left[\gamma e \sin v + \gamma'(1+e\cos v)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{9.57}$$

Далее, если в формулах (9.56) и (9.56′) положить $t=\tau$, то $v=0$ и формулы (9.56) дадут направляющие косинусы линии апсид, или оси $O\xi$, а формулы (9.56′) дадут направляющие косинусы прямой, перпендикулярной к линии апсид, т. е. оси $O\eta$. Обозначая эти направляющие косинусы соответственно через α_τ, β_τ, γ_τ и α'_τ, β'_τ, γ'_τ, мы имеем, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \alpha_\tau &= \frac{f_1}{f} = \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega\cos i, \\ \beta_\tau &= \frac{f_2}{f} = \cos\omega\sin\Omega + \sin\omega\cos\Omega\cos i, \\ \gamma_\tau &= \frac{f_3}{f} = \sin\omega\sin i, \end{aligned}\right\} \tag{9.58}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha'_\tau &= \frac{c_2f_3 - c_3f_2}{cf} = -\sin\omega\cos\Omega - \cos\omega\sin\Omega\cos i, \\ \beta'_\tau &= \frac{c_3f_1 - c_1f_3}{cf} = -\sin\omega\sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega\cos i, \\ \gamma'_\tau &= \frac{c_1f_2 - c_2f_1}{cf} = \cos\omega\sin i. \end{aligned}\right\} \tag{9.58′}$$

С этими обозначениями общее решение уравнений невозмущенного движения представится следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_\tau\xi + \alpha'_\tau\eta, & \dot{x} &= \alpha_\tau\dot{\xi} + \alpha'_\tau\dot{\eta}, \\ y &= \beta_\tau\xi + \beta'_\tau\eta, & \dot{y} &= \beta_\tau\dot{\xi} + \beta'_\tau\dot{\eta}, \\ z &= \gamma_\tau\xi + \gamma'_\tau\eta, & \dot{z} &= \gamma_\tau\dot{\xi} + \gamma'_\tau\dot{\eta}. \end{aligned}\right\} \tag{9.59}$$

§ 4. Другие способы интегрирования дифференциальных уравнений невозмущенного движения

Мы вывели общее решение дифференциальных уравнений невозмущенного движения из общего интеграла системы (9.16), т. е. из совокупности независимых между собой первых интегралов, легко получающихся составлением интегрируемых комбинаций из уравнений движения.

Это же общее решение можно получить и многими другими способами. Некоторые из них полезно и поучительно здесь рассмотреть.

1. Прежде всего мы рассмотрим более общую задачу о движении материальной точки под действием центральной силы. Частным случаем этой задачи является и наша задача о невозмущенном кеплеровском движении.

Пусть материальная точка M находится под действием некоторой силы, направление которой постоянно проходит через неподвижную точку O — центр силы.

Возьмем центр силы за начало прямоугольной системы координат, с неизменными направлениями осей $\overrightarrow{Ox}$, $\overrightarrow{Oy}$, $\overrightarrow{Oz}$. Примем массу движущейся точки за единицу массы и обозначим через $1 \cdot G$ величину силы, действующей на эту точку. Тогда проекции ускорения, вызываемого действием этой силы, будут равны соответственно

$$X = \mp G \frac{x}{r}, \quad Y = \mp G \frac{y}{r}, \quad Z = \mp G \frac{z}{r},$$

где знак минус относится к тому случаю, когда сила направлена к началу координат (центральная сила есть сила притяжения), а знак плюс соответствует случаю, когда сила направлена от начала координат (случай силы отталкивания).

Положим для упрощения

$$\mp G = F.$$

Тогда дифференциальные уравнения движения материальной точки, находящейся под действием центральной силы, напишутся следующим образом:

$$\ddot{x} = F \frac{x}{r}, \quad \ddot{y} = F \frac{y}{r}, \quad \ddot{z} = F \frac{z}{r}. \tag{9.60}$$

Мы можем рассматривать F как величину силы, действующей на материальную точку единичной массы, считая силу притяжения отрицательной, а силу отталкивания — положительной.

Уравнения задачи о невозмущенном движении получатся из уравнений (9.60), если положить

$$F = -\frac{\mu}{r^2}.$$

Таким образом, мы можем рассматривать уравнения (9.16) как уравнения движения материальной точки единичной массы, притягиваемой к неподвижному центру O с силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния точки от центра силы, В общем случае, сила F может зависеть произвольным образом от расстояния r до центра силы, от радиальной скорости $\dot{r}$ и от времени t. Если (в частном случае) F зависит только от радиуса-вектора r, то ее можно рассматривать как производную по r от некоторой функции U, называемой силовой функцией или функцией сил*). Действительно, положим

$$U(r)=\int F(r)\,dr,$$

$$dU(r)=F(r)\,dr.$$

Тогда

$$F(r)=\frac{dU}{dr},$$

и так как $r^2=x^2+y^2+z^2$, то

$$F(r)\frac{x}{r}=\frac{\partial U}{\partial x},\quad F(r)\frac{y}{r}=\frac{\partial U}{\partial y},\quad F(r)\frac{z}{r}=\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Поэтому в рассматриваемом случае уравнения движения можно написать также в виде

$$\ddot{x}=\frac{\partial U}{\partial x},\quad \ddot{y}=\frac{\partial U}{\partial y},\quad \ddot{z}=\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{9.61}$$

Уравнения невозмущенного движения (9.16) получаются из уравнений (9.61) при

$$U=\frac{\mu}{r}.$$

При произвольной функции F уравнения (9.60) или даже уравнения (9.61) не могут быть проинтегрированы до конца, хотя бы в квадратурах, но задачу интегрирования можно значительно упростить, используя существующие здесь первые интегралы. Действительно, какова бы ни была величина F, уравнения (9.60) всегда имеют три интеграла, аналогичные интегралам площадей уравнений невозмущенного движения (9.16) и являющиеся следствием центральности действующей силы.

В самом деле, умножим второе из уравнений (9.60) на $-z$, третье на $+y$ и сложим их, что дает

$$y\ddot{z}-z\ddot{y}=0,$$

---

*) В теории притяжения (часть первая) мы рассматривали силовую функцию ньютонианского притяжения. Теперь мы видим, что понятие силовой функции может иметь и более общий характер.

откуда интегрированием получаем интеграл и еще два других, выводимых таким же образом:

$$\left.\begin{aligned} y\dot{z}-z\dot{y}&=c_1,\\ z\dot{x}-x\dot{z}&=c_2,\\ x\dot{y}-y\dot{x}&=c_3. \end{aligned}\right\} \tag{9.62}$$

Уравнения (9.62), которые мы будем называть интегралами площадей, показывают, что движение под действием любой центральной силы происходит в неизменной плоскости, проходящей через начало координат (центр силы). Действительно, умножая уравнения (9.62) соответственно на x, y, z и складывая, мы получим

$$c_1x+c_2y+c_3z=0, \tag{9.63}$$

т. е. уравнение плоскости, проходящей через начало координат. В силу уравнения (9.63) координаты x, y, z можно выразить через какие-нибудь две независимые переменные, которые опять будем называть орбитальными координатами (или координатами в плоскости орбиты).

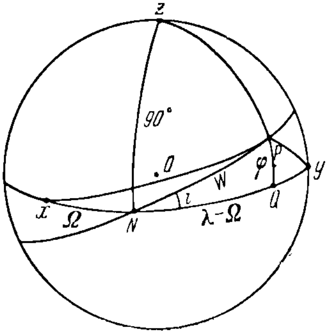


Рис. 50.

Примем за эти две независимые переменные радиус-вектор r движущейся точки и угол w, образованный радиусом-вектором с линией пересечения плоскости движения с плоскостью (xOy) (линия узлов). Тогда, как было указано выше (см. сноску на стр. 447), формулы, выражающие три пространственные координаты через две орбитальные, можно получить чисто геометрическим путем.

Вообразим опять сферу произвольного радиуса с центром в начале координат и обозначим, так же как и выше, буквами x, y, z, P точки пересечения координатных осей и радиуса-вектора точки M с этой сферой (рис. 50). Далее, пусть N есть восходящий узел на сфере, т. е. точка пересечения линии узлов плоскости (9.63) со сферой. Соединяя отмеченные точки на сфере дугами больших кругов, получим три сферических треугольника: (xNP), (yNP), (zNP), в которых стороны $\overset{\frown}{Px}$, $\overset{\frown}{Py}$, $\overset{\frown}{Pz}$ измеряют углы между радиусом-вектором r и положительными направлениями осей координат. Косинусы этих углов суть

$$\frac{x}{r},\quad \frac{y}{r},\quad \frac{z}{r}.$$

Далее, сторона $\widehat{xN}$ есть долгота восходящего узла Ω, а сторона $\widehat{NP}$ измеряет угол w. Наконец, сферический угол $\angle PNy$ равен наклонности плоскости орбиты i, а угол $\angle xNP$ дополняет угол i до 180°.

Применяя основную формулу сферической тригонометрии к каждому из трех указанных сферических треугольников, мы получим следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\cos w\cos\Omega - \sin w\sin\Omega\cos i),\\ y &= r(\cos w\sin\Omega + \sin w\cos\Omega\cos i),\\ z &= r\sin w\sin i, \end{aligned}\right\}\qquad(9.64)$$

выражающие пространственные координаты через две орбитальные и через две постоянные, Ω и i, определяющие положение плоскости движения в системе $(Oxyz)$.

Итак, задача сводится к нахождению двух неизвестных r и w. Нетрудно получить дифференциальные уравнения, которым должны удовлетворять эти орбитальные координаты.

Дифференцируя формулы (9.64) по времени, имеем

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\frac{x}{r} + r\dot{w}(-\sin w\cos\Omega - \cos w\sin\Omega\cos i),\\ \dot{y} &= \dot{r}\frac{y}{r} + r\dot{w}(-\sin w\sin\Omega + \cos w\cos\Omega\cos i),\\ \dot{z} &= \dot{r}\frac{z}{r} + r\dot{w}\cos w\sin i, \end{aligned}\right\}\qquad(9.65)$$

что можно также написать короче, используя обозначения (9.56) и (9.56′), в виде *)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r}\alpha + r\dot{w}\alpha',\\ \dot{y} &= \dot{r}\beta + r\dot{w}\beta',\\ \dot{z} &= \dot{r}\gamma + r\dot{w}\gamma'. \end{aligned}\right\}\qquad(9.65')$$

Дифференцируя затем формулы (9.65′), получим

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= (\ddot{r} - r\dot{w}^2)\alpha + (r\ddot{w} + 2\dot{r}\dot{w})\alpha',\\ \ddot{y} &= (\ddot{r} - r\dot{w}^2)\beta + (r\ddot{w} + 2\dot{r}\dot{w})\beta',\\ \ddot{z} &= (\ddot{r} - r\dot{w}^2)\gamma + (r\ddot{w} + 2\dot{r}\dot{w})\gamma'. \end{aligned}\right\}\qquad(9.65'')$$

---

*) Нужно отметить, что в рассматриваемом случае угол, образованный радиусом-вектором точки M с линией узлов (аргумент широты), обозначен буквой w, так как u будет обозначать в этом параграфе другую величину.

Подставляя теперь выражения (9.65″) и (9.64) в уравнения (9.60), мы получим следующие равенства:

$$(\ddot{r}-r\dot{w}^2-F)\alpha+(r\ddot{w}+2\dot{r}\dot{w})\alpha'=0,$$
$$(\ddot{r}-r\dot{w}^2-F)\beta+(r\ddot{w}+2\dot{r}\dot{w})\beta'=0,$$
$$(\ddot{r}-r\dot{w}^2-F)\gamma+(r\ddot{w}+2\dot{r}\dot{w})\gamma'=0,$$

помножая которые соответственно на α, β, γ и затем на α', β', γ' и каждый раз складывая, выводим

$$\left.\begin{aligned}\ddot{r}-r\dot{w}^2-F&=0,\\ r\ddot{w}+2\dot{r}\dot{w}&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(9.66)$$

Заметим, что второе из этих уравнений можно непосредственно интегрировать один раз, что дает первый интеграл системы (9.66) в виде *)

$$r^2\dot{w}=\text{const}.\qquad(9.67)$$

Таким образом, система (9.66) приведется к виду

$$\left.\begin{aligned}\ddot{r}-r\dot{w}^2-F&=0,\\ r^2\dot{w}&=c,\end{aligned}\right\}\qquad(9.66')$$

а эта система распадается на два отдельных уравнения.

Действительно, исключая из уравнений (9.66′) угловую скорость $\dot{w}$, мы получим одно уравнение

$$\ddot{r}-\frac{c^2}{r^3}-F(t,\ r,\ \dot{r})=0\qquad(9.66'')$$

с одной неизвестной функцией r. Если это уравнение второго порядка возможно проинтегрировать, то мы получим радиус-вектор как функцию времени и трех произвольных постоянных (одна из них есть постоянная площадей c). После этого из уравнения

$$r^2\dot{w}=c\qquad(9.66''')$$

квадратурой найдем

$$w=w_0+c\int\limits_{t_0}^{t}\frac{dt}{r^2},$$

где w_0 — четвертая произвольная постоянная.

---

*) Этот же интеграл можно вывести также из интегралов площадей (9.62), подставляя в них вместо координат и их производных выражения (9.64) и (9.65). Легко убедиться, что каждое из трех уравнений (9.62) приводится к одному-единственному уравнению (9.67), в котором константа интегрирования в силу формул (9.51) равна c.

Наконец, формулы (9.64) дадут x, y, z как функции времени и шести произвольных постоянных.

2. Таким образом, задача сводится к интегрированию единственного дифференциального уравнения второго порядка с одной неизвестной функцией. Однако, вообще говоря, это уравнение не может быть проинтегрировано в квадратурах, так что решение задачи нельзя довести до конца, по крайней мере аналитическим путем.

Рассмотрим частный случай задачи о движении под действием центральной силы, предполагая, что величина F не зависит явно от t и является некоторой функцией только радиуса-вектора r и радиальной производной $\dot{r}$.

Тогда уравнение (9.66″) можно несколько упростить, исключая из него dt при помощи равенства (9.66‴), т. е. вводя вместо t угол w, как новую независимую переменную.

Принимая еще за неизвестную функцию обратное значение радиуса-вектора

$$u=\frac{1}{r},$$

мы найдем

$$\dot{r}=-c\frac{du}{dw},$$

$$\ddot{r}=-c^2u^2\frac{d^2u}{dw^2},$$

вследствие чего равенство (9.66″) приведется к виду

$$\frac{d^2u}{dw^2}+u=-\frac{1}{c^2u^2}F\left(\frac{1}{u},\ -c\frac{du}{dw}\right), \tag{9.67′}$$

называемое в теоретической механике уравнением Бине.

Это уравнение, вообще говоря, также не может быть проинтегрировано, но если величина F зависит только от r, то нахождение решения (9.67′) сводится к квадратурам.

Положим, как обычно делают в этом случае,

$$p=\frac{du}{dw},$$

и примем u за независимую переменную. Тогда уравнение Бине напишется в форме

$$p\frac{dp}{du}+u=-\frac{1}{c^2u^2}F\left(\frac{1}{u}\right)=\Phi(u).$$

и легко интегрируется в квадратурах, что дает

$$p^2=c_1^2-u^2+\int\Phi(u)\,du. \tag{9.67″}$$

Найдя p как функцию u, получим теперь и w как функцию u по формуле

$$w = c_2 + \int \frac{du}{p},$$

что и дает общий интеграл нашего дифференциального уравнения.

Случай, когда сила зависит только от радиуса-вектора движущейся точки, можно рассмотреть еще иначе.

В самом деле, в этом случае, как мы видели выше, существует силовая функция U, и уравнения движения имеют вид (9.61). Эти уравнения, кроме трех интегралов площадей, имеют еще один интеграл — интеграл живой силы, который получим, умножая (9.61) соответственно на $2\dot{x}$, $2\dot{y}$, $2\dot{z}$, складывая результаты и интегрируя, что дает

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = 2U + h, \tag{9.68}$$

что можно также написать в виде

$$V^2 = 2U + h \tag{9.68'}$$

(постоянная интегрирования h есть постоянная живой силы).

Переходя к орбитальным координатам r и w, мы напишем предыдущее уравнение в следующем виде:

$$\dot{r}^2 + r^2\dot{w}^2 = 2U + h. \tag{9.69}$$

Исключая отсюда dt с помощью интеграла площадей (9.66‴) и беря за искомую функцию u вместо r, мы получим

$$c^2\left(\frac{du}{dw}\right)^2 + c^2u^2 = 2U + h, \tag{9.69'}$$

что совпадает с (9.67″), если в последнем положить $F = -u^2\frac{dU}{du}$.

Разделяя переменные в (9.69′) и интегрируя, мы получим соотношение между u и w, т. е. уравнение орбиты в полярных орбитальных координатах:

$$c\int \frac{du}{\sqrt{2U + h - c^2u^2}} = w + C. \tag{9.70}$$

Рассмотрим теперь, как частный случай задачи о движении под действием центральной силы, задачу о невозмущенном движении. Тогда, как уже отмечено,

$$F = -\mu u^2,$$

и уравнение Бине примет вид

$$\frac{d^2u}{dw^2} + u = \frac{\mu}{c^2}. \tag{9.71}$$

Мы получили линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, общее решение которого составляется по общим правилам без всякого труда. Действительно, частное решение уравнения (9.71), есть, очевидно, μ/c^2, а независимыми частными решениями уравнения без правой части будут $\cos w$ и $\sin w$.

Поэтому общее решение (9.71) напишется в следующем виде:

$$u=\frac{\mu}{c^2}+C_1\cos w+C_2\sin w, \tag{9.72}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Положим для сокращения $p=\frac{c^2}{\mu}$ и введем вместо C_1 и C_2 две другие постоянные, e и ω, при помощи формул

$$C_1=\frac{e}{p}\cos\omega, \quad C_2=\frac{e}{p}\sin\omega.$$

Тогда уравнение орбиты примет вид

$$pu=1+e\cos(w-\omega), \tag{9.72'}$$

а если положить

$$v=w-\omega$$

и разрешить предыдущее уравнение относительно радиуса-вектора r, то получим

$$r=\frac{p}{1+e\cos v}, \tag{9.72''}$$

т. е. уже знакомое нам уравнение невозмущенной орбиты в полярных координатах.

Это же уравнение можно вывести и из (9.70). Действительно, для невозмущенного движения $U=\mu u$ и (9.70) примет вид

$$c\int\frac{du}{\sqrt{2\mu u+h-c^2u^2}}=w+C,$$

откуда получим

$$u=\frac{1}{r}=\frac{\mu}{c^2}+\frac{\sqrt{\mu^2+hc^2}}{c^2}\sin(w+C).$$

Полагая здесь

$$\frac{\mu}{c^2}=\frac{1}{p}, \quad \frac{\sqrt{\mu^2+hc^2}}{\mu}=e, \quad C=\frac{\pi}{2}-\omega, \quad v=w-\omega,$$

получим опять хорошо знакомое уравнение кривой второго порядка в полярных координатах

$$\frac{p}{r}=1+e\cos v,$$

фокус которой находится в начале координат, т. е. в притягивающем центре.

Входящие сюда постоянные имеют обычные значения. Величина p есть параметр кривой второго порядка или половина фокальной хорды, перпендикулярной к фокальной оси. Величина e есть эксцентриситет кривой, а если положить

$$f=\sqrt{\mu^2+hc^2},$$

то будем иметь, как и ранее,

$$e=\frac{f}{\mu}.$$

Угол v есть, очевидно, угол между радиусом-вектором и фокальной осью кривой, т. е. истинная аномалия, а ω есть угол между фокальной осью и линией узлов, т. е. угловое расстояние перицентра от узла.

Зная r как функцию v, мы получим пространственные координаты x, y, z по формулам (9.64), а их первые производные (проекции скорости V на оси координат) по формулам (9.65).

Окончательное решение задачи опять приводится к нахождению истинной аномалии v в зависимости от времени. Так как, очевидно, $\dot{v}=\dot{w}$, то из (9.66‴) имеем

$$r^2\dot{v}=c.$$

Это есть интеграл площадей в плоскости орбиты в полярных координатах. Отсюда по формуле (9.45) найдем соотношение между v и t так же, как это было описано выше, и решение задачи приведется к вычислению интеграла в уравнении (9.45) и к последующему затем решению полученного уравнения относительно истинной аномалии v.

В заключение этого раздела рассмотрим еще случай силы отталкивания, обратно пропорциональной квадрату расстояния. Тогда в уравнении Бине (9.67) нужно положить

$$F=+\mu u^2,$$

так что это уравнение напишется в виде

$$\frac{d^2u}{dw^2}+u=-\frac{\mu}{c^2}.$$

Общее решение этого уравнения найдется по формуле

$$u=-\frac{\mu}{c^2}+C_1\cos w+C_2\sin w.$$

Полагая опять

$$\frac{\mu}{c^2}=\frac{1}{p},\quad C_1=\frac{e}{p}\cos\omega,\quad C_2=\frac{e}{p}\sin\omega,$$

мы получим уравнение орбиты в виде

$$pu = -1 + e\cos(w - \omega),$$

или, полагая $v = w - \omega$ и разрешая относительно r,

$$r = \frac{p}{-1 + e\cos v}.$$

Это уравнение представляет собой вторую ветвь гиперболы, фокус которой находится вне кривой (рис. 51).

3. Рассмотрим теперь дифференциальные уравнения невозмущенного кеплеровского движения в форме Клеро — Лапласа

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2u}{d\lambda^2} + u = \frac{\mu}{\sigma^2}(1 + s^2)^{-\frac{3}{2}},\\ &\frac{d^2s}{d\lambda^2} + s = 0,\\ &\qquad\frac{d\lambda}{dt} = \sigma u^2, \end{aligned}\right\} \qquad (9.73)$$

где σ — произвольная постоянная.

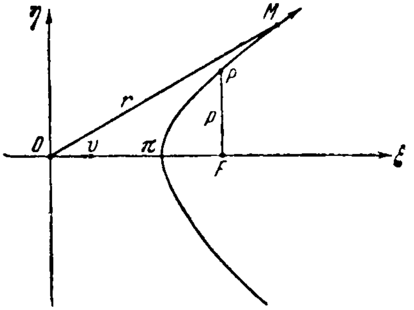


Рис. 51.

Второе из этих уравнений есть линейное дифференциальное уравнение второго порядка простейшего вида, общее решение которого можно написать сразу:

$$s = C_1' \cos\lambda + C_2' \sin\lambda,$$

где C_1' и C_2' — произвольные постоянные.

Полагая теперь

$$C_1' = -\nu\sin\theta, \quad C_2' = \nu\cos\theta,$$

где ν и θ — две новые постоянные, мы представим предыдущее равенство в виде

$$s = \nu\sin(\lambda - \theta). \qquad (9.74)$$

Подставляя найденное выражение для s как функции независимой переменной λ в первое из уравнений (9.72), мы получим для определения второй неизвестной u следующее уравнение*):

$$\frac{d^2u}{d\lambda^2} + u = \frac{\mu}{\sigma^2}[1 + \nu^2\sin^2(\lambda - \theta)]^{-\frac{3}{2}}.$$

---

*) В этом разделе буква u обозначает обратное значение проекции радиуса-вектора r на плоскость (xOy), т. е. $u = 1/\rho$.

Нетрудно проверить, что функция

$$u^0=\frac{\mu}{\sigma^2}\,\frac{\sqrt{1+\nu^2\sin^2(\lambda-\theta)}}{1+\nu^2}$$

удовлетворяет этому уравнению, а поэтому общее его решение напишется следующим образом *):

$$u=u^0+C_1\cos\lambda+C_2\sin\lambda,$$

где C_1 и C_2 — новые произвольные постоянные.

Полагая теперь

$$C_1=\frac{\mu\varepsilon\cos\gamma}{\sigma^2(1+\nu^2)},\quad C_2=\frac{\mu\varepsilon\sin\gamma}{\sigma^2(1+\nu^2)},$$

мы представим функцию u в форме

$$u=\frac{\mu}{\sigma^2(1+\nu^2)}\left[\varepsilon\cos(\lambda-\gamma)+\sqrt{1+\nu^2\sin^2(\lambda-\theta)}\right]. \tag{9.75}$$

Таким образом, величины u и s представлены как функции долготы λ и пяти произвольных постоянных

$$\sigma,\ \nu,\ \theta,\ \varepsilon,\ \gamma.$$

Последнее из уравнений (9.73) после интегрирования даст соотношение между долготой λ и временем t, содержащее еще одну, шестую, произвольную постоянную, которую обозначим через λ_0.

Наконец, по формулам

$$x=\frac{\cos\lambda}{u},\quad y=\frac{\sin\lambda}{u},\quad z=\frac{s}{u} \tag{9.76}$$

найдем прямоугольные пространственные координаты, а по формуле

$$r=\frac{\sqrt{1+s^2}}{u} \tag{9.76'}$$

радиус-вектор движущейся точки.

Установим геометрическое значение постоянных, входящих в полученные нами формулы.

Для этого подставим сначала в уравнение плоскости орбиты

$$c_1x+c_2y+c_3z=0$$

вместо прямоугольных координат их выражения (9.76), а вместо постоянных площадей их выражения (9.62′).

---

*) Это решение можно вычислить рациональным образом, применяя метод вариации произвольных постоянных к уравнению $u''+u=R$. Тогда частное решение нашего уравнения определится формулой

$$u^0=-\cos\lambda\int R\sin\lambda\,d\lambda+\sin\lambda\int R\cos\lambda\,d\lambda.$$

Результат подстановки представим в виде

$$s = \operatorname{tg} i \sin(\lambda - \Omega) \tag{9.74'}$$

и сравним полученное выражение для s с (9.74).

Сравнение дает

$$\nu = \operatorname{tg} i, \quad \theta = \Omega, \tag{9.77}$$

т. е. постоянная ν есть тангенс наклонности орбиты к основной плоскости (xOy), а θ — долгота восходящего узла.

Таким образом, постоянные ν и θ определяют положение плоскости орбиты, а уравнение (9.74) или (9.74′) есть уравнение плоскости орбиты в переменных Клеро — Лапласа. Чтобы получить значения остальных постоянных, приведем уравнение орбиты (9.75) к обычному виду уравнения кривой второго порядка в полярных координатах.

Для этого заменим сначала в первых двух формулах (9.76) координаты x и y их выражениями из формул (9.64).

Имея еще в виду формулу (9.76′), мы получим соотношения

$$\frac{\cos\lambda}{\sqrt{1+s^2}} = \cos w \cos\Omega - \sin w \sin\Omega \cos i,$$

$$\frac{\sin\lambda}{\sqrt{1+s^2}} = \cos w \sin\Omega + \sin w \cos\Omega \cos i,$$

из которых выведем следующие формулы:

$$\frac{\cos(\lambda - \Omega)}{\sqrt{1+s^2}} = \cos w, \quad \frac{\sin(\lambda - \Omega)}{\sqrt{1+s^2}} = \frac{\sin w}{\sqrt{1+\nu^2}}. \tag{9.78}$$

Теперь из формулы (9.75) находим

$$r = \frac{\dfrac{\sigma^2(1+\nu^2)}{\mu}}{1 + \varepsilon \dfrac{\cos(\lambda-\theta)\cos(\gamma-\theta) + \sin(\lambda-\theta)\sin(\gamma-\theta)}{\sqrt{1+s^2}}},$$

откуда с помощью (9.78) получим

$$r = \frac{\dfrac{\sigma^2(1+\nu^2)}{\mu}}{1 + \varepsilon\left[\cos w \cos(\gamma-\theta) + \dfrac{\sin w \sin(\gamma-\theta)}{\sqrt{1+\nu^2}}\right]}. \tag{9.79}$$

Сравним это выражение для радиуса-вектора с (9.72″), которое можно написать в виде

$$r = \frac{p}{1 + e\,[\cos w \cos\omega + \sin w \sin\omega]}.$$

Так как оба эти выражения для r должны быть тождественны, то мы имеем

$$p = \frac{\sigma^2(1+\nu^2)}{\mu},$$
$$e\cos\omega = \varepsilon\cos(\gamma - \theta),$$
$$e\sin\omega = \frac{\varepsilon\sin(\gamma-\theta)}{\sqrt{1+\nu^2}},$$

откуда выводим

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= c\cdot\cos i = \sqrt{\mu}\sqrt{p}\cos i,\\ \varepsilon &= e\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 i\cdot\sin^2\omega},\\ \operatorname{tg}(\gamma-\theta) &= \operatorname{tg}\omega\sec i, \end{aligned}\right\} \tag{9.80}$$

и наоборот,

$$\left.\begin{aligned} c &= \sigma\sqrt{1+\nu^2},\\ e &= \varepsilon\sqrt{1+\nu^2\cos^2(\gamma-\theta)},\\ \operatorname{tg}\omega &= \frac{\operatorname{tg}(\gamma-\omega)}{\sqrt{1+\nu^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{9.80'}$$

Таким образом, постоянная σ есть величина проекции вектора момента количества движения на ось Oz системы (xyz). Величина ε пропорциональна эксцентриситету орбиты и самостоятельного геометрического значения не имеет. Однако можно ввести в рассмотрение некоторый вектор, лежащий в плоскости (xOy), величина и направление которого определяют постоянные ε и γ и с которым связан вектор Лапласа.

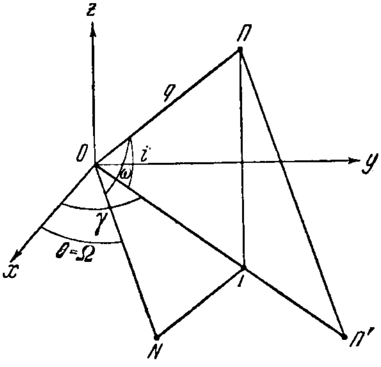


Рис. 52.

Действительно, пусть $П$ есть перицентр орбиты, а L его проекция на плоскость (xOy) (рис. 52). Рассмотрим вектор, лежащий в плоскости xOy, направление которого совпадает с направлением от начала координат к точке L. Величину этого вектора g определим формулой

$$g = f\cdot\sec i,$$

где f — величина вектора Лапласа.

Тогда будем иметь

$$\varepsilon = \frac{g}{\mu}, \quad \gamma = \angle\, xOL. \tag{9.81}$$

В самом деле, проведем через перицентр Π прямую, лежащую в плоскости $O\Pi L$ и перпендикулярную к линии апсид, т. е. к прямой $O\Pi$, и обозначим через Π' точку пересечения этого перпендикуляра с плоскостью xOy.

В образовавшихся треугольниках сторона $\overline{O\Pi}$ есть расстояние от фокуса орбиты до перицентра, которое обозначим буквой q. Сторона $\overline{\Pi L}$ есть аппликата перицентра, которую можно определить из третьей формулы (9.64), полагая в ней $v=0$, а следовательно, $r=q$ и $w=\omega$. Таким образом, $\overline{\Pi L}=q\sin\omega\sin i$. Теперь из треугольника $\Pi L\Pi'$ находим $\overline{\Pi\Pi'}=q\operatorname{tg} i\sin\omega$, а из треугольника $O\Pi\Pi'$ имеем

$$\overline{O\Pi'}=q\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 i\sin^2\omega}=q\sec i.$$

Отсюда с помощью второй из формул (9.80) находим

$$\varepsilon=e\cdot\sec i=\frac{f}{\mu}\sec i=\frac{g}{\mu}.$$

Далее, опустим перпендикуляр из точки Π на линию узлов орбиты, а основание перпендикуляра N соединим с L (см. рис. 52). Тогда из образовавшихся треугольников $N\Pi L$, ONL и $ON\Pi$ имеем

$$\overline{NL}=\overline{N\Pi}\cdot\cos i,\quad \overline{N\Pi}=\overline{ON}\cdot\operatorname{tg}\omega$$
$$\overline{NL}=\overline{ON}\operatorname{tg}\omega\cos i=\overline{ON}\operatorname{tg}(\angle NOL).$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}(\angle NOL)=\operatorname{tg}\omega\cos i,$$

а сравнивая это выражение с третьей формулой (9.80), найдем, что $\angle NOL=\gamma-\theta$, а поэтому

$$\gamma=\angle NOL+\angle NOx=\angle xOL,$$

и справедливость формул (9.81) установлена (см. рис. 52).

В результате проведенного интегрирования уравнений (9.73) общее решение уравнений невозмущенного движения будет содержать шесть постоянных:

$$\nu,\ \theta,\ \gamma,\ \sigma,\ \varepsilon,\ \lambda_0, \tag{9.82}$$

которые полностью определяют невозмущенное движение, а поэтому могут быть названы также *элементами орбиты*. Естественно назвать величины (9.82) *лапласовскими элементами невозмущенного движения* или просто *элементами Лапласа*.

Примечание. Заметим, что вектор Лапласа является проекцией вектора g на плоскость орбиты.

4. Рассмотрим в заключение этого параграфа интегрирование дифференциальных уравнений невозмущенного движения по способу Гамильтона — Якоби.

Если взять за канонические переменные прямоугольные координаты и составляющие скорости, то уравнения движения будут иметь вид (9.11), где функция Гамильтона определяется формулой (9.12). Так как функция H не зависит от времени, то соответствующее системе (9.11) уравнение Гамильтона — Якоби напишется в виде

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2=\frac{2\mu}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+2\alpha_1, \qquad (9.83)$$

где W обозначает неизвестную функцию. Найдя решение уравнения (9.83), зависящее, кроме α_1, еще от двух произвольных постоянных, мы найдем затем общий интеграл уравнений невозмущенного кеплеровского движения по формулам, аналогичным формулам (6.54) и (6.54′) гл. VI.

Однако уравнение (9.83) не удается решить непосредственно, вследствие чего применить метод Гамильтона — Якоби к системе (9.11) прямо оказывается невозможным. Причина этого обстоятельства заключается в том, что единственным эффективным способом решения уравнений типа (9.83) является метод *разделения переменных*, который здесь неприменим, так как функцию

$$\frac{2\mu}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

невозможно разложить на сумму функций, каждая из которых содержала бы только одну переменную.

Но достаточно перейти от прямоугольных координат к сферическим, чтобы метод Гамильтона — Якоби оказался применимым без всяких затруднений. Действительно, введем вместо прямоугольных координат x, y, z полярные сферические координаты r, φ, λ:

$$x=r\cos\varphi\cos\lambda, \quad y=r\cos\varphi\sin\lambda, \quad y=r\sin\varphi \qquad (9.84)$$

и сопряженные им канонические импульсы. Тогда уравнения невозмущенного движения запишутся в виде (9.13) с функцией Гамильтона (9.14) и соответствующее уравнение Гамильтона — Якоби примет вид

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2-\frac{2\mu}{r}=2\alpha_1, \qquad (9.85)$$

и нахождение полного интеграла этого уравнения не представляет затруднений *).

В самом деле, здесь можно применить способ разделения переменных, т. е. искать неизвестную функцию W в виде

$$W = W_1(r) + W_2(\varphi) + W_3(\lambda), \tag{9.85'}$$

где каждое слагаемое зависит только от одной координаты.

Подставляя (9.85′) в уравнение (9.85), мы представим последнее в следующем виде:

$$\left(\frac{dW_1}{dr}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{dW_2}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{dW_3}{d\lambda}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1. \tag{9.85''}$$

Мы удовлетворим уравнению (9.85″), полагая

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dW_3}{d\lambda} = \alpha_3, \\ &\left(\frac{dW_2}{d\varphi}\right)^2 + \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi} = \alpha_2^2, \\ &\left(\frac{dW_1}{dr}\right)^2 + \frac{\alpha_2^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1, \end{aligned}\right\} \tag{9.85'''}$$

где α_2 и α_3 суть две новые произвольные постоянные. Определяя из (9.85‴) функции W_3, W_2, W_1 и подставляя найденные выражения в (9.85′), мы найдем решение уравнения (9.85), содержащее три необходимые произвольные постоянные (полный интеграл!), в следующем виде:

$$W = \alpha_3\lambda + \int_0^{\varphi}\sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi}}\,d\varphi + \int_{r_1}^{r}\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}\,dr, \tag{9.86}$$

где нижний предел r_1 последнего интеграла обозначает какую угодно постоянную. Мы не нарушим общности (так как нам нужно иметь решение, содержащее только три произвольные постоянные), принимая за r_1 меньший корень трехчлена, стоящего под знаком квадратного корня в третьем интеграле, т. е. считая, что

$$2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r_1} - \frac{\alpha_2^2}{r_1^2} = 0. \tag{9.86'}$$

---

*) Постоянная энергии h здесь обозначена для симметрии буквой α_1. Заметим, что мы могли бы сразу написать нужное решение по формулам § 6 гл. VI, где было дано решение уравнения Гамильтона—Якоби для более общего случая. Однако из методических соображений мы предпочли применить здесь более простой прием.

Теперь общий интеграл системы (9.13) определится следующими формулами *):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial W}{\partial\alpha_1}=\int\limits_{r_1}^{r}\frac{dr}{\sqrt{2\alpha_1+\frac{2\mu}{r}-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}}=t+\beta_1,\\
&\frac{\partial W}{\partial\alpha_2}=\alpha_2\int\limits_{0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha_2^2-\frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi}}}-\alpha_2\int\limits_{r_1}^{r}\frac{dr}{r^2\sqrt{2\alpha_1+\frac{2\mu}{r}-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}}=\beta_2,\\
&\frac{\partial W}{\partial\alpha_3}=\lambda-\alpha_3\int\limits_{0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{\alpha_2^2-\frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi}}}=\beta_3,
\end{aligned}\right\}\quad(9.87)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial W}{\partial r}=\sqrt{2\alpha_1+\frac{2\mu}{r}-\frac{\alpha_2^2}{r^2}}=\dot{r},\\
&\frac{\partial W}{\partial\varphi}=\sqrt{\alpha_2^2-\frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi}}=r^2\dot{\varphi},\\
&\frac{\partial W}{\partial\lambda}=\alpha_3=r^2\cos^2\varphi\cdot\dot{\lambda}.
\end{aligned}\right\}\quad(9.87')$$

Равенства (9.87) и (9.87′) содержат шесть необходимых для общего интеграла уравнений невозмущенного кеплеровского движения произвольных постоянных

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\qquad(9.87'')$$

которые называются канонические ми элементами Якоби или просто элементами Якоби.

Так как формулы (9.87) и (9.87′) представляют общий интеграл системы (9.13), а значит, и системы (9.11) или (9.7), то эти формулы эквивалентны формулам (9.52), (9.55), и элементы Якоби могут быть выражены через обычные кеплеровские элементы орбиты, а следовательно, и через начальные значения координат и составляющих скорости.

Чтобы получить упомянутые соотношения между элементами (9.87) и (9.54), рассмотрим выведенные нами первые интегралы (9.87) и (9.87′). Так как в действительном движении выражения, стоящие под знаками квадратных корней в этих формулах, не

---

*) r_1 в силу (9.86′) зависит от α_1 и α_2. Но при дифференцировании по α_1 и α_2, входящим через посредство r_1, соответствующие члены исчезают, опять-таки в силу соотношения (9.86′).

могут принимать отрицательных значений, то, в частности, изменение угла φ должно быть ограничено неравенством

$$\cos^2\varphi \geqslant \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}.$$

Поэтому должно быть

$$\left|\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right| \leqslant 1,$$

и мы можем положить

$$\alpha_3 = \alpha_2 \cos i, \tag{9.88}$$

где i — некоторая новая постоянная.

Вычисляя теперь интеграл в третьей из формул (9.87), мы получим, имея в виду (9.88), следующее соотношение между координатами φ и λ:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg} i \cdot \sin(\lambda - \beta_3), \tag{9.89}$$

которое, как нетрудно убедиться, представляет собой уравнение плоскости, проходящей через начало координат.

Действительно, переходя от полярных координат к прямоугольным по формулам (9.84), мы получим из (9.89)

$$\sin\beta_3 \sin i \cdot x - \cos\beta_3 \sin i \cdot y + \cos i \cdot z = 0.$$

Так как последнее уравнение должно быть тождественно с уравнением плоскости орбиты (9.63), то мы имеем

$$\sin\beta_3 \sin i = \frac{c_1}{c}, \quad -\cos\beta_3 \sin i = \frac{c_2}{c}, \quad \cos i = \frac{c_3}{c}, \tag{9.89'}$$

т. е. постоянная i есть наклонность плоскости орбиты к основной плоскости (xOy), а постоянная β_3 есть долгота восходящего узла *).

Рассмотрим далее второе из уравнений (9.87). Введем вместо широты φ новую переменную u подстановкой

$$\sin\varphi = \sin i \sin u. \tag{9.90}$$

Тогда это уравнение может быть переписано, как легко видеть, следующим образом:

$$\alpha_2 \int_{r_1}^{r} \frac{\frac{dr}{r^2}}{\sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}} = \beta_2 - u, \tag{9.91}$$

---

*) Уравнение (9.89) можно вывести также непосредственно из чертежа, рассматривая прямоугольный сферический треугольник NPQ (см. рис. 50), в котором сторона PQ есть широта φ, а сторона NQ равна $\lambda - \Omega$.

откуда (используя (9.86′)) имеем

$$r=\frac{\frac{\alpha_2^2}{\mu}}{1+\sqrt{1+\frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}}\cos(u-\beta_2)}. \qquad (9.91')$$

Мы пришли, таким образом, к хорошо знакомому уравнению кривой второго порядка в полярных координатах с началом в фокусе кривой. Это уравнение должно быть поэтому тождественно уравнению (9.42′), а следовательно, мы должны иметь

$$u-\beta_2=v, \quad \beta_2=\omega,$$

т. е. u есть аргумент широты, а ω — угловое расстояние перицентра от узла. Далее,

$$\frac{\alpha_2^2}{\mu}=p, \quad \alpha_2=c=\sqrt{\mu}\sqrt{p},$$

и по формуле (9.88)

$$\alpha_3=c\cdot\cos i=\sqrt{\mu}\sqrt{p}\cos i,$$

т. е. α_2 есть модуль вектора момента количества движения, а α_3 есть проекция этого вектора на ось Oz. Наконец,

$$\sqrt{1+\frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}}=e,$$

где e — эксцентриситет кривой, откуда

$$\alpha_1=\frac{\mu}{2p}(e^2-1).$$

Заметим теперь, что интеграл в первой из формул (9.87) обращается в нуль одновременно с интегралом (9.91), т. е. при $r=r_1$. Но (9.91) исчезает при $u=\beta_2=\omega$, т. е. при $v=0$, что соответствует моменту прохождения через перицентр. Поэтому r_1 есть радиус-вектор перицентра, т. е. наименьшее из всех возможных значений r (что видно непосредственно из (9.42′)), а $\beta_1=-\tau$.

Таким образом, мы имеем следующие выражения элементов Якоби через кеплеровские:

$$\left.\begin{array}{lll}\alpha_1=\frac{\mu}{2p}(e^2-1), & \alpha_2=\sqrt{\mu}\sqrt{p}, & \alpha_3=\sqrt{\mu}\sqrt{p}\cos i,\\ \beta_1=-\tau, & \beta_2=\omega, & \beta_3=\Omega.\end{array}\right\} \qquad (9.92)$$

Из формул (9.87) можно вывести также знакомые нам уже выражения для прямоугольных координат. Для этого выведем предварительно еще одно соотношение. Дифференцируя равенство (9.89) по t, мы имеем

$$\dot{\varphi}\cdot\sec^2\varphi=\dot{\lambda}\operatorname{tg} i\cos(\lambda-\beta_3).$$

Исключая из этого равенства $\dot{\varphi}$ и $\dot{\lambda}$ при помощи формул (9.87′) и имея в виду подстановку (9.90), находим

$$\cos u=\cos\varphi\cos(\lambda-\beta_3). \tag{9.93}$$

Перепишем теперь формулы (9.89) и (9.93), заменяя β_3 на Ω, в следующем виде:

$$\begin{gathered}\cos\varphi\sin\lambda\cdot\cos\Omega-\cos\varphi\cos\lambda\cdot\sin\Omega=\sin u\cos i,\\ \cos\varphi\sin\lambda\cdot\sin\Omega+\cos\varphi\cos\lambda\cdot\cos\Omega=\cos u,\end{gathered}$$

откуда находим

$$\begin{aligned}\cos\varphi\sin\lambda&=\cos u\sin\Omega+\sin u\cos\Omega\cos i,\\ \cos\varphi\cos\lambda&=\cos u\cos\Omega-\sin u\sin\Omega\cos i.\end{aligned}$$

Теперь формулы (9.84) дают

$$\begin{aligned}x&=r\cos\varphi\cos\lambda=r(\cos u\cos\Omega-\sin u\sin\Omega\cos i),\\ y&=r\cos\varphi\sin\lambda=r(\cos u\sin\Omega+\sin u\cos\Omega\cos i),\\ z&=r\sin\varphi=r\sin u\sin i.\end{aligned}$$

Из этих формул простым дифференцированием по t выведем выражения для составляющих скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ в виде (9.65) *).

Остается получить выражения для $\dot{r}$ и $\dot{u}$. Но формулы (9.87′) дают непосредственно

$$\dot{r}=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\sqrt{e^2-\left(\frac{p}{r}-1\right)^2},$$

и

$$r^2\dot{\varphi}\cos\varphi=\sqrt{\mu}\sqrt{p}\cos u\sin i.$$

С другой стороны,

$$\frac{p}{r}=1+e\cos v,$$

а из формулы (9.90) найдем

$$\dot{\varphi}\cos\varphi=\dot{u}\cos u\sin i.$$

Поэтому предыдущие формулы дают

$$\dot{r}=\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,e\sin v,\qquad \dot{u}=\frac{\sqrt{\mu}\sqrt{p}}{r^2}$$

в согласии с ранее полученными результатами.

---

*) Нужно иметь в виду, что в формулах (9.65) w следует заменить на u и что буква u обозначает здесь не обратное значение радиуса-вектора, а аргумент широты.

Таким образом, метод Гамильтона — Якоби позволяет не только провести полное интегрирование уравнений невозмущенного движения, но и получить независимым путем все общие формулы, выведенные ранее другими способами.

В заключение приведем выражения для прямоугольных координат в элементах Якоби:

$$x = r\left[\cos(v+\beta_2)\cos\beta_3 - \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sin(v+\beta_2)\sin\beta_3\right],$$

$$y = r\left[\cos(v+\beta_2)\sin\beta_3 + \frac{\alpha_3}{\alpha_2}\sin(v+\beta_2)\cos\beta_3\right],$$

$$z = r\sqrt{1-\frac{\alpha_3^2}{\alpha_2^2}}\sin(v+\beta_2),$$

где r определяется формулой (9.91′) и

$$u = v + \beta_2.$$

ГЛАВА X

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

В предыдущей главе были выведены все необходимые формулы, дающие общее решение (или общий интеграл) системы дифференциальных уравнений невозмущенного кеплеровского движения. В этом общем решении содержится необходимое число (именно — шесть!) произвольных постоянных, которые могут иметь какие угодно вещественные значения, определяемые произвольно задаваемыми начальными значениями координат и составляющих скорости движущейся точки (звезды, планеты или ее спутника, естественного или искусственного). Однако при различных начальных условиях одно и то же невозмущенное движение обладает, вообще говоря, различными свойствами. Так, например, вид и геометрические свойства орбит существенно зависят от начальных условий, а от вида орбиты зависит функциональная связь между истинной аномалией и временем. С другой стороны, от характера этой функциональной связи зависит последовательность формул, служащих для вычисления эфемерид, т. е. для определения места небесного тела в пространстве.

Эта глава и посвящается рассмотрению ряда вопросов, связанных с исследованием свойств орбит и свойств движений в задаче о невозмущенном движении в зависимости от начальных условий.

§ 1. Общие свойства невозмущенного кеплеровского движения

1. В предыдущей главе было установлено, что невозмущенное движение (кеплеровское!) происходит в некоторой неизменной плоскости, проходящей через начало координат (центр силы притяжения) и что траектория или орбита движущейся точки есть кривая второго порядка, один из фокусов которой совпадает с началом координат.

Это свойство напоминает нам известный из курса общей астрономии первый закон Кеплера, выведенный знаменитым астрономом для больших планет солнечной системы и устанавливающий, что орбита планеты есть эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Но эллипс есть частный случай кривой второго порядка, а поэтому выведенное в этой книге свойство является несколько более общим, чем закон Кеплера, и может быть названо обобщенным законом Кеплера, который мы сформулируем теперь следующим образом:

Первый (обобщенный) закон Кеплера. В невозмущенном движении орбита движущейся точки есть кривая второго порядка, в одном из фокусов которой находится центр силы притяжения*).

Второй закон Кеплера, устанавливающий неизменность секториальной скорости, также был выведен для случая эллиптической орбиты планеты в ее движении вокруг Солнца, но тоже распространяется на случай любой кеплеровской орбиты (эллипса, параболы, гиперболы).

Действительно, секториальная скорость движущейся точки определяется формулой (9.46) главы девятой, где c есть величина вектора момента скорости. Из этой формулы, предполагая, что величина $c=0$ **), сразу получаем

$$S=\frac{c}{2}t+c', \tag{10.1}$$

где c' обозначает новую произвольную постоянную, что приводит нас ко второму закону Кеплера в следующей формулировке:

Второй (обобщенный) закон Кеплера. В невозмущенном движении площадь, описываемая радиусом-вектором движущейся точки, изменяется пропорционально времени.

Из общей астрономии нам известен еще третий закон Кеплера, устанавливающий связь между средним расстоянием планеты от Солнца и временем ее обращения вокруг Солнца. Очевидно, этот закон имеет место только для случая эллиптического движения, а поэтому не имеет такого общего значения, как два первых. Мы рассмотрим этот третий закон в несколько обобщенном виде в следующем параграфе.

Первые два закона Кеплера в их полной формулировке имеют место только для невозмущенного движения, происходящего под действием силы притяжения, обратно пропорциональной

---

*) Для планеты или кометы солнечной системы фокус орбиты находится в центре Солнца. Для Луны или для искусственного спутника Земли фокус находится в центре Земли и т. д.

**) В случае $c=0$, который будет рассмотрен ниже, закон площадей, очевидно, не имеет смысла. В этом случае секториальная скорость равна нулю и S остается постоянной.

квадрату расстояния до центра силы. Поэтому невозмущенное движение в этом случае и называется часто кеплеровским движением*).

Положение плоскости орбиты в невозмущенном движении зависит от постоянных площадей c_1, c_2, c_3, т. е. от направления вектора момента скорости. Положение орбиты в ее плоскости определяется направлением линии апсид, т. е. направлением вектора Лапласа. Наконец, вид орбиты зависит от величины вектора Лапласа, а ее размеры — от величины вектора момента скорости.

Действительно, уравнение орбиты в полярных координатах было выведено в виде

$$r=\frac{p}{1+e\cos v}, \tag{10.2}$$

где p — параметр кривой, определяющий ее размеры, а e — ее эксцентриситет, характеризующий форму.

Мы имели

$$p=\frac{c^2}{\mu}, \quad e=\frac{f}{\mu}. \tag{10.3}$$

Если $0 \leqslant e < 1$, то орбита есть эллипс, и движение точки называется в этом случае эллиптическим кеплеровским движением или просто эллиптическим движением. В частности, если $e=0$, то эллипс превращается в окружность с центром в начале и соответствующее движение называется круговым движением.

Если $1 < e < \infty$, то орбита есть гипербола (точнее, та ветвь гиперболы, внутри которой находится центр силы), и движение точки называется гиперболическим кеплеровским движением или просто гиперболическим движением.

В предельном случае может быть $e=1$, и тогда орбита точки есть парабола; в этом случае движение точки называется параболическим кеплеровским движением или параболическим движением.

Таким образом, тип движения полностью характеризуется величиной f вектора Лапласа:

если $f=0$, то орбита есть окружность,
» $f<\mu$, » » » эллипс,
» $f=\mu$, » » » парабола,
» $f>\mu$, » » » гипербола.

---

*) В задаче о движении под действием произвольной центральной силы также существуют интегралы площадей, следствием которых являются неизменность плоскости орбиты и закон площадей. Таким образом, в этой задаче второй закон Кеплера выполняется полностью, а первый — частично, так как орбита есть плоская кривая.

Общими случаями являются случаи эллиптического и гиперболического движения. Случаи кругового и параболического движения, для осуществления которых постоянная f должна быть строго равна нулю или μ, должны рассматриваться как предельные.

При установлении типа кеплеровского движения мы предполагали неявно, что постоянная $c \neq 0$, т. е. что также $p \neq 0$, и орбита имеет определенные размеры.

Если же $c=0$, то и $p=0$, и уравнение орбиты (10.2) теряет смысл. Обращаясь тогда к общему уравнению (9.35) поверхности второго порядка, мы увидим, что в случае, когда $c=0$, эта поверхность превращается в конус с вершиной в начале координат. Поэтому траектория движения (которая есть линия пересечения поверхности (9.35) и плоскости (9.34)) есть в этом случае прямая линия, проходящая через начало координат, и движение, происходящее по этой прямой, называется прямолинейным кеплеровским движением или просто прямолинейным движением.

2. Как мы только что видели, тип кеплеровского движения характеризуется величиной вектора Лапласа, направление которого определяет положение орбиты в ее плоскости. Таким образом, два вектора, c и f (которые не могут быть одновременно нулями), полностью характеризуют вид и расположение орбиты, т. е. геометрические свойства невозмущенного движения.

Так как f и c связаны с постоянной энергии h, т. е. с начальной скоростью V_0 движущейся точки, то тип орбиты можно также определить постоянной h или V_0.

Рассмотрим для этого соотношение (9.23) между произвольными постоянными первых интегралов невозмущенного движения, которое напишем в виде

$$f^2 = \mu^2 + hc^2, \tag{10.4}$$

откуда имеем

$$\mu^2 (e^2 - 1) = hc^2. \tag{10.4'}$$

Предположим сначала, что $c \neq 0$. Тогда из соотношения (10.4′) следует:

если $h<0$, то $e<1$ и орбита есть эллипс *),
если $h=0$, то $e=1$ и орбита есть парабола,
» $h>0$, » $e>1$ » » » гипербола.

Если $c=0$, то при любом значении h мы имеем $f=\mu$, и если сохранить обозначение $e=\frac{f}{\mu}$ и для этого случая, то мы должны

---

*) Окружность можно рассматривать как эллипс с нулевым эксцентриситетом.

считать эксцентриситет прямолинейной орбиты равным единице. Ниже мы увидим, какой смысл имеет это утверждение.

Постоянная живой силы (или постоянная энергии) h зависит от начального радиуса-вектора и величины начальной скорости, так что

$$h = V_0^2 - \frac{2\mu}{r_0}. \tag{10.5}$$

Отсюда и из предыдущего следует, что если начальная скорость удовлетворяет условию

$$V_0^2 < \frac{2\mu}{r_0} \qquad \left(V_0 < \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}\right), \tag{10.6}$$

то мы имеем эллиптическое движение; если начальная скорость удовлетворяет равенству

$$V_0^2 = \frac{2\mu}{r_0} \qquad \left(V_0 = \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}\right), \tag{10.6$'$}$$

то движение будет происходить по параболе, а если начальная скорость удовлетворяет неравенству

$$V_0^2 > \frac{2\mu}{r_0} \qquad \left(V_0 > \sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}\right), \tag{10.6$''$}$$

то движение будет гиперболическим.

В соответствии с этим начальная скорость V_0 называется эллиптической, параболической или гиперболической.

Отметим еще, что при $e=0$ формула (10.4′) дает

$$-\mu^2 = hc^2,$$

откуда ввиду (10.3) имеем

$$-\mu = hp.$$

Но из уравнения орбиты (10.2) при $e=0$ имеем просто

$$r = p = \text{const},$$

что должно также совпадать с начальным значением радиуса-вектора.

Таким образом, в случае кругового движения мы имеем

$$h = -\frac{\mu}{r_0},$$

и, следовательно,

$$V_0^2 = \frac{\mu}{r_0} \qquad \left(V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}\right). \tag{10.6$'''$}$$

Начальная скорость, определяемая последним равенством, называется **круговой начальной скоростью***).

Итак, тип орбиты зависит от величины начальной скорости и величины начального радиуса-вектора. Так как скорость всегда направлена по касательной к траектории движения, то вектор скорости в невозмущенном кеплеровском движении всегда лежит в плоскости орбиты, также, конечно, как и радиус-вектор. Поэтому плоскость орбиты определяется направлениями двух векторов и, следовательно, вся геометрическая картина движения в пространстве характеризуется также двумя векторами — вектором начальной скорости V_0, проекции которого на оси координат суть $\dot{x}_0$, $\dot{y}_0$, $\dot{z}_0$, и начальным радиусом-вектором r_0, проекции которого равны x_0, y_0, z_0.

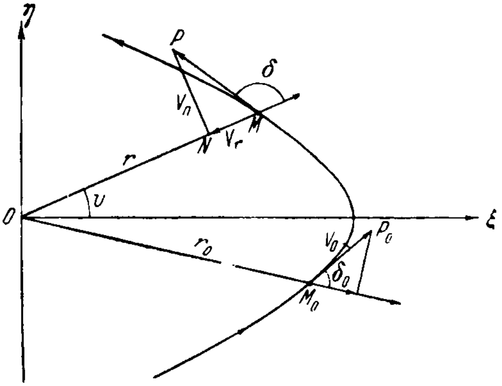


Рис. 53.

Для дальнейшего удобно еще ввести в рассмотрение угол, образуемый начальной скоростью с начальным радиусом-вектором.

Обозначим величину этого угла для любого момента времени через δ (рис. 53). Тогда, очевидно, имеем

$$\cos\delta = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{rV} = \frac{\dot{r}}{V}, \qquad (10.7)$$

следовательно, угол δ_0, образуемый направлением начального радиуса-вектора с направлением начальной скорости, определится формулой

$$\cos\delta_0 = \frac{x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 + z_0\dot{z}_0}{r_0V_0} = \frac{\dot{r}_0}{V_0}. \qquad (10.7')$$

Отметим еще, что угол δ может быть выражен в зависимости от истинной аномалии v. Действительно, формулы (9.48′) и

---

*) В астродинамике, в теории движения ИСЗ, круговая скорость $\sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$ называется еще **первой космической скоростью**, а параболическая скорость $\sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$ — **второй космической скоростью**. См., например, П. Е. Эльясберг, Введение в теорию полета искусственных спутников Земли, «Наука», 1965.

(9.49) позволяют написать (10.7) в следующем виде:

$$\cos\delta = \frac{e\sin v}{\sqrt{1+2e\cos v+e^2}}. \tag{10.8}$$

Для круговой орбиты имеем

$$\delta=\delta_0=90^\circ,$$

а поэтому соотношение

$$x_0\dot{x}_0+y_0\dot{y}_0+z_0\dot{z}_0=0 \tag{10.9}$$

является необходимым условием того, чтобы орбита была окружностью.

Найдем еще зависимость между постоянной c и углом δ_0. Формулы (10.7) и (9.49) дают прежде всего

$$\sin\delta=\frac{r\dot{v}}{V},$$

откуда с помощью формулы (9.47) получим

$$\sin\delta=\frac{c}{rV}. \tag{10.10}$$

Отсюда, применяя эту формулу для начального момента, получим

$$c=r_0V_0\sin\delta_0, \tag{10.10$'$}$$

а это и есть искомая формула *).

Если $\sin\delta_0=0$, то и $c=0$ и, как уже было отмечено, движение происходит по прямой, проходящей через центр силы. Но если $c=0$, то также необходимо равны нулю и все три постоянные площадей c_1, c_2, c_3, что в силу формул (9.28) имеет место, когда начальные значения связаны тремя следующими соотношениями:

$$y_0\dot{z}_0-z_0\dot{y}_0=0,\quad z_0\dot{x}_0-x_0\dot{z}_0=0,\quad x_0\dot{y}_0-y_0\dot{x}_0=0. \tag{10.11}$$

Последние условия выполняются, когда одновременно равны нулю x_0, y_0, z_0 (движение начинается из начала координат с бесконечной начальной скоростью!) или когда одновременно $\dot{x}_0=0$, $\dot{y}_0=0$, $\dot{z}=0$ (движение начинается без начальной ско-

---

*) Формулы (10.7) и (10.10) выведены нами чисто аналитическим путем без использования чертежа. Но эти формулы легко также получить и из геометрических соображений. В самом деле (см. рис. 53), опустим перпендикуляр $\overline{PN}$ из конца вектора скорости на радиус-вектор. Тогда из треугольника PNM имеем $V_n=V\sin\delta$ и $V_r=V\cos\delta$, откуда с помощью формул (9.48′) получим вновь формулы (10.7) и (10.10).

рости, точнее, с нулевой начальной скоростью), или, наконец, когда имеем

$$\frac{\dot{x}_0}{x_0}=\frac{\dot{y}_0}{y_0}=\frac{\dot{z}_0}{z_0},$$

т. е. когда вектор скорости и радиус-вектор коллинеарны.

Подводя итоги, мы можем выписать следующие необходимые и достаточные условия для различных типов кеплеровского движения:

для кругового движения должно быть:

$$\delta_0=90^\circ, \quad V_0^2=\frac{\mu}{r_0},$$

для прямолинейного движения:

$$\sin\delta_0=0,$$

для эллиптического движения:

$$0<V_0^2<\frac{2\mu}{r_0}, \qquad \sin\delta_0\neq 0,$$

для параболического движения:

$$V_0^2=\frac{2\mu}{r_0}, \qquad \sin\delta_0\neq 0,$$

для гиперболического движения:

$$V_0^2>\frac{2\mu}{r_0}, \qquad \sin\delta_0\neq 0.$$

Заметим, что для осуществимости кругового движения «радиальная скорость», т. е. величина $V_r=\dot{r}$, необходимо должна быть равна нулю во всякий момент времени (см. (10.7′)), а для осуществимости прямолинейного движения должна быть равна нулю для всякого момента «поперечная скорость», т. е. величина $V_n=r\dot{v}$ (см. (10.10′)).

3. Формулы невозмущенного движения содержат, как мы знаем, шесть произвольных постоянных, за которые можно принять, например, кеплеровские элементы орбиты, которые в свою очередь зависят от начальных условий задачи. Ниже будет показано, что заданием начальных условий элементы орбиты определяются однозначно, а, стало быть, начальные условия определяют также однозначно форму и размеры орбиты.

В обычных задачах небесной механики, т. е. в задачах о движении естественных небесных тел, начальные значения определяются довольно сложным и длинным путем из наблюдений и вычислений.

Наблюдения иногда оказываются «плохими», т. е. недостаточно точными, или даже неверными, а вычисления всегда сопровождаются неизбежными ошибками. Поэтому начальные значения, которые мы приписываем координатам и составляющим скорости, могут оказаться не такими, какие они есть в действительности, вследствие чего и орбита интересующего нас небесного тела может оказаться в действительности не такой, какую мы себе представляем.

Эти же соображения справедливы и для искусственных небесных тел, поэтому представляет интерес посмотреть, как изменится орбита (в невозмущенном кеплеровском движении!) при соответствующем изменении начальных данных.

Для теории движения искусственных небесных тел эта задача имеет и другое значение, ибо искусственные спутники и космические ракеты запускаются с поверхности Земли, а поэтому начальные значения, т. е. значения интересующих нас величин в конце активного участка траектории (когда кончается работа выводных двигателей) в значительной мере зависят от нас и определяются характером задачи, которую должно решить посылаемое в космическое пространство искусственное небесное тело.

В настоящем параграфе мы рассмотрим эту важную задачу лишь частично, а именно, посмотрим, как будут изменяться размеры и форма орбиты при изменении угла δ_0 либо величины начальной скорости V_0, либо начального радиуса-вектора r_0. Для этого удобно выразить параметр и эксцентриситет орбиты непосредственно через указанные начальные значения.

Прежде всего с помощью формулы (10.10′) мы находим

$$p = \frac{c^2}{\mu} = \frac{1}{\mu} r_0^2 V_0^2 \sin^2 \delta_0. \tag{10.12}$$

Далее, формула (10.4′) с помощью (10.5) и (10.10′) дает

$$e^2 = 1 + \frac{hc^2}{\mu^2} = 1 + \frac{1}{\mu^2} (r_0 V_0^2 - 2\mu) r_0 V_0^2 \sin^2 \delta_0. \tag{10.13}$$

Наконец, отметим еще выражения для наименьшего и наибольшего значений радиуса-вектора, которые получаются из уравнения орбиты (10.2) и выражаются через параметр и эксцентриситет.

Обозначим наименьшее значение радиуса-вектора или расстояние от центра силы до перицентра через q (или r_1), так что

$$q = r_1 = r_{\min} = \frac{p}{1+e}. \tag{10.14}$$

Соответственно наибольшее значение радиуса-вектора или расстояние от центра силы до апоцентра (если последний существует) обозначим через Q (или r_2), так что *)

$$Q = r_2 = r_{\max} = \frac{p}{1-e}. \qquad (10.14')$$

Переходя теперь к исследованию, заметим прежде всего, что если начальные значения координат и составляющих скорости изменяются таким образом, что величины δ_0, V_0, r_0 остаются неизменными, то величины p, e, q и Q также не изменяются, так что форма и размеры орбиты остаются при этом неизменными.

В этом случае, следовательно, эффект изменения начальных условий сказывается только на изменении положения плоскости орбиты в пространстве и на изменении положения линии апсид, т. е. положения орбиты в ее плоскости.

Будем теперь считать, что начальные значения изменяются таким образом, что положение плоскости орбиты и положение орбиты в ее плоскости остаются неизменными, а изменяется одна из величин δ_0, V_0 или r_0.

Оставим сначала неизменными начальную скорость V_0 и начальный радиус-вектор r_0 и будем изменять («варьировать») только направление начальной скорости в плоскости орбиты, т. е. угол δ_0. Тогда, очевидно, постоянная живой силы h (или полная энергия) не будет изменяться и, следовательно, тип орбиты будет сохраняться, но ее размеры и форма будут, разумеется, изменяться.

Формула (10.12) показывает, что когда δ_0 возрастает от нуля до 90°, параметр p также возрастает от нуля до $p_{\max} = \frac{1}{\mu} r_0^2 V_0^2$, а когда δ_0 изменяется от 90° до 180°, p убывает от $p_{\max}$ до нуля. Наоборот, при уменьшении δ_0 (во второй четверти) параметр p возрастает, а потом (в первой четверти) убывает.

Когда параметр орбиты растет, то орбита как бы «распухает», а когда p убывает, то орбита «съеживается». Когда δ_0 обращается в нуль или в 180°, т. е. параметр обращается в нуль, то орбита вырождается в (конечный или бесконечный) отрезок прямой.

Формула (10.13) показывает, что при изменении δ_0 от нуля до 180° изменение эксцентриситета зависит от знака величины $r_0 V_0^2 - 2\mu$, т. е. от типа орбиты.

Если $r_0 V_0^2 - 2\mu < 0$, то при изменении δ_0 орбита остается эллипсом и ее эксцентриситет сначала уменьшается от единицы

---

*) Для планет солнечной системы q называется перигелийным расстоянием, а Q — афелийным расстоянием. Для спутников Земли (включая Луну) эти величины называются соответственно перигейным и апогейным расстояниями и т. д. Величина $q - R$, где R есть радиус Земли, называется высотой перигея.

(при $\delta_0=0$) до наименьшего значения (при $\delta_0=90°$), определяемого формулой

$$e_{\min}=\frac{r_0V_0^2-\mu}{\mu},$$

а потом увеличивается от $e_{\min}$ до единицы.

Формула (10.14) показывает, что величина q растет (при изменении δ_0 от нуля до 180°) от нуля до r_0, а затем убывает от r_0 до нуля *). Формула (10.14′) дает неопределенность при $\sin\delta_0=0$, которая, впрочем, легко раскрывается (по правилу Лопиталя), так что мы найдем

$$Q_{\max}=\frac{2\mu r_0}{2\mu-r_0V_0^2}.$$

Заметим, что в рассматриваемом случае изменение Q определяется изменением q. В самом деле, для эллипса параметр p определяется формулой

$$p=a(1-e^2),$$

где a есть половина большой оси эллипса («большая полуось»).

Поэтому для эллипса

$$q=a(1-e),\quad Q=a(1+e)$$

и

$$q+Q=2a.$$

Обращаясь теперь к формуле (10.4′), заменим в ней c^2 на $\mu p=\mu a(1-e^2)$, что даст важное соотношение между большой полуосью эллиптической орбиты и постоянной энергии

$$a=-\frac{\mu}{h}, \tag{10.15}$$

откуда, заменяя h его значением (10.5), получим также

$$a=\frac{\mu r_0}{2\mu-r_0V_0^2}. \tag{10.15′}$$

Так как в рассматриваемом случае r_0 и V_0, по условию, не изменяются, то и большая ось эллипса также остается без изменения, а поэтому когда q возрастает от нуля до r_0, величина Q убывает от $2a$ до $2a-r_0$.

Полезно заметить еще, что малая полуось эллипса b зависит от δ_0, что видно из легко получаемой формулы

$$b=a\sqrt{1-e^2}=\frac{r_0\sqrt{r_0}\,V_0\sin\delta_0}{\sqrt{2\mu-r_0V_0^2}}. \tag{10.15″}$$

---

*) Для того чтобы в этом убедиться, следует подставить вместо p и e их значения, положить $\sin\delta_0=1$ и произвести необходимые упрощения.

Последняя формула еще более наглядно показывает, как «распухает» или «съеживается» орбита в зависимости от изменения угла δ_0. Из полученных формул также видно, что в предельном случае, т. е. при $\sin\delta_0=0$, эллипс вырождается в конечный отрезок прямой, длина которого равна $2a$ и концы которого являются одновременно и фокусами и вершинами вырожденного эллипса, причем один из его концов, перицентр, совпадает с началом координат, т. е. с центром силы.

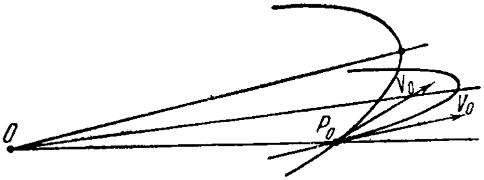


Рис. 54.

Если, в частности, $r_0V_0^2=\mu$, то $e_{\min}=0$ и соответствующая орбита есть окружность. Формула (10.15′) дает в этом случае $a=r_0$, а из (10.15″) имеем $b=r_0\sin\delta_0$, а поэтому $e=|\cos\delta_0|$. Кроме того, в этом случае

$$p=r_0\sin^2\delta_0.$$

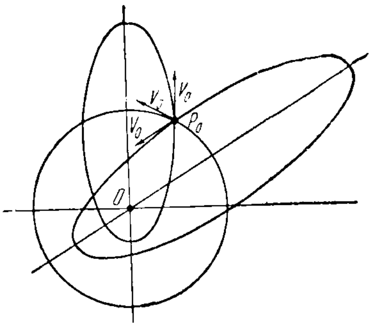


Рис. 55.

Несколько эллиптических орбит, отличающихся друг от друга только значением угла δ_0, показаны на рис. 54 $(r_0V_0^2<2\mu)$ и 55 $(r_0V_0^2=\mu)$.

Если $r_0V_0^2-2\mu>0$, т. е. если орбита есть гипербола, то, как видно опять из формулы (10.13), эксцентриситет e (при возрастании δ_0 от нуля до 90°) также растет от единицы до наибольшего значения, определяемого формулой

$$e_{\max}=\frac{r_0V_0^2-\mu}{\mu},$$

а затем (при изменении δ_0 от 90° до 180°) уменьшается от $e_{\max}$ до единицы.

Обозначая через a действительную полуось гиперболы, мы имеем, как известно,

$$p=a(e^2-1),$$

откуда

$$q=a(e-1).$$

Далее, так же как и в случае эллипса, находим

$$a=+\frac{\mu}{h}, \tag{10.16}$$

или

$$a = \frac{\mu r_0}{r_0 V_0^2 - 2\mu}. \qquad (10.16')$$

Мнимая полуось гиперболы b определяется формулой

$$b = a\sqrt{e^2 - 1} = \frac{r_0 \sqrt{r_0}\, V_0 \sin \delta_0}{\sqrt{r_0 V_0^2 - 2\mu}}, \qquad (10.16'')$$

которая наглядно показывает, как «распухает» или «съеживается» гипербола при изменении угла δ_0.

Легко видеть также, что в предельном случае, т. е. при $\sin \delta_0 = 0$, гипербола вырождается в бесконечную полупрямую, выходящую из начала координат, которое является одновременно и вершиной (перицентром) и фокусом вырожденной гиперболы.

Примечание. В астрономии нас интересует только одна ветвь гиперболы, внутри которой находится центр силы притяжения. Но если рассматривать и вторую ветвь гиперболы (по которой движение не может происходить), то нетрудно убедиться, что в предельном случае она вырождается в другую половину бесконечной прямой, исходящей из точки, отстоящей от начала на расстояние a.

Наконец, если $r_0 V_0^2 - 2\mu = 0$, т. е. если орбита есть парабола, то формула (10.13) дает для эксцентриситета e единственное значение, равное единице, не зависящее вовсе от δ_0.

Формулы (10.12) и (10.14) дают в случае параболы

$$p = 2r_0 \sin^2 \delta_0, \quad q = r_0 \sin^2 \delta_0, \qquad (10.17)$$

откуда видно, как «распухает» или «съеживается» парабола при изменении угла δ_0.

В предельном случае, т. е. при $\sin \delta_0 = 0$, имеем $p = 0$ и $q = 0$, откуда видно, что парабола вырождается в бесконечную полупрямую, проходящую через начало координат, которое является одновременно и вершиной (перицентром) и фокусом вырожденной параболы.

4. Рассмотрим теперь зависимость формы и размеров орбиты от величины начальной скорости V_0, которую и будем варьировать, оставляя r_0 и δ_0 неизменными.

Будем изменять V_0 от нуля до бесконечности, и для большей наглядности положим $\delta_0 = 90°$, так что в начальный момент скорость перпендикулярна к радиусу-вектору, т. е. начальное положение движущейся точки совпадает с перицентром или с апоцентром (рис. 56).

Когда $V_0 = 0$ (что следует рассматривать как предельный случай), орбита представляет собой отрезок прямой, один конец которого, совпадающий с началом координат, является перицентром, а другой конец — апоцентром.

При возрастании начальной скорости от нуля до $\sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$ (круговая, или первая космическая скорость) орбита все время остается эллипсом сначала весьма «тощим», но «распухающим» при увеличении V_0, что ясно видно из формул (10.12), (10.14) и (10.15″). Начальное положение является для всех этих эллипсов общим апоцентром, а большая полуось эллипса возрастает от $\frac{r_0}{2}$ до r_0.

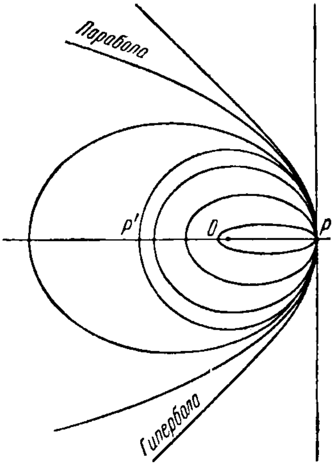


Рис. 56.

Эксцентриситет эллипса, как следует из (10.13), уменьшается от единицы (орбита есть отрезок $\overline{OP}$) до нуля (орбита есть окружность с радиусом $\overline{OP}$), а перицентр перемещается из начала координат в противоположную от начального положения сторону.

При $V_0=\sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$ эллипс превращается в окружность с центром в начале координат. Любая точка этой окружности может рассматриваться и как перицентр и как апоцентр, но если считать эту окружность предельной орбитой, получающейся непрерывным изменением начальной скорости V_0, то ее апоцентр будет опять совпадать с начальным положением, а перицентр попадает в точку P'.

При дальнейшем увеличении V_0 от $\sqrt{\frac{\mu}{r_0}}$ до $\sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$ эксцентриситет растет от нуля до единицы и орбита продолжает оставаться эллиптической. Но теперь (по условиям непрерывности) начальное положение точки делается перицентром, а апоцентр удаляется в противоположную сторону до бесконечности.

При $V_0=\sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$ орбита превращается в параболу, параметр которой равен $2r_0$*).

Когда скорость V_0 делается больше чем $\sqrt{\frac{2\mu}{r_0}}$ (т. е. больше параболической или второй космической скорости) и продолжает расти до бесконечности, орбита превращается в гиперболу, для которой начальное положение точки продолжает оставаться перицентром и эксцентриситет которой возрастает от единицы

---

*) Параболу можно рассматривать как предельный случай эллипса и как предельный случай гиперболы.

до бесконечности. Действительная полуось гиперболы, как видно из (10.16′), уменьшается от ∞ до нуля, а параметр монотонно растет до бесконечности.

В предельном случае, когда V_0 обращается в бесконечность, гипербола превращается в прямую, проходящую через начальное положение точки перпендикулярно к ее начальному радиусу-вектору.

Остается рассмотреть случай, когда меняется только r_0, а V_0 и δ_0 остаются неизменными. При этом опять для наглядности положим $\delta_0=90°$.

Будем изменять r_0 от нуля до бесконечности, предполагая, что V_0 имеет некоторое конечное значение.

Случай $r_0=0$ надлежит рассматривать как предельный, в котором орбита вырождается просто в одну точку — начало координат *). Когда r_0 растет от нуля до $\frac{\mu}{V_0^2}$, орбита является эллипсом, эксцентриситет которого убывает от единицы до нуля. Так как из (10.14′) следует, что при $\delta_0=90°$ имеем $Q=r_0$, то апоцентром эллиптической орбиты является начальное положение точки.

При $r_0=\frac{\mu}{V_0^2}$ эксцентриситет обращается в нуль и орбита превращается в окружность с центром в начале координат.

При дальнейшем увеличении r_0 от $\frac{\mu}{V_0^2}$ до $\frac{2\mu}{V_0^2}$ орбита продолжает оставаться эллипсом, эксцентриситет которого растет от нуля до единицы. Но теперь, как видно из (10.14), $q=r_0$, т. е. начальное положение точки делается перицентром орбиты, а апоцентр удаляется в противоположную сторону до бесконечности.

При $r_0=\frac{2\mu}{V_0^2}$ эксцентриситет делается равным единице, и орбита превращается в параболу, параметр которой равен $2r_0$.

Наконец, когда r_0 продолжает расти от $\frac{2\mu}{V_0^2}$ до бесконечности, эксцентриситет становится бо́льшим единицы, и орбита делается гиперболой, параметр и эксцентриситет которой монотонно растут. В предельном случае, когда r_0 обращается в бесконечность, орбита превращается в бесконечно удаленную прямую, рассматривать которую не имеет смысла.

---

*) Эта предельная орбита является не предельным случаем окружности, радиус которой стремится к нулю, а предельным случаем прямолинейной орбиты, когда длина отрезка обращается в нуль.

Примечание. Подобным же образом можно рассмотреть и более общий случай, когда $\delta_0 \neq 90°$, в котором, однако, невозможны случаи круговых орбит, а поэтому картина изменения орбиты при изменении V_0 или r_0 делается менее простой и менее наглядной.

§ 2. Основные типы невозмущенного кеплеровского движения

1. Общие формулы невозмущенного движения, выведенные в предыдущей главе, представляют координаты и составляющие скорости движущейся точки (планеты или спутника) в виде явных функций истинной аномалии v, которая входит в эти формулы под знаками синусов и косинусов.

Чтобы получить координаты и составляющие скорости как функции времени t, нужно, следовательно, выразить через t истинную аномалию, связь между которой и временем устанавливается посредством соотношения

$$\int_0^v \frac{dv}{(1+e\cos v)^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}}(t-\tau), \tag{10.18}$$

где τ есть момент прохождения через перицентр. Вычисляя интеграл в формуле (10.18) мы можем выразить $t-\tau$ через v, откуда путем обращения получим и v как функцию $t-\tau$.

Вычисление интеграла в формуле (10.18) зависит от того, какое значение имеет эксцентриситет орбиты e, и осуществляется с помощью тригонометрической подстановки, несколько различной для разных типов движения.

Пусть начальные условия таковы, что

$$V_0^2 < \frac{2\mu}{r_0}, \quad f \neq 0, \quad c \neq 0,$$

тогда $0 < e < 1$, и орбита есть эллипс.

Для вычисления интеграла в формуле (10.18) введем вместо v новую переменную E посредством подстановки

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}, \tag{10.19}$$

из которой видно, что когда v изменяется от нуля до 360°, E также изменяется от нуля до 360°, и когда v обращается в нуль, 180° или 360° (т. е. когда точка находится в перицентре или в апоцентре), E также обращается в нуль, 180°, 360° соответственно. Дифференцируя соотношение (10.19), мы получаем

$$\sec^2\frac{v}{2}\,dv = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\sec^2\frac{E}{2}\,dE, \tag{10.19'}$$

но

$$\sec^2\frac{v}{2}=1+\operatorname{tg}^2\frac{v}{2}=1+\frac{1+e}{1-e}\operatorname{tg}^2\frac{E}{2}, \qquad (10.19'')$$

а поэтому из равенства (10.19′) найдем

$$dv=\frac{\sqrt{1-e^2}\,dE}{1-e\cos E}. \qquad (10.20)$$

Остается выразить еще $1+e\cos v$ через новую переменную E. Заменяя $\cos v$ его выражением из формулы половинного угла *) и воспользовавшись затем формулой (10.19), после упрощений мы будем иметь

$$1+e\cos v=\frac{1-e^2}{1-e\cos E}. \qquad (10.21)$$

Подставляя (10.20) и (10.21) в формулу (10.18) и принимая во внимание, что для эллипса $p=a\ (1-e^2)$, мы получим следующее соотношение:

$$\int_0^E(1-e\cos E)dE=\frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}(t-\tau),$$

откуда

$$E-e\sin E=\frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}(t-\tau).$$

Положим еще

$$n=\frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}} \qquad (10.22)$$

и

$$M=n(t-\tau). \qquad (10.22')$$

Тогда предыдущее уравнение напишется в следующем виде:

$$E-e\sin E=M. \qquad (10.23)$$

Это трансцендентное уравнение определяет вспомогательную переменную E, когда e и M даны, и называется, по традиции, уравнением Кеплера. Аналитическое решение этого уравнения будет рассмотрено в следующей главе, а сейчас заметим, что при численных значениях e и M уравнение Кеплера может быть решено приближенно методом последовательных прибли-

---

*) Напомним следующие тригонометрические формулы:

$$\cos v=2\cos^2\frac{v}{2}-1, \quad \sin v=2\sin\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2}.$$

жений, графическим путем или при помощи специальных таблиц *).

Выясним теперь смысл величин E, n и M. Начертим эллипс (рис. 57), представляющий орбиту движущейся точки, и обозначим через C, O, Π соответственно центр эллипса, фокус (центр силы притяжения) и перицентр. Пусть P есть положение движущейся точки на орбите в момент времени t, так что $\angle \Pi OP = v$ и $\overline{OP} = r$.

Построим теперь окружность радиуса a, центр которой совпадает с центром эллипса C, и опустим перпендикуляр $\overline{PN}$ из точки P на линию апсид. Пусть P' есть пересечение продолжения этого перпендикуляра с окружностью и $\overline{CP'}$ — радиус окружности, проведенный к точке P'. Тогда $\angle \Pi CP'$ и есть E.

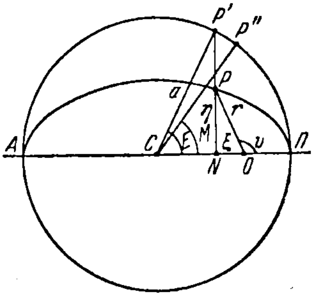


Рис. 57.

Действительно, из рис. 57 мы видим, что

$$\overline{CN} + \overline{NO} = \overline{CO} = ae,$$

но

$$\overline{CN} = a\cos E, \quad \overline{NO} = -r\cos v.$$

Поэтому

$$ae = a\cos E - r\cos v. \quad (10.24)$$

Заменяя в этом равенстве r его выражением из уравнения орбиты (10.2) и определяя из полученного соотношения $\cos v$, мы находим

$$\cos v = \frac{\cos E - e}{1 - e\cos E}.$$

Далее, из чертежа имеем

$$\overline{P'N} = a\sin E, \quad \overline{PN} = r\sin v,$$

но, с другой стороны, по свойствам эллипса,

$$\frac{\overline{PN}}{\overline{P'N}} = \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}, \quad (10.24')$$

что дает следующее соотношение:

$$r\sin v = a\sqrt{1 - e^2}\sin E. \quad (10.25)$$

---

*) См., например, М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, т. I, 1941, или У. М. Смарт, Небесная механика, перев. с англ., «Мир», 1965, или Ф. Мультон, Введение в небесную механику, 1935.

Заменяя здесь r его выражением (10.2) и исключая затем $\cos v$ при помощи (10.25), мы получим

$$\sin v = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E}{1-e\cos E}. \qquad (10.25')$$

Формулы (10.25) и (10.25') дают соотношение

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \frac{\sin v}{1+\cos v} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e}\,\frac{\sin E}{1+\cos E} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2},$$

т. е. мы опять приходим к подстановке (10.19), так что действительно $\angle ПСР' = E$.

Угол E называется в астрономии эксцентрической аномалией и измеряется так же, как и истинная аномалия v, от нуля до 360° в сторону движения.

Очевидно, что когда движущаяся точка (например, планета солнечной системы) обходит полностью свою орбиту, то как v, так и E изменяются на 360°.

Допустим, что движение начинается из перицентра. Обозначим через T время полного оборота (период обращения) точки вокруг центра силы по своей эллиптической орбите. Тогда уравнение Кеплера (10.23) дает

$$360° = nT,$$

откуда получаем

$$n = \frac{360°}{T}. \qquad (10.26)$$

Следовательно, n есть средняя угловая скорость движущейся точки и поэтому называется в астрономии средним движением *). Формула (10.22) показывает, что величина n связана с большой полуосью орбиты, а поэтому может характеризовать размеры орбиты.

Рассмотрим теперь величину M. Формула (10.22') показывает, что эта величина M возрастает пропорционально времени, обращаясь в нуль при $t=\tau$, т. е. когда точка находится в перицентре и когда v и E равны нулю.

При $t = \tau + \frac{T}{2}$, т. е. когда движущаяся точка попадает в апоцентр, $M = 180°$, так же как v и E. Наконец, когда движущаяся точка, завершая полный оборот, опять приходит в перицентр, M делается равным 360°, опять так же, как и обе аномалии, v и E.

---

*) Если время, как обычно принято в астрономии, измеряется в средних солнечных сутках, то величину n называют средним суточным движением. Для планет и комет солнечной системы n обычно выражают в секундах дуги. Чем меньше n, тем дальше планета от Солнца.

Величина M, связанная со средним движением, называется поэтому **средней аномалией**. Если мы представим теперь фиктивную точку, движущуюся по окружности радиуса a с постоянной угловой скоростью n, то M будет равна углу, который образует радиус-вектор этой фиктивной точки с направлением на перицентр.

Из сказанного следует, что фиктивная точка проходит через перицентр и апоцентр одновременно с движущейся точкой и делает полный оборот по круговой орбите за время T (см. рис. 57, где фиктивная точка обозначена буквой P'').

2. Из формул (10.24) и (10.25) имеем следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} r\cos v &= \xi = a(\cos E - e), \\ r\sin v &= \eta = a\sqrt{1-e^2}\,\sin E, \end{aligned}\right\} \qquad (10.27)$$

где ξ и η суть прямоугольные орбитальные координаты точки, движущейся по эллиптической орбите (см. рис. 57).

Затем из формул (10.2) и (10.21) выводим выражение для радиуса-вектора движущейся точки в зависимости от эксцентрической аномалии E:

$$r = a(1 - e\cos E). \qquad (10.28)$$

Это уравнение также может быть названо **уравнением орбиты** (эллиптической!). Скорость в эллиптическом движении можно определить из интеграла живой силы, заменяя в нем постоянную h ее выражением (10.15) через большую полуось эллипса, что дает

$$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right). \qquad (10.29)$$

Приведенные формулы полностью определяют характер движения по эллиптической орбите. Действительно, радиус-вектор r, орбитальные координаты, пространственные координаты, скорость и т. д. все являются **периодическими** функциями от истинной аномалии v, с общим периодом 2π. Следовательно, все эти величины являются также периодическими функциями от эксцентрической аномалии E, или от средней аномалии M, также с периодом 2π. Так как v (или E, или M) изменяется на 2π за время T, то все указанные величины можно рассматривать и как периодические функции времени с общим периодом T.

Когда движущаяся точка приходит в перицентр, радиус-вектор получает наименьшее значение $r_{\min} = q = a(1 - e)$, а скорость — наибольшее, определяемое формулой

$$V^2_{\max} = \frac{\mu}{a}\,\frac{1+e}{1-e},$$

которая получается из (10.29) заменой r на q. Наоборот, когда точка приходит в апоцентр, r получает наибольшее значение $r_{\max}=Q=a(1+e)$, а скорость — наименьшее, определяемое формулой

$$V_{\min}^2=\frac{\mu}{a}\,\frac{1-e}{1+e}\,.$$

Из двух последних формул следует также

$$\frac{V_{\min}}{V_{\max}}=\frac{1-e}{1+e}=\frac{r_{\min}}{r_{\max}}\,, \tag{10.30}$$

т. е. скорости в апсидальных точках обратно пропорциональны расстояниям соответствующих апсид от центра силы.

Отметим теперь, что для эллиптических орбит имеет место третий закон Кеплера, правда, в несколько обобщенном виде.

Чтобы показать это, заменим в формуле (10.26) среднее движение n его выражением (10.22) через большую полуось, что дает соотношение

$$\frac{\sqrt{\mu}\,T}{a^{3/2}}=2\pi, \tag{10.31}$$

между периодом полного обращения и большой полуосью, показывающее, что с увеличением размеров орбиты увеличивается также (но не пропорционально!) и период обращения.

Пусть теперь имеем две материальные точки с массами m_1 и m_2, каждая из которых движется под действием притяжения массы m_0. Будем рассматривать движение каждой из этих двух масс относительно точки M_0, в которой помещена масса m_0, и допустим, что начальные условия таковы, что каждая из масс m_1 и m_2 движется вокруг массы m_0 по своей эллиптической орбите *). Обозначая через a_1 и a_2 полуоси этих эллиптических орбит, а через T_1 и T_2 — соответственные периоды обращения, будем иметь по формуле (10.31):

$$\frac{\sqrt{\mu_1}\,T_1}{a_1^{3/2}}=2\pi,\qquad \frac{\sqrt{\mu_2}\,T_2}{a_2^{3/2}}=2\pi.$$

Так как

$$\mu_1=f\,(m_0+m_1),\qquad \mu_2=f\,(m_0+m_2),$$

то предыдущие соотношения напишутся следующим образом:

$$\frac{\sqrt{f\,(m_0+m_1)}\;T_1}{a_1^{3/2}}=2\pi=\frac{\sqrt{f\,(m_0+m_2)}\;T_2}{a_2^{3/2}}\,,$$

---

*) Здесь, разумеется, допускается, что m_1 и m_2 не влияют друг на друга, т. е. что рассматриваются одновременно две задачи двух тел.

где f обозначает постоянную закона всемирного тяготения, которая имеет универсальное значение *).

Из предыдущего равенства мы выводим следующее важное соотношение:

$$\frac{T_1^2(m_0+m_1)}{T_2^2(m_0+m_2)}=\frac{a_1^3}{a_2^3}, \tag{10.31'}$$

которое и приводит нас к третьему закону Кеплера в следующей формулировке:

Третий (обобщенный) закон Кеплера. В невозмущенном эллиптическом движении двух материальных точек произведения квадратов времен обращения на суммы масс центральной и движущейся точек относятся как кубы больших полуосей орбит.

Если рассмотреть, например, какие-нибудь две планеты солнечной системы, каждая из которых обращается вокруг Солнца под действием только солнечного притяжения, то мы получим случай, рассмотренный Кеплером. Так как, кроме того, массы планет весьма малы по сравнению с массой Солнца m_0, то, пренебрегая этими малыми массами, мы выведем из (10.31)

$$\frac{T_1^2}{T_2^2}=\frac{a_1^3}{a_2^3}, \tag{10.31'}$$

что и дает третий закон Кеплера в первоначальной формулировке:

Третий закон Кеплера. Квадраты времен обращений двух планет вокруг Солнца относятся как кубы больших полуосей их эллиптических орбит.

Соотношения (10.31′) и (10.31″) играют в астрономии важную роль, так как позволяют найти одну из величин

$$a_1,\ T_1,\ a_2,\ T_2,$$

если известны три остальные.

Указанные соотношения могут быть применены также в астродинамике, например, в задаче о переходе ракеты с одной орбиты на другую.

3. Случай эллиптического движения играет в небесной механике особенно важную роль, а поэтому нуждается во всестороннем рассмотрении.

---

*) Нужно остерегаться спутать постоянную тяготения с модулем вектора Лапласа, который обозначен той же буквой f.

За элементы эллиптической орбиты могут быть приняты величины (9.54), но обычно в астрономии некоторые из этих величин заменяют другими, более удобными или, во всяком случае, более привычными.

Положение плоскости эллиптической орбиты почти всегда определяют величинами Ω и i, т. е. долготой восходящего узла и наклонностью орбиты. Форма орбиты обычно характеризуется эксцентриситетом e, вместо которого иногда употребляют элемент φ, связанный с e соотношением

$$\sin\varphi = e$$

и называемый углом эксцентриситета*).

Размеры эллиптической орбиты обычно определяют величиной большой полуоси a, или большой оси $2a$, а иногда употребляют также среднее движение n или период обращения T.

Положение линии апсид определяют или величиной ω, т. е. угловым расстоянием перицентра от узла, или связанной с ней другой величиной π, которая определяется формулой

$$\pi = \Omega + \omega$$

и называется долготой перицентра**).

Наконец, вместо элемента τ употребляют более часто значение средней аномалии M в начальный момент времени. Этот элемент, обозначаемый через M_0, определяется соотношением

$$M_0 = n(t - \tau)$$

и называется средней аномалией в эпоху или средней аномалией эпохи.

Кроме M_0, берут также часто вместо элемента τ величину ε, определяемую следующим образом. Положим

$$l = \Omega + \omega + M = \pi + M.$$

Эта величина называется средней долготой в орбите или просто средней долготой. Значение средней долготы в начальный момент t_0 (в эпоху!), обозначаемое обыкновенно буквой ε, так что

$$\varepsilon = l_0 = \Omega + \omega + M_0 = \pi + M_0,$$

и принимают иногда за шестой элемент эллиптической орбиты. Таким образом, кеплерова эллиптическая орбита характери-

---

*) Не путать угол эксцентриситета с широтой точки, которая обозначается здесь той же буквой φ.

**) Долгота перицентра π отсчитывается в двух плоскостях. От оси Ox до линии узлов — в плоскости (xOy), и от линий узлов до перицентра — в плоскости орбиты Не следует путать долготу перицентра с числом $\pi = 3{,}141259\ldots$

зуется следующими шестью величинами, которые называются элементами эллиптической орбиты или просто (когда не может возникнуть недоразумения) элементами орбиты*):

$$\left.\begin{array}{cccccc} \Omega, & i, & \omega, & a, & e, & M_0, \\ ℧, & \nu, & \pi, & n, & \varphi, & \varepsilon, \\ & & & T, & e', & \tau, \\ & & & p. & & \end{array}\right\} \qquad (10.32)$$

Здесь $℧ = \Omega + 180°$ есть долгота нисходящего узла, а $\nu = \operatorname{tg} i$ и $e' = e \cdot \sec i$ суть элементы Лапласа**).

Вместо трех элементов Ω, i, ω можно взять шесть направляющих косинусов,

$$\alpha_\tau, \quad \beta_\tau, \quad \gamma_\tau, \quad \alpha'_\tau, \quad \beta'_\tau, \quad \gamma'_\tau,$$

определяющих положение линии апсид и прямой, к ней перпендикулярной, лежащей в плоскости орбиты (см. (9.58), (9.58′) гл. IX), или еще шесть составляющих вектора момента скорости и вектора Лапласа

$$c_1, c_2, c_3, f_1, f_2, f_3.$$

Если элементы орбиты известны, то положение и скорость точки, описывающей эллиптическую орбиту, для любого момента времени t определяются следующей последовательностью формул.

Прежде всего находим среднюю аномалию M по одной из формул:

$$M = n(t - \tau) = n(t - t_0) + M_0 = n(t - t_0) + \varepsilon - \pi; \qquad (10.33)$$

затем, решая каким-либо способом уравнение Кеплера

$$E - e \sin E = M,$$

находим соответствующее значение эксцентрической аномалии E.

Зная E, найдем радиус-вектор r и орбитальные координаты ξ и η по формулам

$$\left.\begin{aligned} r &= a(1 - e\cos E), \\ \xi &= r\cos v = a(\cos E - e), \\ \eta &= r\sin v = a\sqrt{1 - e^2}\,\sin E \end{aligned}\right\} \qquad (10.34)$$

---

*) В первой строке (10.32) выписаны элементы, употребляемые наиболее часто. Под некоторыми основными элементами помещены те величины, каждая из которых может заменить основной элемент.

**) Здесь ε обозначает другой элемент, а потому элемент Лапласа $e' \sec i$ обозначен через e'.

и соответствующее значение истинной аномалии из формулы

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2}. \tag{10.35}$$

Истинную аномалию можно также определить из формул (10.34), которые дают $\cos v$ и $\sin v$, а значит, и сам угол v.

Найдя v, получим аргумент широты

$$u=v+\omega=v+\pi-\Omega,$$

а затем прямоугольные координаты x, y, z по известным уже формулам

$$\left.\begin{aligned} x&=r(\cos u\cos\Omega-\sin u\sin\Omega\cos i),\\ y&=r(\cos u\sin\Omega+\sin u\cos\Omega\cos i),\\ z&=r\sin u\sin i. \end{aligned}\right\} \tag{10.36}$$

Радиус-вектор r можно найти также из общего уравнения кеплеровой орбиты в полярных координатах, которое в рассматриваемом случае напишется в виде

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos v}. \tag{10.37}$$

Составляющие скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ можно, конечно, получить по общим формулам (9.55) и (9.57). Однако в случае эллиптического движения координаты и составляющие скорости удобно также выразить через эксцентрическую аномалию, которая может играть роль независимой переменной вместо v.

При этом координаты сразу получим по первой группе формул (9.59), в которых ξ и η нужно заменить их выражениями (10.34). Чтобы получить составляющие скорости в зависимости от E, нужно еще найти соответствующие выражения для $\dot{\xi}$ и $\dot{\eta}$.

Дифференцируя формулы (10.34) по t, будем иметь

$$\dot{\xi}=-a\sin E\cdot\dot{E},\qquad \dot{\eta}=a\sqrt{1-e^2}\cos E\cdot\dot{E}.$$

Чтобы определить производную $\dot{E}$, дифференцируем по t уравуравнение Кеплера, что дает

$$(1-e\cos E)\cdot\dot{E}=\dot{M}=n,$$

откуда находим

$$\dot{E}=\frac{n}{1-e\cos E}=\frac{an}{r},$$

после чего получаем

$$\dot{\xi}=-\frac{a^2n\sin E}{r},\qquad \dot{\eta}=\frac{a^2n\sqrt{1-e^2}\cos E}{r}. \tag{10.38}$$

Теперь по формулам (9.59) находим искомые выражения для координат и составляющих скорости эллиптического движения в таком виде:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}&=\alpha_\tau(\cos E-e)+\alpha'_\tau\sqrt{1-e^2}\,\sin E,\\ \frac{y}{a}&=\beta_\tau(\cos E-e)+\beta'_\tau\sqrt{1-e^2}\,\sin E,\\ \frac{z}{a}&=\gamma_\tau(\cos E-e)+\gamma'_\tau\sqrt{1-e^2}\,\sin E,\end{aligned}\right\}\tag{10.39}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\dot x}{na}&=\frac{a}{r}\left[-\alpha_\tau\sin E+\alpha'_\tau\sqrt{1-e^2}\,\cos E\right],\\ \frac{\dot y}{na}&=\frac{a}{r}\left[-\beta_\tau\sin E+\beta'_\tau\sqrt{1-e^2}\,\cos E\right],\\ \frac{\dot z}{na}&=\frac{a}{r}\left[-\gamma_\tau\sin E+\gamma'_\tau\sqrt{1-e^2}\,\cos E\right].\end{aligned}\right\}\tag{10.39'}$$

Наконец, скорость V, которая определяется в эллиптическом движении формулой (10.29), также может быть выражена через эксцентрическую аномалию. Для этого достаточно заменить в (10.29) радиус-вектор r его значением (10.34), что дает

$$V^2=\frac{\mu}{a}\frac{1+e\cos E}{1-e\cos E}.\tag{10.40}$$

Эта же формула может быть получена также и из формулы (9.49) заменой $\cos v$ его выражением через E.

4. Перейдем к рассмотрению случая гиперболического движения. Пусть начальные условия таковы, что

$$V_0^2>\frac{2\mu}{r_0},\qquad c\neq 0,$$

так что $e>1$ и орбита есть гипербола.

Чтобы вывести соотношение между временем и истинной аномалией, сделаем в формуле (10.18) вещественную подстановку

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2}=\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\operatorname{tg}\frac{F}{2},\tag{10.41}$$

где F обозначает вспомогательную переменную.

Так же, как и в случае эллиптического движения, выводим последовательно

$$\sec^2\frac{v}{2}\cdot dv=\sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\sec^2\frac{F}{2}\,dF,$$

$$\sec^2\frac{v}{2}=1+\frac{e+1}{e-1}\operatorname{tg}^2\frac{F}{2},$$

откуда

$$dv = \frac{\sqrt{e^2-1}\, dF}{e-\cos F}.$$

Далее находим

$$1+e\cos v = 1-e+2e\cos^2\frac{v}{2} = \frac{(e^2-1)\cos F}{e-\cos F},$$

после чего, принимая $F=0$ при $v=0$, получим из (10.18) следующее соотношение:

$$\int_0^F \frac{e-\cos F}{\cos^2 F}\, dF = \frac{\sqrt{\mu}\,(e^2-1)^{3/2}}{p^{3/2}}(t-\tau),$$

откуда интегрированием выводим, имея еще в виду, что для гиперболы $p=a(e^2-1)$:

$$e\operatorname{tg} F - \ln\operatorname{tg}\left(\frac{F}{2}+45^\circ\right) = n(t-\tau), \tag{10.42}$$

где положено

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}.$$

Трансцендентное уравнение (10.42), являющееся аналогом уравнения Кеплера, в конечном виде решено быть не может. Однако всегда можно найти решение этого уравнения путем последовательных приближений, при помощи специальных таблиц или еще каким-нибудь приближенным способом.

Найдя для данного значения t соответствующее значение переменной F, мы вычислим истинную аномалию v, а потом и радиус-вектор r из уравнения орбиты (10.2). После этого получим координаты и составляющие скорости по общим формулам предыдущей главы.

Для скорости в гиперболическом движении можно получить формулу, аналогичную (10.29), заменяя в интеграле живой силы постоянную h ее значением из (10.16), что дает

$$V^2 = \mu\left(\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right). \tag{10.43}$$

За элементы гиперболического движения (или гиперболической орбиты) можно принять следующие величины:

$$\Omega,\ i,\ \omega,\ a,\ e,\ \tau,$$

причем вместо ω можно взять также долготу перицентра

$$\pi = \Omega + \omega,$$

а вместо действительной полуоси a — параметр p или расстояние от центра силы до перицентра, т. е. $q=a(e-1)$ или величину n.

Чтобы проследить за характером движения, будем увеличивать истинную аномалию v, начиная от нуля (т. е. от перицентра). При $v=0$, т. е. при $t=\tau$, радиус-вектор r имеет наименьшее значение, определяемое формулой

$$r_{\min}=q=a(e-1),$$

а скорость V — наибольшее значение, определяемое формулой

$$V_{\max}^2=\frac{\mu}{a}\frac{e+1}{e-1}.$$

При возрастании угла v от нуля до $\bar{v}=\arccos(-1/e)$ радиус-вектор, как видно из уравнения орбиты (10.2), постоянно растет от $r_{\min}$ до бесконечности, а скорость V постоянно убывает от $V_{\max}$ до наименьшего значения $V_{\min}$, которое получается из (10.43) при $r=\infty$ и определяется формулой

$$V_{\min}^2=\frac{\mu}{a}.$$

Для гиперболического движения нетрудно также получить формулы, аналогичные (10.34) и (10.39). Прежде всего из полученного ранее выражения для $1+e\cos v$ имеем

$$r=a(e\cdot\sec F-1). \tag{10.44}$$

Далее находим

$$\cos v=\frac{e\cos F-1}{e-\cos F},\quad \sin v=\frac{\sqrt{e^2-1}\,\sin F}{e-\cos F},$$

после чего с помощью (10.44) получим

$$\xi=a(e-\sec F),\quad \eta=a\sqrt{e^2-1}\,\operatorname{tg} F. \tag{10.44′}$$

Дифференцируя теперь уравнение (10.42), мы найдем

$$\dot{F}=\frac{na\cos F}{r},$$

вследствие чего формулы (10.44′) после дифференцирования по времени t дают

$$\dot{\xi}=\frac{na^2\operatorname{tg} F}{r},\quad \dot{\eta}=\frac{na^2\sqrt{e^2-1}\,\sec F}{r}, \tag{10.44″}$$

откуда, или из формул (10.43) и (10.44), находим

$$V^2=\frac{\mu}{a}\frac{e+\cos F}{e-\cos F}. \tag{10.45′}$$

Формулы (9.59) гл. IX дают теперь выражения для координат и их производных в зависимости от вспомогательного угла в следующем виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{x}{a} &= \alpha_\tau(e-\sec F)+\alpha'_\tau\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{tg}\,F,\\
\frac{y}{a} &= \beta_\tau(e-\sec F)+\beta'_\tau\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{tg}\,F,\\
\frac{z}{a} &= \gamma_\tau(e-\sec F)+\gamma'_\tau\sqrt{e^2-1}\,\mathrm{tg}\,F,\\
\frac{\dot{x}}{na} &= \frac{a}{r}\left[\alpha_\tau\,\mathrm{tg}\,F+\alpha'_\tau\sqrt{e^2-1}\,\sec F\right],\\
\frac{\dot{y}}{na} &= \frac{a}{r}\left[\beta_\tau\,\mathrm{tg}\,F+\beta'_\tau\sqrt{e^2-1}\,\sec F\right],\\
\frac{\dot{z}}{na} &= \frac{a}{r}\left[\gamma_\tau\,\mathrm{tg}\,F+\gamma'_\tau\sqrt{e^2-1}\,\sec F\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (10.45)$$

Покажем теперь геометрическое значение величины F.

Рассмотрим ту ветвь гиперболы, по которой происходит движение точки, т. е. ту ветвь, внутри которой находится центр силы (начало координат). Пусть буквы O, $П$ и C обозначают соответственно фокус, вершину (перицентр) и центр гиперболы (рис. 58). Если P есть положение движущейся точки в момент времени t, то угол $ПOP$ есть истинная аномалия v. Опустим перпендикуляр PQ из точки P на линию апсид (прямая OC) и из точки Q проведем касательную к окружности радиуса a с центром в C. Соединяя точку касания P' с центром окружности (и гиперболы), получим треугольник CQP', в котором угол QCP' и есть F, что можно легко проверить совершенно так же, как это было проделано в случае эллиптического движения для эксцентрической аномалии.

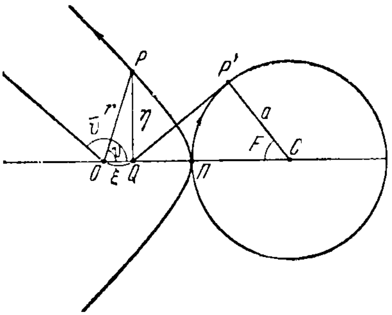


Рис. 58.

Из рис. 58 видно, что когда точка движется по гиперболе от перицентра до бесконечности, то угол F растет от нуля до 90°.

Хотя координаты, радиус-вектор, составляющие скорости и скорость в гиперболическом движении содержат только тригонометрические функции истинной аномалии v или вспомогательной переменной F, само движение не является, очевидно, периодическим.

Причиной этого обстоятельства является то, что при изменении времени t от τ до ∞ движущаяся точка уходит в бесконечность и углы v и F изменяются в тесных пределах:

$$0 \leqslant v \leqslant \bar{v}, \quad 0 \leqslant F \leqslant 90^\circ.$$

Для гиперболического движения можно получить и другие формулы, содержащие вместо тригонометрических функций угла F более соответствующие характеру движения гиперболические функции другой переменной.

Действительно, введем вместо F новую переменную H посредством подстановки

$$H = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{F}{2} + 45^\circ\right), \tag{10.46}$$

изменяющуюся при движении точки от перицентра до бесконечности от нуля до бесконечности.

Тогда, как легко проверить,

$$\operatorname{tg} F = \operatorname{sh} H, \quad \sec F = \operatorname{ch} H, \quad \operatorname{tg}\frac{F}{2} = \operatorname{th}\frac{H}{2},$$

и вместо формул (10.41), (10.42), (10.44) и (10.44′) мы будем иметь следующие: связь между v и H в виде

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}} \operatorname{th}\frac{H}{2}, \tag{10.47}$$

уравнение, аналогичное уравнению Кеплера

$$e \operatorname{sh} H - H = n(t - \tau), \tag{10.48}$$

уравнение гиперболической орбиты в другом виде

$$r = a(e \operatorname{ch} H - 1), \tag{10.49}$$

выражения для орбитальных координат

$$\xi = a(e - \operatorname{ch} H), \quad \eta = a\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sh} H. \tag{10.49′}$$

Далее, формулы (10.43) и (10.49) дают новое выражение для скорости:

$$V^2 = \frac{\mu}{a} \frac{e \operatorname{ch} H + 1}{e \operatorname{ch} H - 1}. \tag{10.50}$$

Дифференцируя теперь уравнение (10.48) и формулы (10.49′), найдем

$$\dot{H} = \frac{na}{r}, \quad \dot{\xi} = -\frac{na^2 \operatorname{sh} H}{r}, \quad \dot{\eta} = \frac{na^2\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{ch} H}{r}, \tag{10.51}$$

после чего формулы (9.49) дают следующие выражения для пространственных координат и составляющих скорости:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}&=\alpha_\tau(e-\operatorname{ch}H)+\alpha'_\tau\sqrt{e^2-1}\operatorname{sh}H,\\ \frac{y}{a}&=\beta_\tau(e-\operatorname{ch}H)+\beta'_\tau\sqrt{e^2-1}\operatorname{sh}H,\\ \frac{z}{a}&=\gamma_\tau(e-\operatorname{ch}H)+\gamma'_\tau\sqrt{e^2-1}\operatorname{sh}H,\end{aligned}\right\}\qquad(10.52)$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\dot{x}}{na}&=\frac{a}{r}\left[-\alpha_\tau\operatorname{sh}H+\alpha'_\tau\sqrt{e^2-1}\operatorname{ch}H\right],\\ \frac{\dot{y}}{na}&=\frac{a}{r}\left[-\beta_\tau\operatorname{sh}H+\beta'_\tau\sqrt{e^2-1}\operatorname{ch}H\right],\\ \frac{\dot{z}}{na}&=\frac{a}{r}\left[-\gamma_\tau\operatorname{sh}H+\gamma'_\tau\sqrt{e^2-1}\operatorname{ch}H\right].\end{aligned}\right\}\qquad(10.52')$$

Примечание. Заметим, что формулы гиперболического движения с независимой переменной H вполне подобны соответствующим формулам эллиптического движения, в которых независимой переменной является E.

Сверх того, формулы (10.47)—(10.49), (10.49′), (10.50)—(10.52) и (10.52′) могут быть формально получены из формул (10.19), (10.23), (10.28), (10.27), (10.40), (10.38), (10.39) и (10.39′) соответственно, если в последних заменить везде a на $-a$, положить $iE=H$ $\left(i=\sqrt{-1}\right)$ и иметь в виду, что

$$i\sin E=\frac{e^{iE}-e^{-iE}}{2}=\frac{e^H-e^{-H}}{2}=\operatorname{sh}H,$$

$$\cos E=\frac{e^{iE}+e^{-iE}}{2}=\frac{e^H+e^{-H}}{2}=\operatorname{ch}H,$$

$$\operatorname{tg}\frac{E}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos E}{1+\cos E}}=\sqrt{\frac{1-\operatorname{ch}H}{1+\operatorname{ch}H}}=i\operatorname{th}\frac{H}{2},$$

где $e=2{,}7182...$ обозначает основание натуральных логарифмов.

§ 3. Предельные и вырожденные случаи невозмущенного кеплеровского движения

1. Пусть начальные условия таковы, что мы имеем

$$f_1=f_2=f_3=0,\qquad(10.53)$$

так что величина вектора Лапласа f делается равной нулю, а его направление становится неопределенным.

Из анализа, проведенного в § 1 этой главы, следует, что условия (10.53) равносильны следующим соотношениям между начальными значениями координат и составляющих скорости:

$$\left.\begin{aligned} x_0\dot{x}_0+y_0\dot{y}_0+z_0\dot{z}_0&=0,\\ \dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2+\dot{z}_0^2&=\frac{\mu}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}, \end{aligned}\right\} \qquad (10.53')$$

выполнение которых необходимо и достаточно для осуществления кругового движения.

Таким образом, орбита движущейся точки есть в этом случае окружность, центр которой совпадает с центром силы, а радиус равен начальному радиусу-вектору r_0.

Так как окружность есть частный случай эллипса, то все формулы кругового движения мы можем получить из соответствующих формул эллиптического движения, полагая в последних эксцентриситет e равным нулю. Кроме того, так как направление вектора Лапласа (т. е. направление линии апсид орбиты) становится неопределенным, то понятия перицентра и апоцентра теряют смысл, а угловое расстояние перицентра от узла также становится неопределенным и его можно принять просто равным нулю.

Если угодно, то любую точку круговой орбиты можно рассматривать, по желанию, и как перицентр, и как апоцентр. Ось абсцисс в орбитальной системе координат можно, следовательно, выбрать произвольно и проще всего принять за эту ось линию узлов. Тогда величина ω будет равна нулю и круговая орбита будет полностью определена заданием четырех элементов, за которые примем величины

$$\Omega, \quad i, \quad a, \quad M_0 \qquad (10.54)$$

(M_0 обозначает здесь угол, образованный начальным радиусом-вектором с направлением на восходящий узел орбиты).

Теперь формулы эллиптического движения предыдущего параграфа дают при $e=0$:

$$r=p=a=r_0, \quad V^2=V_0^2=\frac{\mu}{a}, \qquad (10.55)$$

затем

$$u=v=E=M=n(t-t_0)+M_0 \qquad (10.56)$$

и

$$\left.\begin{aligned} x&=a(\cos M\cos\Omega-\sin M\sin\Omega\cos i),\\ y&=a(\cos M\sin\Omega+\sin M\cos\Omega\cos i),\\ z&=a\sin M\sin i, \end{aligned}\right\} \qquad (10.57)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}&=na(-\sin M\cos\Omega-\cos M\sin\Omega\cos i),\\ \dot{y}&=na(-\sin M\sin\Omega+\cos M\cos\Omega\cos i),\\ \dot{z}&=na\cos M\sin i. \end{aligned}\right\} \qquad (10.57')$$

Если ввести орбитальные координаты, полагая

$$\xi = a \cos M, \quad \eta = a \sin M, \tag{10.58}$$

то можно также воспользоваться общими формулами (9.59), которые дают в рассматриваемом случае

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \alpha_\tau \cos M + \alpha'_\tau \sin M, & \frac{\dot{x}}{na} &= -\alpha_\tau \sin M + \alpha'_\tau \cos M, \\ \frac{y}{a} &= \beta_\tau \cos M + \beta'_\tau \sin M, & \frac{\dot{y}}{na} &= -\beta_\tau \sin M + \beta'_\tau \cos M, \\ \frac{z}{a} &= \gamma_\tau \cos M + \gamma'_\tau \sin M, & \frac{\dot{z}}{na} &= -\gamma_\tau \sin M + \gamma'_\tau \cos M. \end{aligned}\right\} \tag{10.59}$$

Имея в виду, что из формул (9.58) и (9.58′) следует при $\omega = 0$:

$$\begin{aligned} \alpha_\tau &= \cos \Omega, & \beta_\tau &= \sin \Omega, & \gamma_\tau &= 0, \\ \alpha'_\tau &= -\sin \Omega \cos i, & \beta'_\tau &= \cos \Omega \cos i, & \gamma'_\tau &= \sin i, \end{aligned}$$

мы опять получим формулы (10.57) и (10.57′).

Случай кругового движения, который мы рассматривали здесь как частный случай эллиптического движения, можно также рассматривать как предельный случай эллиптического движения, изменяя начальную скорость V_0 и угол δ_0, образуемый ею с начальным радиусом-вектором, непрерывным образом так, чтобы мы имели в пределе

$$\lim V_0 = \sqrt{\frac{\mu}{r_0}}, \quad \lim \delta_0 = 90^\circ.$$

Ясно, что в действительности случай кругового движения никогда, строго говоря, осуществлен быть не может, так как весьма мало вероятно, чтобы начальные условия реальных небесных тел удовлетворяли условиям (10.53′).

Однако в астрономии известно множество случаев, когда эти условия почти выполняются (т. е. выполняются с высокой степенью точности) и тогда движение планеты или спутника, являясь, строго говоря, эллиптическим, весьма мало отличается от кругового. В таких случаях выгодно пользоваться формулами кругового движения, которые значительно проще формул эллиптического движения и в которых координаты и составляющие скорости выражаются через время явным образом.

С другой стороны, если эксцентриситет эллиптической орбиты, не будучи строго нулем, есть величина малая, то удобно рассматривать круговое движение как первое приближение к эллиптическому движению.

Эта точка зрения будет использована нами в следующей главе, в которой будут рассмотрены разложения координат кеплеровского движения в бесконечные ряды, расположенные по степеням эксцентриситета.

Примечание. Полезно заметить, что круговое движение существует также и в более общей задаче, а именно, в задаче о движении материальной точки под действием центральной силы.

В самом деле, рассмотрим случай, когда центральная сила не зависит от времени, так что

$$F = F(r, \dot{r}), \tag{10.60}$$

и возьмем уравнения (8.66), определяющие полярные координаты точки, движущейся под действием силы F.

Легко видеть, что эти уравнения

$$\left.\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{w}^2 - F(r, \dot{r}) = 0, \\ r^2\dot{w} = c \end{aligned}\right\} \tag{10.60'}$$

допускают частное решение

$$r = a, \quad \dot{w} = n, \tag{10.61}$$

где a и n — постоянные, связанные соотношением

$$an^2 + F(a, 0) = 0. \tag{10.62}$$

Отсюда видно, что если $F<0$ (т. е. если действующая центральная сила есть сила притяжения), то каждому значению a соответствует вещественное значение n, откуда следует, что наша задача имеет бесчисленное множество частных решений вида (10.61). Каждому из этих частных решений соответствует равномерное движение точки по окружности, угловая скорость которого зависит от радиуса a этой окружности и определяется формулой (10.62) *).

Обозначим через T время полного оборота точки по своей круговой орбите. Тогда

$$n = \frac{2\pi}{T},$$

и из формулы (10.62) выведем следующую формулу:

$$\frac{T^2}{a^3} = -\frac{4\pi^2}{a^2F(a, 0)}, \tag{10.62'}$$

которая может рассматриваться как обобщение третьего закона Кеплера в задаче о движении под действием центральной силы.

---

*) Точнее, каждому a соответствует два значения n, отличающиеся знаком и, следовательно, две одинаковые круговые орбиты с взаимно противоположными направлениями движения. Полезно отметить еще, что в случае отталкивательной силы, т. е. при $F>0$, уравнение (10.62) не имеет вещественных решений и следовательно, круговые орбиты в этом случае невозможны.

Отметим, что из (10.62′) вытекает также точный третий закон Кеплера для круговых орбит задачи двух тел.

Если в рассматриваемой общей задаче существует силовая функция $U(r)$, то *)

$$F(r) = U'(r),$$

и условие (10.62) примет вид

$$an^2 + U'(a) = 0. \qquad (10.62'')$$

Для фактического определения кругового движения в рассматриваемой общей задаче (независимо от того, существует ли силовая функция или нет) можно использовать, очевидно, те же формулы (10.57), (10.57′) или (10.59), в которых постоянная a задается произвольно, а постоянная n определяется в зависимости от a формулой (10.62). Можно, конечно, наоборот, задать значение угловой скорости n и определить затем соответствующий радиус круговой орбиты из уравнения (10.62) или (10.62′).

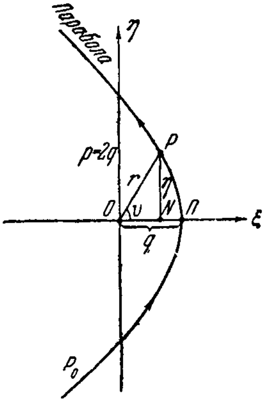


Рис. 59.

2. Пусть теперь начальные условия связаны соотношением

$$\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2 = \frac{2\mu}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}, \qquad c \neq 0. \qquad (10.63)$$

Тогда $h=0$, $e=1$, и орбита есть парабола (рис. 59). Уравнение орбиты напишется в виде

$$r = \frac{p}{1+\cos v} = q \sec^2 \frac{v}{2}, \qquad (10.64)$$

где $q = p/2$ — расстояние от фокуса параболы до ее вершины, т. е. до перицентра **).

Чтобы получить необходимые формулы параболического движения, нужно прежде всего выразить истинную аномалию v в зависимости от времени, для чего служит опять то же уравнение (10.18), которое в рассматриваемом случае принимает следующий вид:

$$\frac{1}{2} \int_0^v \sec^4 i \frac{v}{2} \, dv = \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2} q^{3/2}} (t - \tau).$$

---

*) Здесь «штрих» обозначает дифференцирование, так что $U' = \frac{dU}{dr}$.

**) Для комет солнечной системы величина q называется «перигелийным расстоянием».

Простым интегрированием (без всякой подстановки) находим следующее уравнение:

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2}+\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3\frac{v}{2}=n(t-\tau), \tag{10.65}$$

где положено для краткости

$$n=\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}q^{3/2}}.$$

Уравнение (10.65) значительно проще соответствующего уравнения в случаях эллиптического или гиперболического движения и сводится к кубичному уравнению относительно $\operatorname{tg}\frac{v}{2}$.

Действительно, положим

$$\operatorname{tg}\frac{v}{2}=\sigma. \tag{10.66}$$

Тогда уравнение (10.65) примет вид

$$\frac{1}{3}\sigma^3+\sigma=n(t-\tau). \tag{10.65'}$$

Это уравнение имеет единственный вещественный корень*), который может быть найден по формулам Кардана или любым приближенным способом решения алгебраических уравнений.

Зная σ, найдем соответствующее значение $v/2\left(-90^\circ\leqslant\frac{v}{2}\leqslant+90^\circ\right)$ и, следовательно, и истинной аномалии v.

Определив v, найдем и r из уравнения параболической орбиты (10.64) и скорость V из интеграла живой силы, который для параболического движения принимает вид

$$V^2=\frac{2\mu}{r}. \tag{10.67}$$

Элементами параболического движения (или элементами параболической орбиты) являются следующие пять величин:

$$\Omega,\ i,\ \omega,\ q,\ \tau \tag{10.68}$$

(напомним, что для параболы эксцентриситет e всегда равен единице).

Зная r и v, мы можем определить пространственные координаты и составляющие скорости по общим формулам гл. IX.

---

*) В этом убедимся, написав уравнение в виде

$$\sigma^3+3\sigma-3n(t-\tau)=0,\quad t\gtreqless\tau.$$

Так как левая часть содержит только одну перемену знаков, то уравнение действительно имеет единственный вещественный корень.

Однако для параболического движения можно получить более удобные формулы, если принять за независимую переменную вместо истинной аномалии v величину σ. Действительно, с помощью подстановки (10.66) уравнение орбиты (10.64) примет следующий простой вид:

$$r = q(1+\sigma^2). \tag{10.69}$$

Далее, из формулы (10.66) имеем

$$\cos v = \frac{1-\sigma^2}{1+\sigma^2}, \quad \sin v = \frac{2\sigma}{1+\sigma^2},$$

что позволяет выразить орбитальные координаты ξ и η, в зависимости от σ, по формулам

$$\left.\begin{aligned} \xi &= r\cos v = q(1-\sigma^2), \\ \eta &= r\sin v = 2q\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{10.70}$$

Теперь из (10.65′) и (10.64) получаем

$$\dot{\sigma} = \frac{nq}{r},$$

вследствие чего из формул (10.70) найдем

$$\dot{\xi} = -\frac{2nq^2\sigma}{r}, \quad \dot{\eta} = \frac{2nq^2}{r}, \tag{10.70′}$$

после чего получим координаты и составляющие скорости по формулам (9.59) гл. IX в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{q} &= \alpha_\tau(1-\sigma^2) + 2\alpha'_\tau\sigma, & \frac{\dot{x}}{nq} &= \frac{2q}{r}(-\alpha_\tau\sigma + \alpha'_\tau), \\ \frac{y}{q} &= \beta_\tau(1-\sigma^2) + 2\beta'_\tau\sigma, & \frac{\dot{y}}{nq} &= \frac{2q}{r}(-\beta_\tau\sigma + \beta'_\tau), \\ \frac{z}{q} &= \gamma_\tau(1-\sigma^2) + 2\gamma'_\tau\sigma, & \frac{\dot{z}}{nq} &= \frac{2q}{r}(-\gamma_\tau\sigma + \gamma'_\tau). \end{aligned}\right\} \tag{10.71}$$

Характер параболического движения выясняется из уравнения орбиты и интеграла живой силы.

Пусть время прохождения через перицентр $\tau > t_0$. Тогда точка движется по параболической орбите к перицентру с возрастающей скоростью (см. рис. 57).

При $t=\tau$ точка проходит через перицентр, где радиус-вектор имеет наименьшее значение, равное q, а скорость — наибольшее, определяемое формулой

$$V^2_{\max} = \frac{2\mu}{q}.$$

После прохождения через перицентр точка постоянно удаляется от центра силы и при неограниченно растущем времени уходит в бесконечность, так как при $t=\infty$, r также обращается в бесконечность, а $v\to 180°$ и $\sigma\to\infty$. При $r\to\infty$ скорость V постоянно убывает и стремится к нулю, когда t неограниченно растет.

Параболическое движение так же как и круговое, является предельным случаем эллиптического или гиперболического движения и в действительности никогда не осуществляется.

Однако в астрономии нередко встречаются случаи движения комет по весьма вытянутым эллиптическим орбитам и метеоритных тел по гиперболическим орбитам с эксцентриситетом, близким к единице. И в том и в другом случае движение светила, по крайней мере вблизи перицентра (т. е. вблизи Солнца), мало отличается от параболического и может быть с достаточной точностью рассчитано по формулам настоящего раздела.

С другой стороны, парабола как бы отделяет семейство эллипсов от семейства гипербол, а поэтому понятие *параболической скорости* как некоторого предела скоростей эллиптических и гиперболических, имеет в астрономии весьма важное значение.

3. Перейдем в заключение к рассмотрению последнего предельного (или вырожденного) случая невозмущенного кеплеровского движения, т. е. к движению прямолинейному.

Пусть начальные значения координат и составляющих скорости таковы, что мы имеем

$$y_0\dot{z}_0 - z_0\dot{y}_0 = 0, \quad z_0\dot{x}_0 - x_0\dot{z}_0 = 0, \quad x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0 = 0. \qquad (10.72)$$

Тогда все три постоянные площадей c_1, c_2, c_3 равны одновременно нулю, а значит, и $c=0$.

В этом случае, как уже отмечалось ранее, постоянная f, т. е. модуль вектора Лапласа, не может быть равна нулю, а постоянная энергии h может иметь любое значение (положительное, отрицательное или равное нулю). Плоскость орбиты в этом случае становится неопределенной, параметр p обращается в нуль, а эксцентриситет e равен единице, независимо от значения h.

Мы уже знаем, что при условиях (10.72) движение точки происходит по прямой линии, проходящей через начало координат (центр силы притяжения).

Условия (10.72) являются не только достаточными для прямолинейного движения, но и необходимыми, так что если все три постоянные площадей не равны одновременно нулю, то траектория заведомо будет криволинейной.

Чтобы убедиться в этом, вычислим кривизну линии, по которой происходит движение, определяемое дифференциальными уравнениями (9.6). Обозначая кривизну пространственной кривой буквой K (первая кривизна!), имеем из дифференциальной геометрии общую формулу:

$$K^2 = \frac{(\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y})^2 + (\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z})^2 + (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})^2}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)^3}.$$

Но из уравнений движения (9.6) находим

$$\dot{y}\ddot{z} - \dot{z}\ddot{y} = \frac{\mu}{r^3}(y\dot{z} - z\dot{y}) = \frac{\mu c_1}{r^3},$$

и, аналогично,

$$\dot{z}\ddot{x} - \dot{x}\ddot{z} = \frac{\mu c_2}{r^3}, \quad \dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = \frac{\mu c_3}{r^3},$$

вследствие чего выражение для кривизны траектории в невозмущенном кеплеровском движении принимает вид

$$K = \frac{\mu c}{r^3 V^3},$$

откуда следует, что K тождественно равно нулю только в случае, когда $c = 0$, т. е. когда $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Заметим теперь, что в рассматриваемом случае, т. е. когда все три постоянные площадей равны нулю, интегралы площадей принимают вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{z}{y}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{x}{z}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{x}\right) = 0,$$

откуда интегрированием получим

$$\frac{z}{y} = \frac{z_0}{y_0}, \quad \frac{x}{z} = \frac{x_0}{z_0}, \quad \frac{y}{x} = \frac{y_0}{x_0};$$

отсюда в свою очередь следуют уравнения

$$\frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0} = \frac{z}{z_0}, \tag{10.73}$$

являющиеся уравнениями прямой линии, проходящей через начало координат и через начальное положение движущейся точки.

Из уравнений (10.73) выводим также

$$x = \frac{x_0}{r_0} r, \quad y = \frac{y_0}{r_0} r, \quad z = \frac{z_0}{r_0} r, \tag{10.73'}$$

откуда следует, что окончательное решение задачи приводится к нахождению единственной неизвестной — радиуса-вектора r движущейся точки в зависимости от времени.

Уравнения (10.73′) дают также, очевидно,

$$\dot{x} = \frac{x_0}{r_0}\dot{r}, \quad \dot{y} = \frac{y_0}{r_0}\dot{r}, \quad \dot{z} = \frac{z_0}{r_0}\dot{r},$$

откуда следует, что

$$V = \dot{r},$$

вследствие чего из интеграла живой силы получим следующее уравнение:

$$\dot{r}^2 = \frac{2\mu}{r} + h, \tag{10.74}$$

интегрирование которого дает

$$\int_{r_0}^{r} \frac{\sqrt{r}\,dr}{\sqrt{2\mu + hr}} = \pm (t - t_0). \tag{10.75}$$

Интеграл, входящий в это равенство, — элементарный, но его вычисление зависит от знака постоянной h, т. е. от величины начальной скорости V_0.

Проще всего вычисляется интеграл в случае $h=0$, т. е. когда мы имеем вырожденное параболическое движение.

В этом случае из (10.75) находим

$$r = \left[r_0^{3/2} \pm \frac{3\sqrt{\mu}}{\sqrt{2}} (t - t_0) \right]^{2/3}, \tag{10.76}$$

откуда заключаем, что при $\dot{r}_0 > 0$ радиус-вектор r (т. е. просто расстояние до центра силы) неограниченно растет со временем, а при $\dot{r}_0 < 0$ радиус-вектор r постоянно убывает от начального значения r_0 до нуля, обращаясь в нуль при

$$t = t_0 + \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\mu}} r_0^{3/2}, \tag{10.76'}$$

когда движение прекращается.

Если $h>0$, т. е. когда мы имеем случай вырожденного гиперболического движения, то из (10.75) находим *)

$$\pm (t - t_0) = \frac{\mu}{h\sqrt{h}} \left[\frac{\sqrt{2\mu + hr}\,\sqrt{hr}}{\mu} - 2\ln\left(\sqrt{2\mu + hr} + \sqrt{hr}\right) \right]_{r_0}^{r}, \tag{10.77}$$

а при $h<0$, т. е. в случае вырожденного эллиптического движения, имеем

$$\pm (t - t_0) = \frac{\mu}{h\sqrt{-h}} \left[\frac{\sqrt{2\mu + hr}\,\sqrt{-hr}}{\mu} - 2\arcsin\sqrt{\frac{-hr}{2\mu}} \right]_{r_0}^{r}. \tag{10.78}$$

За произвольные постоянные прямолинейного движения можно принять начальные координаты x_0, y_0, z_0 и начальную

---

*) См. И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.

скорость $V_0 = \dot{r}_0$. Координаты и составляющие скорости в любой момент времени выразятся тогда в зависимости от времени и четырех произвольных постоянных.

Заметим, что определить r как функцию времени из уравнения (10.77) или (10.78) в конечном виде невозможно, так как каждое из этих уравнений трансцендентно относительно радиуса-вектора r.

Но вырожденное эллиптическое или гиперболическое движение можно рассматривать так же как предельный случай соответствующего невырожденного движения, откуда следует, что для прямолинейного движения и в случае $h \neq 0$ можно сохранить те же формулы, которые были выведены в предыдущем параграфе.

Поэтому в случае $h < 0$ мы можем положить $h = -\frac{\mu}{a}$ и определить радиус-вектор r из уравнения эллиптической орбиты (10.28), полагая в последнем $e = 1$, что дает для r следующее уравнение:

$$r = a(1 - \cos E) = 2a\sin^2\frac{E}{2}, \qquad (10.78')$$

где вспомогательная переменная E определяется из уравнения Кеплера (при $e = 1$):

$$E - \sin E = n(t - \tau). \qquad (10.78'')$$

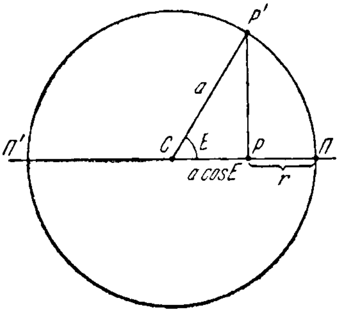


Рис. 60.

Нетрудно убедиться, что в вырожденном случае (который получается из случая эллиптического движения при $c = 0$) величина E сохраняет свое геометрическое значение, т. е. есть угол, который образует радиус-вектор проекции движущейся точки на окружность радиуса a с центром в C с направлением прямой, по которой происходит движение (рис. 60).

Свойства вырожденного эллиптического движения легко обнаруживаются из уравнений (10.78′) и (10.78″). Точка P совершает движение по отрезку $ПП'$, длина которого есть $2a$, двигаясь постоянно к началу координат (при $\dot{r}_0 < 0$) либо двигаясь сначала от начала координат, достигая точки $П'$, а затем возвращаясь обратно и приходя в начало координат (центр силы) (см. рис. 60).

Если $h > 0$, то положим $h = \frac{\mu}{a}$ и определим радиус-вектор формулой

$$r = a(\sec F - 1), \qquad (10.77')$$

или формулой

$$r = a(\operatorname{ch} H - 1),$$

где вспомогательная переменная определяется уравнением

$$\operatorname{tg} F - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{F}{2} + 45^\circ\right) = n(t - \tau) \qquad (10.77'')$$

или соответственно уравнением

$$\operatorname{sh} H - H = n(t - \tau),$$

а свойства движения легко выводятся из приведенных формул.

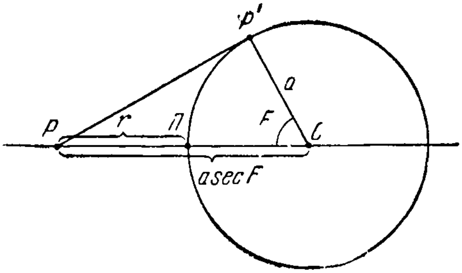


Рис. 61.

Нетрудно убедиться, что вспомогательная переменная F также сохраняет свое геометрическое значение, почти такое же, как и в случае невырожденного гиперболического движения (рис. 61).

§ 4. Зависимость элементов невозмущенного кеплеровского движения от начальных условий

1. Пусть произвольно заданы вещественные числа

$$x_0, \quad y_0, \quad z_0, \quad \dot{x}_0, \quad \dot{y}_0, \quad \dot{z}_0, \qquad (10.79)$$

представляющие собой начальные значения прямоугольных пространственных координат и их первых производных по времени, соответствующие произвольно выбранному начальному моменту времени t_0 (*начальная эпоха или просто эпоха*).

Ставится вопрос об определении соответствующих значений элементов кеплеровой орбиты

$$\Omega, \quad i, \quad p, \quad e, \quad \omega, \quad \tau, \qquad (10.79')$$

общих для всякого типа невозмущенного движения.

Эта задача решается при помощи следующей последовательности формул.

Прежде всего находим

$$r_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2},$$
$$V_0=\sqrt{\dot{x}_0^2+\dot{y}_0^2+\dot{z}_0^2},$$
$$\cos\delta_0=\frac{x_0\dot{x}_0+y_0\dot{y}_0+z_0\dot{z}_0}{r_0V_0},$$

после чего вычисляем соответствующие значения произвольных постоянных первых интегралов, как это указано в § 2 гл. IX. Мы имеем для этого следующие формулы *):

$$\left.\begin{aligned} c_1&=y_0\dot{z}_0-z_0\dot{y}_0,\\ c_2&=z_0\dot{x}_0-x_0\dot{z}_0,\\ c_3&=x_0\dot{y}_0-y_0\dot{x}_0,\\ c&=+\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (10.80)$$

$$\left.\begin{aligned} f_1&=-\frac{\mu x_0}{r_0}+c_3\dot{y}_0-c_2\dot{z}_0,\\ f_2&=-\frac{\mu y_0}{r_0}+c_1\dot{z}_0-c_3\dot{x}_0,\\ f_3&=-\frac{\mu z_0}{r_0}+c_2\dot{x}_0-c_1\dot{y}_0,\\ f&=+\sqrt{f_1^2+f_2^2+f_3^2}, \end{aligned}\right\} \qquad (10.80')$$

$$h=V_0^2-\frac{2\mu}{r_0}, \qquad (10.80'')$$

причем должны выполняться соотношения

$$c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3=0,$$
$$f^2=\mu^2+hc^2.$$

Теперь из соотношений

$$\sin i\sin\Omega=+\frac{c_1}{c},$$
$$\sin i\cos\Omega=-\frac{c_2}{c},$$
$$\cos i=+\frac{c_3}{c},$$

имеем

$$\operatorname{tg}\Omega=-\frac{c_1}{c_2}, \quad \operatorname{tg} i=\frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}{c_3}.$$

---

*) Для удобства читателя мы приводим здесь сводку всех ранее выведенных формул, относящихся к определению постоянных по начальным значениям (10.79).

Так как постоянные c_1, c_2, c_3 вычислены, то знаки $\sin\Omega$ и $\cos\Omega$ известны, а поэтому можем однозначно определить долготу восходящего узла

$$\Omega = \operatorname{arctg}\left(-\frac{c_1}{c_2}\right). \tag{10.81}$$

Далее, по условию, $0 \leqslant i \leqslant 180°$. Поэтому четверть, в которой заключен угол i, определяется знаком постоянной c_3. Отсюда однозначно определяется наклонность

$$i = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2}}{c_3}. \tag{10.81'}$$

Полезно отметить, что мы имеем, в частности,

$$\begin{array}{llccc} i=0, & \text{если} & c_1=c_2=0 & \text{и} & c_3>0, \\ i=180°, & » & c_1=c_2=0 & » & c_3<0, \\ i=90°, & » & c_1^2+c_2^2\neq 0 & » & c_3=0. \end{array}$$

Положение плоскости орбиты полностью и однозначно определено. Переходим к другим элементам. Далее находим

$$p = \frac{c^2}{\mu} = \frac{1}{\mu} r_0^2 V_0^2 \sin^2\delta_0 \tag{10.82}$$

и

$$e = \frac{f}{\mu} = \sqrt{1 + \frac{1}{\mu^2} r_0 V_0^2 (r_0 V_0^2 - 2\mu)\sin^2\delta_0} \tag{10.82'}$$

что определяет размеры орбиты и ее форму.

Для определения положения орбиты в ее плоскости, т. е. для определения углового расстояния перицентра от узла ω, можно использовать формулы (9.51) или (9.51').

Возьмем, например, формулы (9.51). Если $\cos i \neq 0$, то из первых двух формул (9.51) имеем следующие:

$$\left.\begin{aligned} \sin\omega &= \frac{-f_1\sin\Omega + f_2\cos\Omega}{f\cos i}, \\ \cos\omega &= \frac{f_1\cos\Omega + f_2\sin\Omega}{f}, \end{aligned}\right\} \tag{10.83}$$

которые дают $\sin\omega$ и $\cos\omega$ по величине и по знаку, так как Ω и i уже определены. Таким образом, известна четверть, в которой содержится угол ω, а для величины угла можем получить из предыдущих формул следующую:

$$\omega = \operatorname{arctg}\left(\frac{cf_3}{c_1f_2 - c_2f_1}\right). \tag{10.83'}$$

Если $\cos i=0$, то возьмем, например, вторую и третью из формул (9.51), которые дают

$$\sin\omega=\frac{f_3}{f},$$

$$\cos\omega=\frac{f_2}{f\sin\Omega},$$

откуда, так же как и выше, получим

$$\omega=\operatorname{arctg}\left(\frac{f_3\sin\Omega}{f_2}\right). \qquad (10.83'')$$

Остается определить элемент τ — момент прохождения через перицентр, для чего используем формулы (9.52). Полагая в этих формулах $t=t_0$, т. е. $u=u_0$, мы выводим, если $\cos i\neq 0$,

$$\left.\begin{aligned}\sin u_0&=\frac{-x_0\sin\Omega+y_0\cos\Omega}{r_0\cos i},\\ \cos u_0&=\frac{x_0\cos\Omega+y_0\sin\Omega}{r_0}.\end{aligned}\right\} \qquad (10.84)$$

Эти соотношения определяют величины и знаки $\sin u_0$ и $\cos u_0$, т. е. дают возможность определить четверть, в которой лежит угол u_0, величина которого может быть получена из формулы

$$u_0=\operatorname{arctg}\left(\frac{c_3z_0}{c_1y_0-c_2x_0}\right). \qquad (10.84')$$

Если $\cos i=0$, то второе и третье равенства (9.52) принимают вид

$$\sin u_0=\frac{z_0}{r_0},$$

$$\cos u_0=\frac{y_0}{r_0\sin\Omega},$$

откуда имеем

$$u_0=\operatorname{arctg}\left(\frac{z_0\sin\Omega}{y_0}\right).$$

Зная u_0, получим также начальное значение истинной аномалии

$$v_0=u_0-\omega,$$

и, наконец, величину τ из формулы (9.45):

$$\tau=t_0-\frac{p^2}{c}\int\limits_0^{v_0}\frac{dv}{(1+e\cos v)^2}. \qquad (10.85)$$

Но для фактического нахождения τ нужно прежде вычислить интеграл в формуле (10.85), а это делается, как мы уже знаем, по-разному для различных типов кеплеровского движения. Поэтому нужно рассмотреть по отдельности разные случаи невозмущенного кеплеровского движения.

2. Для эллиптического движения $h<0$ и $e<1$. Большая полуось эллиптической орбиты a определяется уже известной формулой

$$a=\frac{\mu r_0}{2\mu - r_0V_0^2}, \tag{10.86}$$

с помощью которой находим также среднее движение

$$n=\frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}=\frac{1}{\mu}\left(\frac{2\mu}{r_0}-V_0^2\right)^{3/2}. \tag{10.86'}$$

Теперь, зная v_0, найдем также начальное значение эксцентрической аномалии E_0 из формулы

$$E_0=2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{v_0}{2}\right), \tag{10.87}$$

причем, как известно, $E_0/2$ и $v_0/2$ лежат в одной четверти, так что предыдущая формула определяет E_0 однозначно.

Найдя E_0, сразу получим среднюю аномалию эпохи M_0, т. е. среднюю аномалию в начальный момент

$$M_0=E_0-e\sin E_0, \tag{10.87'}$$

которую и принимают обычно за шестой элемент эллиптического движения (вместо τ).

Зная M_0, можем определить и τ:

$$\tau=t_0-\frac{1}{n}M_0, \tag{10.87''}$$

и также среднюю долготу эпохи

$$\varepsilon=M_0+\Omega+\omega, \tag{10.87'''}$$

чем и завершается определение элементов в случае эллиптического движения.

Если мы имеем случай гиперболического движения, то по найденному значению v_0 определим сначала начальное значение вспомогательной переменной F или H по формулам

$$\left.\begin{aligned} F_0&=2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\operatorname{tg}\frac{v_0}{2}\right),\\ H_0&=2\operatorname{Arth}\left(\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\operatorname{tg}\frac{v_0}{2}\right),\end{aligned}\right\} \tag{10.88}$$

после чего получим величину τ по одной из двух следующих формул:

$$\left.\begin{aligned} \tau &= t_0 - \frac{1}{n}\left[e \operatorname{tg} F_0 - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{F_0}{2} + 45^\circ\right)\right], \\ \tau &= t_0 - \frac{1}{n}\left[e \operatorname{sh} H_0 - H_0\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (10.88')$$

Наконец, если $h=0$ и $e=1$, что соответствует параболическому движению, то, найдя сначала для начального момента значение переменной σ по формуле

$$\sigma_0 = \operatorname{tg}\frac{v_0}{2}, \qquad (10.89)$$

мы получим затем и величину τ:

$$\tau = t_0 - \frac{1}{n}\left(\sigma_0 + \frac{1}{3}\sigma_0^3\right). \qquad (10.89')$$

Если начальные условия таковы, что мы имеем $\delta_0=90^\circ$ и $V_0^2 = \frac{\mu}{r_0}$, то движение точки является круговым и определение элементов еще более упрощается.

Элементы Ω, i и $p=a$ находятся так же, как и в общем случае. Затем формула (10.82′) дает $e=0$, а формулы (10.83) показывают, что ω есть величина неопределенная и ее можно взять равной нулю или просто исключить из рассмотрения, так как этот элемент в формулы кругового движения все равно не входит.

Тогда, определяя величину u_0 по формулам (10.84), которые сохраняются и для кругового движения, мы будем иметь

$$M_0 = u_0, \qquad (10.90)$$

что и завершает определение элементов для кругового движения

Что касается прямолинейного движения, то для него, как уже указывалось, за элементы можно принять начальные координаты и начальную радиальную скорость $\dot{r}_0$, которая по заданным величинам (10.78) определится очевидной формулой

$$\dot{r}_0 = V_0 = \sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2}. \qquad (10.91)$$

Зная $\dot{r}_0$, мы можем найти величину a (вырожденную большую или действительную полуось) по формулам (10.29) или (10.43), что дает

$$a = \frac{\pm \mu r_0}{2\mu - r_0 \dot{r}_0^2}, \qquad (10.91')$$

и величину n по формуле

$$n=\frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}.$$

Теперь найдем момент прохождения через перицентр, т. е. момент падения точки на центральное тело. Действительно, формулы (10.76′) и (10.77′) дают

$$E_0=\arccos\left(\frac{a-r_0}{a}\right), \quad F_0=\arccos\left(\frac{a}{a+r_0}\right),$$

после чего из формул (10.76′) и (10.77′) получим

$$\tau=t_0-\frac{1}{n}(E_0-\sin E_0) \qquad (h<0),$$

$$\tau=t_0-\frac{1}{n}\left[\operatorname{tg}F_0-\ln\operatorname{tg}\left(\frac{F_0}{2}+45^\circ\right)\right] \qquad (h>0).$$

3. Мы предполагали до сих пор, что начальные значения (10.78) заданы и известны с абсолютной точностью. Но обыкновенно точные значения величин (10.78) неизвестны, а заданные их числовые значения являются приближенными и содержат какие-то ошибки. Тогда возникает вопрос о том, какие ошибки будут содержать элементы орбиты, которые в конечном счете суть некоторые функции величин (10.78)?

В то же время, считая даже начальные условия (10.78) абсолютно точными, мы можем поставить имеющую определенный интерес для приложений задачу об определении изменений (или вариаций) элементов, когда величины (10.78) по каким-либо причинам несколько изменены.

И тот и другой подходы к проблеме изменения начальных условий приводят нас к следующей задаче: величины (10.78) получают некоторые приращения (положительные или отрицательные); требуется определить соответствующие приращения элементов невозмущенной орбиты.

Мы рассмотрим эту задачу только для того случая, когда приращения начальных значений (10.78) суть величины достаточно малые, так что вторыми и высшими степенями этих приращений можно полностью пренебречь. Тогда соответствующие приращения элементов определятся по правилам дифференциального исчисления. Действительно, пусть Φ есть заданная функция величин (10.78). Если приращения начальных значений координат и составляющих скорости обозначим соответственно через Δx_0, Δy_0, Δz_0, $\Delta\dot{x}_0$, $\Delta\dot{y}_0$, $\Delta\dot{z}_0$, то полное приращение величины Φ определится по формуле

$$\Delta\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x_0}\Delta x_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial y_0}\Delta y_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial z_0}\Delta z_0 + \\ + \frac{\partial\Phi}{\partial \dot{x}_0}\Delta \dot{x}_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial \dot{y}_0}\Delta \dot{y}_0 + \frac{\partial\Phi}{\partial \dot{z}_0}\Delta \dot{z}_0. \qquad (10.92)$$

Мы будем называть для сокращения величины

$$\Delta x_0, \quad \Delta y_0, \quad \Delta z_0, \quad \Delta \dot{x}_0, \quad \Delta \dot{y}_0, \quad \Delta \dot{z}_0 \qquad (10.93)$$

мгновенными возмущениями начальных значений (10.78) или просто начальными возмущениями, а величину ΔΦ, определяемую формулой (10.92), мгновенным возмущением величины Φ, или просто возмущением величины Φ.

Найти непосредственно по формуле (10.92) возмущения элементов орбиты (10.79) довольно затруднительно, так как нужные формулы получаются длинными и громоздкими. Поэтому мы будем определять возмущения элементов орбиты через возмущения промежуточных величин, которыми являются постоянные первых интегралов, и некоторые удобные комбинации величин (10.78).

Прежде всего определим возмущения радиуса-вектора, начальной скорости и начального значения угла, образуемого вектором начальной скорости с начальным радиусом-вектором. Мы имеем, очевидно,

$$\left.\begin{aligned} \Delta r_0 &= \frac{x_0}{r_0}\Delta x_0 + \frac{y_0}{r_0}\Delta y_0 + \frac{z_0}{r_0}\Delta z_0, \\ \Delta V_0 &= \frac{\dot{x}_0}{V_0}\Delta \dot{x}_0 + \frac{\dot{y}_0}{V_0}\Delta \dot{y}_0 + \frac{\dot{z}_0}{V_0}\Delta \dot{z}_0, \\ \Delta r_0' &= \dot{x}_0\Delta x_0 + \dot{y}_0\Delta y_0 + \dot{z}_0\Delta z_0 + x_0\Delta \dot{x}_0 + y_0\Delta \dot{y}_0 + z_0\Delta \dot{z}_0, \\ \Delta\delta_0 &= \frac{\operatorname{ctg}\delta_0}{r_0 V_0}(V_0\Delta r_0 + r_0\Delta V_0) - \frac{\operatorname{cosec}\delta_0}{r_0 V_0}\Delta r_0'. \end{aligned}\right\} \qquad (10.94)$$

В дальнейшем будем считать возмущения Δr_0, ΔV_0 и $\Delta\delta_0$ величинами известными.

Теперь формулы (10.80) дают соответственно

$$\left.\begin{aligned} \Delta c_1 &= \dot{z}_0\Delta y_0 - \dot{y}_0\Delta z_0 - z_0\Delta \dot{y}_0 + y_0\Delta \dot{z}_0, \\ \Delta c_2 &= \dot{x}_0\Delta z_0 - \dot{z}_0\Delta x_0 - x_0\Delta \dot{z}_0 + z_0\Delta \dot{x}_0, \\ \Delta c_3 &= \dot{y}_0\Delta x_0 - \dot{x}_0\Delta y_0 - y_0\Delta \dot{x}_0 + x_0\Delta \dot{y}_0, \\ \Delta c &= \frac{c_1}{c}\Delta c_1 + \frac{c_2}{c}\Delta c_2 + \frac{c_3}{c}\Delta c_3, \end{aligned}\right\} \qquad (10.95)$$

а из формул (10.80′) соответственно получаем

$$\left.\begin{aligned} \Delta f_1 &= \mu\frac{x_0\,\Delta r_0 - r_0\,\Delta x_0}{r_0^2} + c_3\,\Delta\dot{y}_0 - c_2\,\Delta\dot{z}_0 + \dot{y}_0\,\Delta c_3 - \dot{z}_0\,\Delta c_2,\\ \Delta f_2 &= \mu\frac{y_0\,\Delta r_0 - r_0\,\Delta y_0}{r_0^2} + c_1\,\Delta\dot{z}_0 - c_3\,\Delta\dot{x}_0 + \dot{z}_0\,\Delta c_1 - \dot{x}_0\,\Delta c_3,\\ \Delta f_3 &= \mu\frac{z_0\,\Delta r_0 - r_0\,\Delta z_0}{r_0^2} + c_2\,\Delta\dot{x}_0 - c_1\,\Delta\dot{y}_0 + \dot{x}_0\,\Delta c_2 - \dot{y}_0\,\Delta c_1,\\ \Delta f &= \frac{f_1}{f}\,\Delta f_1 + \frac{f_2}{f}\,\Delta f_2 + \frac{f_3}{f}\,\Delta f_3. \end{aligned}\right\} \qquad (10.95')$$

Затем формула (10.80″) дает

$$\Delta h = 2\left(V_0\Delta V_0 + \frac{\mu\,\Delta r_0}{r_0^2}\right). \qquad (10.96)$$

Теперь с помощью формулы (10.81) находим соответствующее возмущение долготы узла

$$\Delta\Omega = \frac{c_1\,\Delta c_2 - c_2\,\Delta c_1}{c_1^2 + c_2^2}, \qquad (10.97)$$

а из формулы (10.81) выводим возмущение наклонности

$$\Delta i = \frac{(c_1\,\Delta c_1 + c_2\,\Delta c_2)\,c_3 - (c_1^2 + c_2^2)\,\Delta c_3}{c^2\sqrt{c_1^2 + c_2^2}}. \qquad (10.97')$$

Далее, формулы (10.82) и (10.82′) дают (после соответствующего дифференцирования) возмущения параметра и эксцентриситета:

$$\Delta p = \frac{2c}{\mu}\,\Delta c = 2p\left(\frac{\Delta r_0}{r_0} + \frac{\Delta V_0}{V_0} + \operatorname{ctg}\delta_0\cdot\Delta\delta_0\right), \qquad (10.98)$$

$$\Delta e = \frac{\Delta f}{\mu}, \qquad (10.98')$$

а из формул (10.93) выведем возмущение углового расстояния перицентра от узла в виде

$$\Delta\omega = \frac{\Delta f\cdot\cos\omega - \Delta f_1\cdot\cos\Omega - \Delta f_2\cdot\sin\Omega - f\sin\omega\cos i\cdot d\Omega}{f\sin\omega}. \qquad (10.99)$$

Аналогичным образом из формул (10.84) выведем возмущение начального значения аргумента широты

$$\Delta u_0 = \frac{\Delta r_0\cdot\cos u_0 - \Delta x_0\cdot\cos\Omega - \Delta y_0\sin\Omega - r_0\sin u_0\cos i\cdot d\Omega}{r_0\sin u_0}, \qquad (10.99')$$

после чего найдем возмущение начального значения истинной аномалии

$$\Delta v_0 = \Delta u_0 - \Delta\omega,$$

и, наконец, из формулы (10.85) выведем возмущение момента прохождения через перицентр в следующей форме:

$$\Delta\tau = \frac{2c\,\Delta p - p\,\Delta c}{pc}(\tau - t_0) - \frac{r_0^2}{c}\Delta v_0 + \frac{2p^2\,\Delta e}{c}\int\limits_0^{v_0}\frac{\cos v\,dv}{(1+e\cos v)^2}. \qquad (10.100)$$

Зная возмущения величин (10.79), мы без труда получим также и возмущения величин, зависящих от общих элементов.

Так, например, в случае эллиптического движения, с помощью формулы (10.96) найдем возмущение большой полуоси орбиты

$$\Delta a = \frac{\mu\,\Delta h}{h^2} = \frac{a^2}{\mu}\Delta h, \qquad (10.101)$$

а затем возмущение среднего движения

$$\Delta n = -\frac{3n\,\Delta a}{2a} \qquad (10.101')$$

и периода обращения

$$\Delta T = -\frac{2\pi}{n^2}\Delta n = -\frac{T}{n}\Delta n. \qquad (10.101'')$$

Теперь из формулы (10.87) находим возмущение начального значения эксцентрической аномалии в виде

$$\Delta E_0 = \frac{r_0\sqrt{1-e^2}}{p}\left(\Delta v_0 - \frac{\Delta e\sin v_0}{1-e^2}\right), \qquad (10.102)$$

после чего формула (10.87′) дает возмущение средней аномалии эпохи

$$\Delta M_0 = \frac{r_0}{a}\Delta E_0 - \Delta e\cdot\sin E_0, \qquad (10.102')$$

а формула (10.87‴) — возмущение средней долготы эпохи

$$\Delta\varepsilon = \Delta M_0 + \Delta\Omega + \Delta\omega. \qquad (10.102'')$$

Наконец, формула (10.87″) дает более простое выражение для возмущения момента прохождения через перицентр в виде

$$\Delta\tau = \frac{1}{n^2}(M_0\,\Delta n - n\,\Delta M_0).$$

Аналогичным образом можно получить подобные же формулы для $\Delta\tau$ и в случае гиперболического (а также и параболического) движения *).

4. После того как найдены возмущения (мгновенные!) элементов орбиты, вызываемые мгновенными возмущениями начальных условий, естественно перейти к определению соответ-

---

*) Также можно получить формулы, подобные (10.101), (10.101′) и (10.102) для случая гиперболического движения.

ствующих возмущений (также мгновенных) координат и составляющих скорости движущейся точки.

Действительно, обозначим через χ любую из величин невозмущенного кеплеровского движения*), которая является известной функцией времени и начальных значений (10.78), так что

$$\chi=\chi(t;\ x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0).$$

Если начальные значения суть определенные, неизменные числа, то из предыдущей формулы мы можем получить числовое значение величины χ для любого момента времени.

Допустим теперь, что величины (10.78) изменились (или изменены по нашему желанию) так, что они получили соответственно малые приращения (10.93). Тогда изменится также и соответствующее текущему моменту t значение величины χ, которая получит некоторое приращение $\Delta\chi$, определяемое очевидной формулой

$$\Delta\chi=\frac{\partial\chi}{\partial x_0}\Delta x_0+\frac{\partial\chi}{\partial y_0}\Delta y_0+\frac{\partial\chi}{\partial z_0}\Delta z_0+\frac{\partial\chi}{\partial \dot{x}_0}\Delta\dot{x}_0+\frac{\partial\chi}{\partial \dot{y}_0}\Delta\dot{y}_0+\frac{\partial\chi}{\partial \dot{z}_0}\Delta\dot{z}_0.$$

Таким образом, для нахождения возмущения величины χ, вызываемого возмущениями начальных условий, нам остается найти выражения для всех частных производных функции χ по переменным (10.78), имея в виду, что при всех этих дифференцированиях время t остается неизменным.

Но выражения величин невозмущенного движения в зависимости от начальных условий оказываются чересчур сложными и громоздкими, а поэтому мы будем рассматривать всякую величину χ как функцию времени и элементов орбиты, т. е. будем представлять ее формулой вида

$$\chi=\chi(t;\ \Omega,\ i,\ \omega,\ p,\ e,\ \tau). \tag{10.103}$$

Когда начальные условия получают возмущения (10.93), все элементы орбиты также получают соответствующие возмущения, определяемые формулами предыдущего раздела. Поэтому возмущения элементов

$$\Delta\Omega,\quad \Delta i,\quad \Delta\omega,\quad \Delta p,\quad \Delta e,\quad \Delta\tau$$

мы можем теперь считать известными и данными, вследствие чего возмущение любой величины χ определится формулой

$$\Delta\chi=\frac{\partial\chi}{\partial\Omega}\Delta\Omega+\frac{\partial\chi}{\partial i}\Delta i+\frac{\partial\chi}{\partial\omega}\Delta\omega+\frac{\partial\chi}{\partial p}\Delta p+\frac{\partial\chi}{\partial e}\Delta e+\frac{\partial\chi}{\partial\tau}\Delta\tau, \tag{10.104}$$

---

*) Здесь буква χ является общим обозначением для любой зависящей от времени величины невозмущенного движения. Таким образом, χ обозначает любую координату или составляющую скорости, а также радиус-вектор, скорость, аргумент широты и т. д.

и наша задача заключается теперь в вычислении частных производных от величин χ по независимым переменным (10.103). считая при этом время t неизменным.

Для нахождения частных производных от координат и составляющих скорости по величинам (10.103) удобнее всего воспользоваться общими формулами (9.59) гл. IX.

В самом деле, первые множители в этих формулах, т. е. направляющие косинусы линии апсид и прямой, к ней перпендикулярной (лежащей в плоскости орбиты), зависят, как показывают формулы (9.58) и (9.58′), только от элементов положения Ω, i, ω, а вторые множители, т. е. орбитальные координаты и их производные, зависят только от элементов p, e, τ.

Обозначим любой из элементов первой группы через L, а любой элемент второй группы через P. Тогда формулы (9.59), дают

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial x}{\partial L}=\dfrac{\partial \alpha_\tau}{\partial L}\xi+\dfrac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L}\eta, & \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial L}=\dfrac{\partial \alpha_\tau}{\partial L}\dot{\xi}+\dfrac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L}\dot{\eta}, \\ \dfrac{\partial x}{\partial P}=\alpha_\tau\dfrac{\partial \xi}{\partial P}+\alpha'_\tau\dfrac{\partial \eta}{\partial P}, & \dfrac{\partial \dot{x}}{\partial P}=\alpha_\tau\dfrac{\partial \dot{\xi}}{\partial P}+\alpha'_\tau\dfrac{\partial \dot{\eta}}{\partial P} \end{array}\right\} \qquad (10.105)$$

и аналогичные выражения для производных от остальных координат и составляющих скоростей.

Таким образом, нужно найти в отдельности производные от направляющих косинусов по элементам первой группы и производные от орбитальных координат по элементам второй группы.

Прежде всего из формул (9.58) и (9.58′) находим:

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial \alpha_\tau}{\partial \omega}=+\alpha'_\tau, & \dfrac{\partial \beta_\tau}{\partial \omega}=+\beta'_\tau, & \dfrac{\partial \gamma_\tau}{\partial \omega}=+\gamma'_\tau, \\ \dfrac{\partial \alpha'_\tau}{\partial \omega}=-\alpha_\tau, & \dfrac{\partial \beta'_\tau}{\partial \omega}=-\beta_\tau, & \dfrac{\partial \gamma'_\tau}{\partial \omega}=-\gamma_\tau \end{array}\right\} \qquad (10.106)$$

и

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial \alpha_\tau}{\partial \Omega}=-\beta_\tau, & \dfrac{\partial \beta_\tau}{\partial \Omega}=+\alpha_\tau, & \dfrac{\partial \gamma_\tau}{\partial \Omega}=0, \\ \dfrac{\partial \alpha'_\tau}{\partial \Omega}=-\beta'_\tau, & \dfrac{\partial \beta'_\tau}{\partial \Omega}=+\alpha'_\tau, & \dfrac{\partial \gamma'_\tau}{\partial \Omega}=0. \end{array}\right\} \qquad (10.106')$$

Затем, обозначая для простоты направляющие косинусы перпендикуляра к плоскости орбиты (вектора момента скорости) через α'', β'', γ'', т. е. полагая

$$\alpha''=\sin\Omega\sin i, \quad \beta''=-\cos\Omega\sin i, \quad \gamma''=\cos i,$$

мы получим еще из формул (9.58) и (9.58')

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\alpha_\tau}{\partial i} &= \alpha''\sin\omega, & \frac{\partial\beta_\tau}{\partial i} &= \beta''\sin\omega, & \frac{\partial\gamma_\tau}{\partial i} &= \gamma''\sin\omega, \\ \frac{\partial\alpha'_\tau}{\partial i} &= \alpha''\cos\omega, & \frac{\partial\beta'_\tau}{\partial i} &= \beta''\cos\omega, & \frac{\partial\gamma'_\tau}{\partial i} &= \gamma''\cos\omega. \end{aligned}\right\} \qquad (10.106'')$$

Перейдем к нахождению производных по элементам группы P от орбитальных координат и составляющих скорости. Для этого, как показывают формулы (9.41) и (9.48), нужно сначала найти соответствующие производные от радиуса-вектора r и истинной аномалии v.

Чтобы найти производные от v по элементам P, возьмем формулу (9.45), которую напишем здесь в виде

$$\int_0^{v'} \frac{dv'}{(1+e\cos v')^2} = \frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}}(t-\tau), \qquad (10.107)$$

где через v' обозначена переменная интегрирования.

Дифференцируя равенство (10.107) по элементам P и определяя затем из получившихся соотношений нужные нам производные от v по элементам P, мы найдем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{(t-\tau)}{r^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial \tau} = -\frac{\sqrt{\mu p}}{r^2} = -\dot{v}, \\ &\frac{\partial v}{\partial e} = \frac{2p^2}{r^2}\int_0^{v} \frac{\cos v'\,dv'}{(1+e\cos v')^3}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.107')$$

Дифференцируя теперь по элементам P уравнение орбиты общего вида

$$r = \frac{p}{1+e\cos v},$$

мы получим

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial r}{\partial p} = \frac{r}{p}, \qquad \frac{\partial r}{\partial \tau} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,e\sin v = -\dot{r}, \\ &\frac{\partial r}{\partial e} = \frac{r^2}{p}\left(\sin v\,\frac{\partial v}{\partial e} - \cos v\right). \end{aligned}\right\}$$

Теперь дифференцируем выражения (9.41) для орбитальных координат по элементу P, что дает

$$\frac{\partial\xi}{\partial P} = \frac{\xi}{r}\frac{\partial r}{\partial P} - \eta\frac{\partial v}{\partial P}, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial P} = \frac{\eta}{r}\frac{\partial r}{\partial P} + \xi\frac{\partial v}{\partial P}, \qquad (10.108)$$

где производные от r и v уже известны.

Для нахождения производных от $\dot{\xi}$ и $\dot{\eta}$ используем формулы (9.48), которые напишем здесь следующим образом:

$$\dot{\xi} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin v, \quad \dot{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} (e + \cos v), \tag{10.109}$$

откуда находим

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial p} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(\frac{\sin v}{2p} - \cos v \frac{\partial v}{\partial p} \right), & \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial p} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(\frac{e + \cos v}{p} + \sin v \frac{\partial v}{\partial p} \right), \\
\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial e} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \cos v \frac{\partial v}{\partial e}, & \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial e} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(1 - \sin v \frac{\partial v}{\partial e} \right), \\
\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial \tau} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \cos v \frac{\partial v}{\partial \tau}, & \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \tau} &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \sin v \frac{\partial v}{\partial \tau}.
\end{aligned}\right\} \tag{10.109'}$$

Таким образом, все нужные производные получены, и мы можем составить теперь выражения для производных от координат и составляющих скорости по формулам (10.105).

В заключение выпишем выражения для частных производных по элементам орбиты от проекций скорости, определяемых формулами (9.48′), и от самой скорости, определяемой интегралом живой силы или формулой (9.49). Мы имеем из (9.48′)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial V_r}{\partial p} &= \frac{\partial \dot{r}}{\partial p} = e\sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(-\frac{\sin v}{2p} + \cos v \frac{\partial v}{\partial p} \right), \\
\frac{\partial V_r}{\partial e} &= \frac{\partial \dot{r}}{\partial e} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(\sin v + e \cos v \frac{\partial v}{\partial e} \right), \\
\frac{\partial V_r}{\partial \tau} &= \frac{\partial \dot{r}}{\partial \tau} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} e \cos v \frac{\partial v}{\partial \tau};
\end{aligned}\right\} \tag{10.110}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial V_n}{\partial p} &= \frac{\partial (r\dot{v})}{\partial p} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(\frac{1 + e \cos v}{2p} + \sin v \frac{\partial v}{\partial p} \right), \\
\frac{\partial V_n}{\partial e} &= \frac{\partial (r\dot{v})}{\partial e} = \sqrt{\frac{\mu}{p}} \left(\cos v - e \sin v \frac{\partial v}{\partial e} \right), \\
\frac{\partial V_n}{\partial \tau} &= \frac{\partial (r\dot{v})}{\partial \tau} = -\sqrt{\frac{\mu}{p}} e \sin v \frac{\partial v}{\partial \tau},
\end{aligned}\right\} \tag{10.110'}$$

а из формулы (9.49) получаем выражения

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial p} &= -\frac{\mu}{pV} \left(\frac{V^2}{2\mu} - e \sin v \frac{\partial v}{\partial p} \right), \\
\frac{\partial V}{\partial e} &= \frac{\mu}{pV} \left(\cos v + e - e \sin v \frac{\partial v}{\partial e} \right), \\
\frac{\partial V}{\partial \tau} &= -\frac{\mu}{pV} e \sin v \frac{\partial v}{\partial \tau},
\end{aligned}\right\} \tag{10.110''}$$

в которые нужно подставить вместо производных от истинной аномалии их выражения (10.107′).

Примечание. Выведенные формулы используются в теории и практике задачи об улучшении первоначальной орбиты*), а также в различных вопросах теории возмущений.

Заметим еще, что полученными формулами, которые все линейны относительно возмущений начальных значений и возмущений элементов, можно воспользоваться и для решения обратной задачи, т. е. задачи об определении начальных возмущений (10.93), если известны возмущения элементов орбиты или возмущения координат и составляющих скорости для какого-либо момента времени t, отличного от t_0.

---

*) См., например, М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, т. I, 1941; см. также П. Е. Эльясберг, Введение в теорию полета искусственных спутников Земли, или Д. Брауэр, Дж. Клеменс, Методы небесной механики, перев. с англ., 1964.

ГЛАВА XI

РЯДЫ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

В главе X было показано, что общее решение дифференциальных уравнений невозмущенного кеплеровского движения не может быть представлено в конечной форме, так как связь между истинной аномалией и временем для всех основных типов движения устанавливается при помощи трансцендентного соотношения.

Только в двух частных случаях, а именно, в случае кругового движения и в случае прямолинейного параболического движения мы могли получить для координат движущейся точки (планеты или спутника) простые выражения в виде явных функций времени.

Однако для рассмотрения общих методов теории возмущений необходимо иметь выражения для координат и их первых производных в виде явных функций времени, а поскольку получить эти явные выражения в конечном виде невозможно, то естественно возникает задача о представлении величин невозмущенного движения в виде бесконечных рядов.

В классической небесной механике эта задача разрешена только для случая невозмущенного эллиптического движения. Рассмотрение этой задачи и является предметом настоящей главы.

§ 1. Разложения координат эллиптического движения по степеням эксцентриситета

1. Так как координаты и их первые производные в эллиптическом (невырожденном) движении могут быть представлены как явные функции эксцентрической аномалии E, то, найдя E как явную функцию времени, мы тем самым получим и явные выражения в зависимости от времени и всех других величин этого типа движения.

Эксцентрическая аномалия связана с временем уравнением Кеплера

$$E - e\sin E = M, \tag{11.1}$$

где M есть средняя аномалия, определяемая формулой

$$M = n(t - \tau), \tag{11.2}$$

а e — эксцентриситет эллиптической орбиты, т. е. величина, удовлетворяющая неравенству

$$0 \leqslant e < 1. \tag{11.3}$$

Легко показать, что для каждого значения t, а следовательно, и M, уравнение (11.1) имеет единственное действительное решение. В самом деле, дифференцируя уравнение (11.1) по средней аномалии M, мы получим

$$(1 - e\cos E)\frac{dE}{dM} = 1,$$

откуда найдем

$$\frac{dE}{dM} = \frac{1}{1 - e\cos E} = \frac{a}{r}. \tag{11.4}$$

Таким образом, производная от E по M всегда положительна и, следовательно, E есть монотонно возрастающая функция от M. Поэтому каждому действительному значению M соответствует одно-единственное значение E.

Если M равно нулю, 180° или 360°, то и эксцентрическая аномалия равна соответственно нулю, 180° или 360°. Обычно в астрономии все аномалии и долготы измеряются в градусной мере от нуля до 360° (или в радианах от нуля до 2π). Но в небесной механике часто интересно рассматривать аномалии и долготы как величины, неограниченно растущие вместе с временем t. Поэтому будем рассматривать здесь M и E как величины, могущие принимать любые действительные значения.

Тогда, если M заключено в промежутке между $k\pi$ и $(k+1)\pi$ (k — любое целое положительное число), соответствующее значение E также заключено в промежутке от $k\pi$ до $(k+1)\pi$.

Действительно, напишем уравнение (11.1) в виде

$$F(E) = E - e\sin E - M = 0, \tag{11.1'}$$

и пусть

$$k\pi < M < (k+1)\pi.$$

Мы имеем тогда из (11.1')

$$F(k\pi) = k\pi - M < 0,$$
$$F[(k+1)\pi] = (k+1)\pi - M > 0.$$

Так как функция $F(E)$ непрерывна при любом конечном E и имеет значения противоположных знаков на концах промежутка, то она необходимо обращается в нуль, по крайней мере для одного значения E, содержащегося в промежутке $[k\pi, (k+1)\pi]$. Но мы уже видели, что каждому значению M соответствует единственное значение E. Поэтому уравнение (11.1′) имеет единственный действительный корень, заключающийся в промежутке $[k\pi, (k+1)\pi]$. Если же $M=k\pi$, то единственным решением уравнения (11.1′) будет $E=k\pi$ ($k=0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$).

Мы уже указывали, что корень уравнения (11.1) всегда может быть найден приближенно с любой степенью точности любым из многочисленных способов приближенного решения трансцендентных уравнений. Рассмотрение этих способов не входит в задачи нашей книги и может быть найдено в различных руководствах по численным методам небесной механики.

Нашей задачей является аналитическое представление величины E, удовлетворяющей уравнению Кеплера, при помощи бесконечного ряда того или иного вида.

В этом параграфе мы займемся нахождением решения уравнения Кеплера (11.1) в виде бесконечного ряда, расположенного по возрастающим целым положительным степеням эксцентриситета e, который играет в этом уравнении роль параметра.

Для этого заметим прежде всего, что при $e=0$ мы имеем очевидное решение уравнения (11.1)

$$E=M, \tag{11.5}$$

соответствующее, как известно, случаю круговой орбиты, являющемуся предельным случаем эллиптической орбиты при $e \to 0$.

Во многих случаях, с которыми приходится иметь дело астроному-теоретику, эксцентриситет орбиты имеет малое числовое значение; это наводит на мысль, что соответствующее решение уравнения Кеплера будет (при малом e) близко к решению (11.5), которое и можно рассматривать как первый член бесконечного ряда, все остальные члены которого обращаются в нуль вместе с e. Поэтому будем стараться найти такое решение уравнения Кеплера, которое обращается в M при $e=0$.

Используя формулу Маклорена, нетрудно получить ряд, удовлетворяющий уравнению Кеплера и расположенный по степеням e, и притом совершенно элементарным путем.

Однако таким способом весьма затруднительно исследовать вопрос о сходимости ряда, и мы для нахождения нужного разложения применим другой способ, основанный на методах теории функций комплексного переменного*).

---

*) См., например, М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, Физматгиз, 1958, а также А. Пуанкаре, Лекции по небесной механике, перев. с франц., «Наука», 1965.

Этот способ заключается в применении знаменитой формулы Лагранжа, дающей решение уравнения Лагранжа, которое в обычных обозначениях комплексного анализа пишется в виде

$$F(z) = z - a - \alpha f(z), \tag{11.6}$$

где z, a и параметр α могут иметь любые комплексные значения, а $f(z)$ есть заданная функция, голоморфная внутри некоторого замкнутого контура S, содержащего внутри себя точку a, и удовлетворяющая на самом контуре условию

$$\left|\frac{\alpha f(z)}{z-a}\right| < 1. \tag{11.7}$$

В анализе доказывается, что при этих условиях уравнение Лагранжа (11.6) имеет внутри контура S единственный корень, являющийся голоморфной функцией параметра α и обращающийся в a при $\alpha = 0$.

Этот корень представляется рядом (ряд Лагранжа!)

$$z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{da^{k-1}} [f^k(a)] = a + \alpha f(a) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \frac{d}{da} [f^2(a)] + \ldots, \tag{11.8}$$

абсолютно сходящимся при условии (11.7) для любого значения независимой переменной a в области, ограниченной контуром S.

Важно отметить, что при тех же условиях имеет место и более общая формула.

Пусть $\Phi(z)$ есть заданная функция комплексной переменной z, голоморфная в области, ограниченной контуром S.

Тогда имеет место следующая формула Лагранжа*):

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{da^{k-1}} [\Phi'(a) f^k(a)] =$$

$$= \Phi(a) + \alpha \Phi'(a) f(a) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} \frac{d}{da} [\Phi'(a) f^2(a)] + \ldots, \tag{11.8'}$$

представляющая разложение заданной функции от корня z уравнения (11.6), абсолютно сходящееся при выполнении неравенства (11.7) для любого a в области S.

Условие (11.7) определяет верхний предел тех значений модуля $|\alpha|$, для которых ряды (11.8) и (11.8′) остаются сходящимися.

---

*) Э. Гурса, Курс математического анализа, т. 1, § 186 и т. 2, § 302, перев. с франц., ГТТИ, 1933. В указанной книге М. А. Лаврентьева и Б. В. Шабата рассмотрена более общая формула, из которой формула Лагранжа получается как частный случай.

Действительно, из неравенства (11.7) следует, что мы должны иметь неравенство

$$|\alpha| < \left|\frac{z-a}{f(z)}\right|, \tag{11.7'}$$

справедливое в каждой точке контура S, внутри которого функция $f(z)$, по условию, голоморфна.

Рассмотрим наиболее интересный для нас частный случай, когда $f(z)$ есть целая функция, т. е. функция, голоморфная во всей комплексной плоскости переменного z.

Тогда ряд Лагранжа будет абсолютно сходящимся внутри всякого круга C с центром в точке a, на окружности которого выполняется условие (11.7), и мы можем поставить задачу об отыскании такого круга, для которого правая часть неравенства (11.7′) имеет наибольшее значение.

Действительно, обозначим расстояние от точки z до точки a через r, так что $r=|z-a|$; тогда для абсолютной сходимости ряда Лагранжа на окружности круга C должно выполняться неравенство

$$|\alpha| < \frac{r}{|f(z)|}, \tag{11.7''}$$

которое при данном r заведомо выполняется, если взять $\alpha=0$. Следовательно, так как функция $f(z)$ непрерывна, условие (11.7″) будет также выполняться при данном r, если $|\alpha|$ достаточно мало́. Изменяя теперь радиус r круга C, мы будем изменять также правую часть неравенства (11.7″), т. е. верхний предел тех значений $|\alpha|$, при которых ряд Лагранжа остается сходящимся; нам остается теперь найти такое значение r, при котором правая часть неравенства (11.7″) максимальна.

Обозначим через $M(r)$ наибольшее значение модуля $|f(z)|$ на окружности C. Тогда условие (11.7″) можно написать в виде

$$|\alpha| < \frac{r}{M(r)}, \tag{11.7'''}$$

и наша задача приводится к нахождению наибольшего значения отношения $r/M(r)$, когда r изменяется от нуля до ∞.

Это отношение равно нулю при $r=0$, так как если бы $M(r)$ стремилось к нулю вместе с r (т. е. если бы было $M(r)=rM_1(r)$), то точка $z=a$ была бы нулем функции $f(z)$ и $F(z)$ делилась бы на $z-a$ (т. е. уравнение Лагранжа имело бы корень $z=a$ при любом α).

То же отношение равно нулю и при $r=+\infty$, так как в противном случае $M(r)$, а следовательно, и $f(z)$, было бы многочленом первой степени, и уравнение (11.6) решалось бы элементарно.

Отсюда следует, что отношение $r/M(r)$ имеет максимум при некотором значении r^* радиуса r (рис. 62).

Обозначим этот максимум через α^*, так что

$$R^* = \frac{r^*}{M(r^*)}. \tag{11.9}$$

Тогда из предыдущего рассуждения следует, что уравнение (11.6) имеет один и только один корень, модуль которого меньше r^*, если

$$|\alpha| < \alpha^* = R^*, \tag{11.9'}$$

и который стремится к a при $\alpha \to 0$.

Следовательно, разложения (11.8) и (11.8′) имеют место и сходятся абсолютно, если $|\alpha|$ не превосходит α^* и функция $\Phi(z)$ голоморфна по крайней мере внутри круга C^* с центром в точке a и радиуса r^*.

Примечание. В § 4 гл. IV мы использовали другую форму формулы Лагранжа (формула (4.33)). Формула (11.8′) получается из (4.33), если положить

$$\Pi(z) = \Phi(z) \cdot F'(z)$$

и выполнить некоторые преобразования.

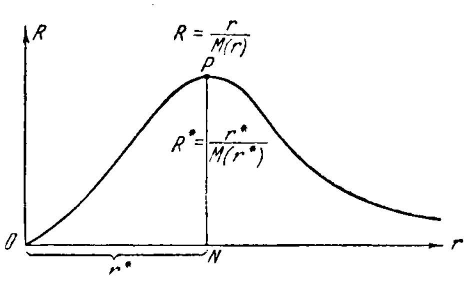


Рис. 62.

2. Рассмотрим теперь частный случай уравнения Лагранжа, когда

$$f(z) = \sin z,$$

то есть когда уравнение (11.6) есть уравнение Кеплера

$$z - a - \alpha \sin z = 0, \tag{11.10}$$

написанное в других обозначениях.

Общая формула Лагранжа (11.8′) напишется в этом случае следующим образом:

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{da^{k-1}} [\Phi'(a) \sin^k a], \tag{11.11}$$

где $\Phi(z)$ есть произвольно заданная голоморфная функция от переменной z, и нам остается только найти верхний предел значений $|\alpha|$, при которых ряд (11.11) остается абсолютно сходящимся.

Так как в нашем случае $f(z)$ есть *целая функция*, то мы можем применить для нахождения α^* формулу (11.9), для чего нужно сначала найти $M(r)$, а потом решить элементарную задачу на нахождение максимума функции.

Возьмем в комплексной плоскости какую-нибудь систему декартовых координат, причем ось абсцисс проведем через точку a.

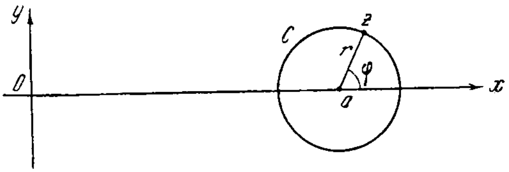


Рис. 63.

Тогда координаты точки z, лежащей на окружности C радиуса r с центром в точке a (рис. 63), будут

$$x=a+r\cos\varphi,\quad y=r\sin\varphi,$$

где φ есть угол, образуемый радиусом-вектором точки z с положительным направлением оси абсцисс.

На окружности C будем иметь

$$z=x+iy=a+r\cos\varphi+ir\sin\varphi\qquad (i=\sqrt{-1})$$

и

$$|\sin z|^2=|\sin(a+r\cos\varphi+ir\sin\varphi)|^2=$$
$$=\sin(a+r\cos\varphi+ir\sin\varphi)\cdot\sin(a+r\cos\varphi-ir\sin\varphi)-=$$
$$=\cos^2(ir\sin\varphi)-\cos^2(a+r\cos\varphi),$$

откуда, обозначая временно буквой e неперово число, т. е $e=2{,}7182\ldots$, имеем

$$|\sin z|=\sqrt{\left(\frac{e^{r\sin\varphi}+e^{-r\sin\varphi}}{2}\right)^2-\cos^2(a+r\cos\varphi)}\,.$$

Поэтому, если положить

$$M(r)=\frac{e^r+e^{-r}}{2},$$

то заведомо будем иметь во всех точках круга

$$|\sin z|\leqslant M(r).$$

Теперь нужно найти максимум функции

$$R(r)=\frac{r}{M(r)}=\frac{2r}{e^r+e^{-r}}.\qquad (11.12)$$

Этот максимум легко найти по общим правилам. Приравнивая производную

$$R'(r) = -2\frac{r(e^r - e^{-r}) - (e^r + e^{-r})}{(e^r + e^{-r})^2} = -\frac{2T(r)}{(e^r + e^{-r})^2}$$

нулю, получаем уравнение для определения критического значения переменной r в виде

$$T(r) = (r-1)e^r - (r+1)e^{-r} = 0, \qquad (11.12')$$

которое имеет единственный действительный корень, заключающийся в промежутке между единицей и двойкой.

В самом деле,

$$T'(r) = r(e^r + e^{-r}),$$

т. е. всегда положительна. Поэтому $T(r)$ есть монотонно возрастающая функция от r. Но

$$T(1) = -2e^{-1} < 0,$$
$$T(2) = e^2 - 3e^{-2} > 0,$$

а, следовательно, $T(r)$ обращается в нуль при некотором значении r, лежащем между 1 и 2.

Приближенное решение уравнения (11.12) дает его корень

$$r^* = 1{,}199678640257734\ldots$$

Это значение действительно соответствует максимуму функции $R(r)$, поскольку, как легко проверить,

$$R''(r^*) = -R(r^*) < 0.$$

Теперь формула (11.12) дает α^*:

$$\alpha^* = R(r^*) = \frac{2r^*}{e^{r^*} + e^{-r^*}}.$$

Подставляя сюда вместо r^* его числовое значение, найдем

$$\alpha^* = 0{,}6627434193492\ldots \qquad (11.13)$$

Таким образом, ряд (11.11) сходится абсолютно при любом комплексном значении a, если параметр α удовлетворяет неравенству

$$|\alpha| < \alpha^*.$$

В интересующем нас случае уравнения Кеплера (11.1) параметром служит эксцентриситет орбиты e, который имеет действительное значение, заключающееся между нулем и единицей, а формула Лагранжа напишется в обычных астрономических обозначениях следующим образом:

$$\Phi(E)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^k}{k!}\,\frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}}\,[\Phi'(M)\sin^k M], \qquad (11.14)$$

где $\Phi(E)$ обозначает заданную функцию от эксцентрической аномалии E.

Таким образом, формула (11.14) дает разложение любой целой функции от эксцентрической аномалии в ряд, расположенный по целым, возрастающим степеням эксцентриситета e, абсолютно сходящийся при любом значении средней аномалии M, если эксцентриситет орбиты удовлетворяет условию

$$e<\bar{e}=0{,}6627434193492\ldots \qquad (11.15)$$

Величина $\bar{e}$ впервые была найдена иным путем при помощи весьма искусного расчета Лапласом, а поэтому число $\bar{e}$, определенное в (11.15), называется пределом Лапласа для сходимости рядов эллиптического движения, или, более кратко, пределом Лапласа.

В большинстве случаев астрономической практики эксцентриситет орбиты интересующего нас небесного тела (естественного или искусственного, безразлично) не превышает предела Лапласа и даже значительно меньше его, так что ряды типа (11.14) обычно сходятся достаточно быстро, и бывает достаточно взять несколько первых членов этих рядов, чтобы получить их суммы с весьма высокой точностью.

Если $\bar{e}\leqslant e<1$, то ряды типа (11.14) могут оказаться расходящимися для некоторых значений M и тогда они, конечно, неприменимы для определения функции $\Phi(E)$.

3. Применим ряд Лагранжа (11.14) для разложения некоторых важных величин невозмущенного эллиптического движения.

Прежде всего рассмотрим случай, когда $\Phi(E)=E$. Тогда $\Phi(M)=M$, $\Phi'(M)=1$, и мы находим разложение по степеням эксцентриситета e самой эксцентрической аномалии в следующем виде:

$$E=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^k}{k!}\,\frac{d^{k-1}(\sin^k M)}{dM^{k-1}}, \qquad (11.16)$$

что можно записать также более удобно следующим образом:

$$E=\sum_{k=0}^{\infty}e^k E_k(M). \qquad (11.16')$$

где положено

$$E_k(M) = \frac{1}{k!} \frac{d^{k-1}(\sin^k M)}{dM^{k-1}}. \tag{11.16''}$$

Формула (11.16) дает аналитическое решение уравнения Кеплера, конечно, при условии, что эксцентриситет орбиты не превышает предела Лапласа.

Вычисляя по формуле (11.16″) первые коэффициенты ряда (11.16′), мы найдем следующее выражение для эксцентрической аномалии с точностью до квадрата эксцентриситета:

$$E = M + e\sin M + \frac{1}{2}e^2\sin 2M + \ldots \tag{11.16'''}$$

Положим теперь в формуле (11.14) $\Phi(E) = \cos E$, так что $\Phi'(M) = -\sin M$; тогда имеем следующее разложение:

$$\cos E = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k}{k!} \frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}} [-\sin^{k+1} M], \tag{11.17}$$

которое также запишем более кратко в виде

$$\cos E = \sum_{k=0}^{\infty} e^k C_k(M), \tag{11.17'}$$

где положено

$$C_k(M) = \frac{1}{k!} \frac{d^{k-1}}{dM^{k-1}} [-\sin^{k+1} M]; \tag{11.17''}$$

приближенное выражение $\cos E$ с точностью до квадрата эксцентриситета имеет вид

$$\cos E = \cos M + \frac{e}{2}(\cos 2M - 1) + \frac{3e^2}{8}(\cos 3M - \cos M) + \ldots \tag{11.17'''}$$

Величины $E_k(M)$ и $C_k(M)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, являющиеся тригонометрическими многочленами относительно синусов и косинусов средней аномалии M, суть периодические функции от M с общим периодом 2π, общие выражения для которых будут приведены несколько ниже.

Теперь нетрудно получить разложения по степеням e и для других величин эллиптического движения, причем оказывается, что коэффициенты этих разложений весьма просто выражаются через $E_k(M)$ и $C_k(M)$, которые можно поэтому рассматривать как основные тригонометрические многочлены в теории эллиптического движения.

В самом деле, из основного уравнения Кеплера (11.1) мы имеем прежде всего

$$\sin E = \frac{1}{e}(E - M),$$

откуда с помощью формул (11.16′) получим *)

$$\sin E = \sum_{k=0}^{\infty} e^k S_k(M), \quad S_k(M) = E_{k+1}(M). \tag{11.18}$$

Далее, из уравнения эллиптической орбиты (10.28) имеем

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos E,$$

откуда с помощью формулы (11.17′) находим следующее разложение:

$$\frac{r}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k R_k(M), \tag{11.19}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$R_0(M) = 1, \qquad R_k(M) = -C_{k-1}(M) \qquad (k \neq 0). \tag{11.19′}$$

Затем формулы (10.34) дают выражения для орбитальных координат ξ и η:

$$\frac{\xi}{a} = -e + \cos E, \quad \frac{\eta}{a} = \sqrt{1-e^2}\sin E.$$

Первая из этих формул дает разложение

$$\frac{\xi}{a} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \Xi_k(M), \tag{11.20}$$

с коэффициентами, определяемыми формулами

$$\Xi_1(M) = C_1(M) - 1, \quad \Xi_k(M) = C_k(M) \qquad (k \neq 1). \tag{11.20′}$$

Переходя ко второй орбитальной координате, заметим сначала, что мы можем написать следующее разложение:

$$\frac{\eta}{a} = \sqrt{1-e^2}\sum_{k=0}^{\infty} e^k S_k(M). \tag{11.21}$$

Правую часть этого равенства нетрудно представить в виде ряда, расположенного по степеням e. Действительно, общий

---

*) При вычислении $E_0(M)$ и $C_0(M)$ нужно учесть, что производная —1-го порядка есть неопределенный интеграл.

ряд Ньютона дает разложение

$$\sqrt{1-e^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k e^k, \tag{11.21'}$$

числовые коэффициенты которого находятся по формулам

$$\alpha_{2k+1}=0, \quad \alpha_0=1, \quad \alpha_{2k}=-\frac{(2k-3)!!}{(2k)!!}$$

и который сходится абсолютно для всякого значения e, меньшего единицы. Так как ряд (11.18) также сходится абсолютно в промежутке $0 \leqslant e < \bar{e}$, то его можно умножить по обычным правилам на ряд (11.21′), в результате чего получим ряд, сходящийся абсолютно в промежутке $0 \leqslant e \leqslant \bar{e}$:

$$\frac{\eta}{a}=\sum_{k=0}^{\infty} e^k \mathrm{H}_k(M), \tag{11.21''}$$

где

$$\mathrm{H}_k(M)=\sum_{s=0}^{k}\alpha_s S_{k-s}(M) \tag{11.21''}$$

также, очевидно, суть некоторые тригонометрические многочлены.

Зная разложения орбитальных координат, получим по формулам (10.39) разложения пространственных координат в виде

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}&=\sum_{k=0}^{\infty} e^k X_k(M),\\ \frac{y}{a}&=\sum_{k=0}^{\infty} e^k Y_k(M),\\ \frac{z}{a}&=\sum_{k=0}^{\infty} e^k Z_k(M),\end{aligned}\right\} \tag{11.22}$$

коэффициенты которых определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}X_k(M)&=\alpha_\tau \Xi_k(M)+\alpha'_\tau \mathrm{H}_k(M),\\ Y_k(M)&=\beta_\tau \Xi_k(M)+\beta'_\tau \mathrm{H}_k(M),\\ Z_k(M)&=\gamma_\tau \Xi_k(M)+\gamma'_\tau \mathrm{H}_k(M),\end{aligned}\right\} \tag{11.22'}$$

причем из предыдущего ясно, что ряды (11.22) сходятся для всякого значения M, если эксцентриситет e не превышает лапласова предела $\bar{e}$.

4. Выведем теперь разложения для скорости и ее составляющих в эллиптическом движении. Так как абсолютно

сходящийся ряд можно дифференцировать почленно, то из (11.4) и (11.16) мы получим разложение обратной величины радиуса-вектора в виде

$$\frac{a}{r}=\sum_{k=0}^{\infty} e^k \bar{R}_k(M), \tag{11.23}$$

где

$$\bar{R}_k(M)=E'_k(M), \tag{11.23'}$$

после чего из интеграла живой силы для эллиптического движения найдем разложение квадрата скорости, которое напишем в следующем виде:

$$\left(\frac{V}{na}\right)^2=\sum_{k=0}^{\infty} e^k V_k^{(2)}(M), \tag{11.24}$$

где, как легко убедиться,

$$V_0^{(2)}(M)=1, \quad V_k^{(2)}(M)=2\bar{R}_k(M) \qquad (k\neq 0). \tag{11.24'}$$

Разложения прямоугольных составляющих скорости проще всего получить дифференцированием соответствующих разложений координат. Поэтому из формул (11.20), (11.21') и (11.22) мы получим следующие разложения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\dot{\xi}}{na}&=\sum_{k=0}^{\infty} e^k \Xi'_k(M),\\ \frac{\dot{\eta}}{na}&=\sum_{k=0}^{\infty} e^k \mathrm{H}'_k(M),\end{aligned}\right\} \tag{11.25}$$

и

$$\left.\begin{aligned}\frac{\dot{x}}{na}&=\sum_{k=0}^{\infty} e^k X'_k(M),\\ \frac{\dot{y}}{na}&=\sum_{k=0}^{\infty} e^k Y'_k(M),\\ \frac{\dot{z}}{na}&=\sum_{k=0}^{\infty} e^k Z'_k(M),\end{aligned}\right\} \tag{11.25'}$$

где штрих обозначает, как и в (11.23), производную по средней аномалии M.

Разложение радиальной составляющей скорости легко найти, замечая, что

$$V_r = \dot r = na \frac{d}{dM}\left(\frac{r}{a}\right),$$

откуда с помощью формулы (11.19) получим

$$\frac{V_r}{na} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k R'_k(M). \tag{11.26}$$

Чтобы разложить «поперечную» составляющую скорости V_n, замечаем, что

$$V_n = r\dot v = \frac{\sqrt{\mu}\sqrt{p}}{r} = \frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{r}, \tag{11.26'}$$

откуда с помощью (11.21') и (11.23) находим

$$\frac{V_n}{na} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k V_k^{(n)}(M), \tag{11.26''}$$

где положено

$$V_k^{(n)}(M) = \sum_{s=0}^{k} \alpha_s \bar R_{k-s}(M). \tag{11.26'''}$$

В заключение выведем разложение истинной аномалии v. Из формулы (11.26') мы имеем

$$\dot v = \frac{V_n}{r} = \frac{a}{r} \cdot \frac{V_n}{a},$$

откуда

$$\frac{dv}{dM} = \frac{a}{r} \cdot \frac{V_n}{na} \tag{11.27}$$

Перемножая абсолютно сходящиеся (при $e < \bar e$) ряды (11.23) и (11.26), мы получим также абсолютно сходящийся (при $e < \bar e$) ряд

$$\frac{dv}{dM} = \sum_{k=0}^{\infty} e^k \bar v_k(M), \tag{11.27'}$$

коэффициенты которого определяются формулой

$$\bar v_k(M) = \sum_{s=0}^{k} \bar R_s(M) V_{k-s}^{(n)}(M). \tag{11.27''}$$

Интегрируя почленно ряд (11.27'), что допустимо в силу его абсолютной сходимости при $e < \bar e$, и имея в виду, что при $M = 0$ истинная аномалия v также равна нулю, мы получим следующее разложение:

$$v=\sum_{k=0}^{\infty} e^k \int_0^M \bar{v}_k(M)\,dM, \tag{11.28}$$

которое можно написать более кратко:

$$v=\sum_{k=0}^{\infty} e^k v_k(M), \tag{11.28'}$$

где положено

$$v_k(M)=\int_0^M \bar{v}_k(M)\,dM. \tag{11.28''}$$

Нетрудно убедиться, что $v_0(M)=M$, а поэтому из (11.28) имеем разложение разности $v-M$, называемой в астрономии уравнением центра, в виде

$$v-M=\sum_{k=1}^{\infty} e^k v_k(M), \tag{11.29}$$

откуда, с точностью до квадрата эксцентриситета, имеем

$$v-M=2e\sin M+\frac{5}{4}e^2\sin 2M+\ \ldots \tag{11.29'}$$

Таким образом, мы получили разложения по степеням эксцентриситета всех важнейших величин теории эллиптического движения и вместе с тем разрешили поставленную в начале главы задачу о представлении координат и составляющих скорости в виде явных функций времени.

Из полученных разложений можно вывести множество других. Напишем, например, разложения для направляющих косинусов радиуса-вектора в эллиптическом движении. Так как

$$\frac{x}{r}=\frac{x}{a}\cdot\frac{a}{r},\quad \frac{y}{r}=\frac{y}{a}\cdot\frac{a}{r},\quad \frac{z}{r}=\frac{z}{a}\cdot\frac{a}{r},$$

то, умножая абсолютно сходящиеся (при $e<\bar{e}$) ряды (11.22) на абсолютно сходящийся ряд (11.23), мы получим также абсолютно сходящиеся ряды (при $e<\bar{e}$)

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{r}&=\sum_{k=0}^{\infty} e^k\bar{X}_k(M),\\ \frac{y}{r}&=\sum_{k=0}^{\infty} e^k\bar{Y}_k(M),\\ \frac{z}{r}&=\sum_{k=0}^{\infty} e^k\bar{Z}_k(M),\end{aligned}\right\} \tag{11.30}$$

коэффициенты которых определяются формулами

$$\left.\begin{aligned}\bar{X}_k(M)&=\sum_{s=0}^{k}X_s(M)\,\bar{R}_{k-s}(M),\\ \bar{Y}_k(M)&=\sum_{s=0}^{k}Y_s(M)\,\bar{R}_{k-s}(M),\\ \bar{Z}_k(M)&=\sum_{s=0}^{k}Z_s(M)\,\bar{R}_{k-s}(M).\end{aligned}\right\}\qquad(11.30')$$

Умножая ряд (11.23) сам на себя, получим

$$\frac{a^2}{r^2}=\sum_{k=0}^{\infty}e^k\bar{R}_k^{(2)}(M),\qquad(11.31)$$

где

$$\bar{R}_k^{(2)}(M)=\sum_{s=0}^{k}\bar{R}_s(M)\,\bar{R}_{k-s}(M).\qquad(11.31')$$

Наконец, имея в виду, что

$$\cos v=\frac{\xi}{a}\cdot\frac{a}{r},\qquad \sin v=\frac{\eta}{a}\cdot\frac{a}{r},$$

мы получим, умножая ряды (11.20) и (11.21″) соответственно на ряд (11.23),

$$\left.\begin{aligned}\cos v&=\sum_{k=0}^{\infty}e^k\bar{C}_k(M),\\ \sin v&=\sum_{k=0}^{\infty}e^k\bar{S}_k(M),\end{aligned}\right\}\qquad(11.32)$$

где

$$\left.\begin{aligned}\bar{C}_k(M)&=\sum_{s=0}^{k}\Xi_s(M)\cdot\bar{R}_{k-s}(M),\\ \bar{S}_k(M)&=\sum_{s=0}^{k}\mathrm{H}_s(M)\cdot\bar{R}_{k-s}(M),\end{aligned}\right\}\qquad(11.32')$$

и так далее.

5. Выведем теперь общие формулы для коэффициентов $E_k(M)$ и $C_k(M)$, из которых получаются в конечном счете коэффициенты всех остальных приведенных здесь разложений.

Для этого отметим прежде всего следующую тригонометрическую формулу *) (ν — целое, положительное число):

$$\sin^{\nu}M=\frac{(-1)^m}{2^{\nu-1}}\sum_{s=0}^{m}(-1)^s\bar{C}_{\nu}^{s}\,\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,[(\nu-2s)M],\qquad(11.33)$$

---

*) См., например, И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.

где $m = E\left(\frac{\nu}{2}\right)$ есть наибольшее целое число, заключающееся в $\nu/2$, и нужно взять знак косинуса, если ν есть число четное, и знак синуса, если ν — нечетное. Числовые коэффициенты в формуле (11.33) определяются следующим образом:

$$\bar{C}_\nu^s = C_\nu^s,$$
$$\bar{C}_\nu^m = \frac{1}{2} C_\nu^m,$$

если ν четное, а C_ν^s суть обычные биномиальные коэффициенты, т. е.

$$C_\nu^s = \frac{\nu!}{s!\,(\nu - s)!}.$$

Положим в общей формуле (11.38) $\nu = k$ и продифференцируем $k - 1$ раз, что дает

$$\frac{d^{k-1} \sin^k M}{dM^{k-1}} =$$
$$= \frac{(-1)^m}{2^{k-1}} \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \bar{C}_k^s (k - 2s)^{k-1} \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \left[(k - 2s) M + (k - 1) \frac{\pi}{2}\right],$$

где через m обозначено, как и выше, наибольшее целое число, содержащееся в $k/2$ *).

Производя здесь очевидные упрощения и деля результат на $k!$, мы получим по формуле (11.16″)

$$E_k(M) = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{s=0}^{m} (-1)^s \frac{(k - 2s)^{k-1}}{s!\,(k - s)!} \sin (k - 2s) M. \quad (11.34)$$

Мы уже знаем, что

$$E_0(M) = M,$$

а из формулы (11.16″) имеем

$$E_1(M) = \sin M,$$
$$E_2(M) = \frac{1}{2} \sin 2M.$$

---

*) Заметим, что единственный член формулы (11.33), содержащий коэффициент $\bar{C}_k^m$ (для k четного), исчезает при первом же дифференцировании, а аргумент синуса или косинуса увеличивается при каждом дифференцировании на $\pi/2$.

Полагая теперь в формуле (11.34) $k=3$, 4, 5, 6, 7, 8, мы получим без труда

$$E_3(M)=\frac{1}{2^2\cdot 3!}(3^2\sin 3M-3\sin M),$$

$$E_4(M)=\frac{1}{2^3\cdot 4!}(4^3\sin 4M-4\cdot 2^3\cdot\sin 2M),$$

$$E_5(M)=\frac{1}{2^4\cdot 5!}(5^4\sin 5M-5\cdot 3^4\cdot\sin 3M+10\sin M),$$

$$E_6(M)=\frac{1}{2^5\cdot 6!}(6^5\sin 6M-6\cdot 4^5\cdot\sin 4M+15\cdot 2^5\cdot\sin 2M),$$

$$E_7(M)=\frac{1}{2^6\cdot 7!}(7^6\sin 7M-7\cdot 5^6\cdot\sin 5M+21\cdot 3^6\cdot\sin 3M-35\sin M),$$

$$E_8(M)=\frac{1}{2^7\cdot 8!}(8^7\sin 8M-8\cdot 6^7\cdot\sin 6M+\\ +28\cdot 4^7\cdot\sin 4M-56\cdot 2^7\cdot\sin 2M).$$

Положим теперь в общей формуле (11.33) $\nu=k+1$ и опять продифференцируем $k-1$ раз, что дает $\left(m=E\left(\frac{k+1}{2}\right)\right)$

$$\frac{d^{k-1}\sin^{k+1}M}{dM^{k-1}}=\\ =\frac{(-1)^m}{2^k}\sum_{s=0}^{m}(-1)^s C_{k+1}^s(k+1-2s)^{k-1}\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix}\left[(k+1-2s)M+(k-1)\frac{\pi}{2}\right],$$

а из формулы (11.17″) после упрощений получим

$$C_k(M)=\frac{1}{2^k}\sum_{s=0}^{m}(-1)^s\frac{(k+1)(k+1-2s)^{k-1}}{s!\,(k+1-s)!}\cos(k+1-2s)M. \qquad (11.34')$$

Нам уже известны первые коэффициенты $C_k(M)$, а именно:

$$C_0(M)=\cos M,$$

$$C_1(M)=\frac{1}{2}(\cos 2M-1).$$

Полагая еще в формуле (11.34′) $k=2, 3, 4, 5, 6, 7$, мы найдем

$$C_2(M)=\frac{1}{2^2\cdot 2!}(3\cos 3M-3\cos M),$$

$$C_3(M)=\frac{1}{2^3\cdot 3!}(4^2\cos 4M-4\cdot 2^2\cdot\cos 2M),$$

$$C_4(M)=\frac{1}{2^4\cdot 4!}(5^3\cos 5M-5\cdot 3^3\cdot\cos 3M+10\cos M),$$

$$C_5(M)=\frac{1}{2^5\cdot 5!}(6^4\cos 6M-6\cdot 4^4\cdot\cos 4M+60\cdot 2^4\cdot\cos 2M),$$

$$C_6(M)=\frac{1}{2^6\cdot 6!}(7^5\cos 7M-7\cdot 5^5\cdot\cos 5M+ +21\cdot 3^5\cdot\cos 3M-35\cos M),$$

$$C_7(M)=\frac{1}{2^7\cdot 7!}(8^6\cos 8M-8\cdot 6^6\cdot\cos 6M+ +28\cdot 4^6\cdot\cos 4M-56\cdot 2^6\cdot\cos 2M).$$

При помощи приведенных выражений нетрудно получить и коэффициенты всех других нужных нам разложений, формулы для которых выписаны выше.

§ 2. Разложения координат эллиптического движения в ряды Фурье

1. Разложения координат эллиптического движения по возрастающим степеням эксцентриситета орбиты, полученные нами в предыдущем параграфе, сходятся и притом абсолютно для всех действительных значений средней аномалии M, если только $e<\bar{e}=0{,}6627\ldots$

Мы уже указывали, что если эксцентриситет орбиты превышает предел Лапласа, то ряды не будут сходящимися для всех значений M в промежутке от нуля до 360°, а если $e=1$, то ряды вообще расходятся. Таким образом, полученные ряды не могут представлять решение уравнений невозмущенного движения (в случае $h<0$) для всех значений эксцентриситета, заключенных между нулем и единицей. Поэтому, желая получить формулы, дающие решение дифференциальных уравнений невозмущенного эллиптического движения и пригодные для всех значений эксцентриситета в промежутке от нуля до единицы, мы должны вывести какие-то другие ряды, которые были бы сходящимися для всех действительных значений M и для всякого e в промежутке от нуля до единицы.

Такого рода ряды могут быть получены при помощи известной теоремы Дирихле*), дающей необходимые и достаточные

---

*) См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 3.

условия разложимости функции $f(z)$, заданной в промежутке $(0, 2\pi)$ (или в промежутке $(-\pi, +\pi)$), в ряд Фурье, расположенный по синусам и косинусам кратных z.

Ряд Фурье для функции $f(z)$ имеет вид

$$f(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kz+b_k\sin kz), \tag{11.35}$$

коэффициенты которого определяются общими формулами Фурье:

$$\left.\begin{aligned} a_k&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\cos kz\,dz,\\ b_k&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(z)\sin kz\,dz. \end{aligned}\right\} \tag{11.35'}$$

В силу теоремы Дирихле разложение (11.35) единственно и ряд сходится (но не абсолютно!) для всякого значения z в промежутке $(0, 2\pi)$ и представляет в этом промежутке заданную функцию $f(z)$.

Если, кроме того, функция $f(z)$ есть периодическая функция переменной z с периодом 2π, то ряд (11.35) сходится для всякого действительного значения z и представляет функцию $f(z)$ на всей действительной оси.

Полезно заметить еще, что если функция $f(z)$ — четная, т. е. если мы имеем

$$f(-z)=f(z),$$

то формула (11.35) несколько упрощается, так как все коэффициенты b_k в этом случае равны нулю. Таким образом, для четной функции мы имеем следующее разложение:

$$f(z)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kz, \tag{11.36}$$

коэффициенты которого определяются формулой

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(z)\cos kz\,dz. \tag{11.36'}$$

Если же функция $f(z)$ нечетная, т. е. если мы имеем

$$f(-z)=-f(z),$$

то равны нулю все коэффициенты a_k и разложение принимает вид

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kz, \tag{11.37}$$

где

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(z)\sin kz\,dz. \tag{11.37'}$$

Эти общие формулы мы можем применить теперь для разложения координат эллиптического движения в ряды, сходящиеся для всех значений средней аномалии и при всяком значении e в промежутке от нуля до единицы.

2. Так же как и в предыдущем параграфе, основными разложениями здесь будут разложения самой эксцентрической аномалии E и ее косинуса.

Напишем уравнение Кеплера в виде

$$E-M=e\sin E, \tag{11.38}$$

откуда видно, что разность $E-M$, рассматриваемая как функция от M, удовлетворяет условиям теоремы Дирихле при любом значении эксцентриситета, заключенном в промежутке $0\leqslant e\leqslant 1$, и есть нечетная периодическая функция от M с периодом 2π.

В самом деле, когда M пробегает все значения от нуля до 2π, E также пробегает все значения от нуля до 2π и, следовательно, $e\sin E$ есть периодическая функция не только от E, но и от M. Кроме того, при изменении знака M, E также меняет знак, а поэтому $E-M$ есть нечетная функция от M.

Поэтому функция $E-M$ может быть представлена рядом Фурье, расположенным только по синусам кратных M, и мы можем написать

$$E-M=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kM, \tag{11.39}$$

причем этот ряд заведомо будет сходящимся (но не абсолютно) для всех значений эксцентриситета, удовлетворяющих условию

$$0\leqslant e\leqslant 1.$$

Займемся определением коэффициентов b_k ряда (11.39). По общей формуле Фурье (11.37') мы имеем

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(E-M)\sin kM\,dM. \tag{11.40}$$

Интегрирование по M в формуле (11.40) удобно заменить интегрированием по E, для чего достаточно применить один раз формулу интегрирования по частям, что дает

$$\frac{k\pi}{2} b_k = -\Big|_0^\pi (E-M)\cos kM + \int_0^\pi (dE - dM)\cos kM,$$

но $E-M$ равно нулю при $M=0$ и $M=\pi$, и мы имеем

$$\frac{k\pi}{2} b_k = \int_0^\pi \cos kM \cdot dE - \int_0^\pi \cos kM \cdot dM = \int_0^\pi \cos kM \cdot dE,$$

а заменяя здесь M его значением из уравнения Кеплера, мы получим

$$\frac{k\pi}{2} b_k = \int_0^\pi \cos(kE - ke\sin E)\, dE.$$

Полагая еще для сокращения $ke = x$, мы найдем следующую формулу:

$$b_k = \frac{2}{k\pi}\int_0^\pi \cos(kE - x\sin E)\, dE, \tag{11.40'}$$

которая показывает, что всякий коэффициент b_k есть некоторая функция величины x, которую мы будем рассматривать как вспомогательный параметр.

Введем теперь в рассмотрение следующую функцию от параметра x, считая, что этот параметр может принимать любые значения, как вещественные, так и комплексные:

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(kE - x\sin E)\, dE, \tag{11.41}$$

называемую в математике функцией Бесселя k-го порядка.

Тогда

$$b_k = \frac{2}{k} I_k(x) = \frac{2}{k} I_k(ke), \tag{11.42}$$

а формула (11.39) может быть написана в следующем виде:

$$E - M = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_k(ke)}{k}\sin kM. \tag{11.43}$$

Таким образом, решение уравнения Кеплера приводится к вычислению функций Бесселя, основные свойства которых мы рассмотрим несколько ниже.

Рассмотрим теперь разложение в ряд Фурье косинуса эксцентрической аномалии.

Так как $\cos E$ есть, очевидно, периодическая четная функция от средней аномалии M, удовлетворяющая в промежутке $(0, 2\pi)$ условиям Дирихле, то мы можем написать следующее разложение:

$$\cos E = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kM, \tag{11.44}$$

которое заведомо будет сходящимся (также не абсолютно!) при всех действительных значениях M и для всякого значения e в промежутке (0, 1).

Коэффициенты ряда (11.44) в силу общей формулы (11.36′) определятся следующей формулой:

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos E \cos kM \, dM. \tag{11.45}$$

Рассмотрим сначала коэффициент a_0, т. е. свободный член ряда (11.44). Так как из уравнения Кеплера следует, что

$$dM = (1 - e\cos E)\, dE,$$

то из формулы (11.45) выводим

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos E (1 - e\cos E)\, dE = -e.$$

Переходя теперь к случаю, когда $k \neq 0$, применим к интегралу (11.45) формулу интегрирования по частям, что дает

$$a_k = -\frac{2}{\pi k} \Big| \cos E \sin kM \Big|_0^{\pi} + \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin kM \cdot \sin E \, dE =$$
$$= \frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin (kE - x \sin E) \sin E \, dE,$$

а заменяя здесь произведение синусов полуразностью косинусов, имеем

$$a_k = \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos [(k-1) E - x \sin E]\, dE -$$
$$- \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos [(k+1) E - x \sin E]\, dE, \tag{11.45′}$$

что с помощью формулы (11.41) может быть записано еще в виде

$$a_k = \frac{1}{k}\left[I_{k-1}(ke) - I_{k+1}(ke)\right]. \tag{11.45''}$$

Теперь разложение для $\cos E$ представится в виде

$$\cos E = -\frac{e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{k-1}(ke) - I_{k+1}(ke)}{k} \cos kM. \tag{11.46}$$

Имея разложения (11.43) и (11.46), можно получить уже без всяких вычислений все основные разложения в эллиптическом движении.

Действительно, формула (10.28) дает сразу разложение в ряд Фурье радиуса-вектора эллиптической орбиты в виде

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} + e \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{k+1}(ke) - I_{k-1}(ke)}{k} \cos kM, \tag{11.47}$$

а формулы (10.34) позволяют написать разложения для орбитальных координат

$$\left.\begin{aligned} \frac{\xi}{a} &= \frac{e}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_{k-1}(ke) - I_{k+1}(ke)}{k} \cos kM, \\ \frac{\eta}{a} &= \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_k(ke)}{k} \sin kM. \end{aligned}\right\} \tag{11.48}$$

Наконец, формулы (10.39) позволяют составить разложения для пространственных координат. Эти разложения мы напишем следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{a} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_x^{(k)} \cos kM + B_x^{(k)} \sin kM\right), \\ \frac{y}{a} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_y^{(k)} \cos kM + B_y^{(k)} \sin kM\right), \\ \frac{z}{a} &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(A_z^{(k)} \cos kM + B_z^{(k)} \sin kM\right), \end{aligned}\right\} \tag{11.49}$$

коэффициенты которых определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} A_x^{(k)} &= \alpha_\tau A_\xi^{(k)}, & B_x^{(k)} &= \alpha'_\tau B_\eta^{(k)}, \\ A_y^{(k)} &= \beta_\tau A_\xi^{(k)}, & B_y^{(k)} &= \beta'_\tau B_\eta^{(k)}, \\ A_z^{(k)} &= \gamma_\tau A_\xi^{(k)}, & B_z^{(k)} &= \gamma'_\tau B_\eta^{(k)}, \end{aligned}\right\} \tag{11.49'}$$

где положено

$$\left.\begin{aligned} A_\xi^{(0)} &= \frac{e}{2}, & A_\xi^{(k)} &= \frac{I_{k-1}(ke) - I_{k+1}(ke)}{k} & (k \neq 0), \\ B_\eta^{(0)} &= 0, & B_\eta^{(k)} &= \frac{2\sqrt{1-e^2}}{e}\,\frac{I_k(ke)}{k} & (k \neq 0). \end{aligned}\right\} \qquad (11.49'')$$

3. Чтобы получить разложения в ряд Фурье скорости и ее проекций, отметим прежде всего, что из формул (11.4), (11.43) мы имеем

$$\frac{a}{r} = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} I_k(ke)\cos kM, \qquad (11.50)$$

что дает также разложение квадрата скорости

$$\left(\frac{V}{na}\right)^2 = 1 + 4\sum_{k=1}^{\infty} I_k(ke)\cos kM. \qquad (11.51)$$

Проекции скорости на орбитальные и пространственные оси координат найдем непосредственным дифференцированием формул (11.48) и (11.49), так что можем написать:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\dot\xi}{na} &= -\sum_{k=1}^{\infty} kA_\xi^{(k)}\sin kM, \\ \frac{\dot\eta}{na} &= \sum_{k=1}^{\infty} kB_\eta^{(k)}\cos kM, \end{aligned}\right\} \qquad (11.51')$$

и, соответственно

$$\left.\begin{aligned} \frac{\dot x}{na} &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(kB_x^{(k)}\cos kM - kA_x^{(k)}\sin kM\right), \\ \frac{\dot y}{na} &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(kB_y^{(k)}\cos kM - kA_y^{(k)}\sin kM\right), \\ \frac{\dot z}{na} &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(kB_z^{(k)}\cos kM - kA_z^{(k)}\sin kM\right). \end{aligned}\right\} \qquad (11.51'')$$

Так же получаем разложения радиальной и поперечной скоростей V_r и V_n, пользуясь формулами

$$\frac{V_r}{na} = \frac{d}{dM}\left(\frac{r}{a}\right),$$

$$\frac{V_n}{na} = \sqrt{1-e^2}\,\frac{a}{r},$$

из которых с помощью формул (11.47) и (11.50) находим

$$\left.\begin{aligned} \frac{V_r}{na} &= \sum_{k=1}^{\infty} e\,[I_{k-1}(ke) - I_{k+1}(ke)] \sin kM, \\ \frac{V_n}{na} &= \sqrt{1-e^2}\left\{1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} I_k(ke)\cos kM\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (11.51''')$$

Остается получить разложение истинной аномалии v. Для этой цели мы не можем воспользоваться формулой (11.27), как в предыдущем разделе, так как эта формула содержит произведение двух рядов. Однако ряды Фурье, которые мы получили в этом разделе, не являются абсолютно сходящимися и поэтому перемножать их непосредственно мы не имеем права. Следовательно, здесь мы должны применить другой прием. Из формул (11.26′) и (11.27) мы имеем

$$\frac{dv}{dM} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{(1 - e\cos E)^2}. \qquad (11.52)$$

Правая часть последнего равенства есть четная периодическая функция от E, а следовательно, является также четной периодической функцией от M. Эта функция удовлетворяет условиям Дирихле, если $e \neq 1$, а поэтому мы можем разложить ее в ряд Фурье по косинусам кратных M.

Это разложение напишем следующим образом:

$$\frac{dv}{dM} = \frac{1}{2} g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos kM, \qquad (11.53)$$

где коэффициенты определяются формулами

$$g_k = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos kM\, dM}{(1 - e\cos E)^2}, \qquad (11.54)$$

или (если принять за переменную интегрирования E вместо средней аномалии M)

$$g_k = \frac{2\sqrt{1-e^2}}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(kE - x\sin E)\, dE}{1 - e\cos E}. \qquad (11.54')$$

Интегрируя теперь равенство (11.53), мы имеем

$$v = \frac{g_0}{2} M + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k}{k} \sin kM. \qquad (11.55)$$

Займемся вычислением коэффициентов g_k. Прежде всего найдем коэффициент g_0. Общая формула (11.54) дает

$$g_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sqrt{1-e^2}\,dE}{1-e\cos E},$$

откуда, переходя при помощи подстановки (10.20) к переменной интегрирования v вместо E, получим

$$g_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}dv=2,$$

и разложение (11.55) напишется в виде

$$v-M=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_k}{k}\sin kM, \qquad (11.55')$$

т. е. мы получили разложение в ряд Фурье уравнения центра $v-M$.

Остальные коэффициенты могут быть выражены через функции Бесселя. Действительно, разлагая функцию $(1-e\cos E)^{-1}$ в абсолютно сходящийся при $e<1$ ряд

$$(1-e\cos E)^{-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}e^{\nu}\cos^{\nu}E,$$

мы получим из (11.54′) следующую формулу:

$$g_k=2\sqrt{1-e^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}g_k^{(\nu)}e^{\nu}, \qquad (11.56)$$

где

$$g_k^{(\nu)}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos^{\nu}E\cdot\cos(kE-x\sin E)\,dE. \qquad (11.56')$$

Но для степени косинуса имеем формулу, совершенно подобную формуле (11.33) для степени синуса $\left(m=E\left(\frac{\nu}{2}\right)\right)$:

$$\cos^{\nu}E=\frac{1}{2^{\nu-1}}\sum_{s=0}^{m}\overline{C}_{\nu}^{s}\cos(\nu-2s)E, \qquad (11.57)$$

с такими же коэффициентами*), вследствие чего формула (11.56′) напишется следующим образом:

$$g_k^{(\nu)} = \frac{1}{2^{\nu-1}} \sum_{s=0}^{m} \overline{C}_\nu^s \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(kE - x\sin E)\cos(\nu - 2s)E\,dE =$$

$$= \frac{1}{2^\nu} \sum_{s=0}^{m} \overline{C}_\nu^s \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos[(k + \nu - 2s)E - x\sin E]\,dE + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos[(k - \nu + 2s)E - x\sin E]\,dE \right\},$$

откуда в силу определения функций Бесселя (11.41) имеем окончательно

$$g_k^{(\nu)} = \frac{1}{2^\nu} \sum_{s=0}^{m} \overline{C}_\nu^s [J_{k+\nu-2s}(ke) + J_{k-\nu+2s}(ke)]. \qquad (11.58)$$

4. Выведем дополнительно еще некоторые полезные разложения теории невозмущенного эллиптического движения.

Рассмотрим функцию $\cos mE$, где m — целое число (положительное). Эта величина является, очевидно, четной периодической функции от средней аномалии M, удовлетворяющей в промежутке $(0, 2\pi)$ условиям Дирихле и разложимой, следовательно, в ряд Фурье, расположенный по косинусам кратных M.

Поэтому мы будем иметь следующее разложение:

$$\cos mE = \frac{1}{2} a_0^{(m)} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(m)} \cos kM, \qquad (11.59)$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$a_k^{(m)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos mE \cos kM\,dM \qquad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (11.59')$$

Вычислим сначала свободный член этого разложения $\frac{1}{2} a_0^{(m)}$. Полагая в (11.59′) $k = 0$ и делая подстановку

$$dM = (1 - e\cos E)\,dE,$$

---

*) См. сноску на стр. 541.

мы находим

$$a_0^{(m)} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos mE\,(1 - e\cos E)\,dE =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos mE\,dE - \frac{2e}{\pi}\int_0^\pi \cos mE\cos E\,dE.$$

Если $m > 1$, то каждый из этих интегралов равен нулю и поэтому мы имеем

$$a_0^{(m)} = 0 \qquad (m = 2,\ 3,\ \ldots).$$

Если $m > 1$, то, как легко видеть,

$$a_0^{(1)} = -e.$$

Найдем теперь остальные коэффициенты. Считая теперь $k \neq 0$ и применяя формулу интегрирования по частям в (11.59′), мы имеем

$$a_k^{(m)} = \frac{2}{\pi}\left|\frac{\sin kM}{k}\cos mE\right|_0^\pi - \frac{2}{\pi k}\int_0^\pi \sin kM\,\frac{d\cos mE}{dM}\,dM =$$

$$= -\frac{2}{\pi k}\int_0^\pi \sin kM\,\frac{d\cos mE}{dE}\,dE = \frac{2m}{\pi k}\int_0^\pi \sin kM\sin mE\,dE.$$

Заменяя здесь M его значением из уравнения Кеплера и разлагая произведение синусов, мы находим

$$a_k^{(m)} = \frac{2m}{\pi k}\int_0^\pi \sin mE\sin(kE - x\sin E)\,dE =$$

$$= \frac{m}{\pi k}\int_0^\pi \cos\left[(k-m)E - x\sin E\right]dE -$$

$$- \frac{m}{\pi k}\int_0^\pi \cos\left[(k+m)E - x\sin E\right]dE,$$

откуда при помощи формулы (11.41) получим окончательное выражение коэффициентов ряда (11.59) для $k > 0$:

$$a_k^{(m)} = \frac{m}{k}\left[I_{k-m}(ke) - I_{k+m}(ke)\right]. \qquad (11.59'')$$

Рассматривая теперь функцию $\sin mE$ и замечая, что она является нечетной периодической функцией от средней аномалии M, мы можем написать следующее разложение:

$$\sin mE = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^{(m)} \sin kM, \tag{11.60}$$

коэффициенты которого определяются формулами

$$b_k^{(m)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin mE \sin kM \, dM. \tag{11.60'}$$

Производя здесь такое же вычисление, как и выше, мы представим эти коэффициенты формулой

$$b_k^{(m)} = \frac{m}{k} \left[I_{k-m}(ke) + I_{k+m}(ke) \right]. \tag{11.60''}$$

Полученные формулы в свою очередь позволяют находить множество других разложений. Ограничимся для примера нахождением разложения квадрата радиуса-вектора в эллиптическом движении.

Так как

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = (1 - e\cos E)^2 = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e\cos E + \frac{e^2}{2}\cos 2E, \tag{11.61}$$

то нужное разложение получится просто заменой в (11.61) $\cos E$ его разложением (11.46) и $\cos 2E$ заменой его разложением, выводимым из (11.59) и (11.59′):

$$\cos 2E = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k} \left[I_{k-2}(ke) - I_{k+2}(ke) \right].$$

В результате указанных подстановок и упрощений найдем

$$\left(\frac{r}{a}\right)^2 = 1 + \frac{3}{2} e^2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2} I_k(ke) \cos kM. \tag{11.62}$$

§ 3. Основные свойства функций Бесселя

1. Рассмотрим теперь некоторые основные свойства функций Бесселя,-определенных формулой (11.41), которую мы напишем, меняя обозначение независимой переменной, в виде

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(kt - x\sin t)\, dt. \tag{11.63}$$

Из этой общей формулы, где под x будем подразумевать любое вещественное число, имеем прежде всего

$$|I_k(x)| \leqslant 1. \qquad (11.63')$$

Теперь покажем, что величина $I_k(x)$ может рассматриваться как коэффициент разложения некоторой функции по степеням независимой переменной, которую обозначим через z. Напишем для этого формулу (11.63) в таком виде:

$$I_k(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos kt \cos(x \sin t)\, dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin kt \sin(x \sin t)\, dt,$$

откуда, полагая для сокращения

$$\left.\begin{aligned} \alpha_k(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos kt \cos(x \sin t)\, dt, \\ \beta_k(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin kt \sin(x \sin t)\, dt, \end{aligned}\right\} \qquad (11.63'')$$

имеем также

$$I_k(x) = \frac{1}{2}[\alpha_k(x) + \beta_k(x)]. \qquad (11.63''')$$

Введем теперь новую переменную, полагая

$$e^{it} = z = \cos t + i \sin t, \qquad (11.64)$$

где e опять обозначает здесь неперово число, т. е. $e = 2{,}7182\ldots$, а $i = \sqrt{-1}$.

Тогда

$$\sin t = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i},$$

и, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} \cos(x \sin t) &= \cos\left[\frac{x\left(z - \frac{1}{z}\right)}{2i}\right] = \frac{e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} + e^{-\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}}{2}, \\ \sin(x \sin t) &= \sin\left[\frac{x\left(z - \frac{1}{z}\right)}{2i}\right] = \frac{e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)} - e^{-\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}}{2i}, \end{aligned}\right\} \qquad (11.65)$$

откуда

$$\cos(x \sin t) + i \sin(x \sin t) = e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}. \qquad (11.65')$$

Положим теперь

$$\Phi(z,\ x)=e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}, \tag{11.66}$$

и будем рассматривать z как независимую переменную, а x — как произвольный вещественный параметр.

Функция $\Phi(z,\ x)$ легко может быть разложена в ряд, расположенный по целым степеням переменной z.

Действительно, мы имеем известные разложения

$$e^{\frac{xz}{2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{k!}z^k,\qquad e^{-\frac{x}{2z}}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^k}{k!}\cdot z^{-k},$$

абсолютно сходящиеся для всех значений z и x.

Перемножая эти два абсолютно сходящихся ряда, мы получим ряд, также абсолютно сходящийся при всех значениях z и x; напишем его в виде ряда, расположенного по степеням z следующим образом:

$$\Phi(z,\ x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\Phi_k(x)\cdot z^k. \tag{11.66'}$$

Коэффициенты ряда (11.66′), как нетрудно проверить, определяются следующими формулами:

$$\Phi_{-k}(x)=(-1)^k\Phi_k(x) \tag{11.66''}$$

и

$$\Phi_k(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!\,(s+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2s}, \tag{11.66'''}$$

причем очевидно, что ряд (11.66‴) сходится абсолютно при всех значениях параметра x.

Теперь легко найти также $\alpha_k(x)$ и $\beta_k(x)$. Из формулы (11.65′), имея в виду (11.66″), находим

$$\cos(x\sin t)+i\sin(x\sin t)=\sum_{k=0}^{\infty}z^k\Phi_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k z^{-k}\Phi_k(x),$$

но

$$z^k=e^{ikt}=\cos kt+i\sin kt,$$
$$z^{-k}=e^{-ikt}=\cos kt-i\sin kt,$$

так что получаем

$$\cos(x\sin t)+i\sin(x\sin t)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}[1+(-1)^k]\,\Phi_k(x)\cos kt+i\sum_{k=0}^{\infty}[1-(-1)^k]\,\Phi_k(t)\sin kt,$$

откуда, приравнивая действительные и мнимые части, имеем

$$\left.\begin{aligned}\cos(x\sin t) &= \sum_{k=0}^{\infty}[1+(-1)^k]\,\Phi_k(x)\cos kt,\\ \sin(x\sin t) &= \sum_{k=0}^{\infty}[1-(-1)^k]\,\Phi_k(x)\sin kt.\end{aligned}\right\} \qquad (11.67)$$

Таким образом, мы получили окольным путем разложения функций $\cos(x\sin t)$ и $\sin(x\sin t)$ в ряды Фурье.

Но, с другой стороны, формулы (11.63″) дают выражения для коэффициентов Фурье этих функций, а так как последние заведомо удовлетворяют условиям Дирихле в промежутке $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, то выражения (11.63″) должны быть тождественны с коэффициентами рядов (11.67). Поэтому мы имеем

$$\alpha_k(x)=[1+(-1)^k]\,\Phi_k(x),$$
$$\beta_k(x)=[1-(-1)^k]\,\Phi_k(x),$$

откуда

$$\alpha_k(x)+\beta_k(x)=2\Phi_k(x).$$

Сравнивая этот результат с (11.63‴), получим

$$I_k(x)\equiv\Phi_k(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{k+2s}}{s!\,(s+k)!}, \qquad (11.66''')$$

т. е. разложение функции Бесселя k-го порядка в абсолютно сходящийся ряд, расположенный по возрастающим степеням параметра x.

Если формулу (11.66‴) написать в виде

$$I_k(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^k\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{s!\,(s+k)!},$$

то станет ясно, что при малом значении x функция Бесселя k-го порядка есть величина k-го порядка относительно параметра x.

Возвращаясь теперь к формулам (11.66) и (11.66′), мы можем, очевидно, написать следующее равенство:

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=\Phi(z,x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}I_k(x)\cdot z^k, \qquad (11.68)$$

показывающее, что функции Бесселя являются коэффициентами разложения функции $\Phi(z,x)$ в ряд, расположенный по степеням независимой переменной z.

Вследствие этого функция $\Phi(z, x)$, определяемая формулой (11.66), называется производящей функцией для функций Бесселя.

2. Полученные формулы позволяют вывести множество различных свойств функций Бесселя. Имея в виду приложения этих функций к теории рядов эллиптического движения, мы ограничимся рассмотрением только некоторых важнейших из этих свойств.

Прежде всего из формулы (11.66‴) непосредственно видно, что

$$I_k(-x) = (-1)^k I_k(x), \tag{11.69}$$

т. е. функция Бесселя четного порядка есть четная функция от x, а функция Бесселя нечетного порядка есть нечетная функция от x.

Рассмотрим, далее, равенство (11.68), которое является тождеством как относительно z, так и относительно параметра x. Поэтому мы имеем право дифференцировать это равенство по любой из двух величин z и x, в результате чего опять получим тождество.

Дифференцируя равенство (11.68) по переменной z, мы имеем следующее тождество:

$$\frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{z^2}\right)\Phi(z, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} kI_k(x)\cdot z^{k-1},$$

из которого, заменяя снова $\Phi(z, x)$ его разложением, найдем

$$\frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{z^2}\right)\sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k(x)\cdot z^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} kI_k(z)\cdot z^{k-1}.$$

Приравнивая коэффициенты при z^{k-1} в левой и правой частях этого тождества, мы получим следующее соотношение:

$$kI_k(x) = \frac{x}{2}\,[I_{k-1}(x) + I_{k+1}(x)], \tag{11.70}$$

которое является рекуррентным соотношением для функций Бесселя, так как позволяет, зная две из трех последовательных функций Бесселя, найти третью.

В самом деле, равенство (11.70) дает, например,

$$I_{k+1}(x) = \frac{2k}{x} I_k(x) - I_{k-1}(x). \tag{11.70′}$$

Поэтому достаточно знать числовые значения только двух первых функций $I_0(x)$ и $I_1(x)$, после чего найдем последовательно и все остальные, так как из (11.70′) имеем

$$I_2(x) = \frac{2}{x} I_1(x) - I_0(x),$$

$$I_3(x) = \frac{4}{x} I_2(x) - I_1(x),$$

$$I_4(x) = \frac{6}{x} I_3(x) - I_2(x),$$

$$I_5(x) = \frac{8}{x} I_4(x) - I_3(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Формула (11.66‴) дает

$$I_0(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{s!\,s!}$$

и

$$I_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{s!\,(s+1)!},$$

откуда можно вычислить значения функций $I_0(x)$ и $I_1(x)$ и составить таблицы, которыми и пользуются непосредственно в практических приложениях.

Такие таблицы с десятью знаками даны Бесселем для значений x в промежутке от $x=0{,}00$ до $x=3{,}20$ с шагом, равным 0,01. Ганзен дал шестизначные таблицы этих функций в промежутке от $x=0{,}0$ до 20,0 с шагом 0,1.

Выведем теперь вторую рекуррентную формулу. Дифференцируя равенство (11.68) по параметру x, получим следующее тождество

$$\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) \Phi(z, x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I'_k(x) \cdot z^k,$$

исключая из которого функцию $\Phi(z, x)$, получим

$$\frac{1}{2}(z^2 - 1) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k(x) \cdot z^k = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I'_k(x) \cdot z^{k+1},$$

откуда, приравнивая коэффициенты при z^{k+1} в обеих частях равенства, найдем

$$I'_k(x) = \frac{1}{2}\left[I_{k-1}(x) - I_{k+1}(x)\right], \tag{11.71}$$

что позволяет выразить любую производную от функции Бесселя в виде линейной комбинации этих функций.

Например, дифференцируя соотношение (11.71), получим

$$I_k''(x)=\frac{1}{2}\left[I_{k-1}'(x)-I_{k+1}'(x)\right].$$

Но из той же формулы (11.71) имеем

$$I_{k-1}'(x)=\frac{1}{2}\left[I_{k-2}(x)-I_k(x)\right],$$

$$I_{k+1}'(x)=\frac{1}{2}\left[I_k(x)-I_{k+2}(x)\right],$$

а поэтому предыдущее равенство преобразуется к виду

$$I_k''(x)=\frac{1}{4}\left[I_{k-2}(x)-2I_k(x)+I_{k+2}(x)\right]. \qquad (11.72)$$

Также можно получить выражения и для высших производных.

Из полученных соотношений можно вывести дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция Бесселя.

Действительно, из формулы (11.70) имеем

$$(k-1)I_{k-1}(x)=\frac{x}{2}\left[I_{k-2}(x)+I_k(x)\right],$$

$$(k+1)I_{k+1}(x)=\frac{x}{2}\left[I_k(x)+I_{k+2}(x)\right],$$

откуда находим

$$k\left[I_{k-1}(x)+I_{k+2}(x)\right]-\left[I_{k-1}(x)-I_{k+1}(x)\right]=$$
$$=\frac{x}{2}\left[I_{k-2}(x)+2I_k(x)+I_{k+2}(x)\right].$$

Исключая отсюда все функции, порядок которых не равен k, с помощью равенств (11.70)—(11.72) мы получим следующее равенство, которое также есть тождество:

$$I_k''(x)+\frac{1}{x}I_k'(x)+\left(1-\frac{k^2}{x^2}\right)I_k(x)\equiv 0. \qquad (11.73)$$

Рассмотрим теперь следующее линейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{k^2}{x^2}\right)y=0, \qquad (11.73')$$

где y есть неизвестная функция, x — независимая переменная, а k — числовой параметр.

Тождество (11.73) показывает, что если k есть целое число, то функция Бесселя k-го порядка является решением этого уравнения (частным!), а следовательно, общее решение этого уравнения может быть получено с помощью квадратур.

Уравнение (11.73′) называется в математике уравнением Бесселя. Это уравнение встречается во многих разделах математики и ее приложений, а поэтому функции, которые ему удовлетворяют (как в действительной, так и в комплексной областях), имеют большое значение*).

Рассмотрим теперь два ряда, выводимые из (11.68) с использованием соотношения (11.69):

$$e^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=I_0(x)+I_1(x)\cdot z+I_2(x)\cdot z^2+I_3(x)\cdot z^3+\ldots$$
$$\ldots-I_1(x)\cdot z^{-1}+I_2(x)\cdot z^{-2}+I_3(x)\cdot z^{-3}+\ldots$$

и

$$e^{-\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}=I_0(x)-I_1(x)\cdot z+I_2(x)\cdot z^2-I_3(x)\cdot z^3+\ldots$$
$$\ldots+I_1(x)\cdot z^{-1}+I_2(x)\cdot z^{-2}+I_3(x)\cdot z^{-3}+\ldots,$$

оба абсолютно сходящиеся при всех значениях z и x.

Перемножая эти два ряда, находим следующее соотношение:

$$1=I_0^2(x)+2I_1^2(x)+2I_2^2(x)+2I_3^2(x)+\ldots=$$
$$=I_0^2(x)+2\sum_{k=1}^{\infty}I_k^2(x). \qquad (11.74)$$

Для действительных значений x все функции $I_k(x)$ имеют действительные значения, а значит, все члены ряда (11.74) суть числа положительные, и мы имеем следующие неравенства:

$$|I_0(x)|\leqslant 1, \quad |I_k(x)|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (11.74')$$

3. Возвращаясь к разложениям координат эллиптического движения, мы видим теперь, что все коэффициенты этих разложений можно представить в виде рядов, расположенных по возрастающим степеням эксцентриситета орбиты e, абсолютно сходящихся для всякого значения e в промежутке от нуля до единицы.

Действительно, все эти коэффициенты выражаются через функции Бесселя и их первые производные от аргумента $x=ke$, где k — целое число.

---

*) Подробности о теории бесселевых функций можно найти в книге Е. Т. Уиттекера и Г. Н. Ватсона, Курс современного анализа. См. также: И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.

Но формула (11.66‴) дает

$$I_k(x) = \left(\frac{ke}{2}\right)^k \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{ke}{2}\right)^{2s}}{s!\,(s+k)!} =$$

$$= \frac{1}{k!}\left(\frac{ke}{2}\right)^k \left\{1 - \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^2}{1\cdot(k+1)} + \frac{\left(\frac{ke}{2}\right)^4}{1\cdot 2\cdot(k+1)(k+2)} - \ldots\right\}. \quad (11.75)$$

При $0 < e < 1$ эта величина имеет k-й порядок относительно эксцентриситета e.

Далее, дифференцируя ряд (11.66‴) по x и заменяя затем x на ke, мы получим также

$$I'_k(ke) = \frac{1}{2}\left(\frac{ke}{2}\right)^{k-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (k+2s)\left(\frac{ke}{2}\right)^{2s}}{s!\,(s+k)!} =$$

$$= \frac{1}{2(k-1)!}\left(\frac{ke}{2}\right)^{k-1}\left\{1 - \frac{(k+2)\left(\frac{ke}{2}\right)^2}{1\cdot k\cdot(k+1)} + \frac{(k+4)\left(\frac{ke}{2}\right)^4}{1\cdot 2\cdot k(k+1)(k+2)} - \ldots\right\}. \quad (11.75')$$

Эта величина имеет $(k-1)$-й порядок относительно e.

Формулы (11.42) и (11.46), дающие выражения для коэффициентов двух основных разложений эллиптического движения, могут быть написаны теперь в следующем виде:

$$b_k = \frac{2}{k} I_k(ke) = \frac{2}{k}\left(\frac{ke}{2}\right)^k \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{ke}{2}\right)^{2s}}{s!\,(s+k)!} \quad (11.76)$$

и (с использованием формулы (11.71))

$$a_k = \frac{1}{k}\left[I_{k-1}(ke) - I_{k+1}(ke)\right] =$$

$$= \frac{2}{k} I'_k(ke) = \frac{1}{k}\left(\frac{ke}{2}\right)^{k-1} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (k+2s)\left(\frac{ke}{2}\right)^{2s}}{s!\,(s+k)!}, \quad (11.77)$$

откуда следует, что коэффициенты b_k и a_k суть величины k-го и $(k-1)$-го порядков относительно эксцентриситета соответственно.

Рассмотрим еще коэффициенты g_k разложения (11.55) для уравнения центра $v - M$. Из формулы (11.58) видно, что величина $g_k^{(\nu)}$ имеет порядок $k - \nu$ относительно эксцентриситета, а следовательно, произведение $g_k^{(\nu)} \cdot e^{\nu}$ есть величина k-го порядка и такого же порядка есть и коэффициент при $\sin kM$ в разложении (11.55).

Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство. Как показано, координаты эллиптического движения могут быть представлены в виде рядов Фурье (т. е. рядов, расположенных по синусам и косинусам целых кратностей средней аномалии M), коэффициенты которых суть ряды с числовыми коэффициентами, расположенные по целым возрастающим степеням эксцентриситета орбиты e.

В то же время в § 1 было показано, что эти координаты могут быть представлены в виде рядов, расположенных по целым возрастающим степеням эксцентриситета, коэффициенты которых суть тригонометрические многочлены относительно синусов и косинусов целых кратностей e.

Имея в виду, что те и другие ряды определяют координаты единственным образом, мы можем, очевидно, преобразовать ряд одного типа в ряд другого типа простой перестановкой членов. Однако ряды, полученные в § 1, сходятся (и притом абсолютно) только для значения эксцентриситета, не превышающих лапласова предела $\bar{e}$, а ряды, рассмотренные в § 2, сходятся (но не абсолютно) для всякого значения эксцентриситета, не превышающего единицы.

Кажущееся противоречие объясняется замечательными свойствами абсолютно и условно сходящихся рядов.

Действительно, мы знаем, что если бесконечный ряд сходится абсолютно, то его сумма не зависит от порядка членов, которые можно, следовательно, как угодно переставлять, и после каждой такой перестановки опять получается ряд, сходящийся абсолютно. Наоборот, если ряд сходится не абсолютно, или условно, то перестановка бесчисленного множества его членов может превратить просто сходящийся ряд в абсолютно сходящийся, или даже в расходящийся. Поэтому, превращая разложение какой-нибудь координаты в ряд, расположенный по степеням эксцентриситета, перестановкой членов в ряд Фурье, мы получим по свойству абсолютно сходящихся рядов ряд, также сходящийся абсолютно для всякого значения M, пока e не превышает предела Лапласа $\bar{e}$.

Превращая ряд Фурье для какой-либо координаты путем перестановки членов в ряд, расположенный по степеням эксцентриситета, мы, вообще говоря, получаем ряд, о сходимости которого без специального исследования ничего сказать нельзя. Но мы уже знаем (вследствие единственности получаемых разложений), что после такой перестановки получается ряд, сходящийся абсолютно, если $0 \leqslant e \leqslant \bar{e}$, но о сходимости которого ничего нельзя сказать, если $\bar{e} \leqslant e < 1$.

Приведенное рассуждение показывает, что все ряды, полученные в § 2, т. е. ряды типа Фурье, являются сходящимися абсолютно для всякого M, если $0 \leqslant e < \bar{e}$, и просто сходящимися (т. е. не абсолютно), если $\bar{e} \leqslant e < 1$.

Поэтому ряды типа Фурье, представляющие величины невозмущенного эллиптического движения, можно без опасения дифференцировать, интегрировать, перемножать, делить, при любом значении средней аномалии M, но только для значений эксцентриситета, не превышающих предела Лапласа $\bar{e}$. Если же $\bar{e} \leqslant e < 1$, то оперировать с рядами типа Фурье следует с большой осторожностью, помня, что действия над ними могут превратить сходящийся ряд в расходящийся.

Примечание. Мы рассмотрели в этой главе только некоторые основные разложения величин эллиптического движения, необходимые для представления общего решения уравнений невозмущенного движения (для случая, когда $h<0$, т. е. когда $0 \leqslant e < 1$) в явном относительно t виде.

Из полученных разложений можно вывести (при помощи алгебраических операций) множество других, которые могут представить интерес для общей теории возмущений.

Точно так же не представляет принципиальных затруднений получить заново разложения и для ряда других величин эллиптического движения. Эти разложения можно найти в более подробных руководствах или в специальных таблицах*).

---

*) См., например, М. Ф. Субботин, Курс небесной механики.

ГЛАВА XII

МЕТОД ЛАГРАНЖА ИЗМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОСТОЯННЫХ

§ 1. Основы метода Лагранжа

1. Рассмотрим сначала общую задачу о движении материальной точки (планеты или спутника) под действием ньютонианского притяжения некоторого центрального тела, рассматриваемого также как материальная точка, и добавочной возмущающей силы, произвольным образом зависящей от времени, положения движущейся точки и ее скорости.

Обозначим через x, y, z прямоугольные декартовы координаты движущейся точки в системе осей, имеющих неизменные направления и начало в центральном теле. Тогда, как было отмечено в § 1 гл. IX, уравнения движения могут быть написаны в следующем общем виде:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= X_0 + X, \\ \ddot{y} &= Y_0 + Y, \\ \ddot{z} &= Z_0 + Z. \end{aligned}\right\} \tag{12.1}$$

Здесь X_0, Y_0, Z_0 обозначают проекции ускорения (относительного) движущейся точки P, вызываемого действием центрального тела, а X, Y, Z — проекции возмущающего ускорения, вызываемого действием добавочной возмущающей силы F (рис. 64).

Проекции основного движущего ускорения F_0 определяются известными формулами

$$X_0 = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad Y_0 = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad Z_0 = -\frac{\mu z}{r^3}, \tag{12.2}$$

где μ есть некоторая постоянная, зависящая от масс обеих точек, а

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

обозначает, как всегда, радиус-вектор движущейся точки.

Проекции ускорения, вызываемого возмущающей силой F, будем считать известными и заданными функциями от времени t, координат движущейся точки x, y, z и составляющих ее относительной скорости V, т. е. величин $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$.

Функции

$$\left.\begin{aligned} X &= X(t;\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}), \\ Y &= Y(t;\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}), \\ Z &= Z(t;\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}) \end{aligned}\right\} \qquad (12.2')$$

могут быть какими угодно функциями указанных аргументов, лишь бы дифференциальные уравнения движения (12.1) имели, при произвольно заданных начальных условиях

$$x_0,\ y_0,\ z_0,\ \dot{x}_0,\ \dot{y}_0,\ \dot{z}_0, \qquad (12.3)$$

единственное непрерывное и дифференцируемое решение, определенное для всех значений времени, заключающихся в некотором промежутке $(t_0 - t_1,\ t_0 + t_2)$, содержащем внутри себя начальный момент (начальная эпоха, или, просто, эпоха) t_0; промежуток этот может быть бесконечным в ту или другую сторону (или даже в обе стороны).

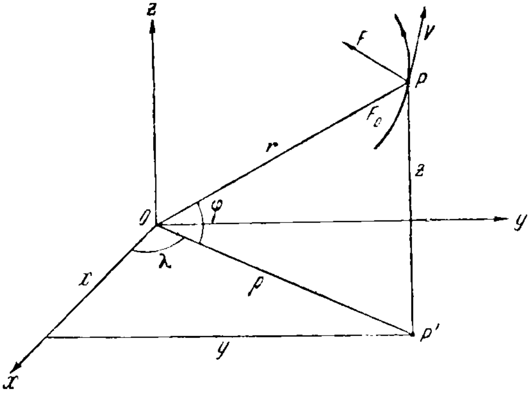


Рис. 64.

Наша задача заключается в интегрировании системы (12.1), т. е. в нахождении общего решения, или общего интеграла, дифференциальных уравнений возмущенного движения. Однако точное интегрирование уравнений (12.1) в громадном большинстве случаев оказывается невозможным и мы вынуждены почти всегда прибегать к методу последовательных приближений и получать какое-то приближенное решение наших уравнений.

Разумеется, можно придумать множество различных способов последовательных приближений, отличающихся друг от друга или употребляемыми переменными, или характером производимых операций.

Мы рассмотрим сначала способ получения приближенного решения, наиболее привычный и удобный для астрономов, опирающийся на общий метод изменения (вариации) произвольных постоянных, основы которого были заложены еще Ньютоном в его знаменитом сочинении «Математические начала натуральной философии» и который был затем детально разработан Лагранжем в ряде замечательных мемуаров и в его «Аналитической механике» *).

В применении к рассматриваемой здесь задаче метод Лагранжа может быть охарактеризован следующим образом. Отбросим в правых частях уравнений (12.1) проекции возмущающего ускорения X, Y, Z. Тогда мы получим новую, упрощенную систему дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -\frac{\mu x}{r^3}, \\ \ddot{y} &= -\frac{\mu y}{r^3}, \\ \ddot{z} &= -\frac{\mu z}{r^3}, \end{aligned}\right\} \tag{12.4}$$

отличную от системы (12.1), но зато легко интегрируемую.

Действительно, уравнения (12.4) являются уравнениями невозмущенного кеплеровского движения и их интегрирование было выполнено в гл. IX этой книги.

Общее решение системы (12.4) здесь удобнее записать в виде (9.57), т. е. следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\alpha, & \dot{x} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[\alpha e \sin v + \alpha'(1 + e\cos v)], \\ y &= r\beta, & \dot{y} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[\beta e \sin v + \beta'(1 + e\cos v)], \\ z &= r\gamma, & \dot{z} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,[\gamma e \sin v + \gamma'(1 + e\cos v)], \end{aligned}\right\} \tag{12.5}$$

---

*) И. Ньютон, Математические начала натуральной философии, см. перев. с латинского акад. А. Н. Крылова. Собрание трудов А. Н. Крылова, т. VII, Изд. АН СССР, 1936; Ж. Лагранж, Аналитическая механика, см. перев. с франц., Гостехиздат, 1950. См. также «Историко-библиографический очерк развития небесной механики» в первом издании настоящей книги, Физматгиз, 1963.

где

$$r = \frac{p}{1 + e\cos v}, \tag{12.6}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i, & \alpha' &= \frac{d\alpha}{du}, \\ \beta &= \cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i, & \beta' &= \frac{d\beta}{du}, \\ \gamma &= \sin u \sin i, & \gamma' &= \frac{d\gamma}{du}, \end{aligned}\right\} \tag{12.7}$$

аргумент широты u определяется формулой

$$u = v + \omega, \tag{12.8}$$

а истинная аномалия v связана с временем t следующим соотношением:

$$t - \tau = \frac{p^{3/2}}{\sqrt{\mu}} \int\limits_0 \frac{dv'}{(1 + e\cos v')^2}. \tag{12.9}$$

Произвольными постоянными в этих формулах являются элементы кеплеровой орбиты

$$\Omega, \quad i, \quad \omega, \quad p, \quad e, \quad \tau, \tag{12.10}$$

однозначно определяемые начальными условиями (12.3).

Если рассматривать как неизвестные величины не только координаты x, y, z, но и их первые производные — составляющие скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, то формулы (12.5) представят общее решение системы шести дифференциальных уравнений первого порядка, которая напишется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x}, & \frac{dy}{dt} &= \dot{y}, & \frac{dz}{dt} &= \dot{z}, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= X_0, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= Y_0, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= Z_0. \end{aligned}\right\} \tag{12.11}$$

Это означает, что функции, определенные формулами (12.5), удовлетворяют уравнениям (12.11), *каковы бы ни были числовые значения произвольных постоянных* (12.10). Но если функции (12.5) подставить в уравнения возмущенного движения, которые также удобно записать в виде системы уравнений первого порядка, т. е. в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \dot{x}, & \frac{dy}{dt} &= \dot{y}, & \frac{dz}{dt} &= \dot{z}, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= X_0 + X, & \frac{d\dot{y}}{dt} &= Y_0 + Y, & \frac{d\dot{z}}{dt} &= Z_0 + Z, \end{aligned}\right\} \tag{12.12}$$

то последние уравнения, разумеется, не удовлетворятся ни при каких значениях произвольных постоянных.

Однако в том случае, когда возмущающая сила мала по сравнению с основной силой притяжения центрального тела, абсолютные значения величин X, Y, Z останутся малыми, когда в этих выражениях мы заменим координаты и составляющие скорости выражениями (12.5).

Следовательно, в этом случае (т. е. когда возмущающая сила мала) выражения (12.5) почти удовлетворяют уравнениям возмущенного движения, что наводит нас на мысль о таком «незначительном изменении» формул (12.5), после которого уравнения (12.12) будут удовлетворены совершенно строго.

«Незначительно изменить» формулы (12.5) мы можем, конечно, разными способами. Например, мы можем добавить к правым частям формул (12.5) малые слагаемые δx, δy, δz, $\delta\dot{x}$, $\delta\dot{y}$, $\delta\dot{z}$, которые можно назвать возмущениями координат и составляющих скорости, и поставить задачу об определении этих малых добавок так, чтобы уравнения (12.12) удовлетворялись строго или, по крайней мере, чтобы эти уравнения удовлетворялись бы лучше, чем формулами (12.5). Можно также попытаться, не изменяя внешнего вида формул (12.5), изменить незначительно произвольные постоянные (12.10), входящие в формулы (12.5).

Но ясно, что если мы придадим произвольным постоянным постоянные малые добавки, то мы просто получим некоторое другое решение тех же уравнений невозмущенного движения (12.11) и не продвинемся ни на шаг на пути нахождения решения уравнений возмущенного движения (12.1) или (12.12). Это другое решение может быть получено из первоначального как результат возмущений начальных условий (12.3), так что возмущения координат для любого t получатся как следствия их начальных возмущений, а не как следствия воздействия постоянно действующей возмущающей силы. Поэтому если мы желаем получить решение уравнений возмущенного движения (12.12) путем некоторого изменения произвольных постоянных (12.10), то должны придавать этим величинам добавки, зависящие от времени, т. е. должны рассматривать элементы орбиты (постоянные в невозмущенном движении) как величины переменные, т. е. как некоторые функции времени.

2. Основная идея метода Лагранжа изменения (или вариации) произвольных постоянных заключается в следующем:

Решение уравнений возмущенного движения определяется теми же формулами (12.5), что и решение уравнений невозмущенного движения, но величины Ω, i, ω, p, e, τ рассматриваются в этих формулах не как постоянные, а как некоторые функции времени, определяемые так, чтобы уравнения возмущенного движения строго удовлетворялись.

Эта основная идея может быть использована не только в случае задачи с малой возмущающей силой, но и в любом другом случае, когда дифференциальные уравнения задачи могут быть приведены к виду (12.1) и независимо от характера возмущающей силы.

В самом деле, с чисто математической точки зрения осуществление идеи Лагранжа сводится просто к преобразованию переменных в уравнениях (12.12), причем формулами преобразования служат известные формулы невозмущенного движения.

Действительно, будем рассматривать формулы невозмущенного движения *) как формулы преобразования, связывающие первоначальные, или старые зависимые переменные, т. е. величины x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, с новыми зависимыми переменными, за которые принимаются элементы кеплеровой орбиты Ω, i, ω, p, e, τ.

Тогда, производя в уравнениях (12.12) подстановку, определяемую формулами (12.5), мы получим для новых неизвестных систему дифференциальных уравнений вида

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= F_1(t;\ \Omega,\ i,\ \omega,\ p,\ e,\ \tau),\\
\frac{di}{dt} &= F_2(t;\ \Omega,\ i,\ \omega,\ p,\ e,\ \tau),\\
\frac{d\omega}{dt} &= F_3(t;\ \Omega,\ i,\ \omega,\ p,\ e,\ \tau),\\
\frac{dp}{dt} &= F_4(t;\ \Omega,\ i,\ \omega,\ p,\ e,\ \tau),\\
\frac{de}{dt} &= F_5(t;\ \Omega,\ i,\ \omega,\ p,\ e,\ \tau),\\
\frac{d\tau}{dt} &= F_6(t;\ \Omega,\ i,\ \omega,\ p,\ e,\ \tau),
\end{aligned}\right\} \tag{12.13}$$

где правые части будут известными функциями времени и всех элементов орбиты.

Таким образом, метод Лагранжа приводит задачу интегрирования уравнений (12.1) или (12.12) к задаче интегрирования системы уравнений (12.13).

---

*) Здесь имеются в виду как формулы (12.5), так и последующие формулы (12.6) — (12.9), а также любые следствия основных формул.

Допустим, что уравнения (12.13) проинтегрированы так, что получены формулы, выражающие неизвестные величины, определяемые этими уравнениями, в функции времени и шести произвольных постоянных интегрирования C_s ($s=1, 2, \ldots, 6$).

Эти формулы, представляющие общее решение системы (12.13), могут быть написаны в следующей общей форме:

$$\left.\begin{aligned} \Omega&=f_1(t\,|\,C_s), & i&=f_2(t\,|\,C_s), & \omega&=f_3(t\,|\,C_s), \\ p&=f_4(t\,|\,C_s), & e&=f_5(t\,|\,C_s), & \tau&=f_6(t\,|\,C_s). \end{aligned}\right\} \tag{12.14}$$

Произвольные постоянные C_s, входящие в общее решение (12.14), могут быть выражены, если угодно, через начальные значения неизвестных функций (элементов орбиты)

$$\Omega_0, \quad i_0, \quad \omega_0, \quad p_0, \quad e_0, \quad \tau_0, \tag{12.15}$$

представляющих элементы кеплеровой орбиты для начальной эпохи, или начального момента, t_0. Для этого достаточно положить в уравнениях (12.14), которые должны выполняться для всякого момента времени, $t=t_0$ и соответственно заменить неизвестные функции их начальными значениями (12.15). В результате мы получим шесть уравнений, в которых величины C_s можно рассматривать как неизвестные, а величины (12.15) как данные.

Разрешая полученные уравнения относительно произвольных постоянных C_s, мы придем к формулам

$$C_s=\Psi_s(t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0). \tag{12.16}$$

Подставляя полученные выражения для C_s в общее решение (12.14), мы можем представить последнее в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \Omega&=\varphi_1(t;\ t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0), \\ i&=\varphi_2(t;\ t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0), \\ \omega&=\varphi_3(t;\ t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0), \\ p&=\varphi_4(t;\ t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0), \\ e&=\varphi_5(t;\ t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0), \\ \tau&=\varphi_6(t;\ t_0, \Omega_0, i_0, \omega_0, p_0, e_0, \tau_0). \end{aligned}\right\} \tag{12.14'}$$

Если формулы (12.14) или (12.14′) получены, то задача решена, так как подставляя в формулы (12.5) вместо элементов орбиты функции времени, определяемые формулами (12.14) или (12.14′), мы найдем координаты и составляющие скорости движущейся точки в возмущенном движении как функции времени и шести произвольных постоянных C_s или (12.15).

Эти формулы, дающие общее решение уравнений возмущенного движения (12.1), можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned}
x &= x(t\,|\,C_s) = \chi_1(t;\ t_0,\ \Omega_0,\ i_0,\ \omega_0,\ p_0,\ e_0,\ \tau_0),\\
y &= y(t\,|\,C_s) = \chi_2(t;\ t_0,\ \Omega_0,\ i_0,\ \omega_0,\ p_0,\ e_0,\ \tau_0),\\
z &= z(t\,|\,C_s) = \chi_3(t;\ t_0,\ \Omega_0,\ i_0,\ \omega_0,\ p_0,\ e_0,\ \tau_0),\\
\dot{x} &= \dot{x}(t\,|\,C_s) = \chi_4(t;\ t_0,\ \Omega_0,\ i_0,\ \omega_0,\ p_0,\ e_0,\ \tau_0),\\
\dot{y} &= \dot{y}(t\,|\,C_s) = \chi_5(t;\ t_0,\ \Omega_0,\ i_0,\ \omega_0,\ p_0,\ e_0,\ \tau_0),\\
\dot{z} &= \dot{z}(t\,|\,C_s) = \chi_6(t;\ t_0,\ \Omega_0,\ i_0,\ \omega_0,\ p_0,\ e_0,\ \tau_0).
\end{aligned}\right\} \qquad (12.17)$$

Полагая в этих формулах $t = t_0$ и разрешая полученные уравнения относительно C_s или относительно величин (12.15), мы выразим произвольные постоянные через начальные значения, т. е. через величины (12.3). Найденные выражения произвольных постоянных можно затем опять подставить в формулы (12.17), что даст координаты и составляющие скорости в функции времени и начальных значений, т. е. даст общее решение уравнений возмущенного движения в обычном виде.

Полезно заметить, что для нахождения связи между начальными значениями (12.3) и начальными элементами (12.15) вовсе не требуется знать общее решение уравнений возмущенного движения в его окончательной форме (12.17). Действительно, это общее решение дается формулами (12.5), где элементы орбиты суть некоторые функции времени, точные выражения которых могут быть известны только после полного интегрирования системы (12.1).

Но для получения нужных соотношений мы должны положить в формулах (12.5) $t = t_0$, вследствие чего элементы орбиты превращаются в свои начальные значения (12.15), а координаты и составляющие скорости — в свои начальные значения (12.3). Ясно, что те же соотношения мы можем получить непосредственно из формул невозмущенного движения с элементами (12.15), полагая в этих формулах $t = t_0$ и заменяя координаты и составляющие скорости их начальными значениями (12.3). Поэтому, например, начальные элементы (12.15) получаются из заданных начальных условий (12.3) совершенно так же, как это было изложено в § 4 гл. IX.

3. Остановимся теперь на рассмотрении механического, а также геометрического смысла метода Лагранжа изменения произвольных постоянных.

Из сказанного в предыдущем разделе явствует, что по методу Лагранжа и возмущенное и невозмущенное движения определяются одними и теми же формулами (12.5) и для этих двух движений справедливы также все формулы, которые являются следствиями основных формул выводимых в теории невозмущенного движения.

Разница заключается только в том, что входящие в эти формулы элементы Ω, i, ω, p, e и τ (и все другие величины, зависящие от этих элементов) *для невозмущенного движения сохраняют свои постоянные значения* (12.15), т. е. остаются постоянными, а *для возмущенного движения все эти элементы изменяются вместе со временем*, т. е. являются величинами переменными.

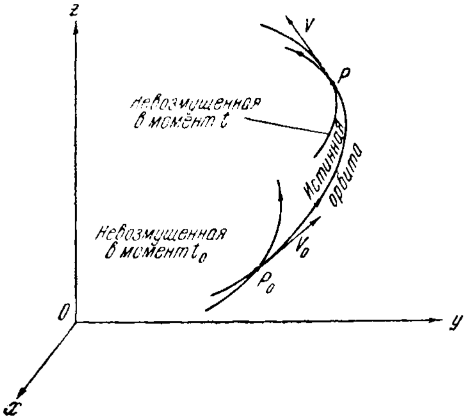


Рис. 65.

В начальный момент времени t_0 координаты и составляющие скорости имеют и в невозмущенном и в возмущенном движениях одни и те же значения (12.3). Поэтому оба движения, невозмущенное и возмущенное, начинаются совершенно одинаково, т. е. начинаются из одной из той же точки пространства P_0 с одной и той же начальной скоростью V_0. При этом, следовательно, обе траектории (т. е. и траектория невозмущенного движения и траектория возмущенного) имеют в начальный момент одну и ту же касательную, т. е. соприкасаются в начальной точке (рис. 65).

Рассмотрим произвольный момент времени, отличный от начального. Этому моменту времени соответствуют определенные числовые значения элементов орбиты, отличные, вообще говоря, от их начальных значений (12.15). Вообразим, что начиная с этого момента t элементы перестали изменяться, или, лучше сказать, представим некоторое невозмущенное движение, которому в момент t соответствуют элементы, найденные по формулам (12.14). Так как, принципиально говоря, текущий момент времени t ничем не отличается от начального момента t_0, то сказанное выше можно повторить почти без изменения. Именно, в момент t можно опять рассмотреть два движения — невозмущенное и возмущенное, траектории которых выходят из одной и той же точки пространства, обладая в этой точке одной и той же касательной, т. е. одной и той же скоростью по величине и направлению (см. рис. 65).

Но ясно, что траектория возмущенного движения одинакова и для начального и для текущего момента, а траектории соответствующего невозмущенного движения, вообще говоря, отличны друг от друга в эти же моменты.

Поэтому, изменяя время t непрерывным образом начиная с начального момента t_0, мы будем иметь бесчисленное множество невозмущенных движений, отличных друг от друга, и единственное возмущенное движение, состояние которого совпадает в каждый момент с состоянием соответствующего невозмущенного движения.

Так как траектория возмущенного движения в каждый момент соприкасается с траекторией соответствующего невозмущенного движения, то можно сказать, что траектория возмущенного движения есть огибающая семейства траекторий невозмущенных движений.

Все эти семейства траекторий, вообще говоря, отличны друг от друга, но они имеют также и нечто общее. Действительно, любая траектория семейства есть какая-то кривая второго порядка, один из фокусов которой находится в начале координат, и движение по которой совершается в согласии с законами Кеплера.

В астрономии соприкасающиеся кривые называются оскулирующими, а поэтому указанные выше траектории семейства невозмущенных движений называются оскулирующими орбитами, а их элементы — оскулирующими элементами.

Таким образом, в методе Лагранжа истинное (возмущенное) движение рассматривается как постоянно и непрерывно изменяющееся кеплеровское движение, а истинная орбита — как постоянно и непрерывно изменяющаяся оскулирующая орбита.

Посмотрим теперь на метод Лагранжа с точки зрения динамики. Представим себе, что в начальный момент времени на точку P, движущуюся под действием силы притяжения центральной массы, подействовала дополнительная мгновенная возмущающая сила, величина которой весьма мала по сравнению с главной силой притяжения к центру.

Эффект действия этой мгновенной силы скажется тогда только на изменении начальных условий, так что начальные координаты и составляющие скорости получат в начальный момент весьма малые приращения (начальные возмущения!). Тогда «возмущенное движение» будет, очевидно, совпадать с некоторым кеплеровским движением, отличающимся от невозмущенного движения только начальными условиями. Поэтому последующие возмущения координат и составляющих скорости будут обусловлены только изменением начальных условий и могут быть рассчитаны так, как это указано в гл. X. Разумеется, и элементы кеплеровской орбиты такого «возмущенного» движения будут отличаться от элементов первоначального, ничем не возмущенного. Мы можем сказать также, что мгновенно действовавшая возмущающая сила сообщила элементам орбиты некоторые возмущения (начальные возмущения элементов), которые также определяются по правилам, выведенным в гл. X.

Представим теперь опять невозмущенное движение, определяемое заданными начальными условиями и протекающее под действием одной только силы притяжения центрального тела-точки. Пусть в некоторый момент времени, отличный от начального, движущаяся материальная точка испытала действие мгновенной малой возмущающей силы. Тогда эффект этой силы будет совершенно аналогичен эффекту действия мгновенной силы в начальный момент. Таким образом, в рассматриваемый момент времени координаты и составляющие скорости получат малые приращения («возмущения»), а следовательно, изменятся также мгновенно и элементы орбиты. В дальнейшем движение точки опять будет происходить в полном согласии с законами Кеплера, по кеплеровской орбите, но с возмущенными элементами.

Подобные рассуждения можно повторять для каждого момента времени. Следовательно, если мы вообразим бесконечный ряд моментов времени, отделенных друг от друга бесконечно малыми промежутками, и будем считать, что в каждый из этих моментов действует мгновенная, возмущающая сила (равная нулю в промежутках между моментами), то мы получим примерную схему возмущенного движения. Истинное или возмущенное движение точки можно будет рассматривать в этой схеме как некоторое кеплеровское движение, элементы которого изменяются скачкообразно в каждый из моментов действия мгновенной возмущающей силы. Притом ясно, что измененное (возмущенное) и неизмененное (невозмущенное) в момент t движения исходят в этот момент из одной и той же точки пространства и их траектории имеют в этой точке общую касательную.

Увеличивая мысленно число таких моментов времени и одновременно уменьшая неограниченно промежутки между ними, мы придем в пределе к движению, которое можно рассматривать как непрерывно изменяющееся кеплеровское движение с непрерывно изменяющимися элементами. Отсюда следует, что для определения такого (истинного или возмущенного) движения мы можем пользоваться всеми формулами невозмущенного движения, рассматривая в последних все элементы орбиты (и величины от них зависящие) как некоторые непрерывные функции времени, которые должны быть соответственным образом определены.

Из приведенного рассмотрения вытекает также, что если во время истинного движения в какой-то момент времени внезапно исчезнет возмущающая сила, то начиная с этого момента точка будет двигаться по невозмущенной орбите, в согласии с законами Кеплера. Элементы такой невозмущенной орбиты определятся теми значениями координат и составляющих скорости, которые получили эти величины в момент прекращения действия возмущающей силы.

Выяснив, так сказать, «механизм» возмущенного движения, мы можем перейти теперь к рассмотрению аналитических формул, определяющих это движение, для чего необходимо прежде всего получить дифференциальные уравнения (12.13), которым удовлетворяют постоянно изменяющиеся оскулирующие элементы. Вывод этих уравнений мы рассмотрим в следующем параграфе.

Примечание 1. Мы рассмотрели основы метода Лагранжа для системы (12.1), предполагая, что X_0, Y_0, Z_0 определяются формулами (12.2), т. е. представляют собой проекции ускорения, вызываемого действием притяжения (по закону Ньютона) центрального тела-точки.

Однако метод Лагранжа может быть распространен и на случаи более общие. В самом деле, пусть величины X_0, Y_0, Z_0 — какие-то заданные функции времени, координат и составляющих скорости, но притом такие, что дифференциальные уравнения (12.11) можно проинтегрировать, т. е. можно получить формулы вида

$$\left.\begin{aligned} x&=\psi_1(t\,|\,C_s), & y&=\psi_2(t\,|\,C_s), & z&=\psi_3(t\,|\,C_s),\\ \dot{x}&=\psi_4(t\,|\,C_s), & \dot{y}&=\psi_5(t\,|\,C_s), & \dot{z}&=\psi_6(t\,|\,C_s), \end{aligned}\right\} \qquad (12.18)$$

где C_s суть произвольные постоянные.

Возвращаясь теперь к истинному движению, определяемому дифференциальными уравнениями (12.12), мы можем определить общее решение этих уравнений опять формулами (12.18), рассматривая в последних величины C_s уже не как постоянные, а как некоторые функции времени. Иными словами, мы можем преобразовать уравнения движения (12.12) к новым переменным C_s, используя как формулы преобразования формулы общего решения уравнений (12.11). Поэтому движение, определяемое уравнениями (12.11), мы также можем назвать невозмущенным движением (но не кеплеровским!), уравнения (12.11) — уравнениями невозмущенного движения, а постоянные C_s (или какие-либо их комбинации) — элементами невозмущенного движения.

Нет также никаких принципиальных затруднений для распространения метода Лагранжа и на систему дифференциальных уравнений любого порядка, определяющих движение системы конечного числа материальных точек или материальных тел, находящихся под действием известных заданных сил.

Примечание 2. Метод Лагранжа, принципиальная сторона которого изложена в этом параграфе, рассматривает истинное или возмущенное движение как непрерывно изменяющееся невозмущенное кеплеровское движение. Но мы знаем, что невозмущенное кеплеровское движение может быть эллиптическим или гиперболическим (а в вырожденных случаях — круговым, параболическим и прямолинейным), в зависимости от величины начальной скорости. Поэтому оскулирующая орбита в каждый данный момент времени может быть и эллипсом и гиперболой, в зависимости от величины скорости, которую имеет в данный момент движущаяся точка. Непрерывно изменяясь с течением времени, оскулирующая орбита может некоторое время оставаться эллипсом, а потом превратиться в гиперболу и оставаться некоторое время гиперболой и т. д. Может случиться также (как это обычно бывает в классических астрономических задачах), что движение всегда остается эллиптическим. Тип оскулирующей орбиты в каждый момент времени немедленно распознается по величине оскулирующего эксцентриситета орбиты, в соответствии с чем и применяются формулы эллиптического или гиперболического движения для нахождения координат и составляющих скорости.

§ 2. Вывод дифференциальных уравнений метода Лагранжа

1. В предыдущем параграфе было показано, что возмущенное движение, происходящее под совместным действием притяжения центрального тела-точки и произвольной возмущающей силы, можно рассматривать как такое кеплеровское движение, все элементы которого суть некоторые непрерывные функции времени. Эти неизвестные заранее функции удовлетворяют некоторой системе дифференциальных уравнений первого порядка, и наша задача заключается теперь в выводе этих уравнений.

Основой для вывода указанных уравнений являются следующие общие соображения. Пусть

$$\Phi(t;\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z},\ \Omega,\ i,\ \ldots,\ \tau)=0 \qquad (12.19)$$

есть какой-нибудь из первых интегралов невозмущенного движения, или соотношение, являющееся следствием этих первых интегралов, где Ω, i, ω, p, e, τ суть элементы орбиты, сохраняющие в невозмущенном движении постоянные значения.

Тогда в силу уравнений (12.11) мы можем написать следующее тождество:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}X_0+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{y}}Y_0+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{z}}Z_0\equiv 0, \qquad (12.20)$$

где составляющие основного ускорения определяются формулами (12.2).

По основной идее метода Лагранжа всякая формула невозмущенного движения остается справедливой и для возмущенного движения, но все элементы орбиты (и любые величины, зависящие от элементов, но не содержащие явно время) должны рассматриваться как некоторые функции времени.

При этом условии соотношение вида (12.19) является также интегралом системы (12.12), а поэтому в силу уравнений возмущенного движения мы будем иметь также следующее тождество:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial\Phi}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial\Phi}{\partial z}z+\frac{\partial\Phi}{\partial\Omega}\frac{d\Omega}{dt}+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\frac{d\tau}{dt}+$$
$$+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}(X_0+X)+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{y}}(Y_0+Y)+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{z}}(Z_0+Z)\equiv 0. \qquad (12.20')$$

Но во всякий момент времени t координаты и составляющие скорости движущейся точки имеют одинаковые значения и для невозмущенного и для возмущенного движения, а следовательно, в момент t величины

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t},\ \frac{\partial\Phi}{\partial x},\ \ldots,\ \frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}},\ \ldots,\ X_0,\ \ldots$$

имеют в равенствах (12.20) и (12.20′) одинаковые числовые значения, вследствие чего мы получаем следующее тождество:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}X+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{y}}Y+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{z}}Z+\frac{\partial\Phi}{\partial\Omega}\frac{d\Omega}{dt}+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\frac{d\tau}{dt}\equiv 0, \qquad (12.21)$$

которое представляет собой соотношение между производными от оскулирующих элементов, самими этими элементами, координатами, составляющими скорости и временем.

Координаты и составляющие скорости можно исключить из полученного соотношения при помощи формул невозмущенного движения (12.5), так что в результате (12.21) будет представлять собой соотношение только между временем, оскулирующими элементами и их первыми производными.

Каждое такое соотношение линейно относительно производных от оскулирующих элементов. Поэтому, найдя достаточное количество формул вида (12.21), мы можем выразить из них все шесть производных

$$\frac{d\Omega}{dt},\quad \frac{di}{dt},\quad \frac{d\omega}{dt},\quad \frac{dp}{dt},\quad \frac{de}{dt},\quad \frac{d\tau}{dt},$$

в зависимости от времени и самих элементов, что и даст нам систему дифференциальных уравнений вида (12.13).

2. Заметим теперь, что левую часть равенства (12.21) можно рассматривать как некоторую, особым образом вычисленную полную производную от функции Φ.

Действительно, будем дифференцировать функцию Φ в равенстве (12.19), предполагая, что при этом дифференцировании время t и координаты x, y, z рассматриваются как величины постоянные, все элементы орбиты — как функции времени, а производные от составляющих скорости равны соответствующим составляющим возмущающего ускорения.

В результате такого особого дифференцирования мы и получим, как легко видеть, левую часть равенства (12.21).

Будем обозначать полную производную функции Φ, вычисленную таким особым образом, символом $\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)$, т. е. положим

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)=\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{x}}X+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{y}}Y+\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{z}}Z+$$
$$+\frac{\partial\Phi}{\partial\Omega}\frac{d\Omega}{dt}+\frac{\partial\Phi}{\partial i}\frac{di}{dt}+\ldots+\frac{\partial\Phi}{\partial\tau}\frac{d\tau}{dt}. \qquad (12.22)$$

Тогда всякое тождество вида (12.21) запишется кратко следующим образом:

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)\equiv 0. \qquad (12.21')$$

Составление всякого равенства вида (12.21) или (12.21′) мы будем называть для краткости основной операцией.

Таким образом, для составления дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять оскулирующие элементы, нужно применить основную операцию к некоторому набору формул невозмущенного движения и разрешить затем полученные уравнения относительно производных от оскулирующих элементов.

В полученных уравнениях нужно затем заменить координаты и составляющие скорости их выражениями из формул невозмущенного движения, после чего мы сможем заняться вопросом об интегрировании полученных уравнений вида (12.13).

Заметим еще следующее: так как всякая комбинация из формул невозмущенного движения также является формулой такого же характера, то можно написать сколько угодно различных формул невозмущенного движения и к каждой такой формуле мы можем применить описанную выше основную операцию. Поэтому мы будем стараться выбирать для применения основной операции такие формулы невозмущенного движения, чтобы выкладки были по возможности проще и короче, чтобы составление уравнений (12.13) не заняло бы слишком много труда и времени. Для этого естественно подбирать такие соотношения из теории невозмущенного движения, которые содержат наименьшее число из тринадцати величин — времени, координат, составляющих скорости и элементов.

Кроме того, для большей простоты и наглядности получающихся формул и уравнений введем в рассмотрение, кроме составляющих возмущающего ускорения X, Y, Z на неподвижные оси координат $Oxyz$, составляющие того же возмущающего ускорения на три подвижные оси, неизменно связанные с движущейся точкой.

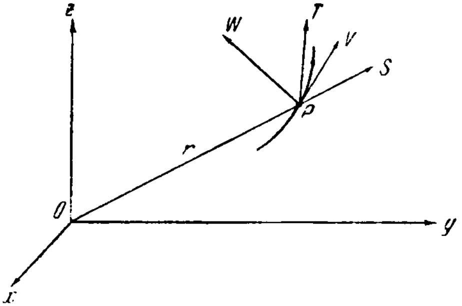


Рис. 66.

Эти подвижные оси выберем следующим образом. Вообразим плоскость, проходящую через текущий радиус-вектор движущейся точки и через вектор скорости, соответствующий этому же моменту времени. Если бы в момент t возмущающая сила прекратила свое действие, то для последующих моментов времени точка продолжала бы двигаться в указанной плоскости по законам Кеплера. В возмущенном движении эта плоскость, разумеется, не остается неизменной, а непрерывно изменяет свое положение в пространстве, являясь плоскостью **мгновенной орбиты** (или плоскостью оскулирующей орбиты, соответствующей моменту t).

Рассмотрим теперь подвижной триэдр осей с началом в движущейся точке. Одну из осей этого триэдра направим по радиусу-вектору и назовем ее «направлением $\vec{S}$»; другую ось триэдра выберем в плоскости мгновенной орбиты, перпендикулярно к радиусу-вектору так, чтобы ее можно было совместить надлежащим вращением с осью Oy, и назовем ее «направлением $\vec{T}$»; наконец, третью ось подвижного триэдра направим перпендикулярно к плоскости мгновенной орбиты так, чтобы ее можно было совместить надлежащим вращением с осью Oz, и назовем ее «направлением $\vec{W}$» (рис. 66).

Тогда направляющие косинусы этих трех направлений в неподвижной системе координат $Oxyz$ определятся, очевидно, следующими формулами:

$$\left.\begin{array}{lll} \cos(\vec{S}x)=\alpha, & \cos(\vec{S}y)=\beta, & \cos(\vec{S}z)=\gamma, \\ \cos(\vec{T}x)=\alpha', & \cos(\vec{T}y)=\beta', & \cos(\vec{T}z)=\gamma', \\ \cos(\vec{W}x)=\alpha'', & \cos(\vec{W}y)=\beta'', & \cos(\vec{W}z)=\gamma'', \end{array}\right\} \qquad (12.23)$$

где α, β, γ, α', β', γ' нужно взять из формул (12.7), а

$$\left.\begin{aligned} \alpha'' &= \frac{c_1}{c} = +\sin\Omega\sin i, \\ \beta'' &= \frac{c_2}{c} = -\cos\Omega\sin i, \\ \gamma'' &= \frac{c_3}{c} = +\cos i. \end{aligned}\right\} \tag{12.23'}$$

Обозначим теперь проекции возмущающего ускорения на три только что введенные направления через S, T, W соответственно. Тогда будем иметь следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} S &= \alpha X + \beta Y + \gamma Z, \\ T &= \alpha' X + \beta' Y + \gamma' Z, \\ W &= \alpha'' X + \beta'' Y + \gamma'' Z \end{aligned}\right\} \tag{12.24}$$

и

$$\left.\begin{aligned} X &= \alpha S + \alpha' T + \alpha'' W, \\ Y &= \beta S + \beta' T + \beta'' W, \\ Z &= \gamma S + \gamma' T + \gamma'' W. \end{aligned}\right\} \tag{12.24'}$$

Кроме того, для дальнейшего упрощения формул положим

$$\tilde{S} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\, S, \qquad \tilde{T} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\, T, \qquad \tilde{W} = \sqrt{\frac{p}{\mu}}\, W, \tag{12.25}$$

так что $\tilde{S}$, $\tilde{T}$, $\tilde{W}$ суть величины, пропорциональные проекциям возмущающего ускорения на подвижные оси.

3. Переходим теперь к непосредственному выводу дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять оскулирующие элементы возмущенного движения.

Возьмем вначале интегралы площадей невозмущенного движения

$$\left.\begin{aligned} y\dot{z} - z\dot{y} &= c_1, \\ z\dot{x} - x\dot{z} &= c_2, \\ x\dot{y} - y\dot{x} &= c_3. \end{aligned}\right\} \tag{12.26}$$

Подставляя сюда выражения для постоянных площадей из формул (12.23) и заменяя величину вектора момента скорости c ее значением $\sqrt{\mu p}$, мы напишем интегралы площадей в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin\Omega\sin i &= y\dot{z} - z\dot{y}, \\ \sqrt{\mu}\sqrt{p}\cos\Omega\sin i &= x\dot{z} - z\dot{x}, \\ \sqrt{\mu}\sqrt{p}\cos i &= x\dot{y} - y\dot{x}. \end{aligned}\right\} \tag{12.26'}$$

Применяя к каждому из соотношений (12.26′) основную операцию, мы получим следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}\sin\Omega\sin i+\sqrt{\mu}\sqrt{p}\,\frac{d\Omega}{dt}\cos\Omega\sin i+\\
&\qquad\qquad+\sqrt{\mu}\sqrt{p}\,\frac{di}{dt}\sin\Omega\cos i=yZ-zY,\\
&\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}\cos\Omega\sin i-\sqrt{\mu}\sqrt{p}\,\frac{d\Omega}{dt}\sin\Omega\sin i+\\
&\qquad\qquad+\sqrt{\mu}\sqrt{p}\,\frac{di}{dt}\cos\Omega\cos i=xZ-zX,\\
&\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}\cos i-\sqrt{\mu}\sqrt{p}\,\frac{di}{dt}\sin i=xY-yX,
\end{aligned}\right\}\qquad(12.27)$$

разрешая которые относительно производных от оскулирующих элементов (параметра, долготы узла и наклонности), мы найдем

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}=(yZ-zY)\sin\Omega\sin i+\\
&\qquad\qquad+(xZ-zX)\cos\Omega\sin i+(xY-yX)\cos i,\\
&\sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin i\,\frac{d\Omega}{dt}=(yZ-zY)\cos\Omega-(xZ-zX)\sin\Omega,\\
&\sqrt{\mu}\sqrt{p}\,\frac{di}{dt}=(yZ-zY)\sin\Omega\cos i+\\
&\qquad\qquad+(xZ-zX)\cos\Omega\cos i+(yX-xY)\sin i.
\end{aligned}\right\}\qquad(12.27')$$

Заменяя здесь x, y, z их выражениями из формул (12.5) и (12.7), а величины X, Y, Z их выражениями (12.24′) и имея в виду обозначения (12.25), мы получим после всех упрощений уравнения, определяющие скорости изменения параметра, долготы узла и наклонности

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp}{dt}&=2r\tilde{T},\\
\sin i\,\frac{d\Omega}{dt}&=\frac{r}{p}\sin u\cdot\tilde{W},\\
\frac{di}{dt}&=\frac{r}{p}\cos u\cdot\tilde{W}.
\end{aligned}\right\}\qquad(12.28)$$

Чтобы определить скорость изменения углового расстояния перицентра от узла, возьмем следующее соотношение:

$$r\cos(v+\omega)=x\cos\Omega+y\sin\Omega,\qquad(12.29)$$

являющееся очевидным следствием (12.5), (12.7) и (12.8), и применим к нему основную операцию. Но при этом нужно иметь в виду, что истинная аномалия v не может рассматриваться как величина такого же характера, как прямоугольные координаты или радиус-вектор.

Действительно, формула (9.47′) гл. IX, которая может быть переписана в виде

$$\frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{p}} e \sin v = \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}}{r},$$

показывает, что истинная аномалия v зависит не только от x, y, z, рассматриваемых при применении основной операции как величины постоянные, но также от $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, производные по которым входят в выражение (12.22). Поэтому, применяя к соотношению (12.29) основную операцию, мы получим результат дифференцирования в следующем виде:

$$-r \sin(v + \omega)\left[\left(\frac{dv}{dt}\right) + \frac{d\omega}{dt}\right] = (-x \sin \Omega + y \cos \Omega)\frac{d\Omega}{dt},$$

где через $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ обозначена производная от v, вычисляемая по формуле (12.22), т. е. производная, взятая по t, входящему только через посредство оскулирующих элементов.

Но формулы (12.5), (12.7) и (12.8) дают

$$-x \sin \Omega + y \cos \Omega = r \sin(v + \omega) \cos i,$$

вследствие чего последнее соотношение примет следующий вид:

$$\left(\frac{dv}{dt}\right) + \frac{d\omega}{dt} = -\cos i \frac{d\Omega}{dt}, \tag{12.30}$$

откуда

$$\frac{d\omega}{dt} = -\left(\frac{dv}{dt}\right) - \cos i \frac{d\Omega}{dt}. \tag{12.30′}$$

Так как выражение для скорости изменения долготы узла нами уже получено, то из последнего равенства остается еще исключить производную $\left(\frac{dv}{dt}\right)$. Из формул (9.48′) мы имеем

$$\left.\begin{aligned} e \sin v &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} V_r, \\ e \cos v &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} V_n - 1. \end{aligned}\right\} \tag{12.31}$$

Применяя к каждому из этих равенств основную операцию, мы получим следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} \sin v \frac{de}{dt} + e \cos v \left(\frac{dv}{dt}\right) &= \sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[\left(\frac{dV_r}{dt}\right) + \frac{V_r}{2p}\frac{dp}{dt}\right], \\ \cos v \frac{de}{dt} - e \sin v \left(\frac{dv}{dt}\right) &= \sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[\left(\frac{dV_n}{dt}\right) + \frac{V_n}{2p}\frac{dp}{dt}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{12.32}$$

Обозначим вообще через V_L проекцию вектора скорости на некоторое направление $\vec{L}$, определяемое направляющими косинусами α_L, β_L, γ_L (в системе $Oxyz$).

Тогда

$$V_L = \alpha_L \dot{x} + \beta_L \dot{y} + \gamma_L \dot{z},$$

и применяя к этому равенству основную операцию, мы имеем

$$\left(\frac{dV_L}{dt}\right) = (\alpha_L X + \beta_L Y + \gamma_L Z) + \left[\dot{x}\left(\frac{d\alpha_L}{dt}\right) + \dot{y}\left(\frac{d\beta_L}{dt}\right) + \dot{z}\left(\frac{d\gamma_L}{dt}\right)\right],$$

где выражение, стоящее в первой скобке, очевидно, представляет проекцию возмущающего ускорения на ось $\vec{L}$.

Возьмем теперь, в частности, за ось проекций $\vec{L}$ направление $\vec{S}$. Тогда

$$\alpha_L = \alpha = \frac{x}{r}, \quad \beta_L = \beta = \frac{y}{r}, \quad \gamma_L = \gamma = \frac{z}{r},$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{d\alpha_L}{dt}\right) = 0, \quad \left(\frac{d\beta_L}{dt}\right) = 0, \quad \left(\frac{d\gamma_L}{dt}\right) = 0.$$

Поэтому

$$\left(\frac{dV_r}{dt}\right) = \alpha X + \beta Y + \gamma Z = S.$$

Далее, возьмем за ось проекций $\vec{L}$ прямую, перпендикулярную к радиусу-вектору в плоскости мгновенной орбиты, т. е. возьмем за $\vec{L}$ направление $\vec{T}$.

Тогда

$$\alpha_L = \alpha', \quad \beta_L = \beta', \quad \gamma_L = \gamma'.$$

Применяя к формулам (9.56′), определяющим направляющие косинусы α', β', γ' направления $\vec{T}$, основную операцию, мы найдем

$$\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right) = -\alpha\left(\frac{du}{dt}\right) - \beta'\frac{d\Omega}{dt} + \alpha''\cos u\frac{di}{dt},$$

$$\left(\frac{d\beta'}{dt}\right) = -\beta\left(\frac{du}{dt}\right) + \alpha'\frac{d\Omega}{dt} + \beta''\cos u\frac{di}{dt},$$

$$\left(\frac{d\gamma'}{dt}\right) = -\gamma\left(\frac{du}{dt}\right) + \gamma''\cos u\frac{di}{dt},$$

откуда получаем *)

$$\dot{x}\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right) + \dot{y}\left(\frac{d\beta'}{dt}\right) + \dot{z}\left(\frac{d\gamma'}{dt}\right) = -V_r\left(\frac{du}{dt}\right) + (\alpha'\dot{y} - \beta'\dot{x})\frac{d\Omega}{dt}.$$

---

*) Так как α'', β'', γ'' суть направляющие косинусы прямой, перпендикулярной к плоскости орбиты, а вектор скорости лежит в этой плоскости, то

$$\alpha''\dot{x} + \beta''\dot{y} + \gamma''\dot{z} = 0.$$

Но в силу (9.57) мы имеем

$$\alpha'\dot{y}-\beta'\dot{x}=\frac{c}{p}e(\alpha'\beta-\beta'\alpha)\sin v=-V_r\cos i,$$

а поэтому

$$\dot{x}\left(\frac{d\alpha'}{dt}\right)+\dot{y}\left(\frac{d\beta'}{dt}\right)+\dot{z}\left(\frac{d\gamma'}{dt}\right)=-V_r\left[\left(\frac{du}{dt}\right)+\cos i\frac{d\Omega}{dt}\right].$$

Так как

$$\left(\frac{du}{dt}\right)=\left(\frac{dv}{dt}\right)+\frac{d\omega}{dt},$$

то последнее выражение равно нулю в силу соотношения (12.30).

Таким образом, имеем окончательно

$$\left(\frac{dV_n}{dt}\right)=\alpha'X+\beta'Y+\gamma'Z=T.$$

Подставляя теперь выражения для V_r и V_n и их производных $\left(\frac{dV_r}{dt}\right)$ и $\left(\frac{dV_n}{dt}\right)$ в уравнения (12.32), мы получим следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}\sin v\frac{de}{dt}+e\cos v\left(\frac{dv}{dt}\right)&=\tilde{S}+\frac{r}{p}e\sin v\cdot\tilde{T},\\ \cos v\frac{de}{dt}-e\sin v\left(\frac{dv}{dt}\right)&=\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}+\frac{r}{p}e\cos v\cdot\tilde{T}.\end{aligned}\right\}\quad(12.32')$$

Решая полученные уравнения (12.32′) относительно неизвестных производных $\frac{de}{dt}$ и $\left(\frac{dv}{dt}\right)$, мы легко найдем

$$\frac{de}{dt}=\tilde{S}\sin v+\left[\cos v+(\cos v+e)\frac{r}{p}\right]\tilde{T},\qquad(12.33)$$

и

$$e\left(\frac{dv}{dt}\right)=\tilde{S}\cos v-\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}\sin v.\qquad(12.34)$$

Равенство (12.33) дает скорость изменения оскулирующего эксцентриситета, а (12.34) позволяет исключить производную $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ из (12.30), что приводит к следующему уравнению:

$$\frac{d\omega}{dt}=-\frac{\cos v}{e}\tilde{S}+\frac{\sin v}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}-\frac{r}{p}\sin u\operatorname{ctg} i\cdot\tilde{W},\qquad(12.35)$$

определяющему скорость изменения углового расстояния перицентра от узла.

4. Остается найти еще уравнение, определяющее скорость изменения элемента τ (момента прохождения через перицентр).

Для этого рассмотрим уравнение (12.9), устанавливающее связь между истинной аномалией и временем. Полагая для сокращения

$$I = \int_0^v \frac{dv'}{(1+e\cos v')^2}, \tag{12.36}$$

мы напишем это уравнение в следующем виде:

$$\sqrt{\mu}\, p^{-3/2}(t-\tau) = I. \tag{12.37}$$

Применяя к уравнению (12.37) основную операцию, мы имеем

$$-\frac{3}{2}\sqrt{\mu}\, p^{-5/2}(t-\tau)\frac{dp}{dt} - \sqrt{\mu}\, p^{-3/2}\frac{d\tau}{dt} = \left(\frac{dI}{dt}\right),$$

откуда выводим

$$\sqrt{\frac{\mu}{p}}\frac{d\tau}{dt} = -\frac{3}{2}I\frac{dp}{dt} - p\left(\frac{dI}{dt}\right). \tag{12.38}$$

Теперь нужно найти производную $\left(\frac{dI}{dt}\right)$. Но I зависит от времени двояким образом — через посредство верхнего предела интеграла v и через посредство e.

Поэтому мы имеем

$$\left(\frac{dI}{dt}\right) = \frac{\partial I}{\partial e}\frac{de}{dt} + \frac{\partial I}{\partial v}\left(\frac{dv}{dt}\right).$$

Вычисляя частные производные $\frac{\partial I}{\partial e}$ и $\frac{\partial I}{\partial v}$, находим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial e} &= -2\int_0^v \frac{\cos v'\, dv'}{(1+e\cos v')^3} = -I_1, \\ \frac{\partial I}{\partial v} &= \frac{1}{(1+e\cos v)^2} = \frac{r^2}{p^2}. \end{aligned}\right\} \tag{12.39}$$

Имея в виду эти выражения, мы напишем уравнение (12.38) в форме

$$\sqrt{\frac{\mu}{p}}\frac{d\tau}{dt} = -\frac{3}{2}I\frac{dp}{dt} + pI_1\frac{de}{dt} - p\frac{r^2}{p^2}\left(\frac{dv}{dt}\right).$$

Подставляя сюда вместо производных $\frac{dp}{dt}$, $\frac{de}{dt}$ и $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ их выражения и полагая еще

$$N = \frac{p^2}{r^2}I_1, \tag{12.40}$$

мы будем иметь

$$\frac{e}{p}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{d\tau}{dt}=(eN\sin v-\cos v)\,\frac{r^2}{p^2}\tilde{S}+$$
$$+\left\{-3e\frac{p}{r}I+e\left[\cos v+(\cos v+e)\frac{r}{p}\right]N+\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v\right\}\frac{r^2}{p^2}\tilde{T}. \qquad (12.38')$$

Правую часть последнего равенства можно значительно упростить, используя некоторое тождество, которое сейчас выведем. Для этого рассмотрим производную по v от выражения

$$R=\frac{r}{p}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v.$$

Мы имеем

$$\frac{dR}{dv}=\frac{r}{p}\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos v+e\sin^2 v\left(1+2\frac{r}{p}\right)\frac{r^2}{p^2}.$$

Подставив в правую часть последнего равенства вместо $\sin^2 v$ равную величину $1-\cos^2 v$ и имея в виду тождество

$$e\cos v\left(1+2\frac{r}{p}\right)\frac{r^2}{p^2}\equiv\frac{r}{p}\left(1+\frac{r}{p}\right)-2\frac{r^3}{p^3},$$

мы получим

$$\frac{dR}{dv}=e\frac{r^2}{p^2}\left(1+2\frac{r}{p}\right)+2\frac{r^3}{p^3}\cos v.$$

Но $\left(\text{так как } e\cos v=\frac{p}{r}-1\right)$

$$1+2\frac{r}{p}\cdot 1=1+2\frac{r}{p}\left(\frac{p}{r}-e\cos v\right)=3-2\frac{r}{p}e\cos v,$$

вследствие чего мы имеем

$$\frac{dR}{dv}=3e\frac{r^2}{p^2}+2(1-e^2)\frac{r^3}{p^3}\cos v.$$

Интегрируя это тождество в пределах от нуля до v, мы находим с помощью формул (12.36) и (12.39)

$$\frac{r}{p}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v=3eI+(1-e^2)I_1, \qquad (12.40')$$

откуда

$$-3e\frac{p}{r}I=-\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v+(1-e^2)\frac{r}{p}N,$$

и выражение, стоящее в фигурных скобках в правой части формулы (12.38), приведется, как легко видеть, к $\frac{p}{r}N$.

Таким образом, уравнение (12.38′) примет следующий вид:

$$\frac{e}{p}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{d\tau}{dt}=\left[(eN\sin v-\cos v)\tilde{S}+\frac{p}{r}N\tilde{T}\right]\frac{r^2}{p^2} \qquad (12.41)$$

или (ввиду (12.40))

$$\frac{e}{p}\sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\frac{d\tau}{dt}=\left(eI_1\sin v-\frac{r^2}{p^2}\cos v\right)\tilde{S}+\frac{p}{r}I_1\tilde{T}. \qquad (12.41')$$

Итак, мы получили все шесть уравнений, определяющих скорости изменения оскулирующих элементов. Эти уравнения пригодны для любого типа невозмущенной орбиты и заменяют собой уравнения (12.1).

5. Выписывая все полученные уравнения вместе, мы будем иметь следующую систему:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt}&=\frac{r}{p}\sin u\operatorname{cosec} i\cdot\tilde{W},\\
\frac{di}{dt}&=\frac{r}{p}\cos u\cdot\tilde{W},\\
\frac{d\omega}{dt}&=-\frac{\cos v}{e}\cdot\tilde{S}+\frac{\sin v}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}-\frac{r}{p}\sin u\operatorname{ctg} i\cdot\tilde{W},\\
\frac{dp}{dt}&=2r\tilde{T},\\
\frac{de}{dt}&=\tilde{S}\sin v+\left[\cos v+(\cos v+e)\frac{r}{p}\right]\cdot\tilde{T},\\
\frac{d\tau}{dt}&=\frac{p}{e}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[(eN\sin v-\cos v)\tilde{S}+\frac{p}{r}N\cdot\tilde{T}\right]\frac{r^2}{p^2},
\end{aligned}\right\} \qquad (12.42)$$

причем полезно напомнить, что в этих уравнениях

$$\tilde{S}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\,S,\qquad \tilde{T}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\,T,\qquad \tilde{W}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\,W,$$

$$u=v+\omega,\qquad \frac{r}{p}=(1+e\cos v)^{-1},$$

величина N определяется формулой

$$N=\frac{p^2}{r^2}I_1=2\frac{p^2}{r^2}\int_0^v\frac{\cos v'\,dv'}{(1+e\cos v')^3}$$

и истинная аномалия связана с временем t уравнением

$$\frac{\sqrt{\mu}}{p^{3/2}}(t-\tau)=\int_0^v\frac{dv'}{(1+e\cos v')^2}. \qquad (12.42')$$

Величины S, T, W определяются формулами (12.24) и, следовательно, являются, вообще говоря, функциями времени, координат x, y, z, их первых производных $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и направляющих косинусов, которые в свою очередь зависят от аргумента широты, долготы узла и от наклонности.

Заменяя координаты и составляющие скорости по формулам невозмущенного движения (12.5) их выражениями, мы сделаем правые части уравнений (12.42) известными функциями времени, элементов орбиты и истинной аномалии v, которая в свою очередь зависит от времени, а также от элементов p, e и τ через посредство уравнения (12.42′).

Уравнения (12.42), определяющие изменения оскулирующих элементов Ω, i, ω, p, e, τ при произвольно заданной возмущающей силе, приводятся в том или ином виде во всех классических сочинениях по небесной механике и в большинстве современных курсов.

Мы будем называть эти уравнения уравнениями Ньютона. Заметим, что если составляющие возмущающей силы не зависят, как это часто случается, от времени t, то правые части уравнений Ньютона (12.42) будут зависеть от времени только через посредство истинной аномалии v (явным образом!). Поэтому время t можно вовсе исключить из уравнений Ньютона, приняв за независимую переменную величину v.

Связь между дифференциалами новой и старой независимых переменных определится формулой

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+\left(\frac{dv}{dt}\right), \tag{12.43}$$

где $\frac{\partial v}{\partial t}$ обозначает производную от v по времени, вычисленную в предположении, что все элементы орбиты суть величины постоянные, а $\left(\frac{dv}{dt}\right)$ определяется формулой (12.34).

Но при постоянных элементах производная от v по t определяется из интеграла площадей в полярных координатах в плоскости орбиты, так что

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\sqrt{\mu}\sqrt{p}}{r^2}, \tag{12.43′}$$

а поэтому мы имеем

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\sqrt{\mu}\sqrt{p}}{r^2}+\frac{\cos v}{e}\cdot\tilde{S}-\frac{\sin v}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}, \tag{12.44}$$

причем правая часть этого равенства не зависит от t, когда возмущающая сила также не зависит от времени.

Исключая из уравнений (12.42) дифференциал dt при помощи (12.44), мы получим уравнения Ньютона в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\Omega}{dv}=\frac{r}{p}\sin u\operatorname{cosec} i\cdot\tilde{W}^*,\\
&\frac{di}{dv}=\frac{r}{p}\cos u\cdot\tilde{W}^*,\\
&\frac{d\omega}{dv}=-\frac{\cos v}{e}\cdot\tilde{S}^*+\frac{\sin v}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}^*-\frac{r}{p}\sin u\operatorname{ctg} i\cdot\tilde{W}^*,\\
&\frac{dp}{dv}=2r\tilde{T}^*,\\
&\frac{de}{dv}=\tilde{S}^*\sin v+\left[\cos v+(\cos v+e)\frac{r}{p}\right]\tilde{T}^*,\\
&\frac{d\tau}{dv}=\frac{p}{e}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\left[(eN\sin v-\cos v)\tilde{S}^*+\frac{p}{r}N\tilde{T}^*\right]\frac{r^2}{p^2},
\end{aligned}\right\}\quad(12.45)$$

где

$$\tilde{S}^*=K\tilde{S},\quad \tilde{T}^*=K\tilde{T},\quad \tilde{W}^*=K\tilde{W},\qquad(12.45')$$

и

$$K=\left[\frac{\sqrt{\mu}\sqrt{p}}{r^2}+\frac{\cos v}{e}\,\tilde{S}-\frac{\sin v}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}\right]^{-1}.\qquad(12.45'')$$

Определив из уравнений (12.45) элементы оскулирующей орбиты в зависимости от переменной v и шести произвольных постоянных, мы найдем затем и время t в зависимости от v из (12.44) простой квадратурой

$$t-t_0=\int_{v_0}^{v}K\,dv,$$

где v_0 не является произвольной постоянной, так как связано с t_0 формулой, выводимой из (12.37),

$$\sqrt{\mu}\,p_0^{-3/2}(t_0-\tau_0)=I_0,$$

причем

$$I_0=\int_0^{v_0}\frac{dv'}{(1+e_0\cos v')^2}.$$

Уравнения (12.42) или (12.45), являющиеся преобразованием к новым зависимым переменным исходных уравнений (12.1) или (12.12), суть уравнения абсолютно точные, справедливые при любом характере возмущающей силы, и вопрос заключается только в том, как эти уравнения интегрировать. Этот вопрос будет рассмотрен в следующей главе.

Здесь же заметим только, что в случае малой возмущающей силы правые части всех уравнений (12.42) суть величины малые, откуда следует, что оскулирующие элементы изменяются в этом случае весьма медленно. Это обстоятельство делает уравнения (12.42) или (12.45) более удобными для приближенного интегрирования, чем исходные уравнения в прямоугольных координатах (12.1).

§ 3. Частные случаи уравнений Ньютона

Уравнения (12.42), названные нами уравнениями Ньютона, определяющие изменения оскулирующих элементов, имеют силу, как уже было замечено, при любом характере возмущающей силы, а поэтому являются совершенно общими.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые важные частные случаи, часто встречающиеся в приложениях, в отдельных из которых уравнения (12.42) принимают более простой вид. Одновременно укажем, как в отдельных случаях выявляется действие возмущающей силы на различные элементы оскулирующей орбиты.

Предварительно заметим, что первые два уравнения системы уравнений Ньютона содержат только составляющую W возмущающей силы, перпендикулярную к плоскости оскулирующей орбиты; последние три уравнения системы (12.42), наоборот, не содержат составляющей W; наконец, только одно третье уравнение содержит все три составляющие возмущающей силы (возмущающего ускорения).

Теперь перейдем к рассмотрению частных случаев.

1. Сначала рассмотрим важный случай центральной возмущающей силы, когда линия действия последней всегда совпадает с прямой, проходящей через движущуюся точку и начало координат (главный центр притяжения).

В этом случае проекция S возмущающей силы или равна величине самой этой силы (когда направление последней совпадает с направлением $\vec{S}$, т. е. с направлением прямой, идущей от начала координат к точке P) или равна величине силы, взятой с обратным знаком (когда направление возмущающей силы противоположно направлению $\vec{S}$).

Две другие проекции возмущающей силы в рассматриваемом случае равны нулю, т. е.

$$T = W = 0.$$

Уравнения Ньютона принимают в этом случае следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\Omega}{dt}=0, \quad \frac{di}{dt}=0, \quad \frac{dp}{dt}=0,\\
&\frac{d\omega}{dt}=-\frac{\cos v}{e}\tilde{S}, \quad \frac{de}{dt}=\tilde{S}\sin v,\\
&\frac{d\tau}{dt}=\frac{p}{e}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\,(eN\sin v-\cos v)\frac{r^2}{p^2}\tilde{S}.
\end{aligned}\right\} \tag{12.46}$$

Отсюда сразу же находим

$$\Omega=\Omega_0=\text{const}, \quad i=i_0=\text{const}, \quad p=p_0=\text{const}. \tag{12.46'}$$

Равенства (12.46′) являются, очевидно, первыми интегралами уравнений Ньютона (12.46), которые показывают, что положение плоскости орбиты не изменяется с течением времени и что размеры орбиты (характеризуемые ее параметром) также остаются неизменными.

Но если Ω, i, p остаются постоянными, то проекции момента количества движения (момента скорости), т. е. c_1, c_2, c_3 также остаются постоянными, так что равенства (12.46′) просто суть интегралы площадей, написанные в другой форме, которые, как нам известно (см. § 4 гл. IX), имеют место во всякой задаче о движении материальной точки под действием центральной силы.

Ввиду (12.46′) уравнения (12.46) приводятся в рассматриваемом случае к системе только трех уравнений с тремя неизвестными функциями и напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\omega}{dt}=-\sqrt{\frac{p_0}{\mu}}\,\frac{\cos v}{e}\cdot S,\\
&\frac{de}{dt}=+\sqrt{\frac{p_0}{\mu}}\,S\sin v,\\
&\frac{d\tau}{dt}=\frac{r^2}{e\mu}(eN\sin v-\cos v)S,
\end{aligned}\right\} \tag{12.46''}$$

вследствие чего исследование возмущенного движения в этом случае значительно упрощается.

Случай центральной возмущающей силы может встретиться в различных астрономических задачах.

Пусть, например, рассматривается задача о движении материальной точки в экваториальной плоскости тела вращения, поверхности равной плотности которого суть поверхности вращения вокруг оси вращения тела, симметричные относительно некоторой плоскости, перпендикулярной к общей оси вращения (плоскость экватора тела). Тогда силовая функция притяжения такого тела на точку, находящуюся в плоскости экватора, определится следующей формулой (см. § 4 гл. V):

$$U(r)=\frac{fm}{r}+f\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_{2k}}{r^{2k+1}},$$

где m — масса тела и A_{2k} — постоянные коэффициенты, определяемые его структурой.

Сила притяжения, действующая на материальную точку (единичной массы) определится формулой

$$F(r)=\frac{dU(r)}{dt}=-\frac{fm}{r^2}-f\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)A_{2k}}{r^{2k+2}},$$

которую можно написать в следующем виде:

$$F(r)=-\frac{\mu}{r^2}+S(r)=\frac{d}{dr}\left(\frac{\mu}{r}\right)+\frac{dR(r)}{dr},$$

где положено

$$\mu=fm,\quad S(r)=\frac{dR(r)}{dr}=-f\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)A_{2k}}{r^{2k+2}}.$$

Если начало координат взять в центре симметрии тела, за плоскость xOy принять его экваториальную плоскость и если начальный радиус-вектор и вектор начальной скорости точки лежат в этой экваториальной плоскости, то в силу симметрии точка всегда будет находиться в плоскости экватора тела и ее движение определится уравнениями

$$\ddot{x}=-\frac{\mu x}{r^3}+\frac{\partial R}{\partial x},\qquad \ddot{y}=-\frac{\mu y}{r^3}+\frac{\partial R}{\partial y}.$$

Применяя метод Лагранжа, мы приведем в этом случае исследование движения точки (в плоскости экватора тела) к интегрированию и исследованию системы (12.46′), или, так как возмущающее ускорение S не зависит от времени, к интегрированию системы

$$\frac{d\omega}{dv}=-\sqrt{\frac{p_0}{\mu}}\,\frac{\cos v}{e}\cdot S^*,\qquad \frac{de}{dv}=+\sqrt{\frac{p_0}{\mu}}\,S^*\sin v,$$

$$\frac{d\tau}{dv}=\frac{r^2}{e\mu}(eN\sin v-\cos v)S^*,$$

где

$$S^*=\left(\frac{\sqrt{\mu}\sqrt{p}}{r^2}+\frac{\cos v}{e}\tilde{S}\right)^{-1}\cdot\tilde{S}.$$

К рассмотренной только что задаче можно привести (в некотором приближении!) исследование движения какого-нибудь из спутников больших планет, движущегося вблизи экваториальной плоскости планеты.

Эта же задача возникает при рассмотрении движения экваториального искусственного спутника Земли (или Луны, Марса, Венеры), движущегося вне земной атмосферы.

Другой интересный случай центральной возмущающей силы представляет задача о движении планеты в предположении, что масса Солнца изменяется с течением времени, или также задача об относительном движении в системе двойной звезды в предположении, что одна или даже обе из двух звезд обладают массами, зависящими от времени.

В самом деле, пусть m_0 и m_1 суть массы Солнца и планеты, или массы двух компонентов звездной пары.

Если одна (или обе) из этих двух масс изменяется с течением времени, то величина $\mu = f(m_0 + m_1)$ также будет некоторой функцией времени *).

Допустим, что движение планеты относительно Солнца (или движение одной звезды относительно другой) может быть определено уравнениями

$$\ddot{x} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -\frac{\mu z}{r^3} \tag{12.47}$$

и предположим, что величина μ изменяется таким образом, что ее можно представить в виде суммы

$$\mu = \mu_0 + \tilde{\mu}(t),$$

где μ_0 есть некоторая постоянная, а $\tilde{\mu}(t)$ — данная функция времени.

Так как уравнения (12.47) можно рассматривать как уравнения движения материальной точки единичной массы под действием притяжения неподвижного центра, масса которого есть $m_0 + m_1$, то ускорение, которое вызывает притяжение этого неподвижного центра, представится в виде

$$F = -\frac{\mu_0}{r^2} - \frac{\tilde{\mu}(t)}{r^2}. \tag{12.47'}$$

Первая часть этого ускорения представляет эффект притяжения некоторой постоянной массы, находящейся в начале координат, а вторая часть может рассматриваться как возмущающее ускорение, и так как линия действия

---

*) Мы придем к той же задаче, считая массы постоянными, но предполагая, что «постоянная» f закона всемирного тяготения на самом деле не остается постоянной, а изменяется со временем.

последнего всегда совпадает с прямой, соединяющей движущуюся точку с началом координат, то мы имеем здесь пример центральной возмущающей силы, так что

$$T = W = 0, \quad S = -\frac{\tilde{\mu}(t)}{r^2}.$$

Поэтому для изучения движения в этой задаче мы можем пользоваться, наряду с уравнениями (12.47), также уравнениями (12.46″) в оскулирующих элементах. Заметим, что в рассмотренном случае возмущающее ускорение зависит не только от радиуса-вектора движущейся точки, но также и от времени.

В качестве третьего примера центральной возмущающей силы рассмотрим задачу о движении одиночной звезды внутри шарообразного звездного скопления (или шарообразного газового облака) с массивной центральной массой m_0.

Тогда одиночная звезда, рассматриваемая как материальная точка единичной массы, находится под действием притяжения центральной массы m и под действием притяжения материи, заключенной внутри шара, радиус которого равен расстоянию звезды-точки от центра скопления или облака.

Задача о движении звезды приводится поэтому к задаче о движении с центральной возмущающей силой, и возмущающее ускорение определится формулой

$$S = -f\frac{m(r)}{r^2},$$

где $m(r)$ — масса притягивающей материи.

Предполагая, что скопление, или облако, обладает сферическим распределением плотностей, мы определим возмущающую массу следующей формулой:

$$m(r) = 4\pi\int_0^r r'^2\delta(r')\,dr',$$

где $\delta(r')$ — плотность материи, образующей облако.

Таким образом, возмущающее ускорение зависит опять только от радиуса-вектора движущейся звезды-точки, и мы опять приходим к задаче о движении с центральной возмущающей силой.

Можно привести еще множество примеров такого же рода, но мы ограничимся уже рассмотренными.

2. Рассмотрим теперь задачу, где возмущающей силой является сила сопротивления некоторой среды. Такова, например, задача о движении звезды-точки внутри скопления с центральной массой, но при условии, что эффектом притяжения материи, составляющей скопление, мы можем пренебречь и сосредоточиваем внимание исключительно на эффекте сопротивления, которое оказывает скопление движущейся внутри него звезде.

Еще более важным случаем задачи этого рода является задача о движении искусственного спутника Земли (или Марса, или Венеры) внутри атмосферы планеты, которая оказывает сопротивление движущемуся объекту, подобное тому, какое испытывает артиллерийский снаряд, пуля или баллистическая ракета при полете в земной атмосфере *).

И та и другая из упомянутых задач (и всякая другая задача такого же рода) могут рассматриваться как задачи о движении материальной точки единичной массы под действием силы притяжения центрального тела-точки и под действием силы сопротивления атмосферы, плотность которой в каждой ее точке есть определенная функция координат этой точки (например, функция высоты точки над поверхностью Земли). Тогда задача опять приводится к рассмотрению и исследованию уравнений движения вида (12.1), где составляющие основного ускорения определяются формулами (12.2), а X, Y, Z суть составляющие ускорения, вызываемого силой сопротивления.

Из теоретической механики (или из внешней баллистики) известно, что сила сопротивления зависит некоторым образом от плотности среды и от скорости движущейся внутри этой среды точки и всегда направлена по касательной к траектории этой точки в сторону, противоположную движению.

Обозначая через R величину ускорения, вызываемого силой сопротивления, мы будем иметь следующие формулы:

$$X = -R\frac{\dot{x}}{V}, \quad Y = -R\frac{\dot{y}}{V}, \quad Z = -R\frac{\dot{z}}{V}. \qquad (12.48)$$

Для определения составляющих возмущающего ускорения на подвижные оси, т. е. на направления $\vec{S}$, $\vec{T}$, $\vec{W}$, воспользуемся общими формулами (12.24), имея в виду (12.48). Тогда

$$S = -\frac{R}{V}(\alpha\dot{x} + \beta\dot{y} + \gamma\dot{z}),$$

$$T = -\frac{R}{V}(\alpha'\dot{x} + \beta'\dot{y} + \gamma'\dot{z}),$$

$$W = -\frac{R}{V}(\alpha''\dot{x} + \beta''\dot{y} + \gamma''\dot{z}).$$

---

*) При изучении движения искусственного спутника или космического корабля в атмосфере Земли необходимо, вообще говоря, учитывать еще влияние сжатия Земли, т. е. рассматривать Землю как определенное тело, а не как материальную точку. Однако обычно влияние формы Земли и влияние ее атмосферы рассматриваются по отдельности, что оказывается справедливым только в некотором первом приближении. Закон сопротивления атмосферы заимствуют из аэродинамики, принимая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости точки.

Но, как уже было замечено выше*), мы имеем

$$\alpha''\dot{x}+\beta''\dot{y}+\gamma''\dot{z}=0$$

и, следовательно, $W=0$.

Далее, формула (10.7) гл. X дает

$$\alpha\frac{\dot{x}}{V}+\beta\frac{\dot{y}}{V}+\gamma\frac{\dot{z}}{V}=\cos\delta,$$

где δ есть угол, образуемый направлением скорости V движущейся точки с направлением ее радиуса-вектора (рис. 67).

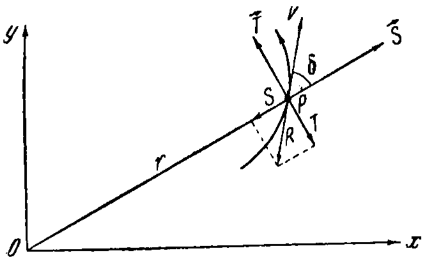


Рис. 67.

Затем, так как α', β', γ' суть направляющие косинусы прямой, лежащей в плоскости мгновенной орбиты и перпендикулярной к радиусу-вектору, то, очевидно,

$$\alpha'\frac{\dot{x}}{V}+\beta'\frac{\dot{y}}{V}+\gamma'\frac{\dot{z}}{V}=\sin\delta.$$

Имея еще в виду выражения для $\cos\delta$ и $\sin\delta$ (см. формулы § 1 гл. X), мы получим для составляющих S и T возмущающего ускорения следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} S&=-R\cos\delta=-R\frac{e\sin v}{\sqrt{1+2e\cos v+e^2}},\\ T&=-R\sin\delta=-R\frac{1+e\cos v}{\sqrt{1+2e\cos v+e^2}}. \end{aligned}\right\}\qquad(12.49)$$

Теперь, обращаясь к уравнениям Ньютона (12.42), мы имеем, прежде всего,

$$\frac{d\Omega}{dt}=0,\quad \frac{di}{dt}=0,$$

т. е., так же как и в случае центральной возмущающей силы,

$$\Omega=\Omega_0=\text{const},\quad i=i_0=\text{const}.\qquad(12.49')$$

Равенства (12.49′) являются, очевидно, интегралами уравнений (12.42) и показывают, что эффект сопротивления атмосферы, в которой движется точка, не изменяет положения плоскости орбиты, так что движение происходит в неизменной плоскости, определяемой начальным радиусом-вектором и направлением начальной скорости.

---

*) См. сноску на стр. 585.

Это свойство движения в сопротивляющейся среде можно вывести также из уравнений (12.1), которые в рассматриваемом случае также должны допускать два первых интеграла, аналогичных интегралам площадей задачи о движении в центральном поле сил.

Действительно, напишем уравнения движения точки, имея в виду формулы (12.48), в таком виде:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}&=-\frac{\mu x}{r^3}-R\frac{\dot{x}}{V},\\ \ddot{y}&=-\frac{\mu y}{r^3}-R\frac{\dot{y}}{V},\\ \ddot{z}&=-\frac{\mu z}{r^3}-R\frac{\dot{z}}{V}.\end{aligned}\right\}\tag{12.50}$$

Составляя из этих уравнений такие же комбинации, как и при выводе интегралов площадей в задаче о движении под действием центральной силы, мы легко получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dt}(y\dot{z}-z\dot{y})&=-\frac{R}{V}(y\dot{z}-z\dot{y}),\\ \frac{d}{dt}(z\dot{x}-x\dot{z})&=-\frac{R}{V}(z\dot{x}-x\dot{z}),\\ \frac{d}{dt}(x\dot{y}-y\dot{x})&=-\frac{R}{V}(x\dot{y}-y\dot{x}),\end{aligned}\right\}\tag{12.51}$$

исключая из которых величину $-\frac{R}{V}dt$, найдем

$$\frac{d(y\dot{z}-z\dot{y})}{y\dot{z}-z\dot{y}}=\frac{d(z\dot{x}-x\dot{z})}{z\dot{x}-x\dot{z}}=\frac{d(x\dot{y}-y\dot{x})}{x\dot{y}-y\dot{x}}.\tag{12.51$'$}$$

Интегрируя полученные уравнения, найдем следующие два интеграла, заменяющие собой интегралы площадей в задаче с центральной силой:

$$\frac{y\dot{z}-z\dot{y}}{c_1^0}=\frac{z\dot{x}-x\dot{z}}{c_2^0}=\frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{c_3^0},\tag{12.52}$$

где c_1^0, c_2^0, c_3^0 суть произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям соотношениями

$$\frac{y_0\dot{z}_0-z_0\dot{y}_0}{c_1^0}=\frac{z_0\dot{x}_0-x_0\dot{z}_0}{c_2^0}=\frac{x_0\dot{y}_0-y_0\dot{x}_0}{c_3^0},$$

показывающими, что эти постоянные не независимы между собой.

Из уравнений (12.52) находим

$$\left.\begin{aligned} c_1^0 x + c_2^0 y + c_3^0 z = 0, \\ c_1^0 \dot{x} + c_2^0 \dot{y} + c_3^0 \dot{z} = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (12.52')$$

это показывает, что движение точки происходит в неизменной плоскости и что вектор скорости всегда лежит в этой плоскости.

Обозначая, как обычно, через c_1, c_2, c_3 проекции вектора момента скорости на оси координат, мы будем иметь из (12.51) и (12.52)

$$c_1 = c_1^0 \cdot \varphi(t), \quad c_2 = c_2^0 \cdot \varphi(t), \quad c_3 = c_3^0 \cdot \varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ есть функция времени, определяемая формулой

$$\varphi(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} \frac{R}{V} dt} \qquad (e = 2{,}7182\ldots).$$

Таким образом, хотя направление вектора момента скорости в силу интегралов (12.52) остается неизменным, но его величина не остается постоянной и есть некоторая функция времени.

Возвращаясь теперь к уравнениям Ньютона (12.42) и имея в виду интегралы (12.49′), мы приведем уравнения, определяющие оскулирующие элементы, к системе только четырех уравнений, которые после замены S и T их выражениями (12.49) и некоторых очевидных упрощений, напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\omega}{dt} &= -2\,\frac{R}{V} \cdot \frac{\sin v}{e}, \\ \frac{de}{dt} &= -2\,\frac{R}{V}(\cos v + e), \\ \frac{dp}{dt} &= -2p\,\frac{R}{V}, \\ \frac{d\tau}{dt} &= -\frac{r^2}{\sqrt{\mu p}} \cdot \frac{R}{V}\left[\frac{1}{e}N(1 + 2e\cos v + e^2) - \sin v \cos v\right], \end{aligned}\right\} \qquad (12.53)$$

где скорость V определяется известной формулой

$$V = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,\sqrt{1 + 2e\cos v + e^2}.$$

Из полученных уравнений можно сделать некоторые общие выводы. Рассмотрим сначала второе из уравнений (12.53) и предположим, что начальное значение оскулирующего эксцентриситета $e_0 > 1$. Тогда, по непрерывности, оскулирующий эксцентриситет обязательно будет некоторое время оставаться бо́льшим единицы, и сумма $\cos v+e$ в течение этого же времени будет оставаться величиной положительной. Так как R всегда положительно, то второе из уравнений (12.53) показывает, что пока $e>1$, производная $\frac{de}{dt}$ остается отрицательной, а следовательно, эксцентриситет e есть убывающая функция времени. Поэтому в конце концов эксцентриситет может сделаться меньшим единицы, но дальнейшее его изменение проследить при помощи одного этого уравнения затруднительно, так как множитель $\cos v+e$ при $e<1$ может принимать и положительные и отрицательные значения.

Более ясно поведение оскулирующего параметра. Действительно, третье из уравнений (12.53) сразу показывает, что $\frac{dp}{dt}<0$ всегда (т. е. при любом законе сопротивления), т. е. что параметр есть всегда монотонно убывающая функция времени. Таким образом, каковы бы ни были начальные условия, оскулирующая орбита постоянно как бы сжимается к своей фокальной оси.

Заметим, что если сила сопротивления просто пропорциональна скорости движущейся точки, то третье уравнение легко интегрируется. В самом деле, пусть $R=\varkappa V$, где $\varkappa$ — некоторая постоянная. Тогда

$$\frac{dp}{dt}=-2\varkappa p,$$

откуда находим, опять обозначая буквой e основание натуральных логарифмов, новый первый интеграл системы (12.53)

$$p=p_0e^{-2\varkappa(t-t_0)},$$

и система (12.53) приводится в рассматриваемом частном случае к системе только третьего порядка.

3. Общие уравнения Ньютона (12.42) пригодны, как уже было отмечено выше, для любого типа возмущенного движения.

Однако в большинстве случаев, встречающихся в приложениях как при изучении движений естественных, так и искусственных небесных тел, все время (или по крайней мере длительное время) сохраняется эллиптический тип движения.

В этом случае постоянно выполняется неравенство

$$V^2-\frac{2\mu}{r}<0,$$

и оскулирующий эксцентриситет всегда остается меньшим единицы. Таким образом, оскулирующая орбита постоянно (или длительное время) остается эллипсом, вследствие чего целесообразно вместо общих оскулирующих элементов рассматривать такие, которые лучше характеризуют эллиптическую орбиту и более удобны для вычислений эфемерид. Для этого нужно вместо параметра орбиты взять большую полуось оскулирующего эллипса или среднее движение n и вместо момента прохождения через перицентр — среднюю аномалию эпохи M_0 или среднюю долготу эпохи ε.

Остальные элементы можно сохранить без изменения, но обычно вместо углового расстояния перицентра от узла рассматривают долготу перицентра π.

Итак, будем считать оскулирующую орбиту эллипсом и вместо элементов (12.10) будем рассматривать следующие:

$$\Omega, \quad i, \quad a, \quad e, \quad \pi, \quad \varepsilon. \tag{12.54}$$

Чтобы получить уравнения, определяющие эти эллиптические оскулирующие элементы, нужно в системе (12.42) заменить третье, четвертое и шестое уравнения новыми уравнениями, определяющими скорости изменения большой полуоси a, долготы перицентра π и средней долготы эпохи ε (или средней аномалии эпохи M_0).

Вывести первые два уравнения не представляет никакого труда. Действительно, для эллиптической орбиты

$$p = a(1 - e^2), \tag{12.55}$$

и кроме того, для всякого типа движения,

$$\pi = \Omega + \omega. \tag{12.55'}$$

Дифференцируя эти равенства, считая все элементы величинами переменными, мы имеем

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p}{a}\frac{da}{dt} - 2ae\frac{de}{dt}$$

и

$$\frac{d\pi}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} + \frac{d\omega}{dt},$$

откуда с помощью уравнений (12.42) найдем

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a^2e\sin v}{p}\tilde{S} + \frac{2a^2}{r}\tilde{T} \tag{12.56}$$

и

$$\frac{d\pi}{dt} = -\frac{\cos v}{e}\tilde{S} + \frac{\sin v}{e}\left(1 + \frac{r}{p}\right)\tilde{T} + \frac{r}{p}\sin u \operatorname{tg}\frac{i}{2}\cdot\tilde{W}. \tag{12.56'}$$

Кроме того, из соотношения

$$n = \sqrt{\mu}\, a^{-3/2} \tag{12.55''}$$

находим еще дополнительно

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{3nae\sin v}{p}\tilde{S} - \frac{3na}{r}\tilde{T}. \tag{12.56''}$$

Заметим еще, что уравнение (12.56) можно вывести и непосредственно, применяя основную операцию к интегралу живой силы эллиптического движения, который можно представить в виде

$$\frac{2\mu}{r}-\frac{\mu}{a}=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2.$$

Применение основной операции к этому соотношению дает следующее уравнение:

$$\frac{\mu}{a^2}\frac{da}{dt}=2(\dot{x}X+\dot{y}Y+\dot{z}Z).$$

Подставляя сюда вместо $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ их выражения из формул (12.5) и воспользовавшись затем формулами (12.24), мы легко получим из предыдущего соотношения снова уравнение (12.56).

Кроме того, для случая эллиптического движения уравнение, определяющее скорость изменения эксцентриситета, можно несколько упростить. В самом деле, по формулам эллиптического движения мы имеем

$$r\cos v+er=a(\cos E-e)+ae(1-e\cos E)=p\cos E,$$

так что пятое из уравнений (12.42) можно переписать еще в виде

$$\frac{de}{dt}=\tilde{S}\sin v+(\cos v+\cos E)\cdot\tilde{T}. \tag{12.57}$$

Остается получить уравнение, определяющее скорость изменения средней аномалии эпохи M_0 или средней долготы эпохи ε.

Рассмотрим для этого последнее уравнение из системы (12.42), которое для случая эллиптического движения напишем в несколько ином виде. Для этого заменим N его выражением (12.40), а величину I_1 исключим при помощи тождества (12.40′). Заменяя еще p на $a(1-e^2)$ и имея в виду, что $na^{3/2}=\sqrt{\mu}$, мы получим для скорости изменения величины τ следующее выражение:

$$n\frac{d\tau}{dt}=(1-e^2)^{3/2}I\left\{-\frac{3ae\sin v}{p}\cdot\tilde{S}-\frac{3a}{r}\cdot\tilde{T}\right\}+A\tilde{S}+B\tilde{T}, \tag{12.58}$$

где введены временно для краткости следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned}A&=\frac{(1-e^2)^{3/2}}{e}\left[\frac{e\sin^2 v}{1-e^2}\cdot\frac{r}{p}\left(1+\frac{r}{p}\right)-\frac{r^2}{p^2}\cos v\right],\\ B&=\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\sin v.\end{aligned}\right\} \tag{12.58′}$$

Величина I, входящая в уравнение (12.58), легко вычисляется. Действительно, делая подстановку

$$\operatorname{tg}\frac{v'}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{E}{2},$$

мы найдем

$$I=(1-e^2)^{-3/2}[E-e\sin E]=(1-e^2)^{-3/2}\cdot M.$$

Используя еще уравнение (12.56″), мы перепишем равенство (12.58) в следующем простом виде:

$$n\frac{d\tau}{dt}=\frac{M}{n}\frac{dn}{dt}+A\tilde{S}+B\tilde{T}. \qquad (12.58'')$$

Теперь заметим, что средняя аномалия эпохи M_0 связана с элементом τ следующей простой формулой:

$$M_0=n(t_0-\tau), \qquad (12.59)$$

откуда

$$\frac{dM_0}{dt}=\frac{M_0}{n}\frac{dn}{dt}-n\frac{d\tau}{dt}.$$

Это равенство и уравнение (12.58″) дают

$$\frac{dM_0}{dt}=-\frac{M-M_0}{n}\frac{dn}{dt}-A\tilde{S}-B\tilde{T}, \qquad (12.59')$$

где производная $\frac{dn}{dt}$ определяется формулой (12.56″).

Уравнение (12.59′) и есть искомое уравнение, определяющее скорость изменения элемента M_0 — средней аномалии эпохи.

Выражение для коэффициента A можно несколько упростить при помощи некоторых искусственных и неочевидных преобразований, которые мы здесь частично приведем.

В самом деле, используя формулы эллиптического движения, мы имеем

$$\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}A=e\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{r}{p}\sin^2 v-\frac{r}{p}\cdot\frac{r}{a}\cos v=$$

$$=e(1-\cos v\cos E)+\frac{r}{p}[2e-(1+e\cos v)\cos E]=$$

$$=e-\frac{p}{r}\cos E+2e\frac{r}{p},$$

так что в конце концов получим следующее, более простое выражение:

$$A=\frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left(2e\frac{r}{p}-\cos v\right).$$

4. Выведенное в предыдущем разделе уравнение (12.59′) не очень удобно для практического использования, так как в него входит величина

$$\frac{M-M_0}{n}=t-t_0,$$

постоянно растущая вместе с временем. Поэтому даже в случае весьма малой возмущающей силы первое слагаемое в правой части равенства (12.59′) может в конце концов сделаться численно очень большим, что при вычислениях может привести к накоплению ошибок и этим самым к искажению действительной картины движения.

Во избежание этого неудобства обыкновенно вводят вместо элемента M_0 некоторый новый элемент $\overline{M}_0$, полагая

$$\frac{d\overline{M}_0}{dt}=\frac{dM_0}{dt}+(t-t_0)\frac{dn}{dt}, \qquad (12.60)$$

так что вместо уравнения (12.59′) будем иметь новое уравнение,

$$\frac{d\overline{M}_0}{dt}=-A\tilde{S}-B\tilde{T}. \qquad (12.60')$$

Зная для какого-либо момента времени величину $\overline{M}_0$, мы можем вычислить весьма просто и среднюю аномалию M в возмущенном движении.

Действительно, в невозмущенном движении средняя аномалия определяется формулой

$$M=M_0+n(t-t_0), \qquad (12.61)$$

которая, по смыслу метода Лагранжа, сохраняется также и в возмущенном движении. Дифференцируя в этом предположении формулу (12.61), мы имеем

$$\frac{dM}{dt}=\frac{dM_0}{dt}+(t-t_0)\frac{dn}{dt}+n, \qquad (12.61')$$

или, в силу равенства (12.60),

$$\frac{dM}{dt}=\frac{d\overline{M}_0}{dt}+n. \qquad (12.62)$$

Интегрируя последнее равенство в пределах от t_0 до t, мы получим

$$M=\overline{M}_0+\int_{t_0}^{t} n\,dt. \qquad (12.62')$$

Если элементы $\overline{M}_0$ и n определены в зависимости от времени, то формула (12.62′) даст также и M.

Можно условиться, как это обыкновенно и делают на практике, всегда вычислять среднюю аномалию по формуле (12.62′), которая остается также справедливой и для невозмущенного движения.

Действительно, если возмущающая сила отсутствует, то имеем $\tilde{S}=0$, $\tilde{T}=0$, а следовательно, $n=\text{const}$, и $\overline{M}_0=\text{const}$, так что из (12.62′) опять получаем известную формулу $M=\overline{M}_0+$ $+n(t-t_0)$, где $\overline{M}_0$ есть средняя аномалия эпохи. В силу этого величину $\overline{M}_0$ можно просто обозначить буквой M_0, как это часто и делают.

Введем теперь в рассмотрение среднюю долготу в орбите l, для которой, имея в виду формулу (12.62′), получим следующее выражение (также пригодное и в возмущенном и в невозмущенном движении):

$$l = \pi + M = \pi + \overline{M}_0 + \int_{t_0}^{t} n\,dt, \tag{12.63}$$

где π есть долгота перицентра.

Полагая теперь

$$\varepsilon = \pi + \overline{M}_0, \tag{12.63′}$$

мы будем иметь для l следующую формулу:

$$l = \varepsilon + \int_{t_0}^{t} n\,dt, \tag{12.63″}$$

которой обычно и пользуются в приложениях

Беря за шестой элемент вместо средней аномалии эпохи $\overline{M}_0$ среднюю долготу эпохи ε, мы должны заменить шестое уравнение системы (12.45), т. е. уравнение (12.60′), уравнением, определяющим ε. Чтобы получить это уравнение, дифференцируем формулу (12.63′), что дает

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\pi}{dt} + \frac{d\overline{M}_0}{dt}.$$

Подставляя сюда вместо $\frac{d\pi}{dt}$ и $\frac{d\overline{M}_0}{dt}$ их выражения, мы получим, после некоторых упрощений, следующее уравнение:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -2\frac{r}{p}\sqrt{1-e^2}\cdot\tilde{S} + \frac{r}{p}\sin u \operatorname{tg}\frac{i}{2}\cdot\tilde{W} + \\ + \frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\left[-\tilde{S}\cos v + \left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}\sin v\right]. \tag{12.64}$$

Наконец, заметим, что вместо элемента $\overline{M}_0$ можно принять за новую неизвестную среднюю аномалию M, для определения которой будем иметь в силу равенства (12.62) следующее уравнение:

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left(\cos v - 2e\frac{r}{p}\right)\tilde{S} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}\sin v. \tag{12.64′}$$

Вместо элемента ε можно взять среднюю долготу l, для которой будем иметь следующее уравнение, вытекающее из формулы (12.63′):

$$\frac{dl}{dt}=n-2\frac{r}{p}\sqrt{1-e^2}\cdot\tilde{S}+\frac{r}{p}\sin u\,\mathrm{tg}\,\frac{i}{2}\cdot\tilde{W}+$$
$$+\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\left[-\tilde{S}\cos v+\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}\sin v\right]. \qquad (12.64'')$$

Итак, если за неизвестные функции приняты элементы (12.54), то при произвольно заданной возмущающей силе мы будем иметь (для случая, когда выполняется неравенство $V^2<\frac{2\mu}{r}$, т. е. для случая эллиптического движения) следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\Omega}{dt}=\frac{r}{p}\sin u\,\mathrm{cosec}\,i\cdot\tilde{W},\\
&\frac{di}{dt}=\frac{r}{p}\cos u\cdot\tilde{W},\\
&\frac{da}{dt}=\frac{2ea^2\sin v}{p}\cdot\tilde{S}+\frac{2a^2}{r}\cdot\tilde{T},\\
&\frac{de}{dt}=\tilde{S}\sin v+(\cos v+\cos E)\cdot\tilde{T},\\
&\frac{d\pi}{dt}=-\frac{\cos v}{e}\cdot\tilde{S}+\frac{\sin v}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\cdot\tilde{T}+\frac{r}{p}\sin u\,\mathrm{tg}\,\frac{i}{2}\cdot\tilde{W},\\
&\frac{d\varepsilon}{dt}=-2\frac{r}{p}\sqrt{1-e^2}\cdot\tilde{S}+\frac{r}{p}\sin u\,\mathrm{tg}\,\frac{i}{2}\cdot\tilde{W}+\\
&\qquad+\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\left[-\tilde{S}\cos v+\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}\sin v\right],
\end{aligned}\right\} \qquad (12.65)$$

в которой последнее уравнение может быть заменено также уравнением (12.64′) или (12.64″).

Полезно заметить еще, что если возмущающая сила не зависит явно от времени, а зависит только от координат и составляющих скорости, то порядок системы (12.65) можно понизить на одну единицу.

Действительно, в этом случае составляющие возмущающего ускорения также зависят только от координат и составляющих скорости, которые в эллиптическом движении являются функциями средней аномалии M. Поэтому и правые части всех уравнений (12.65) будут вполне определенными функциями средней аномалии M и элементов орбиты Ω, i, a, e, π и, следовательно, за независимую переменную можно принять вместо времени величину M, которая растет одновременно с временем.

Исключая из уравнений (12.65) элемент времени dt, мы получим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dM} &= \frac{r}{p}\sin u \operatorname{cosec} i \cdot \tilde{W}', \\
\frac{di}{dM} &= \frac{r}{p}\cos u \cdot \tilde{W}', \\
\frac{da}{dt} &= \frac{2ea^2\sin v}{p}\cdot\tilde{S}' + \frac{2a^2}{r}\cdot\tilde{T}', \\
\frac{de}{dM} &= \tilde{S}'\sin v + (\cos v + \cos E)\,\tilde{T}', \\
\frac{d\pi}{dM} &= -\frac{\cos v}{e}\cdot\tilde{S}' + \frac{\sin v}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}' + \frac{r}{p}\sin u \operatorname{tg}\frac{i}{2}\cdot\tilde{W}',
\end{aligned}\right\} \quad (12.65')$$

где положено для краткости

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{S}' &= \frac{\tilde{S}}{n - A\tilde{S} - B\tilde{T}}, \\
\tilde{T}' &= \frac{\tilde{T}}{n - A\tilde{S} - B\tilde{T}}, \\
\tilde{W}' &= \frac{\tilde{W}}{n - A\tilde{S} - B\tilde{T}}.
\end{aligned}\right\} \quad (12.65'')$$

Если система (12.65′) проинтегрирована, то величины Ω, i, a, e, π будут известными функциями средней аномалии M и пяти произвольных постоянных, за которые можно принять начальные значения элементов, соответствующие моменту t_0. Тогда правая часть равенства (12.64′) также будет известной функцией от M и пяти произвольных постоянных, и, интегрируя это уравнение, мы получим

$$t - t_0 = \int_{M_0}^{M} \frac{dM}{n - A\tilde{S} - B\tilde{T}},$$

т. е. выразим время t также в зависимости от средней аномалии M, причем шестой произвольной постоянной будет M_0, которая здесь является начальным значением средней аномалии, соответствующим моменту t_0.

Можно, если угодно, принять за независимую переменную среднюю долготу l, которая определяется уравнением (12.64″), или истинную аномалию v, определяемую формулой (12.44), или, наконец, эксцентрическую аномалию E, определяемую легко выводимым уравнением

$$\frac{dE}{dt}=\frac{a}{r}\sin E\,\frac{de}{dt}+\frac{a}{r}\,\frac{dM}{dt},$$

где нужно еще заменить $\frac{de}{dt}$ и $\frac{dM}{dt}$ их выражениями.

5. Отметим некоторые частные случаи уравнений (12.65). Если возмущающая сила есть сила центральная, то, как мы уже видели ранее,

$$\tilde{S}\neq 0,\quad \tilde{T}=0,\quad \tilde{W}=0,$$

так что

$$\Omega=\Omega_0=\text{const},\quad i=i_0=\text{const},$$

и система (12.65) приводится к виду

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt}&=\frac{2ea^2\sin v}{p}\cdot\tilde{S},\\
\frac{de}{dt}&=\tilde{S}\sin v,\\
\frac{d\pi}{dt}&=-\frac{\cos v}{e}\cdot\tilde{S},\\
\frac{d\varepsilon}{dt}&=-\left[2\frac{r}{p}\sqrt{1-e^2}+\frac{e\cos v}{1+\sqrt{1-e^2}}\right]\tilde{S}.
\end{aligned}\right\}\qquad(12.66)$$

Эти уравнения имеют еще один очевидный интеграл, который нетрудно получить. Действительно, исключая из двух первых уравнений величину $\tilde{S}\sin v$, мы найдем

$$\frac{1}{a}\,\frac{da}{dt}-\frac{2e}{1-e^2}\,\frac{de}{dt}=0,$$

откуда

$$a(1-e^2)=p_0=\text{const},$$

в согласии с последним интегралом (12.46′).

Если, далее, возмущающая сила такова, что мы имеем всегда

$$\tilde{S}=0,\quad \tilde{T}\neq 0,\quad \tilde{W}=0,$$

то уравнения (12.65) дают опять

$$\Omega=\Omega_0=\text{const},\quad i=i_0=\text{const}.$$

и мы придем к системе четвертого порядка:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \frac{2a^2}{r}\tilde{T},\\
\frac{de}{dt} &= (\cos v + \cos E)\tilde{T},\\
\frac{d\pi}{dt} &= \frac{\sin v}{e}\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T},\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{e\sin v}{1+\sqrt{1-e^2}}\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.66')$$

Наконец, если возмущающая сила такова, что мы имеем всегда

$$\tilde{S}=0, \quad \tilde{T}=0, \quad \tilde{W}\neq 0,$$

то уравнения (12.65) дают

$$a=a_0=\text{const}, \quad e=e_0=\text{const}.$$

В этом случае оскулирующая орбита не изменяет своей формы и размеров, но меняется ее положение в пространстве. Система (12.65) приводится в рассматриваемом случае к такому виду:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= \frac{r}{p}\sin u \operatorname{cosec} i\cdot\tilde{W},\\
\frac{di}{dt} &= \frac{r}{p}\cos u\cdot\tilde{W},\\
\frac{d\pi}{dt} &= \frac{r}{p}\sin u \operatorname{tg}\frac{i}{2}\cdot\tilde{W},\\
\frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{r}{p}\sin u \operatorname{tg}\frac{i}{2}\cdot\tilde{W}.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.66'')$$

Эта система имеет очевидный интеграл

$$\varepsilon-\pi=\bar{M}_0=\text{const},$$

в силу которого средняя аномалия M вычисляется в этом случае совершенно так же, как и в невозмущенном движении.

Примечание. Последние два частных случая не могут встретиться в тех задачах, в которых все действующие силы суть силы «естественные», т. е. силы, действующие в космическом пространстве.

Если же мы рассматриваем движение искусственного объекта не только под действием сил природы, но и при участии дополнительных «искусственных» сил, возникающих вследствие работы двигателей, установленных на борту объекта, то последние два случая действительно могут иметь место.

Для осуществления таких случаев нужно, очевидно, так распорядиться работой двигателей, чтобы дополнительная возмущающая сила всегда сохраняла заданное направление, либо перпендикулярное к радиусу-вектору в плоскости мгновенной орбиты, либо перпендикулярное одновременно и к радиусу-вектору и к скорости, т. е. перпендикулярное к плоскости мгновенной орбиты.

Разумеется, сделанное примечание относится также и к случаю движения любого типа, когда оскулирующая орбита не остается всегда эллипсом, а может превращаться в параболу или в гиперболу.

§ 4. Уравнения Лагранжа

1. Рассмотрим теперь весьма важный для приложений случай, когда прямоугольные составляющие возмущающего ускорения являются частными производными по соответствующим координатам от одной и той же функции координат движущейся точки и времени.

Пусть

$$X=\frac{\partial R}{\partial x}, \quad Y=\frac{\partial R}{\partial y}, \quad Z=\frac{\partial R}{\partial z}, \tag{12.67}$$

где

$$R=R(x, y, z, t) \tag{12.67'}$$

есть заданная функция координат x, y, z и времени t.

Тогда, как показал Лагранж *), дифференциальные уравнения Ньютона, определяющие изменения оскулирующих элементов, можно преобразовать таким образом, чтобы в эти уравнения вместо составляющих S, T, W возмущающего ускорения на подвижные оси входили частные производные от функции R по элементам оскулирующей орбиты.

Функция R называется возмущающей или пертурбационной функцией.

Преобразование Лагранжа можно провести для общего случая какого угодно возмущенного движения, но мы ограничимся здесь рассмотрением случая, когда возмущенное движение принадлежит к эллиптическому типу и когда уравнения возмущенного движения определяются формулами (12.65).

Пусть буква э обозначает какой-нибудь из элементов эллиптической оскулирующей орбиты. Подставляя в выражение функции R вместо координат их выражения, даваемые формулами невозмущенного эллиптического движения, мы сделаем ее

---

*) См. Лагранж, Аналитическая механика, т. 2.

функцией от времени и элементов (12.54), а поэтому можем написать

$$\frac{\partial R}{\partial э} = \frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial э} + \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial э} + \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial э}, \tag{12.68}$$

откуда в силу формул (12.67) имеем также

$$\frac{\partial R}{\partial э} = X\frac{\partial x}{\partial э} + Y\frac{\partial y}{\partial э} + Z\frac{\partial z}{\partial э}. \tag{12.68'}$$

Так как X, Y, Z зависят от составляющих S, T, W возмущающего ускорения по формулам (12.24′), то каждое равенство вида (12.68′) представляет собой соотношение между этими составляющими (а также между величинами $\tilde{S}$, $\tilde{T}$, $\tilde{W}$) и частными производными от возмущающей функции R по элементам (12.54).

Займемся составлением равенств (12.68), для чего нужно сначала найти выражения для частных производных от координат по элементам (12.54). Эти частные производные легко найти совершенно так же, как мы это делали в разделе 4 § 4 гл. X, где была взята система элементов (10.79′). Однако предпочтительнее получить все нужные формулы непосредственно для системы элементов (12.54).

Возьмем для прямоугольных координат невозмущенного движения формулы (9.52), которые выпишем здесь еще раз:

$$\left.\begin{aligned} x &= r(\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i), \\ y &= r(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i), \\ z &= r\sin u\sin i. \end{aligned}\right\} \tag{12.69}$$

Эти формулы показывают, что x, y, z зависят от элементов и непосредственно, и через посредство полярных координат — радиуса-вектора r и аргумента широты u.

Выпишем частные производные по элементам от этих полярных координат.

Формулы невозмущенного эллиптического движения дают следующие соотношения:

$$r = a(1 - e\cos E) \tag{12.69'}$$

и

$$E - e\sin E = M = n(t - t_0) + \varepsilon - \pi. \tag{12.69''}$$

Из (12.69′) имеем сразу

$$\frac{\partial r}{\partial a} = \frac{r}{a}.$$

Далее, дифференцируя (12.69′) и (12.69″) по эксцентриситету e, имеем

$$\frac{\partial r}{\partial e} = -a\cos E + ae\sin E\frac{\partial E}{\partial e}, \quad \frac{\partial E}{\partial e} = \frac{a\sin E}{r},$$

откуда после упрощений найдем

$$\frac{\partial r}{\partial e} = -a\cos v.$$

Дифференцируя затем формулы (12.69′) и (12.69″) по элементам ε и π, найдем

$$\frac{\partial r}{\partial \varepsilon} = ae\sin E\frac{\partial E}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} = +\frac{a}{r},$$

$$\frac{\partial r}{\partial \pi} = ae\sin E\frac{\partial E}{\partial \pi}, \quad \frac{\partial E}{\partial \pi} = -\frac{a}{r},$$

откуда с помощью формулы

$$r\sin v = a\sqrt{1-e^2}\sin E$$

получим

$$\frac{\partial r}{\partial \varepsilon} = \frac{ae\sin v}{\sqrt{1-e^2}}, \quad \frac{\partial r}{\partial \pi} = -\frac{ae\sin v}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Наконец, совершенно ясно, что

$$\frac{\partial r}{\partial \Omega} = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial i} = 0.$$

Перейдем к аргументу широты. Так как

$$u = v + \omega = v + \pi - \Omega,$$

то мы имеем прежде всего

$$\frac{\partial u}{\partial \Omega} = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial e} = \frac{\partial v}{\partial e}, \quad \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial v}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{\partial u}{\partial \pi} = \frac{\partial v}{\partial \pi} + 1.$$

Дифференцируя по e соотношение

$$r\cos v = a(\cos E - e),$$

имеем

$$\frac{\partial r}{\partial e}\cos v - r\sin v\frac{\partial v}{\partial e} = -a\sin E\frac{\partial E}{\partial e} - a,$$

откуда с помощью уже полученных выше выражений для $\frac{\partial r}{\partial e}$ и $\frac{\partial E}{\partial e}$ найдем после упрощений

$$\frac{\partial v}{\partial e} = \frac{a\sin v}{r}\left(1 + \frac{r}{p}\right).$$

Дифференцируя затем соотношение

$$r(1+e\cos v)=a(1-e^2)$$

по ε и π, получим

$$\frac{a(1-e^2)}{r^2}\frac{\partial r}{\partial\varepsilon}-re\sin v\frac{\partial v}{\partial\varepsilon}=0,$$

$$\frac{a(1-e^2)}{r^2}\frac{\partial r}{\partial\pi}-re\sin v\frac{\partial v}{\partial\pi}=0,$$

откуда, зная уже выражения для $\frac{\partial r}{\partial\varepsilon}$ и $\frac{\partial r}{\partial\pi}$, найдем

$$\frac{\partial v}{\partial\varepsilon}=\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2},\quad \frac{\partial v}{\partial\pi}=-\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}.$$

Кроме того, очевидно, что

$$\frac{\partial u}{\partial a}=0,\quad \frac{\partial u}{\partial i}=0.$$

Собирая все полученные производные вместе, получим следующую группу формул:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial r}{\partial\Omega}=0, && \frac{\partial u}{\partial\Omega}=-1,\\
&\frac{\partial r}{\partial i}=0, && \frac{\partial u}{\partial i}=0,\\
&\frac{\partial r}{\partial a}=\frac{r}{a}, && \frac{\partial u}{\partial a}=0,\\
&\frac{\partial r}{\partial e}=-a\cos v, && \frac{\partial u}{\partial e}=\frac{a\sin v}{r}\left(1+\frac{r}{p}\right),\\
&\frac{\partial r}{\partial\pi}=-\frac{ae\sin v}{\sqrt{1-e^2}}, && \frac{\partial u}{\partial\pi}=-\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}+1,\\
&\frac{\partial r}{\partial\varepsilon}=+\frac{ae\sin v}{\sqrt{1-e^2}}, && \frac{\partial u}{\partial\varepsilon}=+\frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}.
\end{aligned}\right\}\qquad(12.70)$$

2. Положим теперь в формуле (12.68′) последовательно $э=a,\ e,\ i,\ \Omega,\ \varepsilon,\ \pi$. Так как ввиду (12.70)

$$\frac{\partial x}{\partial a}=\frac{x}{a},\quad \frac{\partial y}{\partial a}=\frac{y}{a},\quad \frac{\partial z}{\partial a}=\frac{z}{a},$$

то

$$\frac{\partial R}{\partial a}=\frac{r}{a}(\alpha X+\beta Y+\gamma Z)=\frac{r}{a}S,$$

откуда, имея в виду, что $na^{3/2}=\sqrt{\mu}$, получим

$$\frac{\partial R}{\partial a}=\frac{nr}{\sqrt{1-e^2}}\tilde{S}.$$

Далее, из формул (12.69) имеем

$$\frac{\partial x}{\partial e} = \alpha \frac{\partial r}{\partial e} + r\alpha' \frac{\partial u}{\partial e},$$
$$\frac{\partial y}{\partial e} = \beta \frac{\partial r}{\partial e} + r\beta' \frac{\partial u}{\partial e},$$
$$\frac{\partial z}{\partial e} = \gamma \frac{\partial r}{\partial e} + r\gamma' \frac{\partial u}{\partial e},$$

а поэтому

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \frac{\partial r}{\partial e} S + r \frac{\partial u}{\partial e} T,$$

откуда с помощью формул (12.70) найдем

$$\frac{\partial R}{\partial e} = \frac{na^2}{\sqrt{1-e^2}} \left[-\tilde{S} \cos v + \left(1 + \frac{r}{p}\right) \tilde{T} \sin v \right].$$

Теперь имеем

$$\frac{\partial x}{\partial i} = \alpha'' r \sin u, \quad \frac{\partial y}{\partial i} = \beta'' r \sin u, \quad \frac{\partial z}{\partial i} = \gamma'' r \sin u$$

откуда

$$\frac{\partial R}{\partial i} = r \sin u \cdot W,$$

или

$$\frac{\partial R}{\partial i} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} r \sin u \cdot \tilde{W}.$$

Далее, дифференцирование формул (12.69) по Ω дает

$$\frac{\partial x}{\partial \Omega} = -r\alpha' - y, \quad \frac{\partial y}{\partial \Omega} = -r\beta' + x, \quad \frac{\partial z}{\partial \Omega} = -r\gamma',$$

вследствие чего получим

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = -rT + xY - yX.$$

Заменяя здесь выражение $xY - yX$ его значением из третьего равенства (12.27) и исключая затем $\frac{dp}{dt}$ и $\frac{di}{dt}$ при помощи уравнений (12.28), мы найдем после упрощений

$$\frac{\partial R}{\partial \Omega} = -\frac{2nar}{\sqrt{1-e^2}} \sin^2 \frac{i}{2} \cdot \tilde{T} - \frac{nar}{\sqrt{1-e^2}} \sin i \cos u \cdot \tilde{W}.$$

Наконец, дифференцируя формулы (12.69) по ε и по π, мы получим

$$\frac{\partial x}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} \alpha + r \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \alpha', \quad \frac{\partial x}{\partial \pi} = \frac{\partial r}{\partial \pi} \alpha + r \frac{\partial u}{\partial \pi} \alpha',$$
$$\frac{\partial y}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} \beta + r \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \beta', \quad \frac{\partial y}{\partial \pi} = \frac{\partial r}{\partial \pi} \beta + r \frac{\partial u}{\partial \pi} \beta',$$
$$\frac{\partial z}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} \gamma + r \frac{\partial u}{\partial \varepsilon} \gamma', \quad \frac{\partial z}{\partial \pi} = \frac{\partial r}{\partial \pi} \gamma + r \frac{\partial u}{\partial \pi} \gamma',$$

вследствие чего найдем

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}=\frac{\partial r}{\partial \varepsilon}S+r\frac{\partial u}{\partial \varepsilon}T, \quad \frac{\partial R}{\partial \pi}=\frac{\partial r}{\partial \pi}S+r\frac{\partial u}{\partial \pi}T,$$

откуда при помощи формул (12.70) будем иметь

$$\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}&=+\frac{na^2e\sin v}{1-e^2}\cdot\tilde{S}+\frac{na^3}{r}\cdot\tilde{T},\\
\frac{\partial R}{\partial \pi}&=-\frac{na^2e\sin v}{1-e^2}\cdot\tilde{S}-\frac{na^3}{r}\cdot\tilde{T}+\frac{nar}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\tilde{T}.
\end{aligned}$$

Выписывая все полученные выражения для частных производных функции R вместе, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial \Omega}&=-\frac{2nar}{\sqrt{1-e^2}}\sin^2\frac{i}{2}\cdot\tilde{T}-\frac{nar}{\sqrt{1-e^2}}\sin i\cos u\cdot\tilde{W},\\
\frac{\partial R}{\partial i}&=+\frac{na}{\sqrt{1-e^2}}r\sin u\cdot\tilde{W},\\
\frac{\partial R}{\partial a}&=+\frac{nr}{\sqrt{1-e^2}}\cdot\tilde{S},\\
\frac{\partial R}{\partial e}&=+\frac{na^2}{\sqrt{1-e^2}}\left[-\tilde{S}\cos v+\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}\sin v\right],\\
\frac{\partial R}{\partial \pi}&=-\frac{na^2e\sin v}{1-e^2}\tilde{S}-\frac{na^3}{r}\tilde{T}+\frac{nar}{\sqrt{1-e^2}}\tilde{T},\\
\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}&=+\frac{na^2e\sin v}{1-e^2}\tilde{S}+\frac{na^2}{r}\tilde{T},
\end{aligned}\right\}\quad(12.71)$$

откуда выводим следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{nar}{\sqrt{1-e^2}}\tilde{T}=\frac{\partial R}{\partial \pi}+\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{a^2e\sin v}{p}\tilde{S}+\frac{a^2}{r}\tilde{T}=\frac{1}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon},\\
&\frac{r}{p}\sqrt{1-e^2}\,\tilde{S}=\frac{1}{na}\frac{\partial R}{\partial a}, \quad \frac{r}{p}\sin u\cdot\tilde{W}=\frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{\partial R}{\partial i},\\
&\frac{r}{p}\cos u\cdot\tilde{W}=-\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \Omega}-\\
&\qquad\qquad-\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \pi}+\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right),\\
&-\tilde{S}\cos v+\left(1+\frac{r}{p}\right)\tilde{T}\sin v=\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2}\frac{\partial R}{\partial e}.
\end{aligned}\right\}\quad(12.71')$$

Подставляя выражения (12.71′) в уравнения (12.65), мы получим уравнения для определения оскулирующих эллиптических элементов, называемые уравнениями Лагранжа.

Эти уравнения обычно принято писать в следующем порядке:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{da}{dt}=+\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon},\\
&\frac{de}{dt}=-\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial \pi}-\frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{1}{na^2}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon},\\
&\frac{di}{dt}=-\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial \Omega}-\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial R}{\partial \pi}+\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right),\\
&\frac{d\Omega}{dt}=+\frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i},\\
&\frac{d\pi}{dt}=+\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}+\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e},\\
&\frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}+\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}+\frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{1}{na^2}\frac{\partial R}{\partial e}.
\end{aligned}\right\}\qquad(12.72)$$

Заметим свойство этих уравнений, напоминающее известные свойства канонической системы. Распределяя оскулирующие элементы на две группы следующим образом:

$$a,\ e,\ i,$$
$$\Omega,\ \pi,\ \varepsilon,$$

мы видим, что скорости изменения элементов первой группы содержат линейно частные производные от возмущающей функции по элементам второй группы, а скорости изменения элементов второй группы, наоборот, содержат линейно частные производные от R по элементам первой группы. Кроме того, коэффициенты при частных производных во всех уравнениях зависят только от элементов первой группы.

Выпишем еще дополнительно уравнения, вытекающие из первого уравнения системы (12.28) и из уравнения (12.56) и определяющие скорости изменения среднего движения и параметра оскулирующей эллиптической орбиты. Эти уравнения имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dn}{dt}=-\frac{3}{a^2}\frac{\partial R}{\partial \varepsilon},\\
&\frac{dp}{dt}=\frac{2\sqrt{1-e^2}}{na}\left(\frac{\partial R}{\partial \pi}+\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right)
\end{aligned}\right\}\qquad(12.72')$$

и ими можно заменить, если угодно, первые два уравнения системы (12.72).

Последнее уравнение системы (12.72) также можно заменить уравнением, определяющим скорость изменения средней аномалии эпохи $\overline{M}_0$. Это уравнение получится из уравнения (12.60′) с помощью формул (12.71′) и напишется следующим образом:

$$\frac{d\overline{M}_0}{dt}=-\frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e}-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}. \qquad (12.72'')$$

Если вместо $\overline{M}_0$ или ε желательно взять среднюю аномалию M или среднюю долготу l, то последнее уравнение системы (12.72) должно быть заменено одним из следующих:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dM}{dt}&=n-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}-\frac{1-e^2}{na^2e}\frac{\partial R}{\partial e},\\ \frac{dl}{dt}&=n-\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a}+\frac{\operatorname{tg}\frac{i}{2}}{na^2\sqrt{1-e^2}}\frac{\partial R}{\partial i}+\\ &\qquad+\frac{e\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}\cdot\frac{1}{na^2}\frac{\partial R}{\partial e},\end{aligned}\right\} \qquad (12.72''')$$

которые выводятся из уравнений (12.64′) и (12.64″) соответственно.

§ 5. Общий метод Лагранжа

1. Уравнения Лагранжа (12.72) получены нами путем преобразования уравнений Ньютона для случая эллиптического типа движения, т. е. уравнений (12.65). Однако сам Лагранж вывел эти уравнения непосредственно из уравнений (12.1) более общим способом *).

Так как уравнения Лагранжа являются весьма важным аппаратом для небесной механики, то полезно рассмотреть и непосредственный их вывод, к которому мы теперь и перейдем.

Следуя Лагранжу, рассмотрим вместо системы (12.1) или (12.12) более общую систему уравнений первого порядка вида

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}-\frac{\partial H}{\partial x'}-X'=0, \qquad \frac{dx'}{dt}+\frac{\partial H}{\partial x}+\tilde{X}=0,\\ &\frac{dy}{dt}-\frac{\partial H}{\partial y'}-Y'=0, \qquad \frac{dy'}{dt}+\frac{\partial H}{\partial y}+\tilde{Y}=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \qquad (12.73)$$

где x, x', y, y', ... обозначают неизвестные функции, число которых $2k$ может быть каким угодно.

Величины X', $\tilde{X}$, Y', $\tilde{Y}$, ..., а также величина H суть данные функции времени и $2k$ величин x, x', y, y', ...

---

*) См. сноску на стр. 568.

Рассмотрим сначала уравнения, получающиеся из уравнений (12.73) отбрасыванием всех величин X', $\bar{X}$, Y', $\bar{Y}$, ..., т. е. так называемые упрощенные уравнения, которые можно назвать также уравнениями невозмущенного движения:

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{dx}{dt}-\dfrac{\partial H}{\partial x'}=0, & \dfrac{dx'}{dt}+\dfrac{\partial H}{\partial x}=0, \\ \dfrac{dy}{dt}-\dfrac{\partial H}{\partial y'}=0, & \dfrac{dy'}{dt}+\dfrac{\partial H}{\partial y}=0, \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (12.73')$$

и допустим, что эти упрощенные уравнения могут быть полностью проинтегрированы.

Тогда мы будем иметь общее решение уравнений (12.73′) в следующем виде:

$$\left.\begin{array}{ll} x=\Phi_1(t;\ a,\ b,\ \ldots,\ g), & x'=\Psi_1(t;\ a,\ b,\ \ldots,\ g), \\ y=\Phi_2(t;\ a,\ b,\ \ldots,\ g), & y'=\Psi_2(t;\ a,\ b,\ \ldots,\ g), \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array}\right\} \qquad (12.74)$$

где a, b, ..., g суть $2k$ произвольных постоянных интегрирования.

Ясно, что функции (12.74) удовлетворяют уравнениям (12.73′), каковы бы ни были произвольные постоянные.

Чтобы получить общее решение первоначальных уравнений (12.73), сохраним те же аналитические выражения (12.74) для функций x, x', y, y', ..., но будем рассматривать величины a, b, ..., g уже не как постоянные, а как некоторые функции времени, подлежащие определению*).

В этом предположении мы имеем

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial x}{\partial b}\frac{db}{dt}+\ldots+\frac{\partial x}{\partial g}\frac{dg}{dt}, \\ \frac{dx'}{dt}&=\frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial x'}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial x'}{\partial b}\frac{db}{dt}+\ldots+\frac{\partial x'}{\partial g}\frac{dg}{dt}, \\ \frac{dy}{dt}&=\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial y}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial y}{\partial b}\frac{db}{dt}+\ldots+\frac{\partial y}{\partial g}\frac{dg}{dt}, \\ \frac{dy'}{dt}&=\frac{\partial y'}{\partial t}+\frac{\partial y'}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial y'}{\partial b}\frac{db}{dt}+\ldots+\frac{\partial y'}{\partial g}\frac{dg}{dt}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

---

*) Здесь опять излагается в несколько иной форме метод Лагранжа изменения произвольных постоянных.

Внесем эти выражения в уравнения (12.73) и потребуем, чтобы эти последние уравнения удовлетворялись. Имея в виду, что при этом

$$\left.\begin{array}{ll}\frac{\partial x}{\partial t}-\frac{\partial H}{\partial x'}\equiv 0, & \frac{\partial x'}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial x}\equiv 0,\\ \frac{\partial y}{\partial t}-\frac{\partial H}{\partial y'}\equiv 0, & \frac{\partial y'}{\partial t}+\frac{\partial H}{\partial y}\equiv 0,\\ \dots\dots & \dots\dots\end{array}\right\}\qquad(12.73'')$$

мы получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial x}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial x}{\partial b}\frac{db}{dt}+\dots+\frac{\partial x}{\partial g}\frac{dg}{dt}-X'=0,\\ \frac{\partial x'}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial x'}{\partial b}\frac{db}{dt}+\dots+\frac{\partial x'}{\partial g}\frac{dg}{dt}+\tilde{X}=0,\\ \frac{\partial y}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial y}{\partial b}\frac{db}{dt}+\dots+\frac{\partial y}{\partial g}\frac{dg}{dt}-Y'=0,\\ \frac{\partial y'}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial y'}{\partial b}\frac{db}{dt}+\dots+\frac{\partial y'}{\partial g}\frac{dg}{dt}+\tilde{Y}=0,\\ \dots\dots\dots\dots\end{array}\right\}\qquad(12.75)$$

Эти $2k$ уравнений содержат $2k$ неизвестных производных $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \dots, \frac{dg}{dt}$, относительно которых эти уравнения линейны. Коэффициенты этих линейных уравнений и свободные члены суть вообще некоторые функции времени и величин $a, b, \dots, g$. Прежде чем решать эти уравнения, Лагранж заменяет систему (12.75) другой, более простой, коэффициенты которой не зависят от t и обладают свойством симметрии.

Введем для этого в рассмотрение величины, называемые **скобками Лагранжа** и определяемые равенствами вида

$$[a, b]=\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial x'}{\partial b}-\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial x'}{\partial a}+\frac{\partial y}{\partial a}\frac{\partial y'}{\partial b}-\frac{\partial y}{\partial b}\frac{\partial y'}{\partial a}+\dots,\qquad(12.76)$$

из которых следуют соотношения

$$[b, a]=-[a, b],\quad [a, a]=0.\qquad(12.76')$$

Положим, кроме того,

$$\left.\begin{array}{l}R_a=\tilde{X}\frac{\partial x}{\partial a}+\tilde{Y}\frac{\partial y}{\partial a}+\dots+X'\frac{\partial x'}{\partial a}+Y'\frac{\partial y'}{\partial a}+\dots,\\ R_b=\tilde{X}\frac{\partial x}{\partial b}+\tilde{Y}\frac{\partial y}{\partial b}+\dots+X'\frac{\partial x'}{\partial b}+Y'\frac{\partial y'}{\partial b}+\dots,\\ \dots\dots\dots\dots\\ R_g=\tilde{X}\frac{\partial x}{\partial g}+\tilde{Y}\frac{\partial y}{\partial g}+\dots+X'\frac{\partial x'}{\partial g}+Y'\frac{\partial y'}{\partial g}+\dots\end{array}\right\}\qquad(12.77)$$

Тогда из уравнений (7.75) легко выведем следующие *):

$$\left.\begin{aligned}
&[a, a]\frac{da}{dt}+[a, b]\frac{db}{dt}+\ldots+[a, g]\frac{dg}{dt}+R_a=0,\\
&[b, a]\frac{da}{dt}+[b, b]\frac{db}{dt}+\ldots+[b, g]\frac{dg}{dt}+R_b=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&[g, a]\frac{da}{dt}+[g, b]\frac{db}{dt}+\ldots+[g, g]\frac{dg}{dt}+R_g=0,
\end{aligned}\right\}\qquad(12.78)$$

которые и нужно затем разрешить относительно производных $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \ldots, \frac{dg}{dt}$.

Покажем теперь, что коэффициенты уравнений (12.78) не зависят явно от времени, что позволяет значительно упростить их вычисление.

В самом деле, составим выражение для частной производной от любой скобки Лагранжа по времени t и убедимся, что эта производная тождественно равна нулю. Мы имеем, дифференцируя формулу (12.76),

$$\frac{\partial [a, b]}{\partial t}=\frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t}\frac{\partial x'}{\partial b}+\frac{\partial x}{\partial a}\frac{\partial^2 x'}{\partial b\,\partial t}-\frac{\partial^2 x}{\partial b\,\partial t}\frac{\partial x'}{\partial a}-\frac{\partial x}{\partial b}\frac{\partial^2 x'}{\partial a\,\partial t}+\ldots,$$

что можно, как нетрудно проверить, представить также в виде

$$\frac{\partial [a, b]}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial b}-\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial b}\right)-\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x'}{\partial a}-\frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial a}\right)+\ldots$$

Принимая во внимание равенства (12.73), мы напишем последнее равенство следующим образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial [a, b]}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial b}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial b}+\ldots\right)-\\
-\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial H}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial a}+\frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial H}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial a}+\ldots\right),\end{aligned}$$

откуда, замечая, что H зависит от a или b только через посредство $x, x', \ldots$, выводим

$$\frac{\partial [a, b]}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial H}{\partial b}-\frac{\partial}{\partial b}\frac{\partial H}{\partial a}=\frac{\partial^2 H}{\partial a\,\partial b}-\frac{\partial^2 H}{\partial b\,\partial a}=0.$$

В каждом частном случае функция H имеет определенное значение и функции Φ_1, Ψ_1, …, входящие в общее решение уравнений невозмущенного движения (12.73), предполагаются известными функциями времени и произвольных постоянных.

---

*) Для этого нужно умножить уравнения (12.75) соответственно на $-\frac{\partial x'}{\partial a}, +\frac{\partial x}{\partial a}, -\frac{\partial y'}{\partial a}, +\frac{\partial y}{\partial a}, \ldots$, и затем сложить все уравнения. Заменяя a на b, …, получим все уравнения системы (12.78).

Поэтому величины скобок Лагранжа, входящих в уравнения (12.78), могут быть найдены при помощи совершенно элементарных операций.

Вычислив все эти скобки, число которых в силу соотношений (12.76′) сводится к $k(2k-1)$, и разрешая затем уравнения (12.78) относительно производных $\frac{da}{dt}$, $\frac{db}{dt}$, ..., мы получим, очевидно, $2k$ уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= A(t;\ a,\ b,\ \ldots,\ g), \\ \frac{db}{dt} &= B(t;\ a,\ b,\ \ldots,\ g), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dg}{dt} &= G(t;\ a,\ b,\ \ldots,\ g), \end{aligned}\right\} \qquad (12.78')$$

которые и нужно будет интегрировать.

Найдя величины a, b, ..., g в зависимости от времени и $2k$ произвольных постоянных, мы получим затем общее решение первоначальных уравнений (уравнений возмущенного движения) по формулам (12.74).

2. Применим теперь теорию, изложенную в предыдущем разделе, к уравнениям (12.12), где составляющие возмущающего ускорения определяются формулами (12.67).

Тогда $k=3$; x, y, z суть обычные прямоугольные координаты;

$$x' = \dot{x}, \quad y' = \dot{y}, \quad z' = \dot{z}$$

являются составляющими скорости; функция H определится формулой

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu}{r};$$

все X', Y', Z' равны нулю, а

$$\tilde{X} = -\frac{\partial R}{\partial x}, \quad \tilde{Y} = -\frac{\partial R}{\partial y}, \quad \tilde{Z} = -\frac{\partial R}{\partial z}$$

суть известные функции времени и координат x, y, z.

Уравнения упрощенной системы (12.73′) в данном случае являются обычными уравнениями невозмущенного кеплеровского движения, общее решение которых известно. Это общее решение мы возьмем здесь в виде (9.59), где ξ и η суть прямоугольные орбитальные координаты. Произвольными постоянными являются элементы кеплеровой орбиты

$$\Omega, \quad i, \quad \omega, \quad p, \quad e, \quad \tau, \qquad (12.79)$$

которая может быть и эллипсом, и гиперболой.

Если э обозначает какой-либо из элементов (12.79), то мы имеем по формулам (12.77)

$$R_{\text{э}} = -\frac{\partial R}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \text{э}} - \frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \text{э}} - \frac{\partial R}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \text{э}} = -\frac{\partial R}{\partial \text{э}}. \qquad (12.79')$$

Теперь, чтобы составить уравнения (12.78), которые в рассматриваемом случае представляют собой систему шести линейных уравнений относительно производных от элементов (12.79), нужно сначала вычислить скобки Лагранжа, число которых в данном случае равно 30, что в силу свойств скобок приводится к 15.

Для вычисления этих 15 скобок, которые содержат частные производные от координат и составляющих скоростей невозмущенного движения по элементам (12.79), мы можем воспользоваться готовыми формулами, выписанными в конце гл. X.

Пусть L_1 и L_2 — два различных элемента из группы Ω, i, ω. Тогда мы имеем

$$[L_1, L_2] = \frac{\partial x}{\partial L_1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial L_2} - \frac{\partial x}{\partial L_2}\frac{\partial \dot{x}}{\partial L_1} + \dots \qquad (12.80)$$

По формулам гл. X

$$\frac{\partial x}{\partial L} = \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L}\xi + \frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L}\eta, \qquad \frac{\partial \dot{x}}{\partial L} = \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L}\dot{\xi} + \frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L}\dot{\eta},$$

. . . .

так что из (12.80) мы находим

$$[L_1, L_2] = (\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi})\left[\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L_1}\frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L_2} - \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L_2}\frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L_1} + \dots\right].$$

Но в невозмущенном движении

$$\xi\dot{\eta} - \eta\dot{\xi} = c = \sqrt{\mu}\sqrt{p},$$

а поэтому

$$[L_1, L_2] = \sqrt{\mu}\sqrt{p}\left[\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L_1}\frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L_2} - \frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L_2}\frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L_1} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \beta_\tau}{\partial L_1}\frac{\partial \beta'_\tau}{\partial L_2} - \frac{\partial \beta_\tau}{\partial L_2}\frac{\partial \beta'_\tau}{\partial L_1} + \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial L_1}\frac{\partial \gamma'_\tau}{\partial L_2} - \frac{\partial \gamma_\tau}{\partial L_2}\frac{\partial \gamma'_\tau}{\partial L_1}\right]. \qquad (12.80')$$

Подставляя сюда вместо производных от направляющих косинусов по элементам первой группы их выражения, даваемые формулами (10.106), (10.106′) и (10.106″) гл. X, мы найдем

$$[\Omega, \omega] = 0, \quad [\Omega, i] = -\sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin i, \quad [\omega, i] = 0. \qquad (12.80'')$$

Подразумевая далее, как и в гл. X, под L любой из элементов первой группы и под P любой из элементов второй группы (элементы: p, e, τ), мы имеем

$$[L, P]=\frac{\partial x}{\partial L}\frac{\partial \dot{x}}{\partial P}-\frac{\partial x}{\partial P}\frac{\partial \dot{x}}{\partial L}+\ldots \tag{12.81}$$

Но по формулам гл. X

$$\frac{\partial x}{\partial P}=\alpha_\tau\frac{\partial \xi}{\partial P}+\alpha'_\tau\frac{\partial \eta}{\partial P}, \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial P}=\alpha_\tau\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial P}+\alpha'_\tau\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial P},$$

. . . .

а производные по элементам первой группы написаны выше, и мы получаем

$$[L, P]=\left(\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L}\xi+\frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L}\eta\right)\left(\alpha_\tau\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial P}+\alpha'_\tau\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial P}\right)-$$

$$-\left(\alpha_\tau\frac{\partial \xi}{\partial P}+\alpha'_\tau\frac{\partial \eta}{\partial P}\right)\left(\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L}\dot{\xi}+\frac{\partial \alpha'_\tau}{\partial L}\dot{\eta}\right)+\ldots$$

После упрощений найдем

$$[L, P]=\left(\alpha'_\tau\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L}+\beta'_\tau\frac{\partial \beta_\tau}{\partial L}+\gamma'_\tau\frac{\partial \gamma_\tau}{\partial L}\right)\cdot\frac{\partial(\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi})}{\partial P},$$

откуда

$$[L, P]=\sqrt{\mu}\left(\alpha'_\tau\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L}+\beta'_\tau\frac{\partial \beta_\tau}{\partial L}+\gamma'_\tau\frac{\partial \gamma_\tau}{\partial L}\right)\frac{\partial \sqrt{p}}{\partial P}. \tag{12.81'}$$

Из этой формулы имеем

$$[L, e]=0, \quad [L, \tau]=0 \tag{12.81''}$$

и

$$[L, p]=\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\left(\alpha'_\tau\frac{\partial \alpha_\tau}{\partial L}+\beta'_\tau\frac{\partial \beta_\tau}{\partial L}+\gamma'_\tau\frac{\partial \gamma_\tau}{\partial L}\right). \tag{12.82}$$

Полагая здесь последовательно $L=\Omega$, i, ω и воспользовавшись опять формулами (10.106), мы найдем

$$[\Omega, p]=\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\cos i, \quad [i, p]=0, \quad [\omega, p]=\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}. \tag{12.82'}$$

Наконец, пусть P_1 и P_2 — два различных элемента второй группы. Тогда

$$[P_1, P_2]=\frac{\partial x}{\partial P_1}\frac{\partial \dot{x}}{\partial P_2}-\frac{\partial x}{\partial P_2}\frac{\partial \dot{x}}{\partial P_1}+\ldots, \tag{12.83}$$

откуда

$$[P_1, P_2]=\left(\alpha_\tau\frac{\partial \xi}{\partial P_1}+\alpha'_\tau\frac{\partial \eta}{\partial P_1}\right)\left(\alpha_\tau\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial P_2}+\alpha'_\tau\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial P_2}\right)-$$

$$-\left(\alpha_\tau\frac{\partial \xi}{\partial P_2}+\alpha'_\tau\frac{\partial \eta}{\partial P_2}\right)\left(\alpha_\tau\frac{\partial \dot{\xi}}{\partial P_1}+\alpha'_\tau\frac{\partial \dot{\eta}}{\partial P_1}\right).$$

После упрощений будем иметь

$$[P_1, P_2]=\frac{\partial\xi}{\partial P_1}\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial P_2}-\frac{\partial\xi}{\partial P_2}\frac{\partial\dot{\xi}}{\partial P_1}+\frac{\partial\eta}{\partial P_1}\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial P_2}-\frac{\partial\eta}{\partial P_2}\frac{\partial\dot{\eta}}{\partial P_1}. \qquad (12.83')$$

Сюда нужно подставить вместо частных производных от орбитальных координат и орбитальных составляющих скорости их выражения из формул (10.108) и (10.109').

При этом при вычислении производных, входящих в формулу (12.83'), мы можем придать времени t любое значение, так как, по свойству скобок Лагранжа,

$$\frac{\partial\,[P_1, P_2]}{\partial t}\equiv 0.$$

Проще всего положить $t=\tau$, так как для этого значения t истинная аномалия v равна нулю.

Формулы (10.107'), (10.107''), (10.108) и (10.109') дают при $t=\tau$:

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{\partial\xi}{\partial p}=\dfrac{1}{1+e}, & \dfrac{\partial\eta}{\partial p}=0, & \dfrac{\partial\dot{\xi}}{\partial p}=0, & \dfrac{\partial\dot{\eta}}{\partial p}=-\dfrac{\sqrt{\mu}\,(1+e)}{2p\sqrt{p}}, \\
\dfrac{\partial\xi}{\partial e}=-\dfrac{p}{(1+e)^2}, & \dfrac{\partial\eta}{\partial e}=0, & \dfrac{\partial\dot{\xi}}{\partial e}=0, & \dfrac{\partial\dot{\eta}}{\partial e}=\dfrac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{p}}, \\
\dfrac{\partial\xi}{\partial\tau}=0, & \dfrac{\partial\eta}{\partial\tau}=-\dfrac{\sqrt{\mu}\,(1+e)}{\sqrt{p}}, & \dfrac{\partial\dot{\xi}}{\partial\tau}=\dfrac{\mu\,(1+e)^2}{p^2}, & \dfrac{\partial\dot{\eta}}{\partial\tau}=0.
\end{array}$$

С помощью этих выражений по (12.83') находим без труда

$$[p, e]=0, \quad [p, \tau]=\frac{\mu\,(1-e^2)}{2p^2}, \quad [e, \tau]=\frac{\mu e}{p}. \qquad (12.83'')$$

Подставляя теперь выражения для скобок Лагранжа (12.80''), (12.81''), (12.82') и (12.83'') в уравнения вида (12.78), мы получим следующие уравнения:

$$-\sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin i\frac{di}{dt}+\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\cos i\frac{dp}{dt}-\frac{\partial R}{\partial\Omega}=0,$$

$$+\sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin i\frac{d\Omega}{dt}-\frac{\partial R}{\partial i}=0,$$

$$+\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\frac{dp}{dt}-\frac{\partial R}{\partial\omega}=0,$$

$$-\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\cos i\frac{d\Omega}{dt}-\frac{\sqrt{\mu}}{2\sqrt{p}}\frac{d\omega}{dt}+\frac{\mu\,(1-e^2)}{2p^2}\frac{d\tau}{dt}-\frac{\partial R}{\partial p}=0,$$

$$+\frac{\mu e}{p}\frac{d\tau}{dt}-\frac{\partial R}{\partial e}=0,$$

$$-\frac{\mu\,(1-e^2)}{2p^2}\frac{dp}{dt}-\frac{\mu e}{p}\frac{de}{dt}-\frac{\partial R}{\partial\tau}=0.$$

Разрешая эти уравнения относительно производных от элементов, мы получим окончательные уравнения Лагранжа для системы элементов (12.79) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt} &= +\frac{1}{\sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i},\\
\frac{di}{dt} &= -\frac{1}{\sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\cos i}{\sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin i}\frac{\partial R}{\partial \omega},\\
\frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cos i}{\sqrt{\mu}\sqrt{p}\sin i}\frac{\partial R}{\partial i} - \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{\mu}}\frac{\partial R}{\partial p} + \frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu}\sqrt{p}}\frac{\partial R}{\partial e},\\
\frac{dp}{dt} &= -\frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu}\sqrt{p}}\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{p}{\mu e}\frac{\partial R}{\partial \tau},\\
\frac{de}{dt} &= -\frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu}\sqrt{p}}\frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{p}{\mu e}\frac{\partial R}{\partial \tau},\\
\frac{d\tau}{dt} &= +\frac{p}{\mu e}\frac{\partial R}{\partial e}.
\end{aligned}\right\} \qquad (12.84)$$

Эти уравнения, как уже было замечено, справедливы для любого типа движения (эллиптического или гиперболического) и от них нетрудно перейти к уравнениям для какой-либо другой системы элементов и, в частности, к уравнениям (12.72) для элементов эллиптического движения *).

§ 6. Основные методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения

1. Мы уже неоднократно замечали, что дифференциальные уравнения возмущенного движения, например, уравнения вида (12.1) или равносильные им уравнения (12.12), при современном состоянии математики не могут быть строго проинтегрированы.

Это замечание относится также к уравнениям движения в каких-либо других координатах (сферических, цилиндрических и т. д.), так как невозможность полного интегрирования обусловливается отсутствием нужного количества первых интегралов задачи. Также не могут быть строго проинтегрированы и

---

*) Лагранж в своей «Аналитической механике», выводит сначала уравнения (12.84), но только для случая движения эллиптического типа, после чего замечает, что из полученных уравнений можно, наоборот, вывести уравнения Ньютона.

уравнения Ньютона или уравнения Лагранжа, получающиеся из уравнений (12.12) путем замены переменных.

Можно, конечно, поставить математическую задачу об отыскании такого преобразования переменных, чтобы новые уравнения оказались интегрируемыми в строгом смысле слова Однако эта задача в громадном большинстве случаев оказывается неразрешимой, но применяемые в ней методы могут оказаться полезными для чисто теоретических исследований. Поэтому главное внимание астрономов-теоретиков издавна было обращено на приемы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения, основные принципы которых мы рассмотрим в настоящем параграфе. При этом мы будем рассматривать исключительно аналитические методы, имеющие целью получить буквенные приближенные формулы для тех неизвестных функций, которые определяются заданными уравнениями, совершенно не касаясь численных методов интегрирования *).

Рассмотрим сначала первоначальные уравнения возмущенного движения (12.1) в прямоугольных координатах и допустим, что составляющие возмущающего ускорения, являясь заданными функциями от координат, составляющих скорости и времени, зависят еще от некоторого малого параметра σ и могут быть представлены в форме рядов, расположенных по целым положительным степеням этого параметра **):

$$\left.\begin{aligned} X &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k X^{(k)}(t;\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}),\\ Y &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k Y^{(k)}(t;\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}),\\ Z &= \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k Z^{(k)}(t;\ x,\ y,\ z,\ \dot{x},\ \dot{y},\ \dot{z}). \end{aligned}\right\} \qquad (12.85)$$

Предположим, что эти ряды сходятся абсолютно для всех значений времени t, содержащихся в некотором промежутке $(t_0 - \bar{t}_1,\ t_0 + \bar{t}_2)$, для всех значений координат и их производных, содержащихся в некоторой области шестимерного пространства, и при значениях параметра, не превосходящих по абсолютной величине некоторого малого предела $\bar{\sigma}$.

---

*) О численном интегрировании дифференциальных уравнений небесной механики см.: М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, т. 2, Д. Брауэр, Дж. Клеменс. Методы небесной механики.

**) Возможны случаи, когда эти ряды расположены по дробным степеням параметра.

Уравнения (12.1) напишем в этом случае следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\mu x}{r^3}&=\sum_{k=1}^{\infty}\sigma^k X^{(k)},\\ \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{\mu y}{r^3}&=\sum_{k=1}^{\infty}\sigma^k Y^{(k)},\\ \frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\mu z}{r^3}&=\sum_{k=1}^{\infty}\sigma^k Z^{(k)},\end{aligned}\right\}\qquad(12.86)$$

и поставим задачу о нахождении общего решения этой системы также в виде рядов, расположенных по степеням параметра σ.

Для этого положим

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma^k x^{(k)},\quad y=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma^k y^{(k)},\quad z=\sum_{k=0}^{\infty}\sigma^k z^{(k)},\qquad(12.87)$$

где $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $z^{(k)}$ суть неизвестные коэффициенты, которые нужно определить в функции времени так, чтобы ряды (12.87) удовлетворяли формально уравнениям (12.86).

Очевидно, что функции $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, $z^{(0)}$, представляющие нулевое приближение, определяются уравнениями, которые получим из (12.86), полагая $\sigma=0$, и которые, следовательно, имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x^{(0)}}{dt^2}+\frac{\mu x^{(0)}}{r^{(0)^3}}&=0,\\ \frac{d^2y^{(0)}}{dt^2}+\frac{\mu y^{(0)}}{r^{(0)^3}}&=0,\\ \frac{d^2z^{(0)}}{dt^2}+\frac{\mu z^{(0)}}{r^{(0)^3}}&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(12.88)$$

Но уравнения (12.88), очевидно, суть просто уравнения невозмущенного кеплеровского движения, общее решение которых, содержащее шесть произвольных постоянных, известно и дается формулами, полученными в третьей части этой книги.

Чтобы получить уравнения, определяющие коэффициенты рядов (12.87), можно идти двумя разными путями. Во-первых, мы можем просто подставить вместо x, y, z ряды (12.87) в уравнения (12.86), затем расположить результаты подстановок по степеням параметра σ и (имея в виду, что уравнения должны удовлетворяться этими рядами тождественно) сравнить затем коэффициенты при одинаковых степенях σ в левых и правых частях равенств.

Во-вторых, ряды (12.87) можно рассматривать как ряды Тейлора (или Маклорена), расположенные по степеням независимой переменной σ. Тогда, по формулам Тейлора, имеем

$$x^{(k)}=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k x}{d\sigma^k}\right)_{\sigma=0},\quad \dot{x}^{(k)}=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k \dot{x}}{d\sigma^k}\right)_{\sigma=0},\ \ldots\quad (k=1,\ 2,\ \ldots). \qquad (12.87')$$

Предполагая, что ряды (12.87) подставлены вместо x, y, z в уравнения (12.86), мы превращаем эти уравнения в тождества по σ, и имеем право, следовательно, дифференцировать эти тождества по параметру σ любое число раз, получая после каждого дифференцирования опять тождества.

Второй путь для определения коэффициентов рядов (12.87) является более простым и мы будем следовать именно ему.

Дифференцируя равенства (12.86) по σ, имея в виду, что x, y, z суть функции σ, определяемые рядами (12.87), мы получим следующие равенства:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{dx}{d\sigma}\right)+\frac{\mu}{r^3}\frac{dx}{d\sigma}-\frac{3\mu x}{r^5}\left(x\frac{dx}{d\sigma}+y\frac{dy}{d\sigma}+z\frac{dz}{d\sigma}\right)=\\
&\qquad\qquad=\sum_{k=1}^{\infty}k\sigma^{k-1}X^{(k)}+\sum_{k=1}^{\infty}\sigma^k\frac{dX^{(k)}}{d\sigma},\\
&\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{dy}{d\sigma}\right)+\frac{\mu}{r^3}\frac{dy}{d\sigma}-\frac{3\mu y}{r^5}\left(x\frac{dx}{d\sigma}+y\frac{dy}{d\sigma}+z\frac{dz}{d\sigma}\right)=\\
&\qquad\qquad=\sum_{k=1}^{\infty}k\sigma^{k-1}Y^{(k)}+\sum_{k=1}^{\infty}\sigma^k\frac{dY^{(k)}}{d\sigma},\\
&\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{dz}{d\sigma}\right)+\frac{\mu}{r^3}\frac{dz}{d\sigma}-\frac{3\mu z}{r^5}\left(x\frac{dx}{d\sigma}+y\frac{dy}{d\sigma}+z\frac{dz}{d\sigma}\right)=\\
&\qquad\qquad=\sum_{k=1}^{\infty}k\sigma^{k-1}Z^{(k)}+\sum_{k=1}^{\infty}\sigma^k\frac{dZ^{(k)}}{d\sigma},
\end{aligned}\right\}\qquad (12.89)$$

где $\frac{dX^{(k)}}{d\sigma}$, ... есть полная частная производная от функции $X^{(k)}$ по параметру σ, определяемая формулой

$$\frac{dX^{(k)}}{d\sigma}=\frac{\partial X^{(k)}}{\partial x}\frac{dx}{d\sigma}+\ldots+\frac{\partial X^{(k)}}{\partial \dot{x}}\frac{d\dot{x}}{d\sigma}+\ldots$$

Полагая теперь в уравнениях (12.89) $\sigma=0$ и имея в виду формулы (12.87′), мы получим для определения функций $x^{(1)}$

$y^{(1)}$, $z^{(1)}$, составляющих первое приближение, следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x^{(1)}}{dt^2}+p_{11}x^{(1)}+p_{12}y^{(1)}+p_{13}z^{(1)}=X_1,\\
&\frac{d^2y^{(1)}}{dt^2}+p_{21}x^{(1)}+p_{22}y^{(1)}+p_{23}z^{(1)}=Y_1,\\
&\frac{d^2z^{(1)}}{dt^2}+p_{31}x^{(1)}+p_{32}y^{(1)}+p_{33}z^{(1)}=Z_1,
\end{aligned}\right\}\qquad(12.90)$$

коэффициенты которых являются известными функциями времени, определяемые формулами

$$\left.\begin{aligned}
&p_{11}=\frac{\mu}{r^{(0)3}}-\frac{3\mu x^{(0)2}}{r^{(0)5}}, && p_{12}=-\frac{3\mu x^{(0)}y^{(0)}}{r^{(0)5}}, && p_{13}=-\frac{3\mu x^{(0)}z^{(0)}}{r^{(0)5}},\\
&p_{21}=-\frac{3\mu y^{(0)}x^{(0)}}{r^{(0)5}}, && p_{22}=\frac{\mu}{r^{(0)3}}-\frac{3\mu y^{(0)2}}{r^{(0)5}}, && p_{23}=-\frac{3\mu y^{(0)}z^{(0)}}{r^{(0)5}},\\
&p_{31}=-\frac{3\mu z^{(0)}x^{(0)}}{r^{(0)5}}, && p_{32}=-\frac{3\mu z^{(0)}y^{(0)}}{r^{(0)5}}, && p_{33}=\frac{\mu}{r^{(0)3}}-\frac{3\mu z^{(0)2}}{r^{(0)5}},
\end{aligned}\right\}\qquad(12.91)$$

и где

$$\begin{aligned}
X_1&=X^{(1)}(t;\ x^{(0)},\ y^{(0)},\ z^{(0)},\ \dot{x}^{(0)},\ \dot{y}^{(0)},\ \dot{z}^{(0)}),\\
Y_1&=Y^{(1)}(t;\ x^{(0)},\ y^{(0)},\ z^{(0)},\ \dot{x}^{(0)},\ \dot{y}^{(0)},\ \dot{z}^{(0)}),\\
Z_1&=Z^{(1)}(t;\ x^{(0)},\ y^{(0)},\ z^{(0)},\ \dot{x}^{(0)},\ \dot{y}^{(0)},\ \dot{z}^{(0)}),
\end{aligned}$$

также суть известные функции времени, так как общее решение уравнений нулевого приближения нам известно из теории невозмущенного кеплеровского движения.

Дифференцируя теперь уравнения (12.89) по параметру σ второй, третий, четвертый и вообще $(k-1)$-й раз и полагая после каждого дифференцирования $\sigma=0$, мы будем получать последовательно уравнения, определяющие второе, третье и т. д. приближения. Нетрудно убедиться, что в каждом последующем приближении мы будем получать уравнения такого же вида, как и уравнения (12.90) и притом с теми же самыми коэффициентами p_{ij}, но отличающиеся правыми частями.

Таким образом, уравнения, определяющие функции $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $z^{(k)}$, или k-е приближение, напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x^{(k)}}{dt^2}+p_{11}x^{(k)}+p_{12}y^{(k)}+p_{13}z^{(k)}=X_k,\\
&\frac{d^2y^{(k)}}{dt^2}+p_{21}x^{(k)}+p_{22}y^{(k)}+p_{23}z^{(k)}=Y_k,\\
&\frac{d^2z^{(k)}}{dt^2}+p_{31}x^{(k)}+p_{32}y^{(k)}+p_{33}z^{(k)}=Z_k.
\end{aligned}\right\}\qquad(12.90')$$

Правые части X_k, Y_k, Z_k этих уравнений суть некоторые многочлены относительно величин

$$\begin{matrix} x^{(1)}, & y^{(1)}, & z^{(1)}, & \dot{x}^{(1)}, & \dot{y}^{(1)}, & \dot{z}^{(1)}, \\ x^{(2)}, & y^{(2)}, & z^{(2)}, & \dot{x}^{(2)}, & \dot{y}^{(2)}, & \dot{z}^{(2)}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x^{(k-1)}, & y^{(k-1)}, & z^{(k-1)}, & \dot{x}^{(k-1)}, & \dot{y}^{(k-1)}, & \dot{z}^{(k-1)}, \end{matrix}$$

коэффициенты которых суть функции времени и величин

$$x^{(0)}, \quad y^{(0)}, \quad z^{(0)}, \quad \dot{x}^{(0)}, \quad \dot{y}^{(0)}, \quad \dot{z}^{(0)}.$$

Если первое, второе, ..., $(k-1)$-е приближения уже определены, то правые части уравнений (12.90′) будут известными функциями времени. Поэтому для нахождения каждого приближения, начиная с первого, нужно интегрировать однотипную систему линейных дифференциальных уравнений, коэффициенты которой и правые части суть известные функции времени.

2. Для интегрирования системы линейных уравнений (12.90′), где $k=1, 2, \ldots$, нужно прежде всего, как хорошо известно, найти фундаментальную систему решений соответствующих однородных уравнений, которые получаются из системы (12.90′) заменой всех правых частей нулями.

Вообще нет никакого общего способа для интегрирования системы линейных уравнений с переменными коэффициентами, но в нашем случае это интегрирование может быть полностью выполнено при помощи одной замечательной теоремы, принадлежащей Пуанкаре*). Мы не будем здесь доказывать теорему Пуанкаре в ее общем виде и покажем только ее справедливость для данного случая.

Пусть решение уравнений невозмущенного движения (12.88) определяется следующими формулами:

$$x^{(0)} = f(t \mid C_s), \quad y^{(0)} = \varphi(t \mid C_s), \quad z^{(0)} = \psi(t \mid C_s), \tag{12.92}$$

где Cs $(s=1, 2, \ldots, 6)$ суть произвольные постоянные, за которые можно принять либо начальные значения неизвестных функций либо какие-нибудь элементы кеплеровского движения, либо, вообще, какие-либо произвольно задаваемые постоянные. Тогда теорема Пуанкаре утверждает, что функции, определяемые равенствами

$$x_s = \frac{\partial f}{\partial C_s}, \quad y_s = \frac{\partial \varphi}{\partial C_s}, \quad z_s = \frac{\partial \psi}{\partial C_s}, \tag{12.92′}$$

---

*) Доказательство теоремы Пуанкаре в общем виде приведено в моей книге «Небесная механика. Аналитические и качественные методы». «Наука», 1964.

удовлетворяют системе линейных однородных уравнений, получаемых отбрасыванием правых частей в системе (12.90′).

Сказанное легко доказать. Действительно, функции (12.92) представляют решение уравнений (12.88), а поэтому, подставляя в эти уравнения выражения (12.92), мы получим тождества, каковы бы ни были значения произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_6$.

Продифференцируем теперь полученные тождества по какой-либо из величин C_s, в результате чего получим, очевидно, опять тождества. Эти тождества, как нетрудно проверить, напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial f}{\partial C_s}\right)+p_{11}\frac{\partial f}{\partial C_s}+p_{12}\frac{\partial \varphi}{\partial C_s}+p_{13}\frac{\partial \psi}{\partial C_s}\equiv 0,\\
\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial C_s}\right)+p_{21}\frac{\partial f}{\partial C_s}+p_{22}\frac{\partial \varphi}{\partial C_s}+p_{23}\frac{\partial \psi}{\partial C_s}\equiv 0,\\
\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial C_s}\right)+p_{31}\frac{\partial f}{\partial C_s}+p_{32}\frac{\partial \varphi}{\partial C_s}+p_{33}\frac{\partial \psi}{\partial C_s}\equiv 0,
\end{aligned}\right\} \qquad (12.92'')$$

где коэффициенты p_{ij} определяются опять формулами (12.91).

Полученные тождества и доказывают теорему Пуанкаре для нашего случая.

Если за произвольные постоянные взять кеплеровские элементы, то для нахождения производных от координат и составляющих скорости по этим элементам можно воспользоваться формулами, приведенными в § 5 этой главы и выписать, следовательно, все равенства (12.92′) в конечном виде. Составляя из 36 найденных таким образом функций определитель шестого порядка, мы убедимся при помощи громоздкого, но не сложного вычисления, что этот определитель отличен от нуля и, следовательно, что найденные функции образуют фундаментальную систему решений линейных однородных уравнений.

Таким образом, общее решение линейных однородных уравнений может быть написано следующим образом:

$$x^{(k)}=\sum_{s=1}^{6}C_s^{(k)}x_s,\quad y^{(k)}=\sum_{s=1}^{6}C_s^{(k)}y_s,\quad z^{(k)}=\sum_{s=1}^{6}C_s^{(k)}z_s,\qquad (12.93)$$

где $C_s^{(k)}$ обозначают произвольные постоянные интегрирования.

Чтобы получить теперь общее решение неоднородной системы (12.90′), нужно применить метод вариации постоянных, требуя, чтобы для неоднородной системы функции $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $z^{(k)}$ и их первые производные по времени $\dot{x}^{(k)}$, $\dot{y}^{(k)}$, $\dot{z}^{(k)}$ определялись такими же формулами, как и для однородной системы.

Первое условие приводит нас снова к формулам (12.93), где величины $C_s^{(k)}$ рассматриваются уже как некоторые функции времени. Второе условие дает следующие три соотношения:

$$\sum_{s=1}^{6} \dot{C}_s^{(k)} x_s = 0, \quad \sum_{s=1}^{6} \dot{C}_s^{(k)} y_s = 0, \quad \sum_{s=1}^{6} \dot{C}_s^{(k)} z_s = 0. \qquad (12.93')$$

Требуя, чтобы уравнения (12.90′) удовлетворялись формулами (12.93) и имея в виду соотношения (12.93′), мы получим в силу тождеств (12.92″) еще три соотношения:

$$\sum_{s=1}^{6} \dot{C}_s^{(k)} \dot{x}_s = X_k, \quad \sum_{s=1}^{6} \dot{C}_s^{(k)} \dot{y}_s = Y_k, \quad \sum_{s=1}^{6} \dot{C}_s^{(k)} \dot{z}_s = Z_k. \qquad (12.93'')$$

Соотношения (12.93′) и (12.93″) составляют систему шести уравнений относительно производных $\dot{C}_s^{(k)}$, главный определитель которых есть определитель, составленный из функций (и их производных) фундаментальной системы линейных уравнений, отличный, как замечено выше, от нуля.

Пусть этот определитель составлен так, что первые его три строки состоят последовательно из функций x_s, y_s, z_s $(s=1, 2, \ldots, 6)$, а последние три строки из производных $\dot{x}_s$, $\dot{y}_s$, $\dot{z}_s$, и обозначим его величину через D.

Обозначим, далее, через D_{4s}, D_{5s}, D_{6s} алгебраические дополнения элементов четвертой, пятой и шестой строк определителя D. Тогда, решая уравнения (12.93′) и (12.93″) относительно $\dot{C}_s^{(k)}$, мы найдем

$$\dot{C}_s^{(k)} = \frac{D_{4s}}{D} X_k + \frac{D_{5s}}{D} Y_k + \frac{D_{6s}}{D} Z_k, \qquad (12.94)$$

где правые части будут известными функциями времени.

Интегрируя равенства (12.94), мы получим все величины $C_s^{(k)}$ как известные функции времени, после чего по формулам (12.93) найдем функции $x^{(k)}$, $y^{(k)}$, $z^{(k)}$, удовлетворяющие неоднородной системе (12.90′).

При интегрировании равенств (12.94) появятся (и притом для каждого k) шесть произвольных постоянных, а поэтому полученные формулы будут содержать бесчисленное множество произвольных постоянных.

После подстановки функций (12.93) в ряды (12.87) мы получим общее решение уравнений (12.86), которое будет содержать, как нетрудно убедиться, всего двенадцать произвольных постоянных, из которых шесть постоянных суть величины C_s, входящие в формулы нулевого приближения, шесть других являются комбинациями произвольных постоянных, получающихся при интегрировании равенств (12.94).

Так как общее решение уравнений (12.86) должно содержать только шесть произвольных постоянных, то другие шесть являются лишними и их можно выбирать произвольно.

Этот произвольный выбор шести постоянных (из двенадцати) можно осуществлять бесчисленным множеством способов, лишь бы ряды (12.87) были сходящимися. В частности, можно потребовать, чтобы все функции (12.93) и их первые производные по времени обращались в нуль при $t=t_0$. Тогда все произвольные постоянные, возникающие при интегрировании равенств (12.94), будут равны нулю, и мы получим следующие формулы:

$$C_s^{(k)}=\int_{t_0}^{t}\left[\frac{D_{4s}}{D}X_k+\frac{D_{5s}}{D}Y_k+\frac{D_{6s}}{D}Z_k\right]dt. \tag{12.94'}$$

Подставляя эти выражения для $C_s^{(k)}$ в формулы (12.93), мы будем иметь следующие общие формулы для вычисления последовательных приближений, т. е. для определения коэффициентов рядов (12.87):

$$\left.\begin{aligned}
x^{(k)}&=\sum_{s=1}^{6}x_s\int_{t_0}^{t}\left[\frac{D_{4s}}{D}X_k+\frac{D_{5s}}{D}Y_k+\frac{D_{6s}}{D}Z_k\right]dt,\\
y^{(k)}&=\sum_{s=1}^{6}y_s\int_{t_0}^{t}\left[\frac{D_{4s}}{D}X_k+\frac{D_{5s}}{D}Y_k+\frac{D_{6s}}{D}Z_k\right]dt,\\
z^{(k)}&=\sum_{s=1}^{6}z_s\int_{t_0}^{t}\left[\frac{D_{4s}}{D}X_k+\frac{D_{5s}}{D}Y_k+\frac{D_{6s}}{D}Z_k\right]dt.
\end{aligned}\right\} \tag{12.95}$$

Можно доказать, что при достаточно общих предположениях относительно величин $X^{(k)}$, $Y^{(k)}$, $Z^{(k)}$, ряды (12.87), коэффициенты которых определяются формулами (12.95), сходятся абсолютно и равномерно для всякого значения t в промежутке $(t_0-\bar{t},\ t_0+\bar{t})$, где $\bar{t}$ не превосходит наименьшего из двух чисел, $\bar{t}_1$ и $\bar{t}_2$, и притом зависят от $\bar{\sigma}$. Это доказательство, вытекающее из более общей теоремы А. М. Ляпунова, мы здесь приводить не будем *).

Фактические вычисления последовательных приближений по формулам (12.95), конечно, довольно громоздки, но все же могут быть выполнены, по крайней мере для первого приближения, которым во многих случаях можно и ограничиться. Исходными формулами при этих вычислениях являются формулы

---

*) А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, 1950. Эта теорема изложена также в моей книге «Небесная механика. Аналитические и качественные методы».

(12.92), получаемые дифференцированием формул невозмущенного движения по произвольным постоянным C_s.

Если за произвольные постоянные невозмущенного движения взять кеплеровские элементы оскулирующей орбиты (12.79), то для производных (12.92′) мы имеем уже готовые формулы, полученные и выписанные в конце гл. X, которыми мы уже пользовались в предыдущем параграфе для вычисления скобок Лагранжа.

Мы не будем приводить развернутых формул для вычисления последовательных приближений, так как нашей целью было только разъяснение сущности изложенного метода. Отметим только еще, что формулы (12.87) могут быть написаны в виде

$$x = x^{(0)} + \delta x, \quad y = y^{(0)} + \delta y, \quad z = z^{(0)} + \delta z, \tag{12.96}$$

где, как уже было выяснено, $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, $z^{(0)}$ представляют собой невозмущенные значения координат, определяемые общими формулами кеплеровского движения.

Величины

$$\delta x = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k x^{(k)}, \quad \delta y = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k y^{(k)}, \quad \delta z = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k z^{(k)} \tag{12.96′}$$

представляют собой полные возмущения координат, вызываемые действием возмущающей силы.

Величины

$$\delta^{(k)} x = \sigma^k x^{(k)}, \quad \delta^{(k)} y = \sigma^k y^{(k)}, \quad \delta^{(k)} z = \sigma^k z^{(k)},$$

называются возмущениями k-го порядка прямоугольных координат относительно параметра σ.

Можно еще заметить, что возможны случаи, когда полная возмущающая сила складывается из нескольких возмущающих сил различной природы и содержит не один малый параметр σ, а два или несколько. Рассмотренный способ может быть распространен на этот более общий случай без всякого труда и вычисление последовательных приближений производится опять при помощи интегрирования систем линейных уравнений, общее решение которых составляется почти совершенно так же, как и выше.

3. Вычисление последовательных приближений координат, являющееся, как уже было замечено, весьма громоздким и трудоемким, может быть значительно упрощено и облегчено либо путем соответствующего выбора прямоугольной системы координат, либо путем использования цилиндрических или сферических координат вместо прямоугольных.

Действительно, ничто не может нам помешать выбрать основную систему координат таким образом, чтобы невозмущенное движение (которое происходит в некоторой неизменной плоскости) происходило в плоскости xOy. Иными словами, рассматривая уравнения возмущенного движения (12.86), мы можем заранее принять плоскость невозмущенной орбиты за плоскость $z=0$, а тогда мы будем иметь для всякого значения t

$$z^{(0)}\equiv 0, \qquad \dot{z}^{(0)}\equiv 0.$$

Из формул (12.91) для коэффициентов $p_{s\sigma}$ мы найдем тогда, что

$$p_{13}=p_{23}=p_{31}=p_{32}=0,$$

вследствие чего всякая система (12.90) расщепится (или распадется) на две независимые системы, одна из которых определяет две неизвестные функции $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$, а вторая только одну — $z^{(k)}$. Такое же упрощение, как было замечено, может быть достигнуто и путем перехода к криволинейным координатам.

Рассмотрим, например, уравнения возмущенного движения в цилиндрических координатах ρ, λ, z, получающиеся из первоначальных уравнений (12.86) путем преобразования

$$x=\rho\cos\lambda, \qquad y=\rho\sin\lambda, \tag{12.97}$$

причем

$$r^2=\rho^2+z^2. \tag{12.97'}$$

Используя общий метод Лагранжа, изложенный в гл. VI, или производя преобразование уравнений непосредственным путем, мы получим вместо уравнений (12.86) следующую систему:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2+\frac{\mu\rho}{r^3}=\mathrm{P}=\sum_{k=1}^{\infty}\sigma^k\mathrm{P}^{(k)},\\
&\frac{d}{dt}\left(\rho^2\frac{d\lambda}{dt}\right)=\Lambda=\sum_{k=1}^{\infty}\sigma^k\Lambda^{(k)},\\
&\frac{d^2z}{dt^2}+\frac{\mu z}{r^3}=\mathrm{Z}=\sum_{k=1}^{\infty}\sigma^k\mathrm{Z}^{(k)},
\end{aligned}\right\} \tag{12.98}$$

где P, Λ, Z суть ряды такого же типа, как и ряды (12.85), т. е. суть ряды, расположенные по целым положительным степеням параметра σ, обращающиеся в нули при $\sigma=0$ и коэффициенты которых суть заданные функции времени, цилиндрических координат (12.97) и их первых производных по t.

Прежде всего заменим систему (12.98) другой системой, более удобной для приближенного интегрирования. Для этого проинтегрируем второе из уравнений (12.98) по t, заменяя, таким образом, дифференциальное уравнение для долготы λ уравнением интегральным, или даже интегро-дифференциальным.

Мы будем иметь после интегрирования

$$\rho^2 \frac{d\lambda}{dt} = c + \int_{t_0}^{t} \Lambda\, dt = c + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \int_{t_0}^{t} \Lambda^{(k)}\, dt, \tag{12.99}$$

где c есть произвольная постоянная, представляющая собой, очевидно, постоянную площадей уравнений невозмущенного движения.

Исключая теперь из первого уравнения системы (12.98) производную $\frac{d\lambda}{dt}$, мы получим следующую систему:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2\rho}{dt^2} - \frac{c^2}{\rho^3} + \frac{\mu\rho}{r^3} = R = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k R^{(k)},\\
&\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{\mu z}{r^3} = \mathrm{Z} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \mathrm{Z}^{(k)},\\
&\frac{d\lambda}{dt} = \frac{c}{\rho^2} + L = \frac{c}{\rho^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k L^{(k)},
\end{aligned}\right\} \tag{12.98$'$}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
&R = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \left[\mathrm{P}^{(k)} + \frac{2c^2}{\rho^3} \int_{t_0}^{t} \Lambda^{(k)}\, dt\right] + \frac{1}{\rho^3} \left\{\sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \int_{t_0}^{t} \Lambda^{(k)}\, dt\right\}^2,\\
&L = \frac{1}{\rho^2} \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \int_{t_0}^{t} \Lambda^{(k)}\, dt.
\end{aligned}\right\} \tag{12.98$''$}$$

Так же как и в первом разделе этого параграфа, будем искать решение системы (12.98) в виде рядов, расположенных по степеням параметра σ, т. е. положим

$$\left.\begin{aligned}
\rho &= \rho^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \rho^{(k)} = \rho^0 + \sigma\rho^{(1)} + \sigma^2\rho^{(2)} + \ldots,\\
z &= z^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k z^{(k)} = z^{(0)} + \sigma z^{(1)} + \sigma^2 z^{(2)} + \ldots,\\
\lambda &= \lambda^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \lambda^{(k)} = \lambda^{(0)} + \sigma\lambda^{(1)} + \sigma^2\lambda^{(2)} + \ldots,
\end{aligned}\right\} \tag{12.100}$$

где коэффициенты опять определяются формулами Тейлора, так что

$$\rho^{(k)}=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k\rho}{d\sigma^k}\right)_{\sigma=0}, \quad z^{(k)}=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^kz}{d\sigma^k}\right)_{\sigma=0}, \quad \lambda^{(k)}=\frac{1}{k!}\left(\frac{d^k\lambda}{d\sigma^k}\right)_{\sigma=0}, \tag{12.100'}$$

а $\rho^{(0)}$, $z^{(0)}$, $\lambda^{(0)}$ представляют решение уравнений невозмущенного движения и являются известными функциями времени и произвольных постоянных.

Для определения коэффициентов при σ^k в рядах (12.100) применяем такой же прием, как и выше, а именно, дифференцируем каждое из уравнений (12.98′) по параметру σ последовательно один, два, и т. д. раз, и вообще k раз.

В результате k-кратного дифференцирования получим следующие уравнения, которые должны выполняться тождественно, если ряды (12.100) удовлетворяют уравнениям (12.98′):

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{d^k\rho}{d\sigma^k}\right)+\frac{3c^2}{\rho^4}\left[\frac{d^k\rho}{d\sigma^k}+\ldots\right]+\frac{\mu}{r^3}\frac{d^k\rho}{d\sigma^k}-$$
$$-\frac{3\mu\rho}{r^5}\left[\rho\frac{d^k\rho}{d\sigma^k}+z\frac{d^kz}{d\sigma^k}+\ldots\right]=\frac{d^kR}{d\sigma^k},$$
$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{d^kz}{d\sigma^k}\right)-\frac{3\mu z}{r^5}\left[\rho\frac{d^k\rho}{d\sigma^k}+z\frac{d^kz}{d\sigma^k}+\ldots\right]=\frac{d^kZ}{d\sigma^k},$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d^k\lambda}{d\sigma^k}\right)=-\frac{2c^2}{\rho^3}\left[\frac{d^k\rho}{d\sigma^k}+\ldots\right]+\frac{d^kL}{d\sigma^k}.$$

Невыписанные члены в этих уравнениях содержат производные ниже k-го порядка.

Полагая теперь в этих равенствах $\sigma=0$ и имея в виду формулы (12.100), мы получим уравнения, определяющие коэффициенты при k-й степени σ в рядах (12.100):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2\rho^{(k)}}{dt^2}+\left(\frac{3c^2}{\rho^{(0)4}}+\frac{\mu}{r^{(0)3}}\right)\rho^{(k)}-\frac{3\mu\rho^{(0)}}{r^{(0)5}}\left[\rho^{(0)}\rho^{(k)}+z^{(0)}z^{(k)}\right]=R_k,\\
&\frac{d^2z^{(k)}}{dt^2}-\frac{3\mu z^{(0)}}{r^{(0)5}}\left[\rho^{(0)}\rho^{(k)}+z^{(0)}z^{(k)}\right]=Z_k,\\
&\frac{d\lambda^{(k)}}{dt}=-\frac{2c^2}{\rho^{(0)3}}\rho^{(k)}+L_k.
\end{aligned}\right\} \tag{12.101}$$

Если все коэффициенты рядов (12.100) при степенях σ, меньших k, уже определены, то правые части последних уравнений суть известные функции времени и уравнения (12.101) представляют собой систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными функциями $\rho^{(k)}$ и $z^{(k)}$ и одно уравнение, определяющее $\lambda^{(k)}$ простой квадратурой.

Решение системы двух линейных уравнений может быть получено при помощи теоремы Пуанкаре таким же путем, как и решение более сложной системы (12.90′). Если же за плоскость xOy принять плоскость невозмущенной орбиты, то $z^{(0)}=0$, и система (12.101) приведется к следующей:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\rho^{(k)}}{dt^2}+\left(\frac{3c^2}{\rho^{(0)^4}}-\frac{2\mu}{\rho^{(0)^3}}\right)\rho^{(k)}=R_k,\\ &\frac{d^2z^{(k)}}{dt^2}=Z_k,\\ &\frac{d\lambda^{(k)}}{dt}=-\frac{2c^2}{\rho^{(0)^3}}\rho^{(k)}+L_k. \end{aligned}\right\} \qquad (12.101')$$

Таким образом, вся задача сводится к интегрированию одного-единственного линейного уравнения, определяющего $\rho^{(k)}$, зная которое мы найдем $z^{(k)}$ и $\lambda^{(k)}$ простыми квадратурами. Решение линейного уравнения второго порядка с неизвестной $\rho^{(k)}$ может быть написано сразу, в явном виде, опять-таки при помощи использования теоремы Пуанкаре.

Разумеется, интегрирование уравнений (12.98) может быть произведено аналогичным образом и в том случае, когда имеется несколько возмущающих сил различной природы.

§ 7. Приближенное интегрирование уравнений Ньютона

1. Рассмотрим теперь дифференциальные уравнения в виде (12.42) или (12.84), определяющие кеплеровские элементы оскулирующей орбиты движущейся точки.

Обозначим для краткости элементы орбиты одной буквой $э_s$ ($s=1, 2, \ldots, 6$), так что система дифференциальных уравнений для оскулирующих элементов запишется в сжатом виде следующим образом:

$$\frac{dэ_s}{dt}=F_s(t\,|\,э_j), \qquad (12.102)$$

где правые части суть известные функции времени и всех элементов $э_1, э_2, \ldots, э_6$.

Предположим сначала, что составляющие возмущающего ускорения определяются формулами типа (12.85), т. е. разложимы в ряды, расположенные по целым возрастающим степеням параметра σ. Тогда, очевидно, и величины $\tilde{S}$, $\tilde{T}$, $\tilde{W}$ в силу (12.24) и (12.25) также могут быть представлены в виде рядов, расположенных по степеням σ, а следовательно, и все правые части уравнений (12.42) являются функциями, обладающими тем же свойством.

Поэтому мы можем положить

$$F_s(t \mid э_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^{(k)} F_s^{(k)}(t \mid э_j), \qquad (12.102')$$

где все коэффициенты суть известные функции времени и элементов. Ряды (12.102′), так же как и ряды (12.85), будут абсолютно сходящимися в некотором промежутке изменения t и в некоторой области изменения величин $э_j$, содержащей в себе начальную точку $э_j^{(0)}$ (начальные значения оскулирующих элементов для начального момента t_0).

Решение системы (12.102) будем искать (так же как и в предыдущем параграфе) в виде рядов, расположенных по возрастающим степеням параметра σ, т. е. положим

$$э_s = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k э_s^{(k)} = э_s^{(0)} + \sigma э_s^{(1)} + \sigma^2 э_s^{(2)} + \ldots \qquad (12.103)$$

Легко видеть, что все коэффициенты этих рядов определяются последовательно, в порядке возрастания k, квадратурами и притом гораздо более простыми, чем, например, квадратуры (12.95). Для нахождения этих коэффициентов применим тот же прием, как и выше, замечая, что ряды (12.103) суть ряды Тейлора и что, следовательно,

$$э_s^{(k)} = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k э_s}{d\sigma^k}\right)_{\sigma=0}. \qquad (12.103')$$

Прежде всего очевидно, что все $э_s^{(0)}$ суть постоянные, за которые можно принять начальные значения кеплеровских элементов, соответствующих начальной эпохе t_0.

Далее, дифференцируя уравнения (12.102) по σ, предполагая, что $э_s$ суть функции σ, определяемые формулами (12.103), и полагая $\sigma=0$, мы получим уравнения первого приближения:

$$\frac{dэ_s^{(1)}}{dt} = F_s^{(1)}(t \mid э_j^{(0)}), \qquad (12.104)$$

правые части которых суть, очевидно, известные функции времени.

Будем считать для простоты, что в начальный момент t_0 все величины $э_s^{(k)}$ обращаются в нуль. Тогда из (12.104) мы имеем

$$э_s^{(1)} = \int_{t_0}^{t} F_s^{(1)}(t \mid э_j^{(0)})\, dt. \qquad (12.104')$$

Поэтому в первом приближении выражения для неизвестных функций (оскулирующих элементов) имеют вид

$$э_s \cong \tilde{э}_s^{(1)} = э_s^{(0)} + \delta^{(1)} э_s. \qquad (12.104'')$$

Величины

$$\delta^{(1)} э_s = \sigma э_s^{(1)}$$

называются возмущениями первого порядка оскулирующих кеплеровских элементов $э_s$ относительно параметра σ.

Дифференцируя уравнения (12.102) по параметру σ два раза подряд и полагая после дифференцирования опять $\sigma = 0$, мы получим уравнения для второго приближения, которые, как нетрудно видеть, имеют следующий вид:

$$\frac{dэ_s^{(2)}}{dt} = F_s^{(2)}(t \mid э_j^{(0)}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{6} э_i^{(1)} \left[\frac{\partial F_s^{(1)}}{\partial э_i} \right]_{\sigma=0}. \qquad (12.105)$$

Так как величины $э_i^{(1)}$ уже определены и даются формулами (12.104′), то (считая, как условлено, что в начальный момент все $э_s^{(2)}$ равны нулю) мы найдем из (12.105)

$$э_s^{(2)} = \int_{t_0}^{t} \left\{ F_s^{(2)}(t \mid э_j^{(0)}) + \sum_{i=1}^{6} э_i^{(1)} \left[\frac{\partial F_s^{(1)}}{\partial э_i} \right]_{\sigma=0} \right\} dt. \qquad (12.105')$$

Поэтому во втором приближении мы имеем

$$э_s \cong \tilde{э}_s^{(2)} = э_s^{(0)} + \delta^{(1)} э_s + \delta_s^{(2)} э_s, \qquad (12.105'')$$

и величины

$$\delta^{(2)} э_s = \sigma^2 э_s^{(2)}$$

называются возмущениями второго порядка относительно σ.

Подобным же образом можно определить третье, четвертое и сколько угодно последующих приближений. Легко видеть, что уравнения какого-либо k-го приближения вообще будут иметь следующую форму:

$$\frac{dэ_s^{(k)}}{dt} = E_s^{(k)}(t \mid э_j^{(0)} \mid э_j^{(1)} \mid \ldots \mid э_j^{(k-1)}), \qquad (12.106)$$

причем правые части этих уравнений будут многочленами относительно величин $э_j^{(1)}, э_j^{(2)}, \ldots, э_j^{(k-1)}$, коэффициенты которых суть известные функции времени. Поэтому если предыдущие $k-1$ приближений уже определены, то правые части уравнений (12.106) являются известными функциями времени, и мы получим (считая опять, что в начальный момент все величины $\text{э}_s^{(k)}$ — нули)

$$\text{э}_s^{(k)} = \int_{t_0}^{t} E_s^{(k)}(t\,|\,\text{э}_j^{(0)}\,|\,\text{э}_j^{(1)}\,|\,\dots\,|\,\text{э}_j^{(k-1)})\,dt. \qquad (12.106')$$

Таким образом, мы определим k-е приближение формулами

$$\text{э}_s \cong \tilde{\text{э}}_s^{(k)} = \text{э}_s^{(0)} + \sigma\text{э}_s^{(1)} + \dots + \sigma^k\text{э}_s^{(k)}, \qquad (12.106'')$$

и величины

$$\delta^{(k)}\text{э}_s = \sigma^k\,\text{э}_s^{(k)}$$

назовем возмущениями k-го порядка относительно σ.

К полученным рядам опять можно применить уже упомянутую общую теорему А. М. Ляпунова, вследствие которой ряды (12.103) заведомо будут абсолютно и равномерно сходящимися в некотором промежутке $(t_0 - \bar{t},\ t_0 + \bar{t})$, где предел $\bar{t}$ зависит от σ, вообще увеличиваясь при уменьшении σ.

Но обыкновенно на практике пользуются большей частью одним только первым приближением, иногда вторым и очень редко третьим, дальше которого уже почти никогда не идут. Это объясняется не только громоздкостью выкладок, сложность которых быстро растет по мере увеличения числа приближений, но также и тем, что в большинстве конкретных случаев уже одно первое приближение дает результаты, достаточно близкие к действительности.

2. Если уравнения (12.102) не содержат никакого малого параметра, то последний всегда можно ввести искусственно, разумеется, в таких задачах, в которых возмущающая сила мала по сравнению с основной движущей силой, обратно пропорциональной квадрату расстояния движущейся точки от начала координат.

Но для приближенного интегрирования уравнений (12.102) можно также применить метод последовательных приближений Пикара; к рассмотрению этого метода мы и переходим *).

Процедура применения метода Пикара может быть описана следующим образом: заменим в правых частях уравнений (12.102) все неизвестные функции э_s их начальными значениями $\text{э}_s^{(0)}$.

---

*) См., например, В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, изд. 6-е, Гостехиздат, 1953, а также В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. 3 (любое издание).

Тогда уравнения (12.102) превратятся в уравнения первого приближения, которые напишем следующим образом:

$$\frac{d\bar{э}_s^{(1)}}{dt}=F_s\left(t\,|\,э_j^{(0)}\right). \qquad (12.107)$$

Так как правые части этих равенств — известные функции времени, то простое интегрирование дает следующие формулы для вычисления первого приближения:

$$\bar{э}_s^{(1)}=э_s^{(0)}+\int\limits_{t_0}^{t}F_s\left(t\,|\,э_j^{(0)}\right)dt. \qquad (12.107')$$

Подставляя теперь в правые части уравнений (12.102) вместо $э_s$ их значения $\bar{э}_s^{(1)}$, полученные в первом приближении, мы будем иметь уравнения второго приближения

$$\frac{d\bar{э}_s^{(2)}}{dt}=F_s\left(t\,|\,\bar{э}_j^{(1)}\right), \qquad (12.108)$$

правые части которых опять являются известными функциями времени.

Поэтому, интегрируя эти равенства, мы найдем второе приближение в виде

$$\bar{э}_s^{(2)}=э_s^{(0)}+\int\limits_{t_0}^{t}F_s\left(t\,|\,\bar{э}_j^{(1)}\right)dt. \qquad (12.108')$$

Таким же образом поступаем и далее. Вообще, зная значения неизвестных функций $э_s$ в некотором $(k-1)$-м приближении, мы определим k-е приближение по формулам такого же типа, как (12.107′) и (12.108′):

$$\bar{э}_s^{(k)}=э_s^{(0)}+\int\limits_{t_0}^{t}F_s\left(t\,|\,\bar{э}_j^{(k-1)}\right)dt. \qquad (12.109)$$

На практике опять-таки обыкновенно ограничиваются получением одного только первого приближения (иногда рассматривается также второе), но с принципиальной стороны можно получить сколько угодно приближений.

На основании теоремы Пикара *) мы можем утверждать, что при достаточно общих предположениях относительно функций $F_s(t\,|\,э_j)$ процесс последовательных приближений, определяемый

---

*) См. уже указанные выше учебники, а также любой современный курс теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

рекуррентным соотношением (12.109), будет сходящимся при $k \to \infty$ и предельные функции

$$э_s = \lim_{k\to\infty} \bar{э}_s^{(k)},$$

обращаясь при $t = t_0$ в $э_s^{(0)}$, будут удовлетворять уравнениям (12.102), каковы бы ни были допустимые числовые значения величин $э_s^{(0)}$ играющих роль произвольных постоянных.

Таким образом, метод Пикара даст нам общее решение уравнений возмущенного движения вида (12.102).

3. Способ Пикара может быть, конечно, применен и в том случае, когда правые части уравнений (12.102) содержат малый параметр, например, когда функции $F_s(t\,|\,э_j)$ определяются рядами вида (12.102′). Но полезно заметить, что приближения одного и того же номера k, полученные независимо двумя рассмотренными способами, вовсе не совпадают, что выясняется уже при рассмотрении первого приближения. Действительно, по способу малого параметра первое приближение определится формулами

$$\tilde{э}_s^{(1)} = э_s^{(0)} + \sigma \int_{t_0}^{t} F_s^{(1)}(t\,|\,э_j^{(0)})\,dt,$$

правые части которых суть линейные функции параметра σ, а по способу Пикара первое приближение нужно вычислять по формулам

$$\bar{э}_s^{(1)} = э_s^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \int_{t_0}^{t} F_s^{(k)}(t\,|\,э_j^{(0)})\,dt,$$

правые части которых суть бесконечные ряды, расположенные по степеням параметра σ.

Разумеется и во всех последующих приближениях эти два способа будут приводить к различным результатам, так как по способу малого параметра k-е приближение приводит нас к многочленам степени k относительно параметра σ, а способ Пикара в любом приближении дает бесконечные ряды, расположенные по степеням σ.

Рассмотрим теперь один частный случай, когда правые части уравнений (12.102) содержат параметр σ только множителем, т. е. когда в формулах (12.102′) все $F_s^{(k)}$ для $k > 1$ равны нулю, так что мы имеем

$$F_s(t\,|\,э_j) = \sigma F_s^*(t\,|\,э_j). \qquad (12.110)$$

Тогда по способу малого параметра первое приближение определится формулами $(F_s^{(1)} \equiv F_s^*)$

$$\tilde{э}_s^{(1)} = э_s^{(0)} + \sigma \int\limits_{t_0}^{t} F_s^*(t \mid э_j^{(0)})\, dt, \tag{12.110$'$}$$

а по способу Пикара мы получим

$$\bar{э}_s^{(1)} = э_s^{(0)} + \sigma \int\limits_{t_0}^{t} F_s^*(t \mid э_j^{(0)})\, dt. \tag{12.110$''$}$$

Ясно, что

$$\tilde{э}_s^{(1)} \equiv \bar{э}_s^{(1)},$$

так что для первого приближения оба способа дают одинаковые результаты.

Для второго приближения в случае (12.110) мы имеем из (12.105′) следующие формулы:

$$\tilde{э}_s^{(2)} = э_s^{(0)} + \sigma \int\limits_{t_0}^{t} F_s^*(t \mid э_j^{(0)})\, dt + \sigma^2 \sum_{i=1}^{6} \int\limits_{t_0}^{t} э_i^{(1)} \left[\frac{\partial F_s^*}{\partial э_i}\right]_{\sigma=0} dt, \tag{12.111}$$

а по способу Пикара имеем по формулам (12.108′)

$$\bar{э}_s^{(2)} = э_s^{(0)} + \sigma \int\limits_{t_0}^{t} F_s^*(t \mid э_j^{(0)} + \sigma э_j^{(1)})\, dt, \tag{12.111$'$}$$

откуда следует, что в рассматриваемом частном случае уже для второго приближения два способа дают разные результаты.

Однако если правые части равенства (12.111′) разложить в ряды по степеням σ, то мы получим

$$\bar{э}_s^{(2)} = э_s^{(0)} + \sigma \int\limits_{t_0}^{t} F_s^*(t \mid э_j^{(0)})\, dt + \sigma^2 \sum_{i=1}^{6} \int\limits_{t_0}^{t} э_i^{(1)} \left[\frac{\partial F_s^*}{\partial э_i}\right]_{\sigma=0} dt + \ldots, \tag{12.111$''$}$$

так что если ограничиться рассмотрением членов только первого и второго порядков относительно σ, то оба способа опять дадут одинаковые результаты.

Но вообще нужно иметь в виду, что термин «k-е приближение» в способе малого параметра и в способе Пикара имеет *разный смысл*, а поэтому и неудивительно, что для приближения одного и того же номера разными способами получаются разные результаты.

Заметим еще, что способ Пикара, конечно, является более общим, чем способ малого параметра, и может быть применен, например, и в том случае, когда возмущающая сила зависит от малого параметра не аналитическим путем и первый способ непосредственно не применим.

4. В заключение этого параграфа рассмотрим в общих чертах, какова аналитическая структура функций $э_s$ в случае (наиболее часто встречающемся), когда возмущенное движение принадлежит к эллиптическому типу, т. е. когда мы имеем постоянно (или по крайней мере в течение некоторого промежутка времени) неравенство

$$V^2 - \frac{2\mu}{r} < 0.$$

Тогда за величины $э_s$ удобнее взять оскулирующие элементы эллиптической орбиты Ω, i, a, e, π, ε, определяемые дифференциальными уравнениями (12.65) или (12.72).

Предположим сначала, что возмущающая сила не зависит явно от времени t и содержит простейшим образом (т. е. в виде множителя) некоторый малый параметр σ. Тогда составляющие возмущающего ускорения будут функциями только от координат и составляющих скорости движущейся точки, имея множителем малый параметр σ. Но координаты и составляющие скорости невозмущенного эллиптического движения разложимы, как показано в гл. II, в ряды Фурье, расположенные по синусам и косинусам средней аномалии M. Поэтому таким же характером будут обладать и функции F_s^*, и уравнения (12.102) могут быть написаны для рассматриваемого случая в следующем общем виде:

$$\frac{dэ_s}{dt} = \sigma\left\{A_s^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_s^{(k)}\cos kM + B_s^{(k)}\sin kM\right]\right\}, \qquad (12.112)$$

где величины $A_s^{(0)}$, $A_s^{(k)}$, $B_s^{(k)}$ суть некоторые функции от элементов Ω, i, a, e, π, но не зависят от средней долготы эпохи ε, которая входит в правые части уравнений (12.112) только через посредство средней аномалии M.

Функциональный характер коэффициентов рядов (12.112) мы уточнять здесь не будем и заметим только, что долготы узла и перицентра входят в эти коэффициенты только под знаками синусов и косинусов, а относительно e и i эти коэффициенты можно представить в виде степенных рядов, расположенных по целым положительным степеням этих величин.

Рассмотрим получение первого приближения в задаче интегрирования уравнений (12.112), которое, как установлено выше, в данном случае определяется одними и теми же формулами независимо от применяемого способа.

Итак, заменим в правых частях уравнений (12.112) все элементы их постоянными начальными значениями, вследствие чего все коэффициенты в уравнениях (12.112) сделаются постоянными величинами, которые обозначим соответственно через $A_{s0}^{(0)}$, $A_{s0}^{(k)}$, $B_{s0}^{(k)}$; тогда уравнения первого приближения напишутся следующим образом:

$$\frac{d\bar{\text{э}}_s^{(1)}}{dt} = \sigma\left\{ A_{s0}^{(0)} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[A_{s0}^{(k)}\cos kM + B_{s0}^{(k)}\sin kM\right],\right. \qquad (12.112')$$

где $M = n_0(t - t_0) + \varepsilon_0 - \pi_0$.

Интегрируя эти равенства, мы получим, очевидно,

$$\bar{\text{э}}_s^{(1)} = \text{э}_s^{(0)} + \delta^{(1)}\text{э}_s = \bar{\text{э}}_s^{(0)} + \sigma A_{s0}^{(0)}(t - t_0) + \\ + \sigma\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{A_{s0}^{(k)}}{kn_0}\sin kM - \frac{B_{s0}^{(k)}}{kn_0}\cos kM\right], \qquad (12.112'')$$

где положено для краткости

$$\bar{\text{э}}_s^{(0)} = \text{э}_s^{(0)} + \sigma\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{A_{s0}^{(k)}}{kn_0}\sin k(\varepsilon_0 - \pi_0) + \frac{B_{s0}^{(k)}}{kn_0}\cos k(\varepsilon_0 - \pi_0)\right].$$

Формула (12.112″) показывает, что возмущение первого порядка элемента состоит из трех аналитически различных частей.

Первая из этих частей есть величина постоянная, зависящая от начальных значений элементов, и ее можно назвать постоянной частью возмущения первого порядка и можно объединить с начальным значением элемента $\text{э}_s^{(0)}$; вторая часть, состоящая из одного-единственного члена $\sigma A_{s0}^{(0)}(t - t_0)$, монотонно возрастает по числовой величине вместе с временем; ее называют вековой частью возмущения первого порядка или, короче, вековым неравенством; наконец, третья часть, состоящая из бесчисленного множества тригонометрических членов, является периодической функцией от M, а следовательно, и периодической функцией от времени, и называется периодической частью возмущения первого порядка, или просто периодическим возмущением.

Периодическое возмущение первого порядка состоит, как уже сказано, из бесчисленного множества членов, каждый из которых называется периодическим неравенством.

Каждое периодическое неравенство является периодической функцией времени с периодом $2\pi/n_0$ или, если говорить только о наименьшем периоде, с периодом $2\pi/kn_0$.

Итак, возмущение первого порядка каждого элемента оскулирующей эллиптической орбиты состоит из постоянного неравенства, векового неравенства и бесчисленного множества периодических неравенств.

Иногда каждый член формулы (12.112″) называют возмущением первого порядка, и в таком случае говорят, что полное возмущение первого порядка состоит из векового возмущения и из бесчисленного множества периодических возмущений *).

Если мы рассмотрим теперь возмущения второго порядка относительно параметра σ, то легко убедимся, что такое возмущение, кроме вековых и периодических членов такого же характера, как и в первом приближении, будет содержать еще члены вида

$$\sigma^2 A(t-t_0)^2, \quad \sigma^2(t-t_0)\left\{\begin{matrix} A\cos \\ B\sin \end{matrix}(kM)\right\},$$

где A и B обозначают какие-то постоянные.

Члены первого рода называются вековыми неравенствами второго порядка и второй степени, а члены второго рода называют смешанными неравенствами второго порядка.

Далее, при рассмотрении возмущений более высоких порядков, мы будем получать, как нетрудно сообразить, исключительно члены вида

$$\sigma^{k_1}(t-t_0)^{k_2}\left\{\begin{matrix} A\cos \\ B\sin \end{matrix}(kM)\right\} \qquad (k_1 \geqslant 1, \quad k_2 \geqslant 0, \quad k \geqslant 0),$$

где, как и выше, A и B обозначают какие-то постоянные, зависящие от начальных значений долгот узлов и перицентров, от начальных значений больших полуосей, эксцентриситетов и наклонностей, а также от параметров, характеризующих возмущающую силу.

Таким образом, мы видим, что каждый элемент в возмущенном движении будет состоять из бесчисленного множества вековых (когда $k=0$), периодических (когда $k_2=0$) и смешанных неравенств. Следовательно, общее выражение для любого элемента представится формулой вида

$$\textit{э}_s = \overline{\textit{э}}_s^{(0)} + \sum_{k,\ k_1,\ k_2} \sigma^{k_1}(t-t_0)^{k_2}\left[A\cos kM + B\sin kM\right]. \qquad (12.113)$$

На основании общих теорем существования обыкновенных дифференциальных уравнений мы можем утверждать, что ряды типа (12.113) будут оставаться сходящимися по крайней мере в течение некоторого, вообще небольшого, промежутка времени. Однако, основываясь на рассмотрении отдельных членов этих рядов, нельзя делать каких-либо общих выводов и заключений о поведении функций, являющихся

---

*) Совершенно такая же терминология употребляется и при рассмотрении возмущений первого порядка прямоугольных или полярных координат.

суммами этих рядов на больших промежутках времени, а тем более для всех значений времени от $-\infty$ до $+\infty$.

Тем не менее рассмотренная классификация отдельных членов рядов (12.113) оказывается полезной на практике, так как позволяет из множества членов всякого рода отбирать наиболее влиятельные в числовом отношении, с чем неизбежно приходится встречаться в практических приложениях теории возмущенного движения.

Отметим еще некоторую интересную особенность случая, когда существует возмущающая функция R, не зависящая явно от времени. Тогда изменения оскулирующих элементов определяются уравнениями (12.72), а возмущающая функция R также может быть представлена рядом вида

$$R=\sigma\left\{A^{(0)}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[A^{(k)}\cos kM+B^{(k)}\sin kM\right]\right\}, \qquad (12.114)$$

коэффициенты которого, так же как и в общем случае, не зависят от средней долготы эпохи ε.

Поэтому из (12.114) имеем

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}=\sigma\sum_{k=1}^{\infty}\left[-kA^{(k)}\sin kM+kB^{(k)}\cos kM\right]; \qquad (12.114')$$

эта производная не содержит свободного члена, т. е. члена, не зависящего от средней аномалии, а тем самым и от времени.

Отсюда следует, что для большой полуоси оскулирующего эллипса мы имеем в первом приближении ($\bar{a}_0=\text{const}$)

$$a=\bar{a}_0+\frac{2\sigma}{n_0 a_0}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{A_0^{(k)}}{n_0}\cos kM-\frac{B_0^{(k)}}{n_0}\sin kM\right]. \qquad (12.114'')$$

Таким образом, мы приходим к важному заключению, которое можно назвать теоремой Лапласа.

Теорема Лапласа. Если возмущающая сила допускает силовую функцию (возмущающую функцию R), не зависящую явно от времени, то полное возмущение первого порядка большой полуоси не содержит в себе векового неравенства.

Возмущения первого порядка (а тем более и следующих порядков) всех остальных элементов оскулирующей орбиты вообще содержат вековые члены, так как в уравнениях (12.112) свободный член $A_s^{(0)}$ не равен нулю.

Если ограничиться только рассмотрением этих вековых членов в возмущениях первого порядка, то в первом приближении оскулирующие элементы $э_s$ можно представить следующими простыми формулами:

$$э_s \cong э_s^{(0)} + \sigma A_{s0}^{(0)}(t - t_0), \tag{12.115}$$

где все $A_{s0}^{(0)}$ имеют определенные числовые значения.

Если окажется, что какой-нибудь из коэффициентов $A_{s0}^{(0)}$ равен нулю, или настолько численно мал, что его можно принять равным нулю, то соответствующий элемент не будет иметь векового неравенства (в первом приближении!) и его можно рассматривать как величину постоянную.

5. Рассмотрим теперь случай, когда возмущающая сила зависит явно от времени, являясь некоторой периодической функцией от некоторой величины M', пропорциональной времени, так что

$$M' = n_0'(t - t_0) + M_0'.$$

Тогда составляющие возмущающего ускорения и возмущающая функция (в случае, когда последняя существует) являются периодическими функциями от двух независимых аргументов M и M' и могут быть разложены в двойные ряды Фурье по синусам и косинусам линейных комбинаций с целыми коэффициентами величин M и M'.

Таким же характером будут обладать и функции $F_s(t|э_j)$, и уравнения (12.102) могут быть написаны для этого случая в следующем общем виде:

$$\frac{dэ_s}{dt} = \sigma\Big\{A_s^{(0,\,0)} + \sum\big[A_s^{(k,\,k')}\cos(kM + k'M') + \\ + B_s^{(k,\,k')}\sin(kM + k'M')\big]\Big\}, \tag{12.116}$$

где суммирование распространяется на все целые значения индексов k и k', за исключением случая $k = k' = 0$, соответствующего свободному члену, а все коэффициенты являются некоторыми известными функциями от элементов оскулирующего эллипса a, e, i, Ω, π, но так же как и выше, не зависят от средней долготы эпохи ε, которая входит в уравнения (12.116) только посредством средней аномалии $M = n(t - t_0) + \varepsilon - \pi$. Эти коэффициенты зависят также от некоторых параметров, характеризующих возмущающую силу и считающихся здесь величинами постоянными, так же как и величины n_0' и M_0'.

Рассмотрим опять первое приближение, для чего нужно заменить в правых частях уравнений (12.116) все элементы $э_s$ их постоянными начальными значениями, вследствие чего все коэффициенты двойного ряда сделаются величинами постоянными, а аргументы тригонометрических членов примут следующий вид:

$$kM + k'M' = (kn_0 + k'n_0')(t - t_0) + D. \tag{12.116$'$}$$

где положено для краткости

$$D = k(\varepsilon_0 - \pi_0) + k'M_0'.$$

Уравнения первого приближения напишутся тогда следующим образом:

$$\frac{d\bar{\text{э}}_s^{(1)}}{dt} = \sigma\Big\{A_{s0}^{(0,\,0)} + \sum\big[A_{s0}^{(k,\,k')}\cos\left[(kn_0 + k'n_0')(t - t_0) + D\right] + \\ + B_{s0}^{(k,\,k')}\sin\left[(kn_0 + k'n_0')(t - t_0) + D\right]\big]\Big\}. \qquad (12.117)$$

Переходя теперь к выполнению интегрирования, заметим, что мы должны различать два случая.

1-й случай. Средние движения n_0 и n_0' суть числа несоизмеримые. Тогда сумма $kn_0 + k'n_0'$ может обратиться в нуль только при $k = k' = 0$, что соответствует свободному члену ряда Фурье $A_{s0}^{(0,\,0)}$. Поэтому если $A_{s0}^{(0,\,0)} \neq 0$, то после интегрирования мы получим в выражении соответствующего элемента один вековой член (т. е. член, пропорциональный времени) и бесчисленное множество периодических членов, происходящих от интегрирования синусов и косинусов. Аналитическое выражение для элемента э_s в первом приближении будет иметь следующий вид:

$$\bar{\text{э}}_s^{(1)} = \bar{\text{э}}_s^{(0)} + \delta_c^{(1)}\text{э}_s + \delta_p^{(1)}\text{э}_s, \qquad (12.118)$$

где

$$\bar{\text{э}}_s^{(0)} = \text{э}_s^{(0)} + \sigma\sum\frac{B_{s0}^{(k,\,k')}\cos D - A_{s0}^{(k,\,k')}\sin D}{kn_0 + k'n_0'} \qquad (12.118')$$

есть величина постоянная,

$$\delta_c^{(1)}\text{э}_s = \sigma A_{s0}^{(0,\,0)}(t - t_0) \qquad (12.118'')$$

есть вековая часть возмущения первого порядка (вековое неравенство или вековое возмущение) и

$$\delta_p^{(1)}\text{э}_s = \sigma\sum\Bigg[\frac{A_{s0}^{(k,\,k')}}{kn_0 + k'n_0'}\sin\left[(kn_0 + k'n_0')(t - t_0) + D\right] - \\ - \frac{B_{s0}^{(k,\,k')}}{kn_0 + k'n_0'}\cos\left[(kn_0 + k'n_0')(t - t_0) + D\right]\Bigg] \qquad (12.118''')$$

представляет собой периодическую часть возмущения первого порядка, состоящую из суммы бесчисленного множества периодических неравенств.

Различные периодические неравенства разделяют обычно на две группы, в зависимости от величины делителя $kn_0 + k'n_0'$.

а значит, и от величины периода соответствующего неравенства, который определяется формулой

$$T_{k,\,k'} = \frac{2\pi}{kn_0 + k'n_0'}\,. \tag{12.118$^{\text{IV}}$}$$

Действительно, если k и k' таковы, что этот делитель есть величина конечная, или даже достаточно большая, то период соответствующего неравенства будет конечным, или даже весьма малым. Соответствующие неравенства называются по этой причине короткопериодическими. Их амплитуды, как видно из (12.118‴) также вообще весьма малы и такие члены могут играть роль только в течение очень небольшого промежутка времени.

Если же индексы k и k' имеют такие значения, что сумма $kn_0 + k'n_0'$ есть величина численно малая (такие делители называются малыми делителями), то период соответствующего неравенства будет весьма большим и по этой причине такие неравенства называются долгопериодическими. Периоды таких долгопериодических неравенств из-за малого знаменателя могут иметь заметные значения, вследствие чего такие неравенства играют значительную роль в теории возмущений, особенно когда рассматриваются большие промежутки времени.

2-й случай. Средние движения n_0 и n_0' соизмеримы, т. е. отношение $n_0 : n_0'$ равно отношению двух целых чисел $r : r'$. Тогда при значениях индексов $\overline{k} = \nu r'$ и $\overline{k}' = -\nu r$, где $\nu = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots$ мы будем иметь

$$\overline{k}n_0 + k'n_0' = \nu(n_0 r' - n_0' r) = 0,$$

и соответствующие члены в (12.117) суть величины постоянные, которые можно присоединить к свободному члену, что изменит коэффициент векового неравенства.

После интегрирования равенства (12.117) в этом случае мы опять получим для элемента $э_s$ в первом приближении выражение вида (12.118), но в формулах (12.118′) и (12.118‴) суммы распространяются на все значения индексов, за исключением значений $k = \overline{k}$ и $k' = \overline{k}'$, а вековое неравенство представится формулой

$$\delta_c^{(1)} э_s = \sigma A_{s0}(t - t_0), \tag{12.119}$$

где

$$A_{s0} = A_{s0}^{(0,\,0)} + \sum \left[A_{s0}^{(\overline{k},\,\overline{k}')} \cos \overline{D} + B_{s0}^{(\overline{k},\,\overline{k}')} \sin \overline{D}\right] \tag{12.119′}$$

и

$$\overline{D} = \overline{k}(\varepsilon_0 - \pi_0) + \overline{k}' M_0'.$$

Периодические неравенства в этом случае также можно подразделить на короткопериодические и долгопериодические, в зависимости от величины периода.

В заключение рассмотрим случай, когда возмущающая сила, зависящая от времени, допускает, кроме того, силовую (возмущающую) функцию. Тогда возмущающая функция представится рядом вида

$$R = \sigma \{A^{(0,\ 0)} + \sum [A^{(k,\ k')} \cos (kM + k'M') + \\ + B^{(k,\ k')} \sin (kM + k'M')], \quad (12.120)$$

коэффициенты которого не зависят от средней долготы эпохи.

Поэтому из (12.120) мы имеем

$$\frac{\partial R}{\partial \varepsilon} = \sigma \sum [- kA^{(k,\ k')} \sin (kM + k'M') + \\ + kB^{(k,\ k')} \cos (kM + k'M')]. \quad (12.120')$$

Заменяя здесь все элементы их постоянными начальными значениями и обозначая соответствующее значение частной производной через $\left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right)_0$, мы получим, интегрируя равенство

$$\frac{d\bar{a}^{(1)}}{dt} = \frac{2}{n_0 a_0} \left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right)_0,$$

аналитическое выражение для большой полуоси в первом приближении.

Если средние движения несоизмеримы, то в результате интегрирования мы получим только периодические члены, и рассмотренная выше теорема Лапласа об отсутствии вековых возмущений большой полуоси останется справедливой.

Но в случае, когда средние движения соизмеримы, в выражении для $\left(\frac{\partial R}{\partial \varepsilon}\right)_0$ будет присутствовать бесчисленное множество членов, не зависящих от времени, в результате чего в возмущении первого порядка большой полуоси появится вековой член, и теорема Лапласа не имеет в этом случае места.

ГЛАВА XIII

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

§ 1. Дифференциальные уравнения возмущенного движения в основной задаче небесной механики

1. Основной задачей небесной механики мы назвали в первой части этой книги задачу о движении системы, состоящей из $n+1$ материальных точек M_0, M_1, M_2, ..., M_n, взаимно притягивающихся по закону Ньютона.

Так как главная задача заключается в определении относительных движений небесных тел, то отнесем n точек M_1, ..., M_n к системе прямоугольных декартовых координат с неизменными направлениями осей и с началом в точке M_0, которую, по тем или иным причинам, нам удобно рассматривать как главную.

Обозначим, как и ранее, относительные координаты точки M_s в этой системе координат через x_s, y_s, z_s, а через

$$r_s = \sqrt{x_s^2 + y_s^2 + z_s^2}$$

ее радиус-вектор, т. е. расстояние $\overline{M_0 M_s}$.

Дифференциальные уравнения относительного движения мы можем написать в следующем общем виде:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_s &= -\frac{\mu_s x_s}{r_s^3} + X_s, \\ \ddot{y}_s &= -\frac{\mu_s y_s}{r_s^3} + Y_s, \\ \ddot{z}_s &= -\frac{\mu_s z_s}{r_s^3} + Z_s, \end{aligned}\right\} \qquad (13.1)$$

где μ_s — постоянные, определяемые формулой

$$\mu_s = f(m_0 + m_s),$$

причем m_0 есть масса главного гела — точки M_s, а m_s — масса движущейся точки M_s.

Величины X_s, Y_s, Z_s суть составляющие возмущающего ускорения для точки M_s, которые определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} X_s &= f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\left(\frac{x_j-x_s}{\Delta_{sj}^3}-\frac{x_j}{r_j^3}\right), \\ Y_s &= f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\left(\frac{y_j-y_s}{\Delta_{sj}^3}-\frac{y_j}{r_j^3}\right), \\ Z_s &= f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j\left(\frac{z_j-z_s}{\Delta_{sj}^3}-\frac{z_j}{r_j^3}\right), \end{aligned}\right\} \tag{13.2}$$

где

$$\Delta_{sj}=\sqrt{(x_s-x_j)^2+(y_s-y_j)^2+(z_s-z_j)^2}$$

есть взаимное расстояние между точками M_s и M_j.

Как показано в гл. VII, составляющие возмущающего ускорения для точки M_s можно рассматривать как частные производные по координатам этой точки от возмущающей функции R_s, которая определяется формулой

$$R_s=f\sum_{j=1}^{n}{}' m_jR_{sj}, \tag{13.3}$$

где

$$R_{sj}=\frac{1}{\Delta_{sj}}-\frac{x_sx_j+y_sy_j+z_sz_j}{r_j^3}. \tag{13.3$'$}$$

Таким образом, задача о поступательном движении системы тел-точек приводится к интегрированию системы совместных дифференциальных уравнений (13.1) при заданных начальных условиях, которыми являются начальные значения

$$x_s^{(0)},\quad y_s^{(0)},\quad z_s^{(0)},\quad \dot{x}_s^{(0)},\quad \dot{y}_s^{(0)},\quad \dot{z}_s^{(0)} \tag{13.4}$$

относительных координат и составляющих относительных скоростей точек M_s.

В главе VII было показано, что для уравнений (13.1) известны только четыре первых интеграла, а поэтому эти уравнения не могут быть полностью проинтегрированы. Следовательно, мы можем только ставить вопрос о приближенном интегрировании системы (13.1), основываясь на малости возмущающих сил, т. е. на малости числовых значений величин X_s, Y_s, Z_s.

Действительно, в конкретных задачах астрономии эти величины будут численно малы по сравнению с числовыми значениями величин

$$X_s^{(0)}=-\frac{\mu_sx_s}{r_s^3},\quad Y_s^{(0)}=-\frac{\mu_sy_s}{r_s^3},\quad Z_s^{(0)}=-\frac{\mu_sz_s}{r_s^3},$$

являющихся составляющими основных ускорений, возникающих от притяжения главного тела, либо вследствие чрезвычайной малости масс m_s по сравнению с центральной массой m_0 (как это имеет место для больших планет солнечной системы), либо вследствие весьма больших расстояний между точками системы, либо по той и по другой причине одновременно.

Таким образом, к уравнениям (13.1) вполне можно применить общий метод Лагранжа изменения (или вариации) произвольных постоянных, основы которого были подробно разобраны в предыдущей главе.

2. Отбросим в правых частях всех уравнений (13.1) составляющие возмущающих ускорений, которые являются численно малыми в конкретных задачах небесной механики по сравнению с составляющими основных ускорений. Тогда мы получим упрощенную систему уравнений, или уравнения первого приближения, в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_s &= -\frac{\mu_s x_s}{r_s^3}, \\ \ddot{y}_s &= -\frac{\mu_s y_s}{r_s^3}, \\ \ddot{z}_s &= -\frac{\mu_s z_s}{r_s^3}, \end{aligned}\right\} \qquad (13.1')$$

которая распадается, очевидно, на n независимых друг от друга систем, каждая из которых содержит только три уравнения, определяющие три координаты x_s, y_s, z_s каждой из точек M_s.

Но для каждого значения s $(s=1, 2, \ldots, n)$ система (13.1′) представляет собой систему дифференциальных уравнений невозмущенного движения точки M_s, определяющих движение этой точки только под действием силы притяжения центрального тела-точки M_0 так, как будто бы во всем пространстве существовали только две точки M_0 и M_s.

Теория невозмущенного движения (кеплеровского) подробно разобрана в части третьей нашей книги, где выведены все необходимые формулы, дающие общее решение системы уравнений, которой совершенно подобна каждая из систем (13.1′).

Поэтому мы можем воспользоваться всеми формулами части третьей, снабжая только все величины, относящиеся к невозмущенному движению точки M_s, значком s. Принимая за шесть произвольных постоянных общего решения каждой из систем (13.1) шесть элементов невозмущенного кеплеровского движения точки M_s, т. е. величины

$$\Omega_s, \quad i_s, \quad \omega_s, \quad p_s, \quad e_s, \quad \tau_s, \qquad (13.5)$$

мы получим общее решение полной упрощенной системы (13.1′), например, в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} x_s &= r_s(\cos u_s \cos \Omega_s - \sin u_s \sin \Omega_s \cos i_s),\\ y_s &= r_s(\cos u_s \sin \Omega_s + \sin u_s \cos \Omega_s \cos i_s),\\ z_s &= r_s \sin u_s \sin i_s, \end{aligned}\right\} \qquad (13.6)$$

где

$$u_s = v_s + \omega_s, \quad r_s = \frac{p_s}{1 + e_s \cos v_s}, \qquad (13.6')$$

и истинная аномалия v_s точки M_s связана с временем t-соотношением

$$\frac{\sqrt{\mu_s}}{p_s^{3/2}}(t - \tau_s) = \int\limits_0^{v_s} \frac{dv'}{(1 + e_s \cos v')^2}. \qquad (13.6')$$

Итак, в первом приближении каждая из точек M_s описывает относительно точки M_0 кеплеровскую орбиту, элементы которой (величины (13.5)) однозначно определяются начальными значениями (13.4) и которая есть эллипс или гипербола (в частности, окружность, парабола или прямая), в зависимости от знака величины

$$h_s = V_s^{(0)2} - \frac{2\mu_s}{r_s^{(0)}}, \qquad (13.7)$$

т. е. начальной (для $t = t_0$) энергии точки M_s в ее относительном движении вокруг точки M_0, которая является общим фокусом для всех невозмущенных орбит точек M_s.

Может случиться (как это и есть на самом деле для больших планет солнечной системы), что $h_s < 0$ для всякого значения s из ряда $1, 2, \ldots, n$. Тогда невозмущенная орбита каждой из точек M_s есть эллипс, и за элементы невозмущенного движения удобнее взять вместо (13.5) следующие величины:

$$\Omega_s, \quad i_s, \quad a_s, \quad e_s, \quad \pi_s, \quad \varepsilon_s. \qquad (13.5')$$

В этом случае истинная аномалия каждой из точек M_s определится в зависимости от времени следующими формулами:

$$\operatorname{tg}\frac{v_s}{2} = \sqrt{\frac{1 + e_s}{1 - e_s}} \operatorname{tg}\frac{E_s}{2}, \qquad (13.8)$$

$$E_s - e_s \sin E_s = M_s \qquad (13.8')$$

и

$$M_s = n_s(t - t_0) + \varepsilon_s - \pi_s, \qquad (13.8'')$$

где

$$n_s = \frac{\sqrt{\mu_s}}{a_s^{3/2}} \qquad (13.8''')$$

есть среднее движение точки M_s.

Заметим, что вместо формулы (13.8″) можно пользоваться эквивалентной ей формулой

$$M_s = \varepsilon_s - \pi_s + \int_{t_0}^{t} n_s dt, \tag{13.8*}$$

которая одинаково справедлива для возмущенного и невозмущенного движений.

Если невозмущенное движение точки M_s происходит по эллиптической орбите, то, как было показано в части третьей, координаты и составляющие скорости точки M_s суть периодические функции от средней аномалии M_s этой точки *) с общим периодом 2π (здесь $\pi = 3{,}141592653\ldots$) или периодические функции времени t с периодом

$$T_s = \frac{2\pi}{n_s}. \tag{13.9}$$

В главе XI было показано, что в этом случае координаты и составляющие скорости (а также любые другие переменные величины эллиптического движения) разложимы в тригонометрические ряды, расположенные по синусам и косинусам кратных средней аномалии M_s, абсолютно сходящиеся для всякого момента времени, если $e_s < \bar{e} = 0{,}6627\ldots$ и не абсолютно (или условно) сходящиеся, если $\bar{e} \leqslant e_s < 1$.

Может, конечно, случиться, что для одних точек системы постоянная h_s положительна, а для других отрицательна, так что среди начальных (или невозмущенных) орбит точек системы могут быть, вообще говоря, и эллипсы и гиперболы.

Такие случаи могут встретиться в кратных звездных системах, а также в задаче о полете космического корабля к другим планетам солнечной системы.

3. Возвратимся теперь к уравнениям возмущенного движения, т. е. к уравнениям (13.1). По основной идее метода изменения произвольных постоянных мы можем сохранить для общего решения системы (13.1) все формулы (13.6), (13.6′) и (13.6″), содержащие $6n$ произвольных постоянных (13.5) ($s = 1, 2, \ldots, n$), рассматривая в этих формулах все величины (13.5) как некоторые неизвестные функции времени.

Иными словами, мы можем сделать преобразование переменных, переходя в уравнениях (13.1) от $6n$ переменных x_s, y_s, z_s, $\dot{x}_s$, $\dot{y}_s$, $\dot{z}_s$ к такому же количеству новых переменных (13.5),

---

*) Координаты невозмущенного эллиптического движения являются также периодическими функциями от истинной аномалии, а также от эксцентрической аномалии и от средней долготы. Обратим еще внимание на то, что буква M_s обозначает здесь и среднюю аномалию движущейся точки и саму точку.

связанных со старыми переменными формулами кеплеровского движения, которые и являются в этом случае формулами преобразования переменных.

Так как формулы преобразования распадаются на n групп формул, причем каждая группа связывает старые и новые переменные с одним и тем же значком, то дифференциальные уравнения, определяющие новые переменные, могут быть записаны в виде n групп уравнений, каждая из которых выводится при помощи основной операции совершенно так же, как это было сделано в предыдущей главе для преобразования уравнений возмущенного движения одной-единственной точки.

Точно так же для вывода уравнений, определяющих новые переменные, можно воспользоваться методом скобок Лагранжа, в результате чего получить соответствующие уравнения Лагранжа для системы взаимно притягивающихся материальных точек.

На основе сделанных замечаний дифференциальные уравнения, определяющие новые переменные (13.5), могут быть написаны самым общим образом в виде n групп уравнений Ньютона ($s=1, 2, \ldots, n$):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\Omega_s}{dt} &= \frac{r_s}{p_s}\sin u_s \operatorname{cosec} i_s\cdot \widetilde{W}_s,\\
\frac{di_s}{dt} &= \frac{r_s}{p_s}\cos u_s\cdot \widetilde{W}_s,\\
\frac{d\omega_s}{dt} &= -\frac{\cos v_s}{e_s}\cdot \widetilde{S}_s+\frac{\sin v_s}{e_s}\left(1+\frac{r_s}{p_s}\right)\widetilde{T}_s-\\
&\qquad\qquad -\frac{r_s}{p_s}\sin u_s \operatorname{ctg} i_s\cdot \widetilde{W}_s,\\
\frac{de_s}{dt} &= \widetilde{S}_s\sin v_s+\left[\cos v_s+(\cos v_s+e_s)\frac{r_s}{p_s}\right]\cdot \widetilde{T}_s,\\
\frac{dp_s}{dt} &= 2r_s\widetilde{T}_s,\\
\frac{d\tau_s}{dt} &= \frac{p_s}{e_s}\sqrt{\frac{p_s}{\mu_s}}\left[(e_sN_s\sin v_s-\cos v_s)\widetilde{S}_s+\right.\\
&\qquad\qquad \left.+\frac{p_s}{r_s}N_sT_s\right]\frac{r_s^2}{p_s^2},
\end{aligned}\right\}\tag{13.10}$$

где

$$\widetilde{S}_s=\sqrt{\frac{p_s}{\mu_s}}S_s,\quad \widetilde{T}_s=\sqrt{\frac{p_s}{\mu_s}}T_s,\quad \widetilde{W}_s=\sqrt{\frac{p_s}{\mu_s}}W_s.$$

Проекции возмущающего ускорения S_s, T_s, W_s на подвижные оси, связанные с точкой M_s, определяются формулами, совершенно аналогичными формулам (12.24), в которых нужно только снабдить все величины значком s.

Поэтому и направляющие косинусы подвижных осей, связанных с точкой M_s, получатся тоже из формул (12.23) и (12.23′), в которых ко всем величинам нужно приписать значок s.

Величина N_s определится формулой

$$N_s = 2\frac{p_s^2}{r_s^2}\int\limits_0^{v_s}\frac{\cos v'\,dv'}{(1+e_s\cos v')^3},$$

а составляющие возмущающего ускорения X_s, Y_s, Z_s на неподвижные оси координат с началом в точке M_0 даются формулами (13.2). В эти формулы входят координаты всех точек M_s и эти координаты нужно заменить их выражениями (13.6) из формул невозмущенного движения. Поэтому правые части всех уравнений Ньютона (13.10) будут известными функциями времени и всех $6n$ переменных (13.5), являющихся оскулирующими элементами орбит точек M_s.

Заметим еще, что написанные уравнения (13.10) останутся справедливыми и в тех случаях, когда на точки M_s действуют, кроме сил взаимных притяжений, и какие-либо другие силы, например, силы сопротивления среды, или силы, возникающие вследствие отличий форм рассматриваемых тел от сферических и т. п.

В этих случаях нужно только к составляющим возмущающих ускорений X_s, Y_s, Z_s прибавить члены, соответствующие дополнительным силам, а вид уравнений (13.10) останется без изменения.

В дальнейшем в этой главе мы будем рассматривать исключительно тот случай, когда составляющие возмущающего ускорения определяются формулами (13.2). Кроме того, будем предполагать, что движение каждой из точек M_s остается (всегда или по крайней мере в течение некоторого промежутка времени) движением эллиптического типа, т. е. что постоянно выполняются неравенства

$$V_s^2 - \frac{2\mu_s}{r_s} < 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n).$$

Тогда вместо переменных (13.5) мы можем воспользоваться переменными (13.5′). Учитывая еще, что

$$X_s = \frac{\partial R_s}{\partial x_s}, \qquad Y_s = \frac{\partial R_s}{\partial y_s}, \qquad Z_s = \frac{\partial R_s}{\partial z_s},$$

мы будем иметь для величин (13.5′) вместо уравнений Ньютона уравнения Лагранжа, которые для нашей задачи напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned}
\frac{da_s}{dt} &= \frac{2}{n_s a_s}\,\frac{\partial R_s}{\partial \varepsilon_s},\\
\frac{de_s}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e_s^2}}{n_s a_s^2 e_s}\,\frac{\partial R_s}{\partial \pi_s} - \frac{e_s\sqrt{1-e_s^2}}{1+\sqrt{1-e_s^2}}\cdot\frac{1}{n_s a_s^2}\cdot\frac{\partial R_s}{\partial \varepsilon_s},\\
\frac{d\Omega_s}{dt} &= \frac{1}{n_s a_s^2\sqrt{1-e_s^2}\sin i_s}\,\frac{\partial R_s}{\partial i_s},\\
\frac{di_s}{dt} &= -\frac{1}{n_s a_s^2\sqrt{1-e_s^2}\sin i_s}\,\frac{\partial R_s}{\partial \Omega_s} -\\
&\qquad\qquad -\frac{\operatorname{tg}\frac{i_s}{2}}{n_s a_s^2\sqrt{1-e_s^2}}\left(\frac{\partial R_s}{\partial \pi_s}+\frac{\partial R_s}{\partial \varepsilon_s}\right),\\
\frac{d\pi_s}{dt} &= \frac{\operatorname{tg}\frac{i_s}{2}}{n_s a_s^2\sqrt{1-e_s^2}}\,\frac{\partial R_s}{\partial i_s} + \frac{\sqrt{1-e_s^2}}{n_s a_s^2 e_s}\,\frac{\partial R_s}{\partial e_s},\\
\frac{d\varepsilon_s}{dt} &= -\frac{2}{n_s a_s}\,\frac{\partial R_s}{\partial a_s} + \frac{\operatorname{tg}\frac{i_s}{2}}{n_s a_s^2\sqrt{1-e_s^2}}\,\frac{\partial R_s}{\partial i_s} +\\
&\qquad\qquad + \frac{e_s\sqrt{1-e_s^2}}{1+\sqrt{1-e_s^2}}\cdot\frac{1}{n_s a_s^2}\cdot\frac{\partial R_s}{\partial e_s}.
\end{aligned}\right\}\qquad(13.11)$$

В этих уравнениях возмущающие функции R_s определяются формулами (13.3) и (13.3′) и являются, следовательно, известными функциями от всех $3n$ координат точек M_s. Подставляя в выражение каждой возмущающей функции вместо координат точек M_s их выражения (13.6) из формул преобразования переменных, мы сделаем каждую из R_s функцией времени t и всех $6n$ переменных (13.5′). Поэтому и все правые части уравнений (13.11) будут известными функциями времени и $6n$ неизвестных величин, которыми являются оскулирующие элементы эллиптических орбит точек M_s.

Таким образом, задача об определении движения взаимно притягивающихся материальных точек приводится к интегрированию совместной системы $6n$ дифференциальных уравнений первого порядка с таким же числом неизвестных функций.

Очевидно, что такое интегрирование может быть выполнено только приближенно, например, по способу последовательных приближений Пикара или при помощи разложений в бесконечные ряды.

Способ Пикара, как было разъяснено в предыдущей главе, применим при любых значениях масс точек M_s и сходимость последовательных приближений обусловливается исключительно малостью составляющих возмущающих ускорений вследствие, например, больших расстояний между точками системы.

Если же массы всех точек M_s весьма малы по сравнению с массой точки M_0 (центрального тела), то удобнее применить для интегрирования уравнений (13.11) способ малых параметров и представлять неизвестные функции в виде бесконечных рядов, расположенных по целым возрастающим степеням этих параметров.

Впрочем, если ограничиться рассмотрением только первого приближения, то оба способа дают одинаковые выражения для приближенных значений неизвестных функций.

§ 2. Интегрирование уравнений возмущенного движения

1. Прежде чем заниматься интегрированием уравнений возмущенного движения в основной задаче небесной механики, рассмотрим структуру какой-либо из возмущающих функций R_s в предположении, что движение каждой из точек M_s принадлежит к эллиптическому типу. Кроме того, будем предполагать, что все отношения m_s/m_0 — малые величины одинакового порядка.

Такое предположение для случая задачи о движении больших планет солнечной системы не совсем соответствует действительности, так как из курса общей астрономии нам известно, что массы внутренних планет (Меркурия, Венеры, Земли и Марса) и Плутона значительно меньше масс внешних, крупных планет (Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна). Однако расстояния четырех последних планет от Солнца и их взаимные расстояния значительно больше соответствующих расстояний в системе внутренних планет. Поэтому сравнительно большие массы внешних планет до некоторой степени компенсируются малостью обратных расстояний в системе этих планет. Вследствие этого практически массы всех больших планет солнечной системы действительно можно считать величинами одного и того же порядка.

Рассматривая теперь выражение (13.3) для возмущающей функции R_s, заметим прежде всего, что эта функция есть линейная функция $n-1$ малых параметров, которыми являются $n-1$ масс из совокупности

$$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_s,\ \ldots,\ m_{n-1},\ m_n, \tag{13.12}$$

за исключением массы m_s.

Таким образом, различные группы уравнений (12.11) (т. е. группы, отличающиеся значком s) содержат различные группы малых параметров, но вся система (13.11) в целом содержит, очевидно, в качестве параметров все массы (13.12).

Следует заметить, впрочем, что в каждую группу уравнений (13.11) входит неявным образом и своя собственная масса m_s, например, через посредство среднего движения n_s, которое равно $\sqrt{\mu_s}a_s^{-3/2}$, а $\mu_s=f_s(m_0+m_s)$.

Однако величину m_s, входящую в уравнения (13.11) через посредство величины μ_s, мы не будем считать параметром, так что все величины $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ будут рассматриваться как некоторые фиксированные постоянные, не зависящие от выбранных нами малых параметров.

Такой прием, когда некоторая величина, входящая в дифференциальные уравнения двояким образом, считается переменным параметром, если она входит одним способом, и неизменной постоянной, если она входит другим способом, весьма широко используется и в небесной механике и во многих других дисциплинах и не должен вызывать каких-либо сомнений в правильности такой процедуры.

Далее, так как R_s есть линейная функция $n-1$ малых параметров, то и всякая ее частная производная по любому из элементов (13.5′) также есть линейная функция тех же параметров, а следовательно, и правая часть каждого из уравнений (13.11) имеет точно такую же структуру.

Перепишем уравнения (13.11) в более краткой и удобной форме, обозначая, так же как это мы делали и в предыдущей главе, элементы оскулирующей орбиты точки M_s соответственно через

$$э_{s1},\ э_{s2},\ э_{s3},\ э_{s4},\ э_{s5},\ э_{s6}. \tag{13.13}$$

Обратим теперь внимание на множители R_{sj} в формуле (13.3), определяемые формулами (13.3′). Каждая из величин R_{sj} зависит только от координат двух точек M_s и M_j. После перехода от прямоугольных координат к оскулирующим элементам величина R_{sj} сделается, очевидно, некоторой функцией времени и двенадцати оскулирующих элементов $э_{sk}$ и $э_{jk}$ $(k=1, 2, \ldots, 6)$, так что мы можем записать выражение для возмущающей функции R_s следующим образом *):

$$R_s=f\sum_{j=1}^{n}{}' m_j R_{sj}(t\,|\,э_{sk}\,|\,э_{jk}). \tag{13.14}$$

---

*) Напомним, что штрих при знаке суммы указывает, что при суммировании должен быть пропущен член, для которого $j=s$.

Дифференцируя формулу (13.14) по какому-либо из элементов орбиты точки M_s, мы получим, очевидно, выражение, имеющее такую же структуру, как и (13.14), т. е.

$$\frac{\partial R_s}{\partial Э_{sk}} = f \sum_{j=1}^{n}{}' m_j R_{sj}^{(k)} (t \,|\, Э_{sk} \,|\, Э_{jk}). \tag{13.14'}$$

В уравнениях (13.11) частные производные от R_s по элементам $Э_{sh}$ умножаются на величины, зависящие от a_s, e_s, ..., т. е. от элементов $Э_{sk}$, а поэтому правые части этих уравнений будут иметь такую же структуру, как и (13.14) или (13.14′), и мы можем записать всю систему $6n$ уравнений (13.11) следующим образом:

$$\frac{dЭ_{sk}}{dt} = \sum_{j=1}^{n}{}' m_j E_{sj}^{(k)} (t \,|\, Э_{sk} \,|\, Э_{jk}), \tag{13.15}$$

где каждая из $6n(n-1)$ величин $E_{sj}^{(k)}$ есть некоторая функция времени и двенадцати оскулирующих элементов $Э_{sh}$ и $Э_{jk}$ ($k=1, 2, \ldots, 6$), но не зависит от параметров m_s ($s=1, 2, \ldots, n$).

Уточним теперь зависимость величин $E_{sj}^{(k)}$ от времени t, для чего нужно опять обратиться к формулам (13.3′), определяющим величины R_{sj}. Так как мы предполагаем, что движение каждой из точек M_s принадлежит к эллиптическому типу, то координаты каждой из этих точек являются периодическими функциями от своей средней аномалии M_s и могут быть представлены в виде рядов Фурье, расположенных по синусам и косинусам кратных M_s. Следовательно, величина R_{sj} есть периодическая функция от двух средних аномалий M_s и M_j, а поэтому может быть разложена в двойной ряд Фурье, расположенный по синусам и косинусам аргумента

$$k_s M_s + k_j M_j,$$

где k_s и k_j обозначают целые числа.

Коэффициенты этих рядов зависят от всех элементов $Э_{sh}$ и $Э_{jh}$. за исключением средних долгот эпохи ε_s и ε_j, которые входят в разложения координат только через посредство средних аномалий.

Очевидно, что каждая из величин $E_{sj}^{(k)}$ может быть представлена рядом такого же характера, и мы можем написать

$$E_{sj}^{(k)} = \sum_{k_s,\, k_j = -\infty}^{+\infty} \{A_{sj}^{(k,\, k_s,\, k_j)} \cos(k_s M_s + k_j M_j) + \\ + B_{sj}^{(k,\, k_s,\, k_j)} \sin(k_s M_s + k_j M_j)\}, \tag{13.15'}$$

где коэффициенты не зависят от средних долгот эпохи ε_s и ε_j.

Величины $E_{sj}^{(k)}$ можно представить еще в несколько ином виде. Действительно, координаты невозмущенного движения, как это видно из формул (13.6), зависят еще тригонометрическим образом от долготы узла и долготы перицентра.

Поэтому эти координаты можно рассматривать как периодические функции от трех переменных —M_s, Ω_s и π_s, с общим периодом 2π по каждому из этих аргументов.

В силу этого функция R_{sj} может рассматриваться как периодическая функция от шести аргументов и, следовательно, может быть разложена в шестикратный ряд Фурье по синусам и косинусам сложного аргумента

$$D = k_s M_s + k_j M_j + k'_s \Omega_s + k'_j \Omega_j + k''_s \pi_s + k''_j \pi_j,$$

где k_s, k_j, k'_s, k'_j, k''_s и k''_j обозначают целые числа (положительные, отрицательные или нули). Поэтому и каждая из $6n(n-1)$ величин $E_{sj}^{(k)}$ также может быть представлена таким шестикратным рядом, и мы можем написать (в сокращенных обозначениях)

$$E_{sj}^{(k)} = \sum_{\bar{k}} \{A_{sj}^{(k,\bar{k})} \cos D + B_{sj}^{(k,\bar{k})} \sin D\}, \qquad (13.15'')$$

где коэффициенты зависят только от больших полуосей a_s и a_j, от эксцентриситетов e_s и e_j и от наклонностей i_s и i_j *).

Эти коэффициенты A и B в свою очередь могут быть разложены в степенные ряды, расположенные по целым положительным степеням эксцентриситетов и наклонностей. Действительно, из результатов гл. II прямо следует, что коэффициенты рядов Фурье, представляющих величины эллиптического движения, суть ряды, расположенные по степеням эксцентриситета эллиптической орбиты. Кроме того, координаты эллиптического движения содержат либо косинус, либо синус наклонности, а поэтому упомянутые координаты разлагаются в ряды по степеням наклонности. Таким образом, функция R_{sj} может быть разложена в четырехкратный ряд, расположенный по степеням эксцентриситетов и наклонностей двух орбит точек M_s и M_j. Следовательно, и всякая из величин $E_{sj}^{(k)}$ также разложима в ряд такого же характера, а значит, коэффициенты A и B в формуле

---

*) Буквой $\bar{k}$ обозначена для сокращения вся совокупность шести индексов и суммирование производится по всем этим индексам, так что каждый из них принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$.

(13.15″) могут быть представлены в виде

$$\left.\begin{matrix} A_{sj}^{(k,\,\bar{k})} \\ B_{sj}^{(k,\,\bar{k})} \end{matrix}\right\} = \sum_{\tilde{k}} \begin{matrix} A_{sj}^{(k,\,\bar{k},\,\tilde{k})} \\ B_{sj}^{(k,\,\bar{k},\,\tilde{k})} \end{matrix} \times e_s^{\tilde{k}_s} e_j^{\tilde{k}_j} i_s^{\tilde{k}'_s} i_j^{\tilde{k}'_j},$$

где коэффициенты зависят только от полуосей a_s и a_j *).

Так как во многих задачах небесной механики (например, в задаче о движении больших планет солнечной системы) эксцентриситеты и наклонности орбит вообще малы, то ряды, расположенные по степеням этих величин, сходятся достаточно быстро и с ними удобно производить все необходимые вычисления.

Для фактического получения всех упомянутых разложений достаточно, как следует из сказанного выше, вывести разложение только одной функции R_{sj} для какой-либо пары взаимно возмущающих точек M_s и M_j. Получив такое разложение, мы будем иметь также разложения всех $n(n-1)$ функций этого типа, которые получатся из найденного разложения простой заменой значков.

Дифференцируя каждое из $n(n-1)$ разложений функций R_{sj} по всем элементам э_{sk} и умножая разложения производных на соответствующие коэффициенты, мы будем иметь все нужные для дальнейшего разложения вида (13.15′) или (13.15″).

Мы не будем здесь развивать технику получения разложения какой-либо функции R_{sj}. Это разложение неоднократно осуществлялось, и соответствующие буквенные выражения для его коэффициентов с точностью, отвечающей точности современных наблюдений, опубликованы; их можно брать для каждой конкретной задачи прямо в готовом виде **).

2. Обращаясь теперь к интегрированию системы (13.15), будем искать решение этих уравнений в виде рядов, расположенных по целым положительным степеням малых параметров (возмущающих масс) $m_1, m_2, \ldots, m_n$ ***).

Для этого положим

$$\text{э}_{sk} = \text{э}_{sk}^{(0)} + \delta^{(1)}\text{э}_{sk} + \delta^{(2)}\text{э}_{sk} + \ldots + \delta^{(r)}\text{э}_{sk} + \ldots, \qquad (13.16)$$

---

*) Буквой k обозначена вся совокупность четырех индексов и суммирование производится по каждому из них от нуля до $+\infty$.

**) Некоторые детали техники подобных разложений изложены в известном «Курсе небесной механики» М. Ф. Субботина, т. 2. См. также Tisserand F., Traité de Mécanique Céleste, t. I; Leverrier, Annales de l'Observatoire de Paris, t. 1, 1855; Zeipel H., Entwicklung der Störungsfunktion, Encuklopadie der Mathem. Wissenschaften, Bd. VI, 1912.

***) Обычно масса главного тела m_0 принимается за единицу массы, так что каждая из величин m_s представляет собой отношение массы точки M_s к массе центральной точки M_0.

где $э_{sk}^{(0)}$ — постоянные, за которые можно принять начальные значения элементов $э_{sk}$, соответствующие начальной эпохе $t=t_0$, а $\delta^{(r)}э_{sk}$ — целые, однородные функции степени r величин (13.12), коэффициенты которых суть некоторые подлежащие определению функции времени, обращающиеся в нуль при $t=t_0$. Поэтому величины $\delta^{(r)}э_{sk}$, которые назовем возмущениями r-го порядка, представятся в виде

$$\delta^{(r)}э_{sk}=\sum{}^{(r_1,\,r_2,\,\ldots,\,r_n)}\,э_{sk}(t)m_1^{r_1}m_2^{r_2}\ldots m_n^{r_n}, \tag{13.17}$$

где сумма распространяется на все целые неотрицательные значения индексов $r_1, r_2, \ldots, r_n$, сумма которых равна r.

Каждый из N_r членов*) суммы (13.17) можно назвать частным возмущением r-го порядка, коэффициент которого, по свойству кратных рядов Тейлора, определяется формулой

$$э_{sk}^{(r_1,\,r_2,\,\ldots,\,r_n)}=\frac{r!}{r_1!\,r_2!\cdots r_n!}\left[\frac{\partial^{r_1+r_2+\ldots+r_n}э_{sk}}{\partial m_1^{r_1}\partial m_2^{r_2}\cdots\partial m_n^{r_n}}\right]_{m_1=m_2=\ldots=m_n=0}. \tag{13.17'}$$

Для определения коэффициентов многочленов (13.17) проще всего применить тот же прием, который мы использовали в предыдущей главе при интегрировании любой системы уравнений возмущенного движения. Таким образом, будем дифференцировать уравнения (13.15) по параметрам (13.12), предполагая все $э_{sk}$ функциями этих параметров, определяемыми рядами (13.16), и полагая после каждого дифференцирования все параметры равными нулю.

В результате такой процедуры мы будем получать системы уравнений, из которых последовательно, в порядке возрастания r, сможем определить сколько угодно неизвестных коэффициентов. При этом все коэффициенты одной и той же группы r, т. е. коэффициенты одного и того же многочлена (13.17), определятся независимо друг от друга при помощи простых квадратур. Однако нужно иметь в виду, что коэффициенты группы r зависят от коэффициентов всех предыдущих групп, т. е. возмущения какого-либо порядка r зависят от возмущений первого, второго, ... $(r-1)$-го порядков. Таким образом, мы построим формальные ряды, расположенные по

---

*) N_r есть число всех (различных) членов однородного многочлена степени r с n переменными, так что

$$N_r=\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots r}.$$

возрастающим степеням параметров (13.12) и удовлетворяющие уравнениям (13.15).

Применяя теперь теорему А. М. Ляпунова *), мы можем быть уверенными в том, что все полученные ряды будут абсолютно сходящимися в некотором промежутке времени, пока численные значения параметров (13.12) не превосходят некоторого предела, отличного от нуля и зависящего вообще от упомянутого промежутка времени.

Определение этого предела в задачах небесной механики весьма затруднительно, но еще бо́льшие затруднения представляет задача о нахождении решения системы (13.15) в таком виде, в каком оно было бы пригодно для всех значений времени.

В классической небесной механике вопрос о сходимости получаемых в теории возмущений рядов вообще не ставился, и пригодность получаемых приближений проверялась исключительно путем сравнения результатов вычислений с данными, получаемыми при помощи наблюдений.

Рассмотрим теперь несколько более подробно определение первого приближения, т. е. нахождение возмущений первого порядка.

Для того чтобы избавиться от громоздких общих обозначений, принятых в формуле (13.17), представим совокупность членов первой степени относительно параметров (13.12) в рядах (13.16) в следующем виде:

$$\delta^{(1)}\text{э}_{sk} = \sum_{j=1}^{n} m_j \text{э}_{sk}^{(j)} = \sum_{j=1}^{n} \delta^{(1,\,j)}\text{э}_{sk}, \tag{13.18}$$

где

$$\delta^{(1,\,j)}\text{э}_{sk} = m_j \text{э}_{sk}^{(j)} \tag{13.18'}$$

есть частное возмущение первого порядка в элементе э_{sk}, вызываемое действием массы m_j на массу m_s.

Для определения функций $\text{э}_{sk}^{(j)}$ продифференцируем уравнения (13.15) по какому-либо из параметров (13.12), считая все элементы э_{sk} функциями этих параметров, определяемыми рядами (13.16), и положим после дифференцирований все параметры равными нулю. Эта процедура даст нам, как легко видеть, следующие уравнения:

$$\frac{d\text{э}_{sk}^{(s)}}{dt} = 0, \qquad \frac{d\text{э}_{sk}^{(j)}}{dt} = E_{sj}^{(k)}\left(t \mid \text{э}_{sk}^{(0)} \mid \text{э}_{jk}^{(0)}\right). \tag{13.19}$$

---

*) См. сноску на стр. 634. Подробное доказательство теоремы Ляпунова приведено в моей книге «Небесная механика. Аналитические и качественные методы».

Интегрируя эти равенства при условии, чтобы все искомые функции обращались в нуль при $t=t_0$, мы имеем $э_{sk}^{(s)}=0$, что само собой очевидно, а для $j \neq s$ получаем *)

$$э_{sk}^{(j)}=\int_{t_0}^{t} E_{sj}^{(k)}\left(t \mid э_{sk}^{(0)} \mid э_{jk}^{(0)}\right) dt. \qquad (13.19')$$

Итак, частные возмущения первого порядка действительно определяются независимо друг от друга, а полное возмущение первого порядка есть просто сумма всех частных возмущений. Таким образом, в теории возмущений больших планет солнечной системы возмущения первого порядка элементов оскулирующей орбиты Марса, например, найдутся сложением возмущений первого порядка элементов орбиты Марса от каждой из остальных планет в отдельности.

Подобным же образом можно определить и возмущения второго и более высокого порядков, чем мы здесь заниматься не будем. Заметим только, что в возмущении любого порядка r элемента $э_{sk}$ член, содержащий множителем m_s^r, всегда равен нулю. Действительно, коэффициент этого члена определится из уравнения, получающегося r-кратным дифференцированием уравнения (13.15) по параметру m_s и заменой затем всех параметров (13.12) нулями. Но масса m_s не входит в правые части уравнений (13.15) и поэтому описанная процедура всегда даст в результате нуль, т. е.

$$\frac{d э_{sk}^{(0, \ldots, r, \ldots, 0)}}{dt}=0,$$

где индекс r стоит на месте, имеющем порядковый номер s. Отсюда, при принятом условии относительно постоянных интегрирования, мы имеем

$$э_{sk}^{(0, \ldots, r, \ldots, 0)}=0.$$

В другие частные возмущения r-го порядка элемента $э_{sh}$ масса m_s обязательно будет входить, но в степенях, не превышающих $r-1$.

3. Чтобы выполнить квадратуры в формуле (13.19), определяющей возмущения первого порядка кеплеровских элементов оскулирующих орбит точек M_s, рассмотрим выражения для подынтегральных функций $E_{sj}^{(k)}$, исходя из общих выражений этих функций, даваемых формулами (13.15') или (13.15'').

---

*) Можно принять и какое-либо другое условие для определения произвольных постоянных, возникающих при нахождении возмущений различных порядков, но мы будем для простоты придерживаться уже принятого условия.

Для этого нужно заменить в этих формулах все элементы $э_{sk}$ и $э_{jk}$ их постоянными начальными значениями $э_{sk}^{(0)}$ и $э_{jk}^{(0)}$, вследствие чего все коэффициенты A и B этих формул сделаются некоторыми известными постоянными*), а время t будет входить только через средние аномалии M_s и M_j.

В рассматриваемом первом приближении аргумент в (13.15′) или часть аргумента в (13.15″) примет следующий вид:

$$k_sM_s+k_jM_j=(k_sn_s^{(0)}+k_jn_j^{(0)})(t-t_0)+k_s(\varepsilon_s-\pi_s)+k_j(\varepsilon_j-\pi_j). \qquad (13.20)$$

Дальнейшие рассуждения вполне подобны тем, которые проводились в конце предыдущей главы при рассмотрении случая возмущающей функции, зависящей от времени явно.

Действительно, так как индексы k_s и k_j могут принимать всевозможные целые значения — положительные, отрицательные и нулевые, а начальные средние движения $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$ — известные постоянные числа, то коэффициент при t в формуле (13.20) (или, иначе, частота колебания, определяемого соответствующим тригонометрическим членом) есть действительное число, которое, в частности, может быть равно нулю. Этот коэффициент заведомо равен нулю при $k_s=k_j=0$, каковы бы ни были $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$, но он может также быть нулем и в некоторых других случаях.

Эти случаи не будут иметь места, если числа $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$ несоизмеримы, что, вообще говоря, и имеет место в действительности, так как $n=\sqrt{\mu}a^{-3/2}$.

Если же средние движения $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$ соизмеримы, т. е. если их отношение $n_s^{(0)}:n_j^{(0)}$ равно отношению двух целых чисел $r_s:r_j$, то найдется бесчисленное множество пар таких чисел k_s и k_j (не равных одновременно нулю), что будет выполняться следующее равенство:

$$k_sn_s^{(0)}+k_jn_j^{(0)}=0. \qquad (13.20')$$

Обозначая соответствующие значения индексов буквами $\varkappa_s$ и $\varkappa_j$, мы будем иметь, как и в предыдущей главе,

$$\varkappa_s=\nu r_j, \quad \varkappa_j=-\nu r_s,$$

где $\nu=\pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

Таким образом, в разложении (13.15′) или (13.15″) найдется, вообще говоря, бесчисленное множество членов, не зави-

---

*) Начальные значения всех элементов в рассматриваемой задаче мы предполагаем заданными числами. Определение этих начальных элементов составляет задачу той части небесной механики, которую называют часто «теоретической астрономией».

сящих от времени и являющихся поэтому некоторыми постоянными (в первом приближении!). Такие члены мы будем называть, согласно установившейся традиции, *вековыми членами*, и будем их выделять заранее из разложения соответствующей функции $E_{sj}^{(k)}$. Поэтому, принимая для определенности форму разложения (13.15″), мы можем написать в первом приближении

$$E_{sj}^{(k)}\left(t \mid \text{э}_{sk}^{(0)} \mid \text{э}_{jk}^{(0)}\right)=A_{sj}^{(k,\,0)}+\sum_{\bar{k}}{}^{*}\left\{A_{sj}^{(k,\,\bar{k})}\cos D^{*}+B_{sj}^{(k,\,\bar{k})}\sin D^{*}\right\}, \qquad (13.21)$$

где звездочка при знаке суммы будет указывать, что индексы суммирования k_s и k_j принимают всевозможные значения, за исключением нулевых и значений, равных $\varkappa_s$ и $\varkappa_j$, а аргумент тригонометрических функций определяется формулой

$$D^{*}=\left(k_s n_s^{(0)}+k_j n_j^{(0)}\right)\left(t-t_0\right)+D_0^{*}, \qquad (13.22)$$

где

$$D_0^{*}=k_s\varepsilon_s^{(0)}+k_j\varepsilon_j^{(0)}+k_s'\Omega_s^{(0)}+k_j'\Omega_j^{(0)}+\left(k_s-k_s''\right)\pi_s^{(0)}+\left(k_j-k_j''\right)\pi_j^{(0)}. \qquad (13.22')$$

Коэффициент $A_{sj}^{(k,\,0)}$ в общем случае не равен нулю, так что, вообще говоря, каждое из равенств (13.19) для $j\neq s$ обязательно будет содержать вековой член. Но в одном важном частном случае этот коэффициент заведомо будет равен нулю. Действительно, расположим элементы (13.5′) в том же порядке, в котором написаны дифференциальные уравнения (13.11), так что $\text{э}_{s1}=a_s$ и $\text{э}_{s6}=\varepsilon_s$.

Пусть средние движения $n_1^{(0)}, n_2^{(0)}, \ldots, n_n^{(0)}$ таковы, что для любой пары $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$ условие (13.20′) выполняется только при $k_s=k_j=0$, т. е. что все начальные средние движения попарно между собой несоизмеримы. Тогда в разложении функции R_{sj} (которое имеет такую же структуру, что и (13.15″)) совокупность членов, для которых $k_s=k_j=0$, т. е. вековой член разложения R_{sj}, заведомо *не будет зависеть от средних долгот эпохи* ε_s и ε_j, т. е. от элементов э_{s6} и э_{j6}. Поэтому разложения частных производных $\dfrac{\partial R}{\partial \text{э}_{s6}}$ не будут содержать членов, не зависящих явно от времени, а отсюда следует, что в первом приближении все величины $A_{sj}^{(1,\,0)}$, которые пропорциональны частным производным $\dfrac{\partial R}{\partial \text{э}_{s6}}$, будут равны нулю, так что

$$A_{sj}^{(1,0)}=0. \qquad (13.23)$$

Следует иметь в виду, что этот важный результат справедлив только в том случае, когда средние движения удовлетворяют высказанному условию (т. е. все несоизмеримы между собой). В противном случае (в случае наличия соизмеримостей, или, как говорят иногда, резонансов) вековой член разложения функции R_{sj}, как видно из (13.22′), будет зависеть от ε_s и ε_j и величины $A_{sj}^{(1,0)}$ не будут равны нулю.

После этих необходимых замечаний перейдем к выполнению квадратур в формуле (13.19′), определяющей частные возмущения первого порядка элементов э_{sk}.

Заменяя подынтегральную функцию в этой формуле ее выражением (13.21), где все коэффициенты A и B и величина D_0^* суть величины постоянные, мы найдем после интегрирования:

$$\text{э}_{sk}^{(j)}(t) = A_{sj}^{(k,0)}(t - t_0) + \\ + \sum_{\bar{k}}^{*} \frac{A_{sj}^{(k,\bar{k})}\left(\sin D^* - \sin D_0^*\right) - B_{sj}^{(k,\bar{k})}\left(\cos D^* - \cos D_0^*\right)}{k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}}. \quad (13.24)$$

Таким образом, всякое частное возмущение первого порядка любого из элементов (13.5′), как показывают формулы (13.18′) и (13.24), состоит из двух частей, из которых первая содержит множителем $t - t_0$ и постоянно растет по абсолютной величине *) вместе с временем, а вторая содержит только тригонометрические члены и является суммой периодических функций от времени. Положим

$$\delta_c^{(1,j)}\text{э}_{sk} = m_j A_{sj}^{(k,0)}(t - t_0) \quad (13.25)$$

и назовем эту величину вековой частью частного возмущения первого порядка элемента э_{sh} или вековым неравенством.

Тогда вековая часть полного возмущения первого порядка определится формулой

$$\delta_c^{(1)}\text{э}_{sk} = \sum_{j=1}^{n}{}' \delta_c^{(1,j)}\text{э}_{sk} = (t - t_0)\sum_{j=1}^{n}{}' m_j A_{sj}^{(k,0)}. \quad (13.25')$$

Эта величина называется также часто просто вековым возмущением элемента э_{sh}.

Вторую часть частного возмущения первого порядка естественно назвать периодической частью частного возмущения, а сумма произведений этих величин на возмущающие массы дает периодическую часть полного возмущения пер-

---

*) Коэффициент векового неравенства может быть и положительным и отрицательным, так же как и множитель $t - t_0$, который при $t > t_0$ соответствует будущему, а при $t < t_0$ — прошлому.

вого порядка, которую называют также часто периодическим возмущением элемента $э_{sk}$.

Как показывает формула (13.24), периодическая часть возмущения первого порядка состоит из бесчисленного множества периодических членов, отличающихся друг от друга величинами амплитуд и периодов.

Каждый отдельный периодический член, амплитуда которого содержит множителем одну из возмущающих масс и делителем величину $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}$, имеет период

$$T_{k_s, k_j} = \frac{2\pi}{k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}}. \tag{13.26}$$

Всякий такой член естественно назвать периодическим неравенством элемента $э_{sk}$, но его также называют (не совсем правильно) периодическим возмущением.

Заметим, что делитель $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}$ заведомо не равен нулю, но, независимо от соизмеримости или несоизмеримости средних движений $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$, может оказаться величиной весьма малой. Поэтому периодические неравенства разделяют по величине периода (13.26) на неравенства короткопериодические, период которых сравним с периодами обращений $2\pi/n_s^{(0)}$ и $2\pi/n_j^{(0)}$, в невозмущенных движениях точек M_s и M_j, и на неравенства долгопериодические, период которых может быть весьма большим.

Амплитуды долгопериодических неравенств также могут оказаться значительными вследствие того, что в знаменатель соответствующего периодического члена входит величина $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}$ (малый делитель).

Таким образом, возмущение первого порядка любого элемента (13.5′) состоит из векового неравенства и из бесчисленного множества периодических неравенств, разделяющихся на короткопериодические и долгопериодические.

Разумеется, при практических применениях теории возмущений невозможно вычислять бесчисленное множество членов, образующих возмущения даже только первого порядка. Поэтому на практике из всего бесчисленного множества неравенств рассматривают и учитывают только некоторые и представляют возмущение первого порядка каждого элемента в виде суммы векового неравенства и нескольких периодических, амплитуды которых являются наиболее ощутительными.

Но здесь имеется некоторое затруднение, на которое невозможно не обратить внимания. Дело в том, что амплитуды периодических неравенств (коротко- и долгопериодических) не могут быть определены конечными формулами, и мы вынуждены представлять их в свою очередь бесконечными рядами, расположенными, например, как отмечалось выше, по степеням эксцентриситетов и наклонностей.

Мы можем вычислить только *некоторые первые члены* этих бесконечных рядов и совершенно не можем быть уверенными, что сосчитанные члены дают нам с достаточной точностью сумму всего ряда. Поэтому, определяя возмущение первого порядка какого-либо элемента в виде суммы некоторого, не очень большого числа неравенств, мы получаем только некоторую *приближенную формулу*, об удовлетворительности которой мы можем судить только путем сравнения построенной таким образом аналитической теории с наблюдениями *).

Эти замечания показывают, что не следует преувеличивать ценность аналитической теории как совокупности приближенных формул, определяющих возмущения первого порядка, и во всяком случае не следует делать из этих приближенных формул необоснованные выводы, касающиеся эволюции рассматриваемой системы небесных тел в весьма далеком будущем (или прошлом).

4. Сделаем еще несколько существенных замечаний по поводу вековых неравенств в возмущениях первого порядка элементов оскулирующих орбит движущихся материальных точек, представляющих интересующие нас небесные тела.

Мы уже заметили, что если начальные средние движения $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$ двух точек несоизмеримы между собой, то сумма $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}$ может обратиться в нуль только при $k_s = 0$, $k_j = 0$, вследствие чего соответствующий коэффициент $A_{sj}^{(1,0)}$ будет равен нулю, и вековое неравенство элемента $э_{s1}$, т. е. большой полуоси a_s оскулирующей орбиты точки M_s, вызываемое возмущающей массой m_j, также равно нулю, так что возмущение первого порядка большой полуоси эллиптической орбиты состоит только из периодической части.

Если начальные средние движения всех точек системы обладают попарно таким же свойством, то мы будем иметь по формуле (13.25′)

$$\delta_c^{(1)} э_{s1} = 0 \qquad (s = 1, 2, \ldots, n),$$

и возмущения первого порядка больших полуосей всех орбит точек M_s будут содержать только периодические члены.

Это свойство возмущений первого порядка впервые замечено Лапласом для больших планет солнечной системы, но, оче-

---

*) Результаты построенной таким образом приближенной аналитической теории можно также сравнивать с результатами численного интегрирования дифференциальных уравнений возмущенного движения, или с результатами какой-либо другой теории, построенной на иных принципах.

видно, имеет более общее значение и называется обычно теоремой Лапласа, хотя во всей общности оно установлено Лагранжем.

Приведем полную формулировку этой теоремы, которую мы будем называть в дальнейшем теоремой Лапласа.

Теорема Лапласа. Если начальные средние движения $n_s^{(0)}$ всех точек M_s таковы, что для любой их пары делитель $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}$ обращается в нуль только при $k_s = k_j = 0$, то возмущения первого порядка больших полуосей оскулирующих орбит точек M_s не содержат вековых членов.

Как следствие теоремы Лапласа, отметим, что средние движения n_s всех точек M_s, рассматриваемые как функции времени, также обладают этим же свойством, что видно и из формулы (13.8‴) и из уравнений

$$\frac{dn_s}{dt} = -\frac{3}{a_s^2}\frac{\partial R_s}{\partial \varepsilon_s},$$

определяющих оскулирующие средние движения как функции времени.

Начальные средние движения $n_s^{(0)}$ в действительности определяются из наблюдений, так же как и большие полуоси $a_s^{(0)}$ и как все прочие элементы.

Числовые значения величин $n_s^{(0)}$ и $a_s^{(0)}$ в какой-либо конкретной задаче астрономии (например, в задаче о движении больших планет) выражаются десятичными дробями с определенным числом десятичных знаков*) и, следовательно, практически всегда оказываются рациональными числами. Поэтому всегда найдутся такие целые числа k_s и k_j (и притом в бесконечном количестве), для которых сумма $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}$ будет равна нулю. В самом деле, если σ есть число десятичных знаков (после запятой) в числах $n_s^{(0)}$ и $n_j^{(0)}$, то все целые числа, определяемые формулами

$$k_s = \nu n_j^{(0)} \cdot 10^{\sigma}, \quad k_j = -\nu n_s^{(0)} \cdot 10^{\sigma},$$

где $\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots$, обратят сумму $k_s n_s^{(0)} + k_j n_j^{(0)}$ в нуль и правые части равенств (13.21) все без исключения будут содержать не равные нулю вековые члены.

Но эти числа k_s и k_j, обусловливающие вековые неравенства всех элементов (не исключая и больших полуосей),

---

*) Число этих десятичных знаков зависит от точности производимых наблюдений, т. е. от качества измерительных астрономических инструментов, а также от характера и положения наблюдаемого небесного тела.

оказываются на практике весьма большими, и члены, им соответствующие, просто невозможно вычислить.

Действительно, возьмем, например, средние движения Юпитера и Сатурна, относящиеся к 1 января 1900 г. Мы имеем ($n=9$ есть число больших планет солнечной системы)

$$n_5^{(0)}=299{,}1283, \quad n_6^{(0)}=120{,}4547, \quad \sigma=4,$$

а поэтому числа k_5 и k_6 будут равны соответственно

$$k_5=1\,204\,547\,\nu, \qquad k_6=-2\,991\,283\,\nu,$$

и соответствующие им члены даже для $\nu=\pm 1$ фактически невычислимы. Поэтому мы можем считать средние движения $n_s^{(0)}$ планет солнечной системы такими, что для любой их пары всякая сумма $k_s n_s^{(0)}+k_j n_j^{(0)}$ обращается в нуль только при $k_s=k_j=0$.

С другой стороны, мы можем считать исходными данными начальные значения больших полуосей $a_s^{(0)}$ планетных орбит. Тогда средние движения, определяемые по формуле (13.8'''), заведомо будут иррациональными числами, отношение любой пары которых не равно отношению двух целых чисел. Поэтому, рассматривая вопрос с этой точки зрения, мы можем быть уверены в отсутствии вековых неравенств в возмущениях первого порядка больших полуосей и средних движений оскулирующих планетных орбит.

Подчеркнем еще раз, что теорема Лапласа говорит только о возмущениях первого порядка. Что касается возмущений высших порядков, то относительно их ничего определенного доказать не удается и, принципиально говоря, такие возмущения вообще заведомо будут содержать вековые члены. И в самом деле, для больших полуосей оскулирующих орбит больших планет такие вековые члены найдены в возмущениях уже третьего порядка.

Однако вопрос о действительном поведении больших полуосей с течением времени не может быть выяснен рассмотрением различных членов бесконечных рядов, даже если все эти члены включают в себя вековые неравенства, пропорциональные какой-либо степени времени.

Классическим примером, иллюстрирующим такое обстоятельство, является функция $\sin(\alpha m t)$, где m — малый параметр. Разложение этой функции по степеням этого параметра

$$\sin(\alpha m t)=\alpha t\cdot m-\frac{\alpha^3 t^3}{3!}m^3+\ldots$$

содержит бесчисленное множество вековых членов; однако ряд сходится абсолютно для всякого значения $|t|$ и его сумма никогда не превосходит единицы по абсолютной величине.

Следовательно, наличие вековых членов в возмущениях оскулирующих элементов ничего еще не говорит о действительном поведении этих элементов и устанавливает только аналитическую структуру первых членов бесконечных рядов, формально представляющих элементы.

Возвращаясь к вековым возмущениям первого порядка, обратим внимание на то, что эти возмущения обусловлены свободными членами разложений функций $E_{sj}^{(k)}(t \mid э_{sk} \mid э_{jk})$ в тригонометрические ряды по кратным двух средних аномалий M_s и M_j.

Поэтому, если нас интересуют по какой-либо причине только вековые возмущения оскулирующих элементов первого порядка, то мы можем с самого начала отбросить в разложениях величин $E_{sj}^{(k)}$ все периодические члены, вследствие чего уравнения (13.15) заменятся следующими:

$$\frac{dэ_{sk}}{dt} = \sum_{j=1}^{n}{}' m_j A_{sj}^{(k,\,0)}(э_{sk} \mid э_{jk}), \tag{13.27}$$

правые части которых не зависят от времени и являются функциями только от элементов $э_{sk}$ ($s = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, 6$).

Чтобы получить первое приближение, нужно, как мы знаем, заменить в правых частях уравнений (13.27) все элементы $э_{sk}$ их постоянными начальными значениями $э_{sk}^{(0)}$. Тогда все правые части равенств (13.27) сделаются величинами постоянными и, производя непосредственное интегрирование, мы снова получим формулы (13.25), дающие вековые неравенства возмущений первого порядка.

Отбрасывание всех периодических членов разложений величин $E_{sj}^{(k)}$ равносильно, очевидно, замене этих величин свободными членами их рядов Фурье, которые вычисляются по следующим общим формулам:

$$A_{sj}^{(k,\,0)} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} E_{sj}^{(k)}\, dM_s\, dM_j, \tag{13.28}$$

и называются средними значениями функций $E_{sj}^{(k)}$.

Поэтому переход от точных уравнений (13.15) к уравнениям (13.27), правые части которых являются средними значениями правых частей уравнений (13.15), называется осреднением уравнений возмущенного движения, а самые уравнения (13.27) называются часто осредненными уравнениями.

Лагранж заметил, что уравнения (13.27) можно рассматривать сами по себе, а их интегрирование как самостоятельную задачу, результаты которой можно назвать теорией вековых возмущений оскулирующих элементов.

Мы рассмотрим эту важную теорию несколько далее, перейдя от кеплеровских оскулирующих элементов к некоторым другим, более удобным для поставленной цели, и которые определяются уравнениями типа уравнений Гамильтона — Якоби. Теперь же заметим только, что задача Лагранжа представляет некоторое новое приближение к действительному решению первоначальных уравнений (13.15), в котором не применяются разложения по степеням возмущающих масс, а совсем другие принципы интегрирования.

Если правые части уравнений (13.27) не зависят от средних долгот эпохи ε_s, т. е. от элементов $э_{s6}$, то, как показано выше, все $A_{sj}^{(1,0)}$ равны нулю, а следовательно, все большие полуоси, или элементы $э_{s1}$, остаются постоянными. Этот результат представляет некоторое обобщение теоремы Лапласа, которая была сформулирована только для возмущений первого порядка.

Заменяя в остальных уравнениях (13.27) элементы $э_{s1}$ их постоянными начальными значениями и имея в виду, что празые части этих уравнений не зависят от элементов $э_{s6}$, мы получим систему уравнений не $6n$-го порядка, а порядка $4n$, что составляет более простую задачу.

После интегрирования этой системы, дающего элементы $э_{s2}$, $э_{s3}$, $э_{s4}$ и $э_{s5}$ как функции времени, мы определим затем и $э_{s6}$, т. е. ε_s, простыми квадратурами.

После этого возникнет новый важный вопрос о близости полученного решения системы (13.27) к решению точной системы уравнений (13.15). Решение этого вопроса представляет весьма сложную математическую задачу, которая стоит в настоящее время в центре внимания современной небесной механики.

§ 3. Теорема Лапласа об устойчивости солнечной системы

1. В предыдущем параграфе было показано, что полуоси оскулирующих орбит больших планет в их относительном движении вокруг Солнца в первом приближении можно считать свободными от вековых возмущений. Поэтому мы можем утверждать (по-прежнему оставаясь в рамках первого приближения), что большие полуоси испытывают только малые периодические колебания около их невозмущенных постоянных значений, откуда следует (с той же точностью приближения), что большие планеты постоянно обращаются вокруг Солнца на почти неизменных расстояниях с почти неизменными угловыми скоростями.

Было отмечено, что до сих пор не известно, обладают ли большие планеты этим свойством в действительности, но если допустить, что это действительно так, то уже почти строго можно доказать, что общее устройство солнечной системы будет всегда оставаться неизменным и таким же, каким оно является в настоящее время. Это утверждение и составляет знаменитую теорему Лапласа об устойчивости солнечной системы, которую мы рассмотрим в этом параграфе, хотя она имеет, как следует из сказанного, только условное значение.

Предварительно мы выведем необходимое условие устойчивости в смысле Лагранжа для произвольной системы взаимно притягивающихся точек.

Пусть имеем такую систему материальных точек, взаимные расстояния между которыми имеют в начальный момент времени конечные значения, не равные нулю. Движение этой системы материальных точек называется устойчивым в смысле Лагранжа, если все взаимные расстояния всегда остаются ограниченными, так что ни одна из точек не удаляется неограниченно далеко от всех остальных.

Рассмотрим теперь формулу Лагранжа — Якоби, полученную в гл. VII и имеющую следующий простой вид:

$$\frac{d^2R}{dt^2}=2U+4h', \tag{13.29}$$

где R определяется формулой

$$R=\frac{1}{m}\sum_{i<j} m_i m_j \Delta_{ij}^2 \tag{13.29'}$$

и есть величина существенно положительная (имеющая размерность момента инерции), а U есть полная силовая функция системы, т. е.

$$U=f\sum_{i<j}\frac{m_i m_j}{\Delta_{ij}}, \tag{13.29''}$$

и также существенно положительна.

Так как U обращается в нуль только тогда, когда все взаимные расстояния Δ_{ij} равны бесконечности, то мы можем считать, что во все время движения системы функция U имеет нижнюю границу, не равную нулю. Обозначая эту нижнюю границу через A, будем иметь неравенство

$$0<A\leqslant U, \tag{13.30}$$

справедливое для всякого момента времени.

Из (13.29) и (13.30) следует также следующее неравенство:

$$\frac{d^2R}{dt^2}\geqslant 2A+4h', \tag{13.31}$$

интегрируя которое в пределах от t_0 до t, получим следующее неравенство:

$$\frac{dR}{dt}-R_0\geqslant(2A+4h')(t-t_0), \tag{13.31'}$$

где $\dot{R}_0$ обозначает начальное значение производной по времени от величины R.

Интегрируя теперь в тех же пределах неравенство (13.31), мы найдем основное неравенство

$$R \geqslant R_0 + \dot{R}_0 (t - t_0) + (A + 2h')(t - t_0)^2, \qquad (13.31'')$$

где R_0 есть начальное значение величины R.

Неравенство (13.31″) показывает, что движение системы может быть устойчивым в смысле Лагранжа только при условии

$$h' < 0. \qquad (13.32)$$

Действительно, допустим, что $h' \geqslant 0$ и перепишем неравенство (13.31″) в виде

$$R \geqslant R_0 + [\dot{R}_0 + (A + 2h')(t - t_0)](t - t_0).$$

Отсюда следует, что каково бы ни было $\dot{R}_0$, величина, стоящая в квадратных скобках, неограниченно растет при неограниченно возрастающем t, делаясь в конце концов положительной, если $t \to +\infty$ $(t - t_0 > 0)$, и отрицательной, если $t \to -\infty$ $(t - t_0 < 0)$. В обоих случаях правая часть неравенства стремится к положительной бесконечности, когда $|t - t_0| \to \infty$, а следовательно, величина R и подавно неограниченно растет вместе с $|t - t_0|$. Но если R неограниченно растет, то обязательно по крайней мере одно из взаимных расстояний также неограниченно растет, и движение системы заведомо неустойчиво в смысле Лагранжа.

Таким образом, условие (13.32) является необходимым условием устойчивости движения системы в смысле Лагранжа, но, разумеется, оно не является достаточным.

Заметим, что h' есть полная энергия системы в ее движении относительно общего центра инерции, и она равна так же, как показывает уравнение (7.25), полной энергии системы в ее движении относительно точки M_0.

Рассмотрим теперь величины h_s, определяемые формулами

$$h_s = V_s^2 - \frac{2\mu_s}{r_s}, \qquad (13.33)$$

и являющиеся, конечно, некоторыми функциями времени.

Допустим, как это мы и делали выше, что каждая из этих величин h_s остается отрицательной в течение некоторого промежутка времени, включающего в себя начальный момент t_0.

Тогда имеем также

$$h_s^{(0)} = V_s^{(0)^2} - \frac{2f(m_0 + m_s)}{r_s^{(0)}} < 0, \qquad (13.33')$$

вследствие чего, применяя формулу (7.25) для начального момента t_0 и имея в виду, что по основному предположению все массы m_s ($s=1, 2, \ldots, n$) весьма малы по сравнению с массой m_0, получим

$$h' = -\frac{1}{2m}\left\{\left[\sum_{s=1}^{n} m_s \dot{x}_s^{(0)}\right]^2 + \left[\sum_{s=1}^{n} m_s \dot{y}_s^{(0)}\right]^2 + \left[\sum_{s=1}^{n} m_s \dot{z}_s^{(0)}\right]^2\right\} + \\ + \sum_{s=1}^{n}\left[\frac{1}{2} m_s V_s^{(0)^2} - \frac{f m_0 m_s}{r_s^{(0)}}\right] - f \sum_{s<j\neq 0} \frac{m_s m_j}{\Delta_{sj}^{(0)}} < 0.$$

Для всех больших планет солнечной системы все величины h_s ($s=1, 2, \ldots, 9$) в настоящее время отрицательны. Следовательно, и полная энергия h' всей солнечной системы также отрицательна, и необходимое условие устойчивости в смысле Лагранжа для солнечной системы, очевидно, выполняется.

Но из этого еще не следует заключать, как уже было отмечено, что солнечная система действительно устойчива (в смысле Лагранжа).

В самом деле, само условие $h'<0$ не является еще достаточным для устойчивости, да и, кроме того, это условие выведено в задаче о движении взаимно притягивающихся материальных точек, которая сама является только некоторым приближением задачи о движении действительных небесных тел.

2. Рассмотрим теперь теорему Лапласа. Предполагая, попрежнему, что неравенства (13.33′) выполняются, рассмотрим интегралы площадей относительного движения (7.27), считая опять, что все массы m_s весьма малы по сравнению с массой m_0.

Тогда, с точностью до членов первого порядка относительно малых масс, мы можем написать уравнения (7.27) в следующем приближенном виде:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{s=1}^{n} m_s(y_s\dot{z}_s - z_s\dot{y}_s) &= c_1', \\ \sum_{s=1}^{n} m_s(z_s\dot{x}_s - x_s\dot{z}_s) &= c_2', \\ \sum_{s=1}^{n} m_s(x_s\dot{y}_s - y_s\dot{x}_s) &= c_3'. \end{aligned}\right\} \qquad (13.34)$$

Перейдем в этих уравнениях от прямоугольных координат к оскулирующим кеплеровским элементам, которыми являются, в виду условий (13.33′), элементы эллиптических орбит (13.5′).

Так как каждая масса m_s описывает свою орбиту вокруг массы m_0, то мы имеем из формул эллиптического движения следующие соотношения:

$$y_s\dot{z}_s - z_s\dot{y}_s = +\sqrt{\mu_s}\sqrt{p_s}\sin i_s \sin\Omega_s,$$
$$z_s\dot{x}_s - x_s\dot{z}_s = -\sqrt{\mu_s}\sqrt{p_s}\sin i_s \cos\Omega_s,$$
$$x_s\dot{y}_s - y_s\dot{x}_s = +\sqrt{\mu_s}\sqrt{p_s}\cos i_s.$$

Подставив эти выражения в уравнения (13.34), мы получим (с точностью до первых степеней возмущающих масс!) следующие уравнения, которые являются первыми интегралами уравнений возмущенного движения (13.11):

$$\left.\begin{aligned} \sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{p_s}\sin i_s \sin\Omega_s &= c_1', \\ -\sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{p_s}\sin i_s \cos\Omega_s &= c_2', \\ \sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{p_s}\cos i_s &= c_3'. \end{aligned}\right\} \qquad (13.34')$$

Заметим, что система прямоугольных координат с началом в точке M_0 и с неизменными направлениями осей была у нас до сих пор совершенно произвольной, и мы можем выбирать направления осей как угодно.

Выберем теперь эту систему координат таким образом, чтобы основная координатная плоскость xOy совпадала с неизменяемой плоскостью Лапласа, которая перпендикулярна к вектору момента количества движения. Тогда $c_1' = 0$, $c_2' = 0$, $c_3' = c$ и уравнения (13.34′) примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{p_s}\sin i_s \sin\Omega_s &= 0, \\ \sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{p_s}\sin i_s \cos\Omega_s &= 0, \\ \sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{p_s}\cos i_s &= c. \end{aligned}\right\} \qquad (13.34'')$$

Последнее из уравнений (13.34″) и позволяет доказать теорему Лапласа, которую мы сформулируем здесь следующим образом:

Теорема Лапласа Пусть $a_s^{(0)}$, $e_s^{(0)}$, $i_s^{(0)}$ — начальные значения больших полуосей, эксцентриситетов и наклонностей к неизменяемой плоскости оскулирующих орбит точек M_s.

Тогда, если:

1) величины $e_s^{(0)}$ и $i_s^{(0)}$ все весьма малы,

2) величины a_s в течение некоторого промежутка времени (t_0, T) весьма мало отличаются от своих начальных значений $a_s^{(0)}$,

3) величины $m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}}$ суть величины одного и того же порядка,

то для всех значений времени в промежутке (t_0, T) величины e_s и i_s будут также оставаться весьма малыми.

Доказательство может быть проведено следующим образом. Согласно условиям теоремы мы можем положить $a_s = a_s^{(0)} + \alpha_s$, где все α_s суть функции времени, имеющие в промежутке (t_0, T) весьма малые числовые значения. Тогда теорема Тейлора дает

$$\sqrt{a_s} = \sqrt{a_s^{(0)}}\left(1 + \frac{\alpha_s}{a_s^{(0)}}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a_s^{(0)}}\left(1 + \frac{\alpha_s}{2a_s^{(0)}} + \ldots\right)$$

и последнее из уравнений (13.34″), если иметь в виду, что $p_s = a_s(1 - e_s^2)$, может быть написано в виде

$$\sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}}\sqrt{1 - e_s^2}\cos i_s = c + \alpha, \tag{13.35}$$

где через α обозначена некоторая функция времени, принимающая в промежутке (t_0, T) весьма малые числовые значения и обращающаяся в нуль при $t = t_0$.

Пусть теперь c_0 есть постоянная величина, определяемая формулой

$$\sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}} = c_0. \tag{13.35′}$$

Вычитая из этого равенства равенство (13.35), мы получим следующее уравнение:

$$\sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}}\left[1 - \sqrt{1 - e_s^2}\cos i_s\right] = \tilde{c} - \alpha$$

(где $\tilde{c}$ — новая постоянная), которое может быть написано также в виде

$$\sum_{s=1}^{n} m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}}\,\frac{\sin^2 i_s + e_s^2\cos^2 i_s}{1 + \sqrt{1 - e_s^2}\cos i_s} = \tilde{c} - \alpha. \tag{13.36}$$

Последнее уравнение имеет место для всех значений t в промежутке (t_0, T), т. е. пока большие полуоси a_s остаются близкими к своим начальным значениям.

Полагая в уравнении (13.36) $t=t_0$ и имея в виду, что α обращается в нуль в начальный момент, мы найдем

$$\tilde{c}=\sum_{s=1}^{n} m_s \sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}}\,\frac{\sin^2 i_s^{(0)}+e_s^{(0)2}\cos^2 i_s^{(0)}}{1+\sqrt{1-e_s^{(0)2}}\cos i_s^{(0)}}. \qquad (13.36')$$

Так как по условию теоремы Лапласа величины $i_s^{(0)}$, $e_s^{(0)}$ весьма малы, а величины $m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}}$ одного и того же порядка, то вычисленное по формуле (13.36′) значение постоянной $\tilde{c}$ также будет весьма мало́.

Отсюда следует, что левая часть равенства (13.36) будет оставаться весьма малой для всех значений t в промежутке (t_0, T), а поэтому в этом промежутке величины $\sin i_s$ и $e_s \cos i_s$ должны сохранять весьма малые значения, т. е. наклонности i_s оскулирующих орбит к неизменяемой плоскости и эксцентриситеты e_s этих орбит будут также оставаться малыми в промежутке (t_0, T), что и нужно было доказать.

Доказанная теорема имеет весьма большое значение для небесной механики. Действительно, пусть рассматриваемая система материальных точек представляет Солнце (масса m_0) и девять больших планет $(s=1, 2, \ldots, 9)$.

В настоящее время эксцентриситеты и наклонности орбит (к неизменяемой плоскости) всех больших планет действительно весьма малы, а величины $m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}}$ для всех больших планет имеют значения приблизительно одинакового порядка. С другой стороны, благодаря отсутствию вековых неравенств в возмущениях первого порядка больших полуосей величины a_s для всех больших планет будут оставаться близкими (по крайней мере в течение двух-трех столетий) к их начальным значениям. Поэтому мы можем утверждать, что в течение того же промежутка времени эксцентриситеты и наклонности орбит больших планет солнечной системы действительно будут оставаться малыми.

Иначе говоря, в настоящее время орбиты больших планет суть почти круги и лежат почти в одной плоскости. По теореме Лапласа следует, что такое устройство солнечной системы будет сохраняться все время, пока большие полуоси будут оставаться близкими к их начальным значениям.

Однако распространять этот результат на очень большие (космогонические!) промежутки времени мы не имеем никаких оснований, вследствие чего устройство солнечной системы в далеком будущем (а также в далеком прошлом), по существу, остается неизвестным.

Отметим еще, что если наряду с большими планетами рассматривать в солнечной системе также и малые планеты, то теорема Лапласа уже не будет справедливой даже в первом приближении.

Действительно, массы малых планет суть величины гораздо более высокого порядка (по отношению к массе Солнца), чем массы больших планет, которые все же можно считать величинами одинакового порядка. Таким образом, для солнечной системы, состоящей из больших и малых планет, просто не выполняются условия теоремы, касающиеся порядков величин $m_s\sqrt{\mu_s}\sqrt{a_s^{(0)}}$. Кроме того, не выполняется также и первое условие, так как орбиты многих малых планет обладают заметными эксцентриситетами и наклонностями.

Разумеется, в этом смысле нельзя также включать в солнечную систему кометы и метеоры.

3. Возвратимся теперь к соотношениям (13.34″) и посмотрим, какие результаты можно извлечь из двух первых уравнений этой группы, которые мы еще никак не использовали.

Очевидно, два первых равенства системы (13.34″) можно рассматривать как два уравнения, связывающие $4n$ неизвестных $\sqrt{p_s}$, $\sin i_s$, $\sin\Omega_s$, $\cos\Omega_s$, а поэтому из них можно выразить какие-либо две неизвестные величины в зависимости от всех остальных. Например, можно найти $\sqrt{p_1}$ и $\sqrt{p_2}$ или $\sin i_1$ и $\sin i_2$, что позволит понизить порядок общей системы на две единицы. Можно также определить, например, $\sin\Omega_1$ и $\cos\Omega_1$, что позволит найти однозначно Ω_1, и, следовательно, понизить порядок системы на одну единицу.

Однако такое понижение порядка системы уравнений возмущенного движения вообще не доставляет никаких преимуществ и поэтому не производится, а первые два интеграла из системы (13.34) используются обыкновенно как контрольные формулы при определении оскулирующих элементов путем численного интегрирования уравнений.

Можно рассматривать эти два первых соотношения еще и с другой точки зрения. Допустим, что нам известны значения оскулирующих элементов планетных орбит из наблюдений для ряда различных моментов времени. Тогда в этих уравнениях можно рассматривать как неизвестные величины массы m_s планет, которые можно и определить из этих уравнений, выражая какие-нибудь две через остальные.

Рассмотрим еще первые два уравнения системы (13.34) для частного случая, когда $n=2$, т. е. для задачи трех тел (например, для задачи «Солнце — Юпитер — Сатурн»).

Тогда напишем эти уравнения в раскрытом виде следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} m_1 \sqrt{\mu_1} \sqrt{p_1} \sin i_1 \sin \Omega_1 + m_2 \sqrt{\mu_1} \sqrt{p_2} \sin i_2 \sin \Omega_2 = 0, \\ m_1 \sqrt{\mu_1} \sqrt{p_1} \sin i_1 \cos \Omega_1 + m_2 \sqrt{\mu_2} \sqrt{p_2} \sin i_2 \cos \Omega_2 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (13.37)$$

откуда имеем

$$\left.\begin{aligned} m_1 \sqrt{\mu_1} \sqrt{p_1} \sin i_1 \sin \Omega_1 = - m_2 \sqrt{\mu_2} \sqrt{p_2} \sin i_2 \sin \Omega_2, \\ m_1 \sqrt{\mu_1} \sqrt{p_1} \sin i_1 \cos \Omega_1 = - m_2 \sqrt{\mu_2} \sqrt{p_2} \sin i_2 \cos \Omega_2. \end{aligned}\right\} \quad (13.37')$$

Разделив первое из равенств (13.37′) на второе, мы будем иметь замечательное соотношение, впервые полученное Якоби:

$$\operatorname{tg} \Omega_1 = \operatorname{tg} \Omega_2. \quad (13.38)$$

Из соотношения (13.38) мы заключаем, что либо должно быть $\Omega_1 = \Omega_2$, либо $\Omega_1 = \Omega_2 \pm 180°$. Но в первом случае оба слагаемых в каждом из уравнений (13.37) будут иметь одинаковые знаки и их сумма не может быть равна нулю. Следовательно, мы должны иметь

$$\Omega_1 = \Omega_2 \pm 180°. \quad (13.38')$$

Таким образом, долгота узла одной планеты просто выражается через долготу узла другой и число неизвестных уменьшается на одну единицу.

Из равенства (13.38′) следует также свойство движения в задаче трех тел, которое можно сформулировать следующим образом:

Если за основную плоскость взята неизменяемая плоскость Лапласа, то направление на восходящий узел одной планеты совпадает с направлением на нисходящий узел другой планеты.

Полезно напомнить, что это свойство выведено из уравнений (7.27), в которых отброшены члены второго порядка относительно возмущающих масс.

§ 4. Канонические системы оскулирующих элементов

1. В предыдущих параграфах мы рассматривали движения n малых масс m_s относительно массы m_0, которая в теории движения больших планет представляет Солнце. Эти гелиоцентрические движения планет представляют наибольший интерес для практических приложений, так как наблюдения, производимые с поверхности Земли, непосредственно дающие топоцентрические положения светил, лег-

ко пересчитать в геоцентрические и затем в гелиоцентрические.

Однако с теоретической точки зрения гелиоцентрические уравнения движения планет не совсем удобны, так как они содержат столько же возмущающих функций, сколько имеется планет, вследствие чего выкладки, связанные с развитием теории интегрирования уравнений движения, оказываются довольно длительными и громоздкими. С этой точки зрения гораздо удобнее пользоваться каноническими уравнениями движения (уравнениями Гамильтона), содержащими только одну функцию — характеристическую функцию, или функцию Гамильтона (гамильтониан), представляющую собой полную энергию движущейся системы материальных точек.

В связи с этим, при применении метода Лагранжа изменения произвольных постоянных удобнее и проще пользоваться не кеплеровскими оскулирующими элементами, а элементами Якоби, дифференциальные уравнения для которых в возмущенном движении также имеют канонический вид, что позволяет при исследовании этих уравнений опираться на общие свойства канонических систем и канонических преобразований.

Рассмотрим сначала для большей простоты и наглядности задачу о движении одной материальной точки в поле центральной силы и подверженной действию произвольной консервативной возмущающей силы, или, во всяком случае, силы, допускающей силовую функцию.

Тогда, как и в гл. XII, наша задача приведется к интегрированию системы трех совместных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{x}=-\frac{\mu x}{r^3}+\frac{\partial R}{\partial x},\quad \ddot{y}=-\frac{\mu y}{r^3}+\frac{\partial R}{\partial y},\quad \ddot{z}=-\frac{\mu z}{r^3}+\frac{\partial R}{\partial z},\tag{13.39}$$

где R — возмущающая функция, зависящая от координат движущейся точки и, вообще, от времени R:

$$R=R(t\,|\,x,\ y,\ z).\tag{13.39'}$$

Вводя теперь характеристическую функцию H, полагая

$$H=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-\frac{\mu x}{r}-R,\tag{13.40}$$

мы можем переписать систему (13.39) в гамильтоновой форме

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \dot{x}},\quad \frac{dy}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \dot{y}},\quad \frac{dz}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \dot{z}},\\ &\frac{d\dot{x}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x},\quad \frac{d\dot{y}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y},\quad \frac{d\dot{z}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial z}.\end{aligned}\right\}\tag{13.41}$$

Если разложить затем характеристическую функцию на две части, полагая

$$H = H_0 + H_1, \tag{13.42}$$

где

$$H_0 = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{\mu x}{r}, \quad H_1 = -R, \tag{13.42'}$$

и рассмотреть упрощенную систему, получающуюся из (13.41) заменой полной характеристической функции ее первой частью H_0, то мы получим, очевидно, обычные уравнения невозмущенного кеплеровского движения, общее решение которых подробно рассмотрено в гл. IX.

Если ввести полярные сферические координаты, полагая

$$x = r\cos\varphi\cos\lambda, \quad y = r\cos\varphi\sin\lambda, \quad z = r\sin\varphi, \tag{13.43}$$

то общий интеграл уравнений невозмущенного движения напишется в виде

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = t + \beta_1, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \quad \frac{\partial W}{\partial \alpha_3} = \beta_3, \\ &\frac{\partial W}{\partial r} = \dot{r}, \quad \frac{\partial W}{\partial \varphi} = r^2\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial W}{\partial \lambda} = r^2 \cos^2\varphi \cdot \dot{\lambda}, \end{aligned}\right\} \tag{13.44}$$

где α_s и β_s — произвольные постоянные, а функция W, удовлетворяющая уравнению Гамильтона — Якоби (в полярных координатах)

$$\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial W}{\partial \lambda}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} = 2\alpha_1, \tag{13.44'}$$

определяется формулой

$$W = \alpha_3\lambda + \int_0^{\varphi} \sqrt{\alpha_2^2 - \frac{\alpha_3^2}{\cos^2\varphi}}\, d\varphi + \int_{r_1}^{r} \sqrt{2\alpha_1 + \frac{2\mu}{r} - \frac{\alpha_2^2}{r^2}}\, dr. \tag{13.44''}$$

В главе IX было показано, что уравнения (13.44) приводятся к обычным формулам невозмущенного кеплеровского движения, дающим координаты x, y, z и составляющие скорости $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ в функции времени и шести произвольных постоянных, за которые можно принять канонические постоянные α_s и β_s, называемые элементами Якоби, связанные с обычными кеплеровскими элементами простыми формулами.

Допустим, для определенности, что движение точки принадлежит к эллиптическому типу. Тогда невозмущенное движение будет происходить по эллипсу и кеплеровскими элементами будут элементы эллиптической орбиты

$$a, \quad e, \quad i, \quad \Omega, \quad \pi, \quad \varepsilon. \tag{13.45}$$

Элементы Якоби и элементы (13.45) связаны друг с другом следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = -\frac{\mu}{2a}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\mu}\sqrt{p}, \quad \alpha_3 = \sqrt{\mu}\sqrt{p}\cos i, \\ &\beta_1 = -\tau, \qquad \beta_2 = \omega, \qquad \beta_3 = \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{13.46}$$

или, так как

$$p = a(1-e^2), \quad n(t_0-\tau) = \varepsilon - \pi, \quad \pi = \Omega + \omega,$$

формулами

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = -\frac{\mu}{2a}, && \beta_1 = -t_0 + \frac{\varepsilon-\pi}{n}, \\ &\alpha_2 = \sqrt{\mu}\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}, && \beta_2 = \pi - \Omega, \\ &\alpha_3 = \sqrt{\mu}\sqrt{a}\sqrt{1-e^2}\cos i, && \beta_3 = \Omega, \end{aligned}\right\} \tag{13.46$'$}$$

причем среднее движение n определяется формулой

$$n = \frac{\sqrt{\mu}}{a^{3/2}}. \tag{13.46$''$}$$

Из формул (13.46′) можно выразить также кеплеровские элементы через элементы Якоби, что дает следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &a = -\frac{\mu}{2\alpha_1}, && e = \sqrt{1 + \frac{2\alpha_1\alpha_2^2}{\mu^2}}, \\ &n = \frac{2\sqrt{2}}{\mu}(-\alpha_1)^{3/2}, && i = \arccos\left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2}\right), \\ &\Omega = \beta_3, && \pi = \beta_2 + \beta_3, \\ &\varepsilon = \beta_2 + \beta_3 + \frac{2\sqrt{2}}{\mu}(-\alpha_1)^{3/2}(t_0+\beta_1) \end{aligned}\right\} \tag{13.46$'''$}$$

и, кроме того, имеем еще дополнительно

$$p = \frac{\alpha_2^2}{\mu}, \quad \tau = -\beta_1, \quad \omega = \beta_2.$$

Применяя теперь метод Лагранжа, мы рассматриваем возмущенное движение как постоянно и непрерывно изменяющееся невозмущенное движение и определяем возмущенное движение теми же формулами, как и невозмущенное, рассматривая только все элементы (произвольные постоянные) как некоторые функции времени.

Считая произвольными постоянными невозмущенного движения элементы Якоби, мы определим последние в возмущенном движении следующей канонической системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt} &= +\frac{\partial R}{\partial\beta_1}, & \frac{d\alpha_2}{dt} &= +\frac{\partial R}{\partial\beta_2}, & \frac{d\alpha_3}{dt} &= +\frac{\partial R}{\partial\beta_3}, \\ \frac{d\beta_1}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial\alpha_1}, & \frac{d\beta_2}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial\alpha_2}, & \frac{d\beta_3}{dt} &= -\frac{\partial R}{\partial\alpha_3}, \end{aligned}\right\} \qquad (13.47)$$

из которой нетрудно, пользуясь соотношениями (13.46‴), вывести обычные уравнения Лагранжа для оскулирующих кеплеровских элементов.

2. Для интегрирования системы уравнений (13.47), определяющих оскулирующие элементы Якоби, необходимо выразить возмущающую функцию через время и канонические элементы.

Так как мы предположили, что оскулирующая орбита все время (или в течение некоторого промежутка времени) остается эллипсом, то координаты x, y, z, определяемые формулами невозмущенного движения, являются периодическими функциями от средней аномалии, которую мы здесь обозначим через l и которая определяется, следовательно, формулой

$$l = n(t-\tau) = n(t+\beta_1). \qquad (13.48)$$

Так как координаты движущейся точки (в невозмущенном движении) являются также периодическими функциями долготы узла и долготы перицентра, то R_1 будет также периодической функцией от величин β_2 и β_3 и может быть разложена, следовательно, в тройной ряд Фурье вида

$$R = \sum \begin{matrix} A\cos \\ B\sin \end{matrix} (k_1 l + k_2\beta_2 + k_3\beta_3), \qquad (13.49)$$

коэффициенты которого зависят только от элементов α_s.

Таким образом, элементы α_s и β_s входят в функцию R несколько различным образом. Величины β_s суть угловые элементы и входят в функцию R только под знаками тригонометрических функций, а поэтому частные производные от функции R по элементам β_s будут представляться рядами такого же вида, как и ряд (13.49).

Величины α_2 и α_3 входят только в коэффициенты A и B разложения (13.49) и результаты дифференцирования функции R по этим элементам также представятся рядами такого же типа, как и (13.49).

Но иначе обстоит дело с элементом α_1. Эта величина входит и в коэффициенты A и B и под знаки синусов и косинусов через посредство среднего движения n, которое зависит от α_1. Вследствие этого частная производная от возмущающей функции R по элементу α_1 будет содержать члены, содержащие множителем $t - t_0$. Наличие таких членов, неограниченно растущих вместе с временем, крайне затрудняет интегрирование уравнений (13.47), а поэтому обычно стараются так преобразовать эти уравнения, чтобы в их правые части не входили члены такого вида.

Такое преобразование в канонических уравнениях возмущенного движения впервые выполнил Делонэ в своей классической работе по теории движения Луны*), который ввел для этой цели новые канонические элементы, называемые теперь обычно элементами Делонэ.

Чтобы выполнить это преобразование, введем вместо элемента β_1 новую переменную l (среднюю аномалию) формулой (13.48). Тогда мы имеем

$$\frac{\partial R}{\partial \beta_1} = \frac{\partial R}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial \beta_1} = n\frac{\partial R}{\partial l},$$

и первое из уравнений системы (13.47) напишется в виде

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = n\frac{\partial R}{\partial l}. \qquad (13.50)$$

Далее мы имеем

$$\frac{dl}{dt} = n\left(1 + \frac{d\beta_1}{dt}\right) + (t + \beta_1)\frac{\partial n}{\partial \alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dt}. \qquad (13.50')$$

Обозначим теперь через $\left(\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}\right)$ частную производную от функции R по α_1, входящему явно, т. е. только через посредство коэффициентов A и B. Тогда мы найдем

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = \left(\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}\right) + \frac{\partial R}{\partial l}(t + \beta_1)\frac{\partial n}{\partial \alpha_1}.$$

Вставляя теперь в формулу (13.50') вместо $\frac{d\beta_1}{dt}$ ее значение $-\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}$, а вместо этой производной ее только что написанное выражение, мы найдем

$$\frac{dl}{dt} = n - n\left(\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}\right) - n\frac{\partial R}{\partial l}(t + \beta_1)\frac{\partial n}{\partial \alpha_1} + (t + \beta_1)\frac{\partial n}{\partial \alpha_1}\frac{d\alpha_1}{dt}$$

или, в силу (13.50),

$$\frac{dl}{dt} = n - n\left(\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}\right).$$

---

*) См. М. Ф. Субботин, Курс небесной механики, т. 2, ОНТИ, 1937; Д. Брауэр и Дж. Клеменс, Методы небесной механики, перев. с англ., «Мир», 1964; А. Пуанкаре, Лекции по небесной механике, перев. с франц., «Наука», 1965; К. Шарлье, Небесная механика, перев. с немецк., «Наука», 1966.

Итак, сделанное преобразование заменяет пару уравнений из системы (13.47) для сопряженных элементов α_1, β_1 следующей парой уравнений:

$$\frac{d\alpha_1}{dt}=n\frac{\partial R}{\partial l}, \quad \frac{dl}{dt}=n-n\left(\frac{\partial R}{\partial \alpha_1}\right). \tag{13.51}$$

Эти уравнения решают поставленную задачу, так как их правые части не содержат t вне знаков тригонометрических функций, но, однако, они не имеют канонической формы, как все остальные уравнения системы (13.47).

Чтобы привести опять всю систему к каноническому виду, заменим также переменную α_1 новой переменной, которую обозначим, согласно Делонэ, через L, полагая

$$L=\sqrt{\mu}\sqrt{a}. \tag{13.52}$$

Тогда из (13.46′) и (13.46″) выводим

$$\alpha_1=-\frac{\mu^2}{2L^2} \tag{13.52′}$$

и

$$n=\frac{\mu^2}{L^3}, \tag{13.53}$$

откуда имеем также

$$\frac{\partial\alpha_1}{\partial L}=n. \tag{13.53′}$$

Теперь из уравнений (13.51) имеем

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial R}{\partial l}, \quad \frac{dl}{dt}=\frac{\mu^2}{L^3}-\left(\frac{\partial R}{\partial L}\right). \tag{13.54}$$

Если ввести теперь новую характеристическую функцию F, полагая

$$F=\frac{\mu^2}{2L^2}+R, \tag{13.55}$$

то уравнения (13.54) напишутся в желаемой канонической форме следующим образом:

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial F}{\partial l}, \quad \frac{dl}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial L}, \tag{13.54′}$$

где частная производная $\frac{\partial F}{\partial L}$ вычисляется в предположении, что n считается как бы постоянной.

Остальные четыре уравнения системы (13.47) не изменятся, но в них функцию R можно, очевидно, заменить на F, так что вся система будет иметь единую характеристическую функцию.

Введем теперь, следуя Делонэ, новые обозначения, полагая

$$\alpha_2=G, \quad \alpha_3=H, \quad \beta_2=g, \quad \beta_3=h, \tag{13.55′}$$

тогда вместо системы (13.47) мы будем иметь следующую каноническую систему:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dL}{dt}&=+\frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dG}{dt}&=+\frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dH}{dt}&=+\frac{\partial F}{\partial h},\\ \frac{dl}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial L}, & \frac{dg}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial G}, & \frac{dh}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial H},\end{aligned}\right\}\tag{13.56}$$

где F определяется формулой (13.55) и должна быть выражена через время и величины

$$L,\quad G,\quad H,\quad l,\quad g,\quad h,\tag{13.56$'$}$$

а производная $\frac{\partial F}{\partial L}$ берется по L, входящему только явно.

Величины (13.56′) называются каноническими переменными Делонэ или, более кратко, элементами Делонэ. Эти элементы связаны с элементами Якоби формулами (13.48), (13.52) и (13.55), откуда с помощью формул (13.46′) легко получим соотношения, связывающие элементы Делонэ с обычными кеплеровскими элементами эллиптического движения:

$$\left.\begin{aligned}L&=\sqrt{\mu}\sqrt{a}, & l&=n(t-\tau),\\ G&=\sqrt{\mu}\sqrt{a(1-e^2)}, & g&=\pi-\Omega,\\ H&=\sqrt{\mu}\sqrt{a(1-e^2)}\cos i, & h&=\Omega.\end{aligned}\right\}\tag{13.57}$$

Из этих соотношений получим также обратные формулы, выражающие кеплеровские элементы через элементы Делонэ:

$$\left.\begin{aligned}a&=\frac{L^2}{\mu}, & e&=\frac{\sqrt{L^2-G^2}}{L}, & \cos i&=\frac{H}{G},\\ \Omega&=h, & \pi&=g+h, & \tau&=t-\frac{l}{n},\\ \varepsilon&=g+h+l_0, & p&=\frac{G^2}{\mu}, & \omega&=g.\end{aligned}\right\}\tag{13.57$'$}$$

Полезно отметить, что в невозмущенном движении, т. е. когда $R=0$, мы имеем $F=\frac{\mu^2}{2L^2}$ и поэтому все элементы (13.56′), кроме l, приводятся к своим начальным значениям, а

$$l=n(t-t_0)+l_0.$$

Примечание. Переход от элементов Якоби к элементам Делонэ может быть осуществлен независимо от того, входит ли время t явно в возмущающую функцию или нет.

3. Канонические элементы Делонэ были введены для того, чтобы в правых частях дифференциальных уравнений возмущенного движения, определяющих оскулирующие элементы, не было членов, пропорциональных времени.

Для интегрирования уравнений (13.56) мы должны, как уже было замечено, выразить характеристическую функцию через элементы Делонэ (13.56′), что приводит к ряду вида (13.49), коэффициенты которого зависят от величин L, G и H. Эта зависимость достаточно сложная, так что коэффициенты тригонометрического ряда также приходится разлагать в ряды.

В силу разложений координат эллиптического кеплеровского движения эти ряды будут являться степенными относительно эксцентриситета и наклонности оскулирующей орбиты, которые выражаются через элементы Делонэ формулами (13.57′), вследствие чего упомянутые ряды будут иметь весьма сложную структуру.

Пуанкаре указал, что вместо элементов Делонэ можно ввести другую систему элементов, которые также являются каноническими, но более удобными для приближенных вычислений, связанных с употреблением степенных рядов *).

Эти новые элементы, образующие первую систему канонических элементов Пуанкаре, определяются соотношениями

$$\left.\begin{aligned} \Lambda &= L, & \lambda &= l+g+h, \\ \Gamma &= L-G, & \gamma &= -g-h, \\ Z &= G-H, & z &= -h. \end{aligned}\right\} \qquad (13.58)$$

Нетрудно проверить, что новые элементы также образуют каноническую систему. Для этого образуем выражение **)

$$d\psi = l\,dL + g\,dG + h\,dH - \lambda\,d\Lambda - \gamma\,d\Gamma - z\,dZ,$$

для которого в силу формул (13.58) имеем

$$d\psi = l\,dL + g\,dG + h\,dH - (l+g+h)\,dL + \\ + (g+h)(dL-dG) + h\,(dG-dH) \equiv 0.$$

Таким образом, это выражение оказывается тождественным нулем (т. е. полным дифференциалом), откуда, по теореме Пуанкаре, мы заключаем, что преобразование (13.58) является каноническим и что преобразованные уравнения имеют ту же самую характеристическую функцию. Поэтому уравнения, определяющие элементы

$$\Lambda, \quad \Gamma, \quad Z, \quad \lambda, \quad \gamma, \quad z, \qquad (13.58')$$

напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Lambda}{dt} &= +\frac{\partial F}{\partial \lambda}, & \frac{d\Gamma}{dt} &= +\frac{\partial F}{\partial \gamma}, & \frac{dZ}{dt} &= +\frac{\partial F}{\partial z}, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Lambda}, & \frac{d\gamma}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Gamma}, & \frac{dz}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial Z}, \end{aligned}\right\} \qquad (13.59)$$

---

*) См. А. Пуанкаре, Лекции по небесной механике.

**) См. § 5 гл. VI.

где характеристическая функция F определится формулой

$$F=\frac{\mu^2}{2\Lambda^2}+R, \tag{13.59'}$$

а возмущающая функция R должна быть выражена через элементы (13.58').

При помощи формул (13.57') мы выразим без труда элементы Пуанкаре через обычные кеплеровские элементы эллиптического движения формулами:

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda=\sqrt{\mu}\sqrt{a}, && \lambda=n(t-\tau)+\pi,\\ &\Gamma=\sqrt{\mu}\sqrt{a}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right), && \gamma=-\pi,\\ &Z=\sqrt{\mu}\sqrt{a\left(1-e^2\right)}\left(1-\cos i\right), && z=-\Omega. \end{aligned}\right\} \tag{13.59''}$$

Отсюда мы имеем

$$\frac{\Gamma}{\Lambda}=1-\sqrt{1-e^2}=\frac{1}{2}e^2+\ \ldots,$$

т. е. Γ есть величина порядка квадрата эксцентриситета оскулирующей орбиты, и следовательно, весьма мала, если e мало́. Далее,

$$\frac{Z}{\Lambda\sqrt{1-e^2}}=1-\cos i=\frac{1}{2}i^2+\ \ldots,$$

откуда следует, что при малых e и i величина Z есть величина порядка квадрата наклонности.

Наконец, рассмотрим еще одну систему канонических элементов, также введенную в курсе Пуанкаре и называемую второй канонической системой Пуанкаре. Эти элементы Пуанкаре обозначаются буквами

$$\Lambda,\quad \lambda,\quad \xi,\quad \eta,\quad p,\quad q, \tag{13.60}$$

где Λ и λ — те же элементы, что и в первой канонической системе Пуанкаре, а остальные элементы определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} &\xi=\sqrt{2\Gamma}\cos\gamma, && \eta=\sqrt{2\Gamma}\sin\gamma,\\ &p=\sqrt{2Z}\cos z, && q=\sqrt{2Z}\sin z. \end{aligned}\right\} \tag{13.60'}$$

Элементы (13.60) образуют каноническую систему, так как каждая пара — ξ, η и p, q — образует каноническую пару переменных, что показано в § 5 гл. VI.

Согласно теореме Якоби в формулировке Пуанкаре новые переменные определятся канонической системой с той же самой характеристической функцией, и мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Lambda}{dt} &= +\frac{\partial F}{\partial \lambda}, & \frac{d\xi}{dt} &= +\frac{\partial F}{\partial \eta}, & \frac{dp}{dt} &= +\frac{\partial F}{\partial q}, \\ \frac{d\lambda}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \Lambda}, & \frac{d\eta}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial \xi}, & \frac{dq}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial p}. \end{aligned}\right\} \qquad (13.61)$$

При помощи формул (13.59″) и формул преобразования (13.60′) мы легко получим следующие соотношения между элементами Пуанкаре и кеплеровскими элементами эллиптического движения:

$$\left.\begin{aligned} \Lambda &= L = \sqrt{\mu}\sqrt{a}, \\ \lambda &= n(t-\tau)+\pi = l+\Omega+\omega, \\ \xi &= +\sqrt{2\sqrt{\mu}\sqrt{a}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)}\cos\pi, \\ \eta &= -\sqrt{2\sqrt{\mu}\sqrt{a}\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)}\sin\pi, \\ p &= +\sqrt{2\sqrt{\mu}\sqrt{a(1-e^2)}(1-\cos i)}\cos\Omega, \\ q &= -\sqrt{2\sqrt{\mu}\sqrt{a(1-e^2)}(1-\cos i)}\sin\Omega. \end{aligned}\right\} \qquad (13.61')$$

Из этих формул следует, что величины

$$\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}$$

суть малые, порядка эксцентриситета e, а величины

$$\frac{p}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \frac{q}{\sqrt{\Lambda}}$$

суть малые, порядка наклонности e.

Пуанкаре назвал величины ξ и η эксцентрическими элементами, а величины p и q — облическими элементами*).

Элементы Пуанкаре (13.60) оказываются наиболее удобными из всех возможных систем канонических элементов (которых можно придумать, конечно, еще сколько угодно) для всех тех задач, в которых оскулирующие эксцентриситет и наклонность сохраняют всегда, или по крайней мере длительное время, весьма малые значения. Такими задачами являются почти все задачи классической небесной механики, т. е. задачи о движении больших планет солнечной системы, многих малых планет,

---

*) От французского слова «obliquité», что означает «наклонение».

почти всех спутников, а также многие задачи современной небесной механики, относящиеся к различным случаям движения искусственных спутников Земли, искусственных спутников Луны, Венеры и Марса.

§ 5. Принципы разложения возмущающей функции

1. Для приближенного интегрирования уравнений возмущенного движения в элементах Делонэ или в элементах Пуанкаре нужно прежде всего выразить характеристическую функцию F через время и сами элементы, что можно сделать, как мы уже знаем, только при помощи разложений характеристической функции в бесконечный ряд.

Так как характеристическая функция F состоит из двух слагаемых, второе из которых есть возмущающая функция R, задаваемая как функция от координат x, y, z, то прежде всего нужно выразить эти координаты через переменные Делонэ или элементы Пуанкаре.

Будем рассматривать, как основные переменные, элементы Пуанкаре (13.60) и предположим для простоты, что возмущающая функция R не зависит от времени. Тогда, если движение рассматриваемой точки принадлежит к эллиптическому типу, то R, как это уже неоднократно отмечалось, будет периодической функцией от средней аномалии l, или от средней долготы λ, и может быть разложена в ряд Фурье, расположенный по синусам и косинусам целых кратностей средней аномалии. Коэффициенты этого разложения будут некоторыми функциями от остальных элементов Пуанкаре, т. е. от Λ, эксцентрических элементов ξ, η и обликических элементов p, q. Мы покажем теперь, что эти коэффициенты разложимы по целым, положительным степеням величин

$$\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \frac{p}{\sqrt{\Lambda}}, \quad \frac{q}{\sqrt{\Lambda}}, \tag{13.62}$$

которые все численно малы, если эксцентриситет и наклонность оскулирующей орбиты остаются также малыми.

Рассмотрим сначала некоторые зависимости между элементами Пуанкаре и привычными кеплеровскими элементами эллиптического движения.

Из формул (13.61′) мы имеем прежде всего

$$\left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2+\left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2=2\left(1-\sqrt{1-e^2}\right)=e^2+\frac{1}{4}e^4-\frac{1}{8}e^6+\ \dots, \tag{13.63}$$

причем ряд, стоящий в правой части равенства, содержит, очевидно, только четные степени эксцентриситета и сходится абсолютно при всяком значении e, меньшем единицы.

Обращая ряд (13.63), мы получим разложение квадрата эксцентриситета по степеням величины

$$\sigma = \left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2, \tag{13.63$'$}$$

также абсолютно сходящееся при очевидных условиях

$$\left|\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right| < 1, \quad \left|\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right| < 1. \tag{13.63$''$}$$

Это разложение имеет вид

$$e^2 = \sigma - \frac{1}{4}\sigma^2 + \frac{1}{4}\sigma^3 + \ldots =$$
$$= \left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 - \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2\right]^2 + \ldots \tag{13.63$'''$}$$

и может рассматриваться как двойной ряд, расположенный по степеням величин (13.63″), т. е. $\xi/\sqrt{\Lambda}$, $\eta/\sqrt{\Lambda}$.

Далее мы можем написать

$$\sqrt{2(1-\sqrt{1-e^2})} = e\sqrt{1 + \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{8}e^4 + \ldots} =$$
$$= e\left(1 + \frac{1}{8}e^2 - \frac{9}{128}e^4 + \ldots\right),$$

где в скобках стоит ряд, расположенный по степеням e^2, абсолютно сходящийся при $e<1$.

Обозначая коэффициенты этого ряда через c_{2k}, мы имеем из (13.61′)

$$\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}} = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}e^{2k}\right)\cdot e\cos\pi,$$
$$\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}} = -\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}e^{2k}\right)\cdot e\sin\pi.$$

Величина, обратная стоящему в скобках множителю в этих равенствах, может быть разложена в ряд, расположенный по степеням e^2, так что мы имеем

$$\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}e^{2k}\right)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c'_{2k}e^{2k} = 1 - \frac{1}{8}e^2 + \frac{11}{128}e^4 + \ldots$$

Но e^2 разложима по степеням величины (13.63′), а поэтому ряд, расположенный по степеням e^2, может быть также представлен в виде ряда, расположенного по степеням величины

(13.63′), вследствие чего мы будем иметь следующие разложения:

$$\left.\begin{aligned} e\cos\pi &= +\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\left\{1-\frac{1}{8}\left[\left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2+\left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2\right]+\ldots\right\},\\ e\sin\pi &= -\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\left\{1-\frac{1}{8}\left[\left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2+\left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^2\right]+\ldots\right\}.\end{aligned}\right\} \quad (13.64)$$

Следовательно, величины $e\cos\pi$ и $e\sin\pi$ разложимы в абсолютно сходящиеся при условиях (13.63″) ряды, расположенные по степеням (целым и положительным) величин $\xi/\sqrt{\Lambda}$ и $\eta/\sqrt{\Lambda}$.

Рассматривая теперь облические элементы p и q, мы имеем из (13.61′)

$$\begin{aligned} \gamma = \left(\frac{p}{\sqrt[4]{\Lambda}\sqrt[4]{1-e^2}}\right)^2 + \left(\frac{q}{\sqrt[4]{\Lambda}\sqrt[4]{1-e^2}}\right)^2 &= \\ = 2(1-\cos i) = 2\left(1-\sqrt{1-\sin^2 i}\right) &= \\ = \sin^2 i + \frac{1}{4}\sin^4 i - \frac{1}{8}\sin^6 i + \ldots, &\quad (13.65)\end{aligned}$$

где ряд сходится абсолютно при $|\sin i| < 1$.

Отсюда, так же, как и в предшествующем случае, найдем *)

$$\begin{aligned} \sqrt{2(1-\cos i)} = \sin i\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}\sin^{2k} i\right) &= \\ = \sin i\left(1+\frac{1}{8}\sin^2 i - \frac{9}{128}\sin^4 i + \ldots\right) &\quad (13.65')\end{aligned}$$

и

$$\sin^2 i = \gamma - \frac{1}{4}\gamma^2 + \frac{1}{4}\gamma^4 + \ldots$$

Так как из (13.61′) в силу (13.65′) мы можем написать

$$\left.\begin{aligned} \frac{p}{\sqrt{\Lambda}}(1-e^2)^{-\frac{1}{4}} &= +\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}\sin^{2k} i\right)\cdot\sin i\cos\Omega,\\ \frac{q}{\sqrt{\Lambda}}(1-e^2)^{-\frac{1}{4}} &= -\left(1+\sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}\sin^{2k} i\right)\cdot\sin i\sin\Omega,\end{aligned}\right\} \quad (13.65'')$$

то отсюда, так же как и выше, следует, что величины

$$\sin i\cos\Omega, \quad \sin i\sin\Omega$$

---

*) Очевидно, что коэффициенты ряда (13.65′), расположенного по степеням $\sin^2 i$, таковы же, как и коэффициенты рассмотренного выше ряда, расположенного по степеням e^2.

разложимы в ряды, расположенные по целым положительным степеням величин

$$\frac{p}{\sqrt{\Lambda}}(1-e^2)^{-\frac{1}{4}}, \quad \frac{q}{\sqrt{\Lambda}}(1-e^2)^{-\frac{1}{4}}$$

абсолютно сходящиеся, пока числовые значения этих величин остаются меньшими единицы.

Но e^2, а значит, и $(1-e^2)^{-\frac{1}{4}}$, разложимы по степеням $\xi/\sqrt{\Lambda}$ и $\eta/\sqrt{\Lambda}$.

Таким образом, мы можем утверждать, что величины

$$\left.\begin{array}{ll} r=e\cos\pi, & s=e\sin\pi, \\ u=\sin i\cos\Omega, & v=\sin i\sin\Omega \end{array}\right\} \tag{13.66}$$

разложимы в абсолютно сходящиеся ряды, расположенные по целым положительным степеням величин (13.62).

Очевидно, что и наоборот, величины (13.62) разложимы в абсолютно сходящиеся ряды, расположенные по целым положительным степеням величин (13.66). Существенно отметить, кроме того, что и те и другие ряды не содержат свободных членов, а поэтому уничтожаются при одновременном равенстве нулю всех переменных, по которым произведено разложение.

2. Величины (13.66) были введены Лагранжем в его знаменитой теории вековых возмущений *) и могут быть названы элементами Лагранжа. Эти элементы не являются каноническими, как элементы Пуанкаре, но разложимы в ряды, как было только что показано, по степеням величин (13.62), а поэтому всякие величины, разложимые в ряды по степеням элементов Лагранжа, будут также разложимы в ряды и по степеням канонических элементов (13.62).

Покажем, что координаты x, y, z могут быть разложены в ряды, расположенные по степеням элементов Лагранжа (13.66).

Заметим сначала, что

$$e^2=r^2+s^2, \quad \sin^2 i=u^2+v^2,$$

и, следовательно,

$$e^{2k}=(r^2+s^2)^k, \quad \sin^{2k} i=(u^2+v^2)^k,$$

откуда следует, что все четные степени величин e и $\sin i$ являются целыми рациональными функциями (многочленами) элементов Лагранжа (13.66).

---

*) Элементы этой теории Лагранжа будут рассмотрены ниже, однако за основные переменные мы примем элементы Пуанкаре.

Рассмотрим теперь выражения для координат эллиптического движения, представленные рядами, расположенными по целым положительным степеням эксцентриситета*), и коэффициенты которых суть тригонометрические функции (конечные ряды синусов и косинусов) от средней аномалии, обозначаемой в этой главе буквой l.

Эти коэффициенты даются формулами (11.22′), где направляющие косинусы определяются формулами (9.56) и (9.56′) гл. IX.

Выражение для первого из этих направляющих косинусов может быть представлено в следующем виде:

$$\alpha_\tau = \cos(\pi - \Omega)\cos\Omega - \sin(\pi - \Omega)\sin\Omega\cos i =$$

$$= \cos(\pi - \Omega)\cos\Omega - \sin(\pi - \Omega)\sin\Omega\,(1 - \sin^2 i)^{\frac{1}{2}} = \cos\pi +$$

$$+ \frac{1}{2}\sin^2 i\sin\Omega\,(\sin\pi\cos\Omega - \cos\pi\sin\Omega)\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2 i + \ldots\right) =$$

$$= \cos\pi + \left(\frac{1}{2}uv\sin\pi - \frac{1}{2}v^2\cos\pi\right)\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2 i + \ \ldots\right).$$

Представляя подобным же образом остальные направляющие косинусы и замечая, что выражения, подобные стоящему в последней скобке, разложимы по степеням элементов u и v, мы получим следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha_\tau &= \cos\pi + P^{(2)}\sin\pi - P^{(3)}\cos\pi,\\
\beta_\tau &= \sin\pi - P^{(1)}\sin\pi + P^{(2)}\cos\pi,\\
\gamma_\tau &= u\sin\pi - v\cos\pi,\\
\alpha'_\tau &= -\sin\pi + P^{(2)}\cos\pi + P^{(3)}\sin\pi,\\
\beta'_\tau &= \cos\pi - P^{(1)}\cos\pi - P^{(2)}\sin\pi,\\
\gamma'_\tau &= u\cos\pi + v\sin\pi,
\end{aligned}\right\} \qquad (13.67)$$

где положено

$$\left.\begin{aligned}
&P^{(1)} = \frac{1}{2}u^2P^{(0)}, \quad P^{(2)} = \frac{1}{2}uvP^{(0)}, \quad P^{(3)} = \frac{1}{2}v^2P^{(0)},\\
&P^{(0)} = 1 + \frac{1}{4}(u^2 + v^2) + \ \ldots,
\end{aligned}\right\} \qquad (13.67')$$

так что $P^{(1)}$, $P^{(2)}$, $P^{(3)}$ суть ряды, расположенные по целым, положительным степеням величин u и v и не содержащие членов ниже второй степени относительно этих переменных.

---

*) См. формулы (11.22) гл. XI.

Рассматривая теперь формулы (11.22), (11.22′), (11.20′), (11.21‴) и, наконец, (11.34) и (11.34′) гл. XI, мы можем убедиться, что члены рядов, представляющих координаты x, y, z, будут содержать бесчисленное множество произведений вида

$$e^k \times \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \pi \times \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (k+1-2m)\, l, \qquad (13.68)$$

где k есть целое положительное число, а m — другое целое положительное число, не превышающее $(k+1)/2$ *).

Но средняя аномалия l и средняя долгота λ связаны формулой

$$l = \lambda - \pi,$$

и поэтому

$$\cos \nu l = \cos \nu\lambda \cos \nu\pi + \sin \nu\lambda \sin \nu\pi,$$

$$\sin \nu l = \sin \nu\lambda \cos \nu\pi - \cos \nu\lambda \sin \nu\pi.$$

Из (13.68) следует, что ряды типа (11.22) будут содержать бесчисленное множество членов вида

$$e^k \times \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \pi \times \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (k+1-2m)\,\pi \times \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (k+1-2m)\,\lambda. \qquad (13.68')$$

Формулы тригонометрии дают нам следующие выражения для косинуса и синуса кратного угла **):

$$\cos \nu\pi = C_1 (\cos \pi)^{\nu} + C_2 (\cos \pi)^{\nu-2} + \ldots,$$

$$\sin \nu\pi = \sin \pi \left(C_1' (\cos \pi)^{\nu-1} + C_2' (\cos \pi)^{\nu-3} + \ldots\right),$$

где C и C' обозначают числовые коэффициенты.

Заменяя в выражениях типа (13.68) косинусы и синусы кратных долготы перицентра π этими их значениями, мы установим без труда, что в выражения множителей при косинусах и синусах кратных средней долготы λ в формулах для координат x, y, z будут входить члены только следующих типов:

$$\left.\begin{aligned} &e^k \times \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} \pi \times (\cos \pi)^{k+1-2m'}, \\ &e^k \times \sin^2 \pi \times (\cos \pi)^{k-2m'}, \end{aligned}\right\} \qquad (13.68'')$$

где $m' \leqslant m$.

---

*) Выражение вида (13.68) заключает в себе четыре различных, но однотипных выражения.

**) См., например, И. М. Рыжик и И. С. Градштейн, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.

Но мы можем написать

$$e^k \times \cos\pi \times (\cos\pi)^{k+1-2m'} =$$

$$= (e\cos\pi)^{k+2-2m'} \times e^{2m'-2} = r^{k+2-2m'} \times (r^2+s^2)^{m'-1},$$

$$e^k \times \sin\pi \times (\cos\pi)^{k+1-2m'} =$$

$$= (e\sin\pi) \times (e\cos\pi)^{k+1-2m'} \times e^{2m'-2} = sr^{k+1-m'} (r^2+s^2)^{m'-1},$$

$$e^k \times \sin^2\pi \times (\cos\pi)^{k-2m'} =$$

$$= (e\sin\pi)^2 \times (e\cos\pi)^{k-2m'} \times e^{2m'-2} = s^2 r^{k-2m'} (r^2+s^2)^{m'-1}.$$

Таким образом, каждый (из бесчисленного множества) член в каждом из рядов (11.22) является целой рациональной функцией от r, s, коэффициенты которой суть ряды, расположенные по степеням u и v. Из сказанного выше следует также, что эти коэффициенты суть тригонометрические многочлены относительно косинусов и синусов целых кратностей средней долготы λ.

Таким образом, мы убеждаемся, что каждая из координат движущейся точки x, y, z разложима в ряд, расположенный по целым положительным степеням элементов Лагранжа r, s, u, v, коэффициенты которого суть тригонометрические многочлены относительно синусов и косинусов целых кратностей λ.

Так как было уже показано, что элементы Лагранжа разложимы в ряды, расположенные по целым положительным степеням величин (13.62), то, следовательно, *и координаты x, y, z разложимы в ряды, расположенные по целым положительным степеням величин (13.62), а коэффициенты этих рядов суть тригонометрические многочлены относительно косинусов и синусов целых кратностей λ.*

Так как исходные ряды (11.22) для координат x, y, z являются абсолютно сходящимися при любом значении средней аномалии l, пока эксцентриситет орбиты e не превосходит лапласова предела, то и преобразованные ряды, расположенные по степеням величин (13.62), также будут абсолютно сходящимися при любом значении средней долготы λ и при $e<\bar{e}=0{,}6627, \ldots$, а значит, когда числовые значения величин (13.62) остаются меньшими некоторого предела, отличного от нуля.

Располагая члены полученных рядов надлежащим образом (что возможно в силу их абсолютной сходимости), мы можем превратить эти ряды в тригонометрические, расположенные по косинусам и синусам целых кратностей λ, коэффициенты которых являются целыми рядами, расположенными по степеням величин (13.62).

Заменяя затем в выражении возмущающей функции R координаты x, y, z полученными рядами, мы можем представить эту функцию также в виде ряда такой же структуры, т. е. в виде ряда

$$R=\sum_{k=0}^{\infty}(A_k\cos k\lambda+B_k\sin k\lambda), \tag{13.69}$$

коэффициенты которого суть целые ряды, расположенные по степеням величин (13.62), т. е. имеют вид

$$\left.\begin{matrix}A_k\\ \\ B_k\end{matrix}\right\}=\left\{\begin{matrix}A_k^{(0)}\\ \\ B_k^{(0)}\end{matrix}\right.\times\left(\frac{\xi}{\sqrt{\Lambda}}\right)^{k_1}\left(\frac{\eta}{\sqrt{\Lambda}}\right)^{k_2}\left(\frac{p}{\sqrt{\Lambda}}\right)^{k_3}\left(\frac{q}{\sqrt{\Lambda}}\right)^{k_4}.$$

§ 6. Канонические уравнения общей теории возмущений

1. Рассмотрим опять основную задачу небесной механики, т. е. задачу о движении системы $n+1$ взаимно притягивающихся материальных точек M_s ($s=0, 1, 2, \ldots, n$), предполагая, что масса m_0 весьма велика по сравнению со всеми остальными массами.

В первых параграфах этой главы мы изучали движения n малых масс относительно массы m_0, которая в теории движения больших планет представляет Солнце; эти гелиоцентрические движения планет представляют наибольший интерес для практических приложений, но, как было уже отмечено в § 4, не совсем удобны для теоретических исследований, так как гелиоцентрические уравнения движения не имеют канонической формы.

В § 4 мы рассматривали канонические уравнения и канонические переменные для простейшей задачи о движении одной материальной точки в центральном поле и под действием возмущающей силы. Здесь мы распространим изложенные ранее результаты на задачу о движении системы материальных точек, предполагая, что все действующие силы, и основные и возмущающие, исключительно силы взаимных притяжений, определяемые законом Ньютона.

Мы будем исходить из уравнений движения взаимно притягивающихся материальных точек в координатах Якоби (см. гл. VII). Эти уравнения имеют следующий вид:

$$m'_s\ddot{x}'_s=\frac{\partial U}{\partial x'_s},\quad m'_s\ddot{y}'_s=\frac{\partial U}{\partial y'_s},\quad m'_s\ddot{z}'_s=\frac{\partial U}{\partial z'_s}, \tag{13.70}$$

где x'_s, y'_s, z'_s — прямоугольные декартовские координаты точки M_s ($s=1, 2, \ldots, n$) в системе осей с началом в центре масс

G_{s-1} точек $M_0, M_1, \ldots, M_{s-1}$ и с неизменными направлениями осей *).

Постоянные m'_s, называемые «приведенными массами» точек M_s, зависят только от масс точек системы и определяются формулами **)

$$m'_s = \frac{m_s \sigma_{s-1}}{\sigma_s} = \frac{m_s(m_0 + m_1 + \ldots + m_{s-1})}{m_0 + m_1 + \ldots + m_{s-1} + m_s}. \tag{13.71}$$

Наконец, U есть полная силовая функция всей системы точек $M_0, M_1, \ldots, M_n$ и определяется известной формулой

$$U = f \sum_{s<j} \frac{m_s m_j}{\Delta_{sj}}, \tag{13.72}$$

где Δ_{sj} суть взаимные расстояния между точками, причем

$$\Delta_{sj}^2 = \left(x'_j - x'_s + \sum_{k=s}^{j-1} \frac{m_k x'_k}{\sigma_k}\right)^2 + \\ + \left(y'_j - y'_s + \sum_{k=s}^{j-1} \frac{m_k y'_k}{\sigma_k}\right)^2 + \left(z'_j - z'_s + \sum_{k=s}^{j-1} \frac{m_k z'_k}{\sigma_k}\right)^2. \tag{13.73}$$

Заметим, что для солнечной системы все точки G_{s-1} находятся внутри Солнца, в окрестности его центра, и координаты Якоби больших планет солнечной системы отличаются от их гелиоцентрических координат на малые величины, порядка возмущающих масс (см. формулы (7.32″) гл. VII).

Уравнения (13.70) легко привести к обычному виду уравнений возмущенного движения типа (12.1).

Действительно, положим

$$r'_s = \sqrt{x_s'^2 + y_s'^2 + z_s'^2}, \tag{13.74}$$

$(s = 1, 2, \ldots, n)$, причем $r'_1 = \Delta_{01}$, и представим силовую функцию в следующем виде:

$$U = f \sum_{j=1}^{n} \frac{m_0 m_j}{r'_j} + U', \tag{13.75}$$

---

*) Соответственные оси всех этих n «собственных систем» координат предполагаются параллельными.

**) Каждая из этих приведенных масс есть величина того же порядка, что и собственная масса точки M_s, а каждая из величин σ_s имеет тот же порядок, как и масса m_0 «главной» точки M_0.

где *)

$$U' = f\sum_{j=2}^{n} m_0 m_j \left(\frac{1}{\Delta_{0j}} - \frac{1}{r'_j}\right) + f\sum_{s<j}{}' \frac{m_s m_j}{\Delta_{sj}}, \tag{13.76}$$

причем, согласно (13.73),

$$\Delta_{0j}^2 = \left(x_j + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{m_k x'_k}{\sigma_k}\right)^2 + \\ + \left(y_j + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{m_k y'_k}{\sigma_k}\right)^2 + \left(z_j + \sum_{k=1}^{j-1} \frac{m_k z'_k}{\sigma_k}\right)^2. \tag{13.73'}$$

Отсюда видно, что всякая разность

$$\frac{1}{\Delta_{0j}} - \frac{1}{r'_j} \qquad (j > 1)$$

есть величина первого порядка относительно возмущающих масс, а функция U', следовательно, есть величина второго порядка относительно тех же масс.

Теперь уравнения (13.70) можно переписать в виде

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}'_s + \frac{\mu'_s x'_s}{r'^3_s} &= \frac{1}{m'_s}\frac{\partial U'}{\partial x'_s}, \\ \ddot{y}'_s + \frac{\mu'_s y'_s}{r'^3_s} &= \frac{1}{m'_s}\frac{\partial U'}{\partial y'_s}, \\ \ddot{z}'_s + \frac{\mu'_s z'_s}{r'^3_s} &= \frac{1}{m'_s}\frac{\partial U'}{\partial z'_s}, \end{aligned}\right\} \tag{13.77}$$

где положено

$$\mu'_s = \frac{f m_0 m_s}{m'_s} = \frac{f m_0 \sigma_s}{\sigma_{s-1}}, \tag{13.77'}$$

и где все правые части суть величины первого порядка относительно масс m_s $(s = 1, 2, \ldots, n)$**).

Уравнения (13.77) имеют, очевидно, такую же форму, как и уравнения гелиоцентрического движения (13.1), но составляющие возмущающих ускорений

$$\frac{1}{m'_s}\frac{\partial U'}{\partial x'_s}, \quad \frac{1}{m'_s}\frac{\partial U'}{\partial y'_s}, \quad \frac{1}{m'_s}\frac{\partial U'}{\partial z'_s}$$

---

*) Штрих при знаке суммы здесь показывает, что индекс s не принимает значения нуль.

**) Все множители μ'_s суть конечные величины, значения которых близки к значению величины fm_0.

здесь содержат частные производные по координатам x'_s, y'_s, z'_s только от одной функции U', которая и играет здесь роль «возмущающей функции».

Пренебрегая в уравнениях (13.77) малыми величинами порядка возмущающих масс, мы получим «упрощенные уравнения», или уравнения первого приближения:

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{x}'_s+\frac{\mu'_s x'_s}{r'^3_s}=0,\\&\ddot{y}'_s+\frac{\mu'_s y'_s}{r'^3_s}=0,\\&\ddot{z}'_s+\frac{\mu'_s z'_s}{r'^3_s}=0\\&(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n),\end{aligned}\right\}\tag{13.78}$$

которые, так же как и уравнения (13.1′), распадаются на n независимых систем, каждая из которых определяет невозмущенное кеплеровское движение точки M_s относительно точки G_{s-1}.

Каждое из этих n кеплеровских движений определится формулами, аналогичными формулам третьей части этой книги, но во избежание путаницы все величины в этих формулах следует снабдить значком «штрих». В частности, кеплеровские элементы каждой из невозмущенных орбит точек M_s обозначим через

$$\Omega'_s,\quad i'_s,\quad \omega'_s,\quad p'_s,\quad e'_s,\quad \tau'_s,\tag{13.79}$$

а если для каждой из точек M_s выполняется условие

$$V'^2_s-\frac{2\mu'_s}{r'_s}<0$$

(что мы и будем здесь предполагать), то будем рассматривать эллиптические элементы *)

$$\Omega'_s,\quad i'_s,\quad a'_s,\quad e'_s,\quad \pi'_s,\quad \varepsilon'_s.\tag{13.79′}$$

В возмущенном движении точек M_s относительно точек G_{s-1} величины (13.79) или (13.79′) будут некоторыми функциями времени, которые связаны соотношениями, получающимися из интегралов (7.37) и (7.37′) уравнений (13.70).

---

*) Полезно иметь в виду, что элементы (13.79) или (13.79′) отличны от аналогичных элементов (13.5) или (13.5′) невозмущенных движений точек M_s относительно точки M_0, но эти отличия, как легко сообразить, также суть малые величины порядка возмущающих масс m_s.

Рассматривая эти интегралы, мы можем из них вывести (так же, как это было сделано в § 5) теоремы Лапласа и Якоби. Здесь этот вывод будет совершенно точным, так как при рассмотрении уравнений (7.37) нам не понадобится пренебрегать какими-либо членами.

Повторять вывод этих теорем, очевидно, нет надобности.

2. Как уже было отмечено, удобство координат Якоби заключается в том, что уравнения движения системы в этих координатах могут быть приведены к канонической форме.

Это приведение было выполнено в гл. VII. Принимая за канонические переменные первой группы сами координаты x'_s, y'_s, z'_s и определяя сопряженные им канонические переменные формулами

$$u'_s = m'_s \dot{x}'_s, \quad v'_s = m'_s \dot{y}'_s, \quad w'_s = m'_s \dot{z}'_s,$$

мы перепишем систему (13.70) в канонической форме *)

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx'_s}{dt} &= +\frac{\partial H'}{\partial u'_s}, & \frac{dy'_s}{dt} &= +\frac{\partial H'}{\partial v'_s}, & \frac{dz'_s}{dt} &= +\frac{\partial H'}{\partial w'_s}, \\ \frac{du'_s}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial x'_s}, & \frac{dv'_s}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial y'_s}, & \frac{dw'_s}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial z'_s}, \end{aligned}\right\} \qquad (13.80)$$

где характеристическая функция определяется формулой

$$H' = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{m'_s}\left(u'^2_s + v'^2_s + w'^2_s\right) - U. \qquad (13.81)$$

Для интегрирования системы (13.80) применим метод Якоби изменения произвольных постоянных в канонических переменных. Для этого представим характеристическую функцию H' в виде суммы двух частей, полагая

$$H' = H'_0 + H'_1, \qquad (13.82)$$

где

$$H'_0 = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{m'_s}\left(u'^2_s + v'^2_s + w'^2_s\right) - f\sum_{s=1}^{n}\frac{m_0 m_s}{r'_s} \qquad (13.82')$$

есть основная часть характеристической функции, а H'_1, определяемая формулой

$$-H'_1 \equiv U' = f\sum_{j=2}^{n} m_0 m_j\left(\frac{1}{\Delta_{0j}} - \frac{1}{r'_j}\right) + f\sum_{s<j}{}'\,\frac{m_s m_j}{\Delta_{sj}}, \qquad (13.82'')$$

представляет собой возмущающую функцию.

---

*) Это та же система (7.51). Только индекс i заменен здесь индексом s.

Заменяя в уравнениях (13.80) полный гамильтониан H' его основной частью (13.82′), мы получим, очевидно, уравнения невозмущенного движения, распадающиеся на n независимых систем, каждая из которых приводится к виду (13.78).

Интегрируя каждую из этих систем, мы получим n систем формул, каждая из которых определяет эллиптическое кеплеровское движение с элементами (13.79′).

Каждой системе этих кеплеровских элементов соответствует своя система канонических элементов Якоби, определяемых формулами вида (13.46′), которые для нашего случая нужно написать в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{1s} &= -\frac{\mu'_s}{2a'_s}, & \beta_{1s} &= -t_0 + \frac{\varepsilon'_s - \pi'_s}{n'_s}, \\ \alpha_{2s} &= \sqrt{\mu'_s}\sqrt{a'_s}\sqrt{1-e'^2_s}, & \beta_{2s} &= \pi'_s - \Omega'_s, \\ \alpha_{3s} &= \sqrt{\mu'_s}\sqrt{a'_s}\sqrt{1-e'^2_s}\cos i'_s, & \beta_{3s} &= \Omega'_s, \end{aligned}\right\} \qquad (13.83)$$

причем каждое среднее движение n'_s определяется формулой

$$n'_s = \frac{\sqrt{\mu'_s}}{a'^{3/2}_s}. \qquad (13.83')$$

В возмущенном движении, определяемом полной системой канонических уравнений (13.80), мы можем сохранить, согласно принципу метода вариации произвольных постоянных, все формулы, определяющие невозмущенное движение каждой точки M_s, считая все элементы (13.79′), а следовательно, и все якобиевские элементы α_{ks} и β_{ks}, функциями времени.

Эти функции (новые канонические переменные) определятся также системой канонических уравнений с характеристической функцией U', которую, разумеется, необходимо выразить через время и канонические элементы.

Канонические уравнения для новых переменных имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha_{1s}}{dt} &= +\frac{\partial U'}{\partial \beta_{1s}}, & \frac{d\alpha_{2s}}{dt} &= +\frac{\partial U'}{\partial \beta_{2s}}, & \frac{d\alpha_{3s}}{dt} &= +\frac{\partial U'}{\partial \beta_{3s}}, \\ \frac{d\beta_{1s}}{dt} &= -\frac{\partial U'}{\partial \alpha_{1s}}, & \frac{d\beta_{2s}}{dt} &= -\frac{\partial U'}{\partial \alpha_{2s}}, & \frac{d\beta_{3s}}{dt} &= -\frac{\partial U'}{\partial \alpha_{3s}}. \end{aligned}\right\} \qquad (13.84)$$

Переходя теперь от элементов Якоби к элементам Делонэ, мы получим уравнения возмущенного движения соответственно в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL_s}{dt} &= +\frac{\partial F}{\partial l_s}, & \frac{dG_s}{dt} &= +\frac{\partial F}{\partial g_s}, & \frac{dH_s}{dt} &= +\frac{\partial F}{\partial h_s}, \\ \frac{dl_s}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L_s}, & \frac{dg_s}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G_s}, & \frac{dh_s}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H_s}, \end{aligned}\right\} \qquad (13.85)$$

причем новые переменные связаны с кеплеровскими элементами (13.79′) формулами, подобными формулам (13.57), так что имеем

$$\left.\begin{aligned} L_s &= \sqrt{\mu'_s}\,\sqrt{a'_s}, & l_s &= n'_s(t-\tau'_s),\\ G_s &= \sqrt{\mu'_s}\,\sqrt{a'_s\left(1-e'^2_s\right)}, & g_s &= \pi'_s-\Omega'_s,\\ H_s &= \sqrt{\mu'_s}\,\sqrt{a'_s\left(1-e'^2_s\right)}, & h_s &= \Omega'_s. \end{aligned}\right\} \tag{13.85′}$$

Новая характеристическая функция F определится, аналогично (13.55), следующей формулой:

$$F=\sum_{s=1}^{n}\frac{\mu'^2_s}{2L_s^2}+U'. \tag{13.86}$$

Наконец, рассмотрим вторую каноническую систему Пуанкаре типа (13.60), содержащую n групп переменных

$$\Lambda_s,\quad \lambda_s,\quad \xi_s,\quad \eta_s,\quad p_s,\quad q_s, \tag{13.87}$$

определяемых канонической системой

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\Lambda_s}{dt}&=+\frac{\partial F}{\partial\lambda_s}, & \frac{d\xi_s}{dt}&=+\frac{\partial F}{\partial\eta_s}, & \frac{dp_s}{dt}&=+\frac{\partial F}{\partial q_s},\\ \frac{d\lambda_s}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial\Lambda_s}, & \frac{d\eta_s}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial\xi_s}, & \frac{dq_s}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial p_s} \end{aligned}\right\} \tag{13.87′}$$

с той же характеристической функцией F, которая теперь определится формулой

$$F=\sum_{s=1}^{n}\frac{\mu'^2_s}{2\Lambda_s^2}+U', \tag{13.87″}$$

причем предполагается, что U' выражена через величины (13.87) и представлена в виде ряда.

Согласно (13.61) и (13.57) элементы (13.87) выразятся через кеплеровские элементы следующими формулами:

$$\begin{aligned} \Lambda_s &= L_s, & \xi_s &= \sqrt{2(L_s-G_s)}\cos\pi_s, & p_s &= \sqrt{2(G_s-H_s)}\cos\Omega_s,\\ \lambda_s &= l_s+\pi'_s, & \eta_s &= -\sqrt{2(L_s-G_s)}\sin\pi_s, & q_s &= -\sqrt{2(G_s-H_s)}\sin\Omega_s. \end{aligned}$$

3. Перейдем теперь к рассмотрению разложения характеристической функции канонических дифференциальных уравнений возмущенного движения. Так как наиболее удобными каноническими элементами являются величины (13.87) — вторая система канонических элементов Пуанкаре, — то рассмотрим функцию F, входящую в уравнения (13.87′).

Из формулы (13.86) следует, что разложению подлежит только вторая часть характеристической функции, а именно функция U', которая и является, собственно говоря, возмущающей функцией нашей задачи. Эта функция U', определяемая формулой (13.76), зависит только от взаимных расстояний между движущимися точками, которые в свою очередь являются функциями координат Якоби x'_s, y'_s, z'_z и вычисляются по формулам (13.73), (13.73') и (13.74). Поэтому функция U', а следовательно, и функция F, остается конечной и непрерывной для всех значений координат, кроме тех их значений, которые обращают в нуль какой-либо из радиусов-векторов или какое-либо из взаимных расстояний.

Допустим, что начальные условия для исходной системы (13.70) заданы таким образом, что никакие две из $n+1$ точек системы не могут столкнуться ни для какого значения времени *).

Тогда функция U' всегда будет оставаться конечной, а так как координаты каждой из движущихся точек в ее невозмущенном движении могут быть разложены, как было показано в предыдущем параграфе, в ряды по степеням собственных величин

$$\frac{\xi_s}{\sqrt{\Lambda_s}}, \quad \frac{\eta_s}{\sqrt{\Lambda_s}}, \quad \frac{p_s}{\sqrt{\Lambda_s}}, \quad \frac{q_s}{\sqrt{\Lambda_s}} \qquad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n), \qquad (13.88)$$

и по косинусам и синусам собственной средней долготы λ_s, то возмущающая функция U' может быть разложена в ряд, расположенный по целым положительным степеням $4n$ величин (13.88) $(s=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, коэффициенты которого суть тригонометрические многочлены относительно косинусов и синусов аргументов вида

$$k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+\ \ldots\ +k_n\lambda_n \qquad (13.88')$$

(где все k_s суть целые числа) и, кроме того, зависят от элементов Λ, т. е. от больших полуосей оскулирующих орбит.

Это разложение функции U' можно также рассматривать как n-кратный ряд Фурье, расположенный по синусам и косинусам аргументов вида (13.88'), коэффициенты которого представляются целыми рядами, расположенными по степеням величин (13.88), коэффициентами, в свою очередь зависящими от Λ_s.

---

*) Условия столкновения между какими-либо двумя точками системы выражаются некоторыми соотношениями между начальными значениями координат и составляющих скоростей этих точек. Вывод этих соотношений очень длинен и сложен и в этой книге не рассматривается. Можно заметить, впрочем, что начальные условия, приводящие к соударениям, являются исключительными.

Таким образом, мы можем написать:

$$U' = \sum \left[A^{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} \cos(\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \ldots + \lambda_n k_n) + \right.$$
$$\left. + B^{(k_1, k_2, \ldots, k_n)} \sin(\lambda_1 k_1 + \lambda_2 k_2 + \ldots + \lambda_n k_n)\right], \quad (13.89)$$

где коэффициенты A и B суть ряды вида *)

$$\left.\begin{matrix} A^{(k_1, \ldots, k_n)} \\ B^{(k_1, \ldots, k_n)} \end{matrix}\right\} = \sum \prod_{s=1}^{n} \left\{\begin{matrix} A_\nu^{(\cdots)} \\ B_\nu^{(\cdots)} \end{matrix}\right\} \left(\frac{\xi_s}{\sqrt{\Lambda_s}}\right)^{\nu_{s1}} \left(\frac{\eta_s}{\sqrt{\Lambda_s}}\right)^{\nu_{s2}} \left(\frac{p_s}{\sqrt{\Lambda_s}}\right)^{\nu_{s3}} \left(\frac{q_s}{\sqrt{\Lambda_s}}\right)^{\nu_{s4}}, \quad (13.89')$$

где все показатели ν_{sj} суть положительные целые числа, или нули.

Совокупность всех членов разложения возмущающей функции U', не зависящих от средних долгот λ_s, мы назовем, как принято, вековой частью возмущающей функции и обозначим через $[U']$.

Эта вековая часть функции U' является, очевидно, просто свободным членом разложения (13.89), соответствующим системе нулевых значений индексов k_s, и также представляется $4n$-кратным рядом, расположенным по степеням величин (13.88), коэффициенты которого зависят только от элементов Λ_s.

С другой стороны, свободный член ряда Фурье определяется известной формулой:

$$[U'] = A^{(0, \ldots, 0)} = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} U' \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 \ldots d\lambda_n. \quad (13.90)$$

Иными словами, вековая часть функции U' совпадает со средним значением этой функции относительно аргументов λ_s.

Поэтому вычисление, или нахождение, вековой части $[U']$ функции U' называется также иногда осреднением этой функции по аргументам $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Мы не будем производить в этой книге фактическое разложение возмущающей функции и отметим только нужные нам для дальнейшего простые свойства этого разложения **).

Прежде всего заметим, что вследствие формул (13.73) и (13.73') обратные взаимные расстояния могут быть разложены

---

*) Знак $\prod_{s=1}^{n}$ обозначает, как принято в математике, произведение n множителей, каждый из которых состоит из произведения степеней величин (13.88).

**) Первые члены разложения возмущающей функции для $n=2$ приведены в моей книге «Введение в небесную механику», ГОНТИ, 1938.

в ряды, расположенные по целым положительным степеням малых возмущающих масс.

Коэффициенты этих разложений будут зависеть от целых степеней радиусов-векторов r'_s $(s=1, 2, \ldots, n)$ и от целых положительных степеней скалярных произведений вида

$$x'_i x'_j + y'_i y'_j + z'_i z'_j \qquad (j \neq i).$$

Имея теперь в виду структуру разложений координат каждой из точек по степеням своих величин (13.88) и только что замеченное свойство разложений обратных расстояний, мы можем убедиться, что любой член разложения возмущающей функции U' по степеням всех величин (13.88) будет содержать в своем коэффициенте косинусы и синусы только тех аргументов (13.88), для которых сумма $|k_1|+|k_2|+\ldots+|k_n|$ есть число одинаковой четности с суммой показателей всех степеней величин (13.88) в рассматриваемом члене. Поэтому каждый член четной степени в разложении U' по степеням величин (13.88) обязательно будет содержать в своем коэффициенте члены, для которых $k_1=k_2=\ldots=k_n=0$, т. е. вековые члены.

Наоборот, каждый член нечетной степени относительно всех величин (13.88) в разложении U' будет содержать в своем коэффициенте только такие синусы и косинусы, для которых $|k_1|+|k_2|+\ldots+|k_n|$ есть нечетное число, откуда следует, что члены нечетной степени заведомо не содержат в своих коэффициентах вековых членов.

Из этих рассуждений следует, что вековая часть $[U']$ возмущающей функции U' содержит члены только четной степени относительно величин (13.88) $(s=1, 2, \ldots, n)$.

Обозначим теперь через $[F]$ вековую часть характеристической функции F системы уравнений возмущенного движения (13.87′). Очевидно, что

$$[F] = \sum_{s=1}^{n} \frac{\mu_s'^2}{2\Lambda_s^2} + [U'], \tag{13.91}$$

а поэтому $[F]$ (или среднее значение гамильтониана F) есть ряд, расположенный по степеням всех величин (13.88) и содержащий члены только четной степени относительно этих переменных.

Мы можем представить, следовательно, функцию $[F]$ в виде ряда

$$[F] = \Phi_0 + \Phi_2 + \ldots + \Phi_{2k} + \ldots, \tag{13.91′}$$

где Φ_{2k} обозначает целую, рациональную, однородную функцию степени $2k$ от всех величин (13.88), коэффициенты которой зависят только от элементов Λ_s (и, разумеется, от масс движущихся точек!).

В частности, Φ_2 есть квадратичная форма от всех величин (13.88).

Обращая внимание на формулы (13.67) и (13.67′), мы можем утверждать, что квадратичная форма Φ_2 есть сумма двух квадратичных форм, одна из которых содержит только эксцентрические элементы, а другая — только облические элементы.

Выпишем окончательные выражения для упомянутых квадратичных форм, вытекающие из подробного разложения возмущающей функции, в котором, сверх того, отброшены все члены выше второго порядка относительно возмущающих масс *).

Вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned} \Phi_2'(x_i, x_j) &= fm_i m_j \left\{ \frac{1}{8} B_1(a_i', a_j') \left[\frac{x_i^2}{\Lambda_i} + \frac{x_j^2}{\Lambda_j} \right] - \right. \\ &\qquad\qquad \left. - \frac{1}{4} B_2(a_i', a_j') \frac{x_i x_j}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_j}} \right\}, \\ \Phi_2''(x_i, x_j) &= fm_i m_j \left\{ \frac{1}{8} B_1(a_i', a_j') \left[\frac{x_i^2}{\Lambda_i} + \frac{x_j^2}{\Lambda_j} \right] - \right. \\ &\qquad\qquad \left. - \frac{1}{4} B_1(a_i', a_j') \frac{x_i x_j}{\sqrt{\Lambda_i \Lambda_j}} \right\}, \end{aligned}\right\} \tag{13.92}$$

где i и j суть какие-либо значения индексов из ряда 1, 2, … …, n $(j \neq i)$, а B_1 и B_2 суть положительные числа, зависящие только от полуосей оскулирующих орбит, определяемые формулами

$$\left.\begin{aligned} B_1(a_i', a_j') &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{a_i' a_j' \cos\varphi \, d\varphi}{\left(a_i'^2 + a_j'^2 - 2a_i' a_j' \cos\varphi\right)^{1/2}}, \\ B_2(a_i', a_j') &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{a_i' a_j' \cos 2\varphi \, d\varphi}{\left(a_i'^2 + a_j'^2 - 2a_i' a_j' \cos\varphi\right)^{3/2}}, \end{aligned}\right\} \tag{13.92′}$$

мы будем иметь для квадратичной формы Φ_2 следующее выражение:

$$\begin{aligned} \Phi_2 = \{\textstyle\sum \Phi_2'(\xi_i, \xi_j) + \sum \Phi_2'(\eta_i, \eta_j)\} &+ \\ + \{-\textstyle\sum \Phi_2''(p_i, p_j) - \sum \Phi_2''(q_i, q_j)\}&. \end{aligned} \tag{13.93}$$

---

*) Мы не можем в этой книге рассматривать все детали техники разложения возмущающей функции и ограничиваемся только изложением общих принципов этих громоздких операций.

где каждая сумма распространена на все различные пары индексов, так что $ij = 12,\ 13,\ \ldots,\ (n-1)n$.

Найдя разложение гамильтониана F, мы можем приступить к приближенному интегрированию уравнений возмущенного движения (13.87′). Это приближенное интегрирование может быть проведено такими же методами, которые были описаны в первых трех параграфах этой главы, т. е. методом последовательных приближений, или методом малого параметра.

Оба метода дадут нам приближенные аналитические выражения для канонических элементов в виде рядов, члены которых являются или чисто периодическими функциями — конечными суммами синусов и косинусов, или чисто вековыми, т. е. целыми положительными степенями t, или смешанными членами.

Мы не будем повторять для канонических уравнений все рассуждения и выводы § 1—3 и остановим здесь наше внимание исключительно на вопросе о вековых возмущениях.

§ 7. Теория Лагранжа вековых возмущений

1. В конце § 2 этой главы было уже указано, что к вопросу о вековых возмущениях можно подойти с двух различных точек зрения, имеющих, впрочем, общую основу, которая заключается в замене полной возмущающей функции ее *вековой* или *осредненной* частью.

Сделаем эту замену в уравнениях (13.87′). Тогда правые части этих уравнений не будут вовсе зависеть от средних долгот и уравнения возмущенного движения напишутся в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\Lambda_s}{dt} = 0, && \frac{d\xi_s}{dt} = +\frac{\partial[F]}{\partial\eta_s}, && \frac{dp_s}{dt} = +\frac{\partial[F]}{\partial q_s},\\ &\frac{d\lambda_s}{dt} = -\frac{\partial[F]}{\partial\Lambda_s}, && \frac{d\eta_s}{dt} = -\frac{\partial[F]}{\partial\xi_s}, && \frac{dq_s}{dt} = -\frac{\partial[F]}{\partial p_s}, \end{aligned}\right\} \qquad (13.94)$$

откуда сейчас же выводим

$$\Lambda_s = \Lambda_s^{(0)} = \text{const} \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (13.94')$$

Таким образом, величины Λ_s, т. е. *большие полуоси оскулирующих орбит, остаются постоянными во все время движения*, что и составляет теорему Лапласа о неизменяемости больших полуосей (а значит, и средних движений), рассмотренную уже выше.

Подставляя постоянные значения величин Λ_s во все остальные уравнения системы (13.94), мы сделаем правые их части функциями только величин

$$\frac{\xi_s}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}, \quad \frac{\eta_s}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}, \quad \frac{p_s}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}, \quad \frac{q_s}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}. \tag{13.95}$$

Поэтому уравнения, определяющие средние долготы λ_s, отщепляются от остальной системы и, когда величины (13.95) уже определены в зависимости от времени и произвольных постоянных, могут быть проинтегрированы отдельно при помощи простых квадратур.

Легко видеть, что возмущенные значения средних долгот определятся следующими формулами:

$$\lambda_s = \lambda_s^{(0)} + n_s'^{(0)}(t - t_0) - \int_{t_0}^{t} \frac{\partial [U']}{\partial \Lambda_s^{(0)}} dt, \tag{13.94'}$$

где $\lambda_s^{(0)}$ — произвольные постоянные интегрирования (средние долготы эпохи).

Имея в виду формулу (13.91), мы приведем нашу задачу к интегрированию следующей канонической системы $4n$-го порядка:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_s}{dt} &= \frac{\partial [U']}{\partial \eta_s}, & \frac{d\eta_s}{dt} &= -\frac{\partial [U']}{\partial \xi_s}, \\ \frac{dp_s}{dt} &= \frac{\partial [U']}{\partial q_s}, & \frac{dq_s}{dt} &= -\frac{\partial [U']}{\partial p_s}, \end{aligned}\right\} \tag{13.96}$$

правые части которых суть целые ряды, расположенные по степеням величин (13.95) и притом *не зависящие от времени*.

Поэтому вследствие общих свойств канонических систем уравнения (13.96) и имеют первый интеграл

$$[U'] = C = \text{const}, \tag{13.96'}$$

при помощи которого порядок системы (13.96) можно понизить на одну единицу. Кроме того, из уравнений (13.96) можно исключить время t, принимая за независимую переменную какую-либо из величин (13.95), так что в результате порядок системы уравнений (13.96) может быть понижен на две единицы. Однако, как мы уже несколько раз отмечали, такое понижение порядка практически не дает никаких преимуществ и только усложняет правые части уравнений, а поэтому фактически не производится.

Итак, задача теории вековых возмущений заключается в интегрировании системы (13.96) и различные точки зрения на эту теорию отличаются друг от друга только способами приближенного интегрирования уравнений (13.96).

Первый способ интегрирования системы (13.96) заключается в применении к этой системе способа последовательных приближений Пикара, основанного на малости правых частей уравнений (13.96) и, следовательно, на весьма медленном изменении искомых функций.

Как нам уже известно, для получения первого приближения в способе Пикара нужно заменить в правых частях уравнений (13.96) все величины (13.95) их постоянными начальными значениями

$$\frac{\xi_s^{(0)}}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}, \quad \frac{\eta_s^{(0)}}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}, \quad \frac{p_s^{(0)}}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}, \quad \frac{q_s^{(0)}}{\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}}, \tag{13.95'}$$

которые предполагаются заданными вещественными числами.

Тогда правые части уравнений (13.96) сделаются известными постоянными, численно равными начальным значениям производных от элементов Пуанкаре по времени, т. е. скоростям изменений этих элементов в момент t_0. Полагая поэтому

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi}_s^{(0)} &= \frac{\partial [U']_0}{\partial \eta_s^{(0)}}, & \dot{\eta}_s^{(0)} &= -\frac{\partial [U']_0}{\partial \xi_s^{(0)}}, \\ \dot{p}_s^{(0)} &= \frac{\partial [U']}{\partial q_s^{(0)}}, & \dot{q}_s^{(0)} &= -\frac{\partial [U']}{\partial p_s^{(0)}}, \end{aligned}\right\} \tag{13.97}$$

где $[U']_0$ получается из $[U']$ заменой всех величин (13.95) величинами (13.95′), мы получим в первом приближении решение системы (13.96) в виде

$$\left.\begin{aligned} \xi_s^{(1)} &= \xi_s^{(0)} + \dot{\xi}_s^{(0)}(t - t_0), & \eta_s^{(1)} &= \eta_s^{(0)} + \dot{\eta}_s^{(0)}(t - t_0), \\ p_s^{(1)} &= p_s^{(0)} + \dot{p}_s^{(0)}(t - t_0), & q_s^{(1)} &= q_s^{(0)} + \dot{q}_s^{(0)}(t - t_0). \end{aligned}\right\} \tag{13.97'}$$

Величины (13.97′) отличаются от начальных значений искомых функций (эксцентрических и облических переменных) членами весьма медленно, но постоянно растущими вместе с временем t. Эти члены и называются по этой причине вековыми возмущениями или вековыми неравенствами.

Определение или вычисление этих членов и составляет элементарную теорию вековых возмущений, которой обычно и довольствуются на практике. Однако не представляет принципиальных затруднений получить второе и следующие приближения в способе Пикара. Возвращаясь для этого к уравнениям (13.96), правые части которых суть бесконечные ряды, расположенные по степеням величин (13.95), заменим в этих правых частях величины (13.95) выражениями (13.97′), поделенными все на $\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}$.

Тогда правые части уравнений (13.96) сделаются, очевидно, бесконечными рядами, расположенными по целым возрастающим степеням $t-t_0$, коэффициенты которых будут некоторыми постоянными, которые нетрудно вычислить. Интегрируя полученные равенства, мы получим второе приближение, в котором элементы Пуанкаре представятся бесконечными рядами, расположенными по степеням $t-t_0$.

Таким же образом можно поступать и далее. Очевидно, в каждом последующем приближении элементы ξ_s, η_s, p_s, q_s будут представляться подобными же рядами, т. е. рядами, расположенными по степеням $t-t_0$, но коэффициенты этих рядов будут изменяться от одного приближения к другому. В пределе мы получим точное решение системы (13.96) в виде подобных же рядов, т. е. в виде

$$\left.\begin{aligned}
\xi_s &= \xi_s^{(0)} + \dot{\xi}_s^{(0)}(t-t_0) + \sum_{k=2}^{\infty} \xi_{sk}^{(0)}(t-t_0)^k,\\
\eta_s &= \eta_s^{(0)} + \dot{\eta}_s^{(0)}(t-t_0) + \sum_{k=2}^{\infty} \eta_{sk}^{(0)}(t-t_0)^k,\\
p_s &= p_s^{(0)} + \dot{p}_s^{(0)}(t-t_0) + \sum_{k=2}^{\infty} p_{sk}^{(0)}(t-t_0)^k,\\
q_s &= q_s^{(0)} + \dot{q}_s^{(0)}(t-t_0) + \sum_{k=2}^{\infty} q_{sk}^{(0)}(t-t_0)^k,
\end{aligned}\right\} \tag{13.98}$$

но здесь возникает затруднение при исследовании сходимости рядов, которое нужно проводить на каждом шаге процедуры способа Пикара.

Замечая теперь, что ряды (13.98) суть не что иное как ряды Тейлора и имея в виду, что разложение функции в ряд Тейлора единственно, мы можем определить коэффициенты этих рядов формулами Тэйлора, так что будем иметь

$$\left.\begin{aligned}
\xi_{sk}^{(0)} &= \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k\xi_s}{dt^k}\right)_0, & \eta_{sk}^{(0)} &= \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k\eta_s}{dt^k}\right)_0,\\
p_{sk}^{(0)} &= \frac{1}{k!}\left(\frac{d^kp_s}{dt^k}\right)_0, & q_{sk}^{(0)} &= \frac{1}{k!}\left(\frac{d^kq_s}{dt^k}\right)_0.
\end{aligned}\right\} \tag{13.98$'$}$$

Отсюда следует, что проведение бесконечной процедуры способа Пикара можно заменить просто вычислением величин (13.98′), которые находятся из самих уравнений (13.96) элементарным путем. Из общих теорем существования решений дифференциальных уравнений следует также, что ряды (13.98), коэффициенты которых вычисляются по формулам (13.98′), несомненно, будут сходящимися и притом абсолютно для всех значений времени, содержащихся в некотором промежутке

$(t_0-T,\ t_0+T)$. Однако чрезвычайно трудно оценить величину этого промежутка и установить тем самым практическую пригодность получаемых рядов.

Мы ограничимся сделанными замечаниями по этому вопросу и перейдем теперь к другому способу интегрирования той же системы (13.96), который также является способом последовательных приближений и отличается от рассмотренного выше только выбором первого приближения.

2. Способ, о котором будет сейчас идти речь, впервые разработан Лагранжем*) и поэтому называется способом Лагранжа вычисления вековых возмущений.

Заметив, что в процедуре элементарного вычисления вековых возмущений оскулирующих элементов участвует только часть возмущающей функции (свободный член ее ряда Фурье), Лагранж пришел к мысли построить теорию вековых возмущений, рассматривая в дифференциальных уравнениях для оскулирующих элементов вместо полной возмущающей функции только этот свободный член, который он и назвал вековой частью возмущающей функции.

Для этого Лагранж выделил из разложения возмущающей функции все члены не выше второго порядка относительно эксцентриситетов и наклонностей в свободном члене ряда Фурье и составил дифференциальные уравнения, определяющие элементы (13.66), которые мы назвали элементами Лагранжа.

В результате Лагранж получил систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, интегрирование которой дало выражения для элементов (13.66) в виде тригонометрических функций. Эти выражения и называются с тех пор тригонометрическими выражениями вековых возмущений, несмотря на противоречие, заключающееся в этом названии.

Способ Лагранжа был несколько дополнен и видоизменен А. Пуанкаре, который ввел вместо элементов Лагранжа свою каноническую систему элементов и применил для определения этих элементов новый способ интегрирования системы дифференциальных уравнений, разработанный им самим и одновременно, причем более строго, А. М. Ляпуновым**).

Рассмотрим систему уравнений (13.96), в которой $[U']$ — вековая часть возмущающей функции — есть бесконечный ряд, расположенный по возрастающим степеням величин (13.95), содержащий члены только четной степени.

---

*) См., например, Ж. Лагранж, Аналитическая механика, т. 2.

**) См. А. Пуанкаре, Лекции по небесной механике, перев. с франц., «Наука», 1965; А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1893 (см. Собрание сочинений А. М. Ляпунова, т. 2, изд. АН СССР, 1956).

Следуя Лагранжу, назовем функции, удовлетворяющие этим уравнениям, вековыми возмущениями элементов Пуанкаре ξ_s, η_s, p_s, q_s, и поставим своей задачей приближенное определение этих функций по способу Ляпунова — Пуанкаре.

Заменяя в системе (13.96) функцию $[U']$ ее разложением, мы напишем уравнения, определяющие вековые возмущения в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_s}{dt} &= \frac{\partial\Phi_2}{\partial\eta_s} + \ldots, & \frac{d\eta_s}{dt} &= -\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi_s} + \ldots, \\ \frac{dp_s}{dt} &= \frac{\partial\Phi_2}{\partial q_s} + \ldots, & \frac{dq_s}{dt} &= -\frac{\partial\Phi_2}{\partial p_s} + \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (13.99)$$

где частные производные от квадратичной формы Φ_2 суть однородные линейные функции величин (13.95) с постоянными коэффициентами, а невыписанные члены содержат неизвестные функции в степенях выше первой (не ниже, чем третьей).

Способ Ляпунова — Пуанкаре интегрирования системы нелинейных уравнений (13.99) заключается в нахождении общего решения этих уравнений в виде бесконечных рядов, расположенных по возрастающим степеням произвольных постоянных, за которые можно принять величины (13.95').

Положим для этого, следуя А. М. Ляпунову,

$$\left.\begin{aligned} \xi_s &= \xi_s^{(1)} + \xi_s^{(2)} + \ldots + \xi_s^{(m)} + \ldots, \\ \eta_s &= \eta_s^{(1)} + \eta_s^{(2)} + \ldots + \eta_s^{(m)} + \ldots, \\ p_s &= p_s^{(1)} + p_s^{(2)} + \ldots + p_s^{(m)} + \ldots, \\ q_s &= q_s^{(1)} + q_s^{(2)} + \ldots + q_s^{(m)} + \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (13.100)$$

и, рассматривая в этих рядах величины $\xi_s^{(m)}$, $\eta_s^{(m)}$, $p_s^{(m)}$, $q_s^{(m)}$ и их первые производные по времени, как величины m-го порядка, потребуем, чтобы ряды (13.100) удовлетворяли формально уравнениям (13.96). Для этого подставим в уравнения (13.96) вместо неизвестных функций ряды (13.100) и приравняем члены одинакового порядка в левых и правых частях получившихся равенств.

В результате мы получим следующие системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_s^{(1)}}{dt} &= \frac{\partial\Phi_2}{\partial\eta_s^{(1)}}, & \frac{d\eta_s^{(1)}}{dt} &= -\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi_s^{(1)}}, \\ \frac{dp_s^{(1)}}{dt} &= \frac{\partial\Phi_2}{\partial q_s^{(1)}}, & \frac{dq_s^{(1)}}{dt} &= -\frac{\partial\Phi_2}{\partial p_s^{(1)}}, \end{aligned}\right\} \qquad (13.101)$$

и для $m > 1$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_s^{(m)}}{dt} &= \frac{\partial\Phi_2}{\partial\eta_s^{(m)}} + \Xi_s^{(m)}, & \frac{d\eta_s^{(m)}}{dt} &= -\frac{\partial\Phi_2}{\partial\xi_s^{(m)}} + H_s^{(m)}, \\ \frac{dp_s^{(m)}}{dt} &= \frac{\partial\Phi_2}{\partial q_s^{(m)}} + P_s^{(m)}, & \frac{dq_s^{(m)}}{dt} &= -\frac{\partial\Phi_2}{\partial p_s^{(m)}} + Q_s^{(m)}. \end{aligned}\right\} \quad (13.101')$$

В уравнениях (13.101) нужно, разумеется, заменить все величины ξ_s, η_s, p_s, q_s первыми членами рядов (13.100), а поэтому уравнения (13.101) можно вывести непосредственно из уравнений (13.99), отбрасывая в последних все члены выше первого порядка.

В уравнениях (13.101') нужно также рассматривать функцию Φ_2 как квадратичную форму от величин $\xi_s^{(m)}$, $\eta_s^{(m)}$, $p_s^{(m)}$, $q_s^{(m)}$, а дополнительные члены в этих уравнениях — как целые многочлены (с постоянными коэффициентами) от величин $\xi_s^{(1)}$, $\eta_s^{(1)}$, $p_s^{(1)}$, $q_s^{(1)}$, ..., $\xi_s^{(m-1)}$, $\eta_s^{(m-1)}$, $p_s^{(m-1)}$, $q_s^{(m-1)}$.

Таким образом, сначала нужно интегрировать однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами (13.101), после чего последовательно будем находить решения линейных неоднородных уравнений (13.101'), дополнительные члены которых окажутся известными функциями времени.

А. М. Ляпунов показал, что получающиеся таким образом ряды (13.100), располагающиеся по целым возрастающим степеням произвольных постоянных, сходятся абсолютно и равномерно при достаточно малых числовых значениях этих постоянных и для всех значений времени в некотором промежутке $(t_0 - T,\ t_0 + T)$.

Мы не будем здесь рассматривать эту задачу подробно и ограничимся только интегрированием уравнений (13.101), определяющих первые члены рядов (13.100), что и составляет, собственно говоря, теорию Лагранжа в ее первоначальном виде. Иными словами, мы ограничимся рассмотрением только первого приближения полной теории вековых возмущений.

3. Мы уже заметили, что уравнения первого приближения, т. е. уравнения (13.101), получаются также непосредственно из полных уравнений (13.96) отбрасыванием в правых частях последних всех членов выше первой степени. Для этого нужно только заменить полную характеристическую функцию $[U']$ квадратичной формой Φ_2, которая есть сумма двух квадратичных форм Φ_2' и Φ_2'', из которых первая зависит только от элементов ξ_s и η_s, а вторая — только от элементов p_s и q_s. Отсюда следует, что система уравнений первого приближения, соответствующая системе (13.99), распадается на две независимые системы.

Первая система определяет эксцентрические элементы ξ_s и η_s и напишется в виде

$$\frac{d\xi_s}{dt}=\frac{\partial\Phi_2'}{\partial\eta_s},\quad \frac{d\eta_s}{dt}=-\frac{\partial\Phi_2'}{\partial\xi_s}. \tag{13.102}$$

Вторая система, определяющая облические элементы p_s и q_s, имеет соответственно вид

$$\frac{dp_s}{dt}=\frac{\partial\Phi_2''}{dq_s},\quad \frac{dq_s}{dt}=-\frac{\partial\Phi_2''}{\partial p_s}. \tag{13.103}$$

Рассмотрим сначала систему (13.102). По формуле (13.93)

$$\Phi_2'=\sum\Phi_2'(\xi_i,\ \xi_j)+\sum\Phi_2'(\eta_i,\ \eta_j),$$

где $\Phi_2'(\xi_i,\ \xi_j)$ и $\Phi_2'(\eta_i,\ \eta_j)$ определяются формулами (13.92).

Вводя для сокращения обозначения

$$\left.\begin{aligned}\bar{\gamma}_{ij}&=\frac{1}{4}\frac{fm_im_j}{\Lambda_i^{(0)}}B_1\left(a_i'^{(0)},\ a_j'^{(0)}\right),\\ \gamma_{ij}&=-\frac{1}{4}\frac{fm_im_j}{\sqrt{\Lambda_i^{(0)}\Lambda_j^{(0)}}}B_2\left(a_i'^{(0)},\ a_j'^{(0)}\right),\qquad \gamma_{ji}=\gamma_{ij}\end{aligned}\right\} \tag{13.104}$$

и для $j=i$:

$$\gamma_{ii}=\sum_{j=1}^{n}\bar{\gamma}_{ij}, \tag{13.104'}$$

мы представим квадратичную форму Φ_2' в виде

$$\Phi_2'=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\gamma_{ij}(\xi_i\xi_j+\eta_i\eta_j). \tag{13.104''}$$

Тогда уравнения (13.102), определяющие эксцентрические элементы, напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\xi_s}{dt}&=+\gamma_{s1}\eta_1+\gamma_{s2}\eta_2+\ \dots\ +\gamma_{sn}\eta_n,\\ \frac{d\eta_s}{dt}&=-\gamma_{s1}\xi_1-\gamma_{s2}\xi_2-\ \dots\ -\gamma_{sn}\xi_n.\end{aligned}\right\} \tag{13.105}$$

Отметим прежде всего, что система (13.105) имеет простой первый интеграл. Действительно, умножая уравнения (13.105) соответственно на $2\xi_s$ и $2\eta_s$ и складывая все уравнения, мы имеем в силу соотношений $\gamma_{ji}=\gamma_{ij}$

$$\sum_{s=1}^{n}\left(2\xi_s\frac{d\xi_s}{dt}+2\eta_s\frac{d\eta_s}{dt}\right)=0,$$

откуда интегрированием находим

$$\sum_{s=1}^{n}(\xi_s^2+\eta_s^2)=C. \qquad (13.105')$$

Для полного интегрирования системы линейных однородных уравнений (13.105) с постоянными вещественными коэффициентами, нужно, как известно, составить характеристическое уравнение этой системы и рассмотреть его корни.

Характеристическое уравнение напишется в виде

$$D(\varkappa)=\begin{vmatrix} -\varkappa & \dots & 0 & \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & -\varkappa & \gamma_{n1} & \dots & \gamma_{nn} \\ -\gamma_{11} & \dots & -\gamma_{1n} & -\varkappa & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\gamma_{n1} & \dots & -\gamma_{nn} & 0 & \dots & -\varkappa \end{vmatrix}=0, \qquad (13.106)$$

и по свойству канонических систем содержит только четные степени неизвестной $\varkappa$. Это легко доказать, рассматривая определитель $D(-\varkappa)$, который после надлежащей перестановки строк и столбцов приводится к первоначальному определителю.

Поэтому корнями уравнения $D(\varkappa)=0$ будут числа

$$\pm\varkappa_1, \quad \pm\varkappa_2, \ \dots, \ \pm\varkappa_n, \qquad (13.106')$$

которые не могут быть действительными, отличными от нуля.

В самом деле, так как каждому корню характеристического уравнения соответствует некоторое частное решение системы (13.105), то действительному положительному $\varkappa_j$ будет соответствовать решение вида

$$\xi_s=C_s e^{\varkappa_j t}, \quad \eta_s=D_s e^{\varkappa_j t},$$

где C_s и D_s — постоянные. Но тогда мы имеем выражение

$$\sum_{s=1}^{n}(\xi_s^2+\eta_s^2)=e^{2\varkappa_j t}\sum_{s=1}^{n}(C_s^2+D_s^2),$$

которое неограниченно растет вместе с временем, в противоречии с интегралом (13.105′). Следовательно, должно быть $\varkappa_j=0$, что и показывает невозможность существования действительных корней уравнения (13.106), отличных от нуля.

Покажем теперь, что уравнение (13.106) не может также иметь комплексных корней с неравной нулю вещественной частью. В самом деле, допустим, что среди корней (13.106′)

есть пара комплексных сопряженных $\alpha \pm \beta i$ $(i=\sqrt{-1})$. Этой паре корней соответствует решение системы (13.105) вида

$$\xi_s = e^{\alpha t}(A_s \cos \beta t + B_s \sin \beta t),$$
$$\eta_s = e^{\alpha t}(A'_s \cos \beta t + B'_s \sin \beta t),$$

где A_s, B_s, A'_s, B'_s — постоянные.

Отсюда, так же как и выше, находим выражение

$$\sum_{s=1}^{n}(\xi_s^2+\eta_s^2) = e^{2\alpha t}\sum_{s=1}^{n}\Big[\left(A_s^2+A_s'^2\right)\cos^2\beta t + \\ + \left(B_s^2+B_s'^2\right)\sin^2\beta t + 2\left(A_sB_s+A'_sB'_s\right)\cos\beta t\sin\beta t\Big],$$

которое при $\alpha \neq 0$ неограниченно растет вместе с временем в противоречии с интегралом (13.105′). Таким образом, должно быть $\alpha=0$, т. е. все корни уравнения (13.106) должны быть чисто мнимыми.

Однако среди корней уравнения $D(\varkappa)=0$ могут быть, вообще говоря, и кратные, и тогда возникает вопрос, не появятся ли среди решений системы (13.105) такие, которые содержат множителем какую-либо степень t. Пуанкаре доказал, что даже в случае кратных корней такие решения не существуют. Действительно, допустим опять обратное, т. е. что система имеет решение вида

$$\xi_s = t^m(A_s \cos \beta t + B_s \sin \beta t),$$
$$\eta_s = t^m(A'_s \cos \beta t + B'_s \sin \beta t),$$

где $m \leqslant n$.

Тогда снова находим

$$\sum_{s=1}^{n}(\xi_s^2+\eta_s^2) = t^{2m}\sum_{s=1}^{n}\Big[\left(A_s^2+A_s'^2\right)\cos^2\beta t + \\ + \left(B_s^2+B_s'^2\right)\sin^2\beta t + 2\left(A_sB_s+A'_sB'_s\right)\cos\beta t\sin\beta t\Big].$$

Правая часть этого равенства при $m \neq 0$ неограниченно растет вместе с временем, в противоречии с интегралом (13.105). Таким образом, должно быть $m=0$ и все корни характеристического уравнения должны быть чисто мнимыми, а в случае, когда они кратные, им соответствуют чисто тригонометрические решения системы (13.105).

Чтобы найти общее решение системы (13.105), проще всего поступить следующим образом. Введем вместо каждой пары канонических эксцентрических элементов ξ_s, η_s комплексную переменную ζ_s, полагая

$$\zeta_s = \xi_s + i\eta_s \qquad (i=\sqrt{-1}). \tag{13.107}$$

Тогда система (13.105) преобразуется в следующую:

$$\frac{d\zeta_s}{dt} = -i(\gamma_{s1}\zeta_1 + \gamma_{s2}\zeta_2 + \ldots + \gamma_{sn}\zeta_n). \qquad (13.107')$$

Система (13.107′) есть система линейных однородных уравнений порядка n (а не $2n$, как система (13.105)) с постоянными чисто мнимыми коэффициентами.

Характеристическое уравнение этой системы приводится к алгебраическому уравнению n-й степени относительно неизвестной $\varkappa$ и напишется в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} -i\gamma_{11}-\varkappa, & -i\gamma_{12}, & \ldots, & -i\gamma_{1n} \\ -i\gamma_{21}, & -i\gamma_{22}-\varkappa, & \ldots, & -i\gamma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -i\gamma_{n1}, & -i\gamma_{n2}, & \ldots, & -i\gamma_{nn}-\varkappa \end{vmatrix} = 0. \qquad (13.108)$$

Полагая

$$\varkappa = -\beta t,$$

мы приведем уравнение (13.108) к виду

$$\Delta(\beta) = \begin{vmatrix} \gamma_{11}-\beta, & \gamma_{12}, & \ldots, & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21}, & \gamma_{22}-\beta, & \ldots, & \gamma_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{n1}, & \gamma_{n2}, & \ldots, & \gamma_{nn}-\beta \end{vmatrix} = 0. \qquad (13.108')$$

Это уравнение обладает вещественными коэффициентами и называется вековым уравнением, а определитель, стоящий в левой его части, вековым определителем. Так как система (13.107′) эквивалентна системе (13.105), то корни уравнения (13.108) должны совпадать с n корнями уравнения (13.106), т. е. мы должны иметь

$$\varkappa_1 = -\beta_1 i, \quad \varkappa_2 = -\beta_{2i}, \ \ldots, \ \varkappa_n = -\beta_n i,$$

откуда следует, что вековое уравнение имеет только вещественные корни $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

Зная корни векового уравнения, мы можем написать общее решение системы (13.107′) в виде

$$\zeta_s = \sum_{j=1}^{n} C_j K_{sj} e^{-\beta_j it}, \qquad (13.109)$$

где K_{sj} — вещественные постоянные, зависящие от корней векового уравнения (13.108′), с C_j — произвольные постоянные, которые мы должны рассматривать как числа комплексные. Поэтому можем положить

$$C_j = A_j e^{-ig_j},$$

вследствие чего формулы (13.109) приведутся к виду

$$\zeta_s = \xi_s + i\eta_s = \sum_{j=1}^{n} A_j K_{sj} e^{-i\,(\beta_j t + g_j)}, \tag{13.109'}$$

откуда, приравнивая действительные и мнимые части в обеих частях равенств, найдем решение первоначальной системы (13.105) в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} \xi_s &= + \sum_{j=1}^{n} A_j K_{sj} \cos(\beta_j t + g_j), \\ \eta_s &= - \sum_{j=1}^{n} A_j K_{sj} \sin(\beta_j t + g_j). \end{aligned}\right\} \tag{13.110}$$

Из этих формул нетрудно найти приближенные значения эксцентриситетов и долгот перицентров. Действительно, на основании (13.64) мы имеем, отбрасывая малые величины выше первого порядка,

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\Lambda_s^{(0)}}\, e_s' \cos \pi_s' &= \sum_{j=1}^{n} A_j K_{sj} \cos(\beta_j t + g_j), \\ \sqrt{\Lambda_s^{(0)}}\, e_s' \sin \pi_s' &= \sum_{j=1}^{n} A_j K_{sj} \sin(\beta_j t + g_j), \end{aligned}\right\} \tag{13.111}$$

откуда выводим

$$\left.\begin{aligned} \Lambda_s^{(0)} e_s'^2 &= A_1^2 K_{s1}^2 + A_2^2 K_{s2}^2 + \ldots + A_n^2 K_{sn}^2 + \\ &\quad + 2 \sum A_i A_j K_{si} K_{sj} \cos[(\beta_i - \beta_j)t + g_i - g_j], \\ \operatorname{tg} \pi_s' &= \frac{A_1 K_{s1} \sin(\beta_1 t + g_1) + \ldots + A_n K_{sn} \sin(\beta_n t + g_n)}{A_1 K_{s1} \cos(\beta_1 t + g_1) + \ldots + A_n K_{sn} \cos(\beta_n t + g_n)}, \end{aligned}\right\} \tag{13.111'}$$

что позволяет вычислить числовые значения эксцентриситетов и долгот перицентров оскулирующих орбит на основе теории вековых возмущений Лагранжа.

4. Рассмотрим теперь уравнения (13.103), определяющие вековые возмущения (в первом приближении) облических переменных, т. е. наклонностей и долгот узлов.

По формуле (13.93) мы имеем

$$\Phi_2'' = -\sum \Phi_2''(p_i, p_j) - \sum \Phi_2''(q_i, q_j),$$

причем вторая из формул (13.92) дает

$$\Phi_2''(x_i, x_j) = \frac{1}{8} f m_i m_j B_1\left(a_i'^{(0)}, a_j'^{(0)}\right)\left[\frac{x_i}{\sqrt{\Lambda_i^{(0)}}} - \frac{x_j}{\sqrt{\Lambda_j^{(0)}}}\right]^2,$$

откуда непосредственно следует, что Φ_2'' есть существенно отрицательная квадратичная форма.

Положим так же, как и в предыдущем разделе,

$$\left.\begin{aligned}\bar{\gamma}_{ij} &= \frac{1}{4}\frac{fm_im_j}{\Lambda_i^{(0)}}B_1\left(a_i'^{(0)},\ a_j'^{(0)}\right),\\ \gamma'_{ij} &= \frac{1}{4}\frac{fm_im_j}{\sqrt{\Lambda_i^{(0)}\Lambda_j^{(0)}}}B_1\left(a_i'^{(0)},\ a_j'^{(0)}\right) \quad .\ \gamma'_{ji}=\gamma'_{ij},\end{aligned}\right\} \qquad (13.112)$$

и для $j=i$:

$$\gamma'_{ii} = -\sum_{j=1}^{n}\bar{\gamma}_{ij}. \qquad (13.112')$$

Тогда форма Φ_2'' напишется в виде

$$\Phi_2'' = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\gamma'_{ij}(p_ip_j+q_iq_j), \qquad (13.112'')$$

а уравнения (13.103) для облических переменных будут иметь в точности такой же вид, как и уравнения для эксцентрических переменных, т. е. мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp_s}{dt} &= +\gamma'_{s1}q_1+\gamma'_{s2}q_2+\ \ldots\ +\gamma'_{sn}q_n,\\ \frac{dq_s}{dt} &= -\gamma'_{s1}p_1-\gamma'_{s2}p_2-\ \ldots\ -\gamma'_{sn}q_n.\end{aligned}\right\} \qquad (13.113)$$

Из этих уравнений выводим прежде всего в силу $\gamma'_{ji}=\gamma'_{ij}$ первый интеграл,

$$\sum_{s=1}^{n}(p_s^2+q_s^2)=C', \qquad (13.113')$$

который позволяет, так же как и для случая эксцентрических элементов, сделать выводы о характере корней характеристического уравнения системы (13.113).

Таким образом, если мы рассмотрим уравнение, аналогичное уравнению (13.108),

$$\Delta'(\beta') = \begin{vmatrix}\gamma'_{11}-\beta', & \gamma'_{12}, & \ldots, & \gamma'_{1n}\\ \gamma'_{21}, & \gamma'_{22}-\beta', & \ldots, & \gamma'_{2n}\\ \gamma'_{n1}, & \gamma'_{n2}, & \ldots, & \gamma'_{nn}-\beta'\end{vmatrix} = 0, \qquad (13.114)$$

то можем утверждать, что оно имеет только вещественные корни β_1', β_2', ..., β_n'.

Но здесь дополнительно можно показать, что один из этих корней равен нулю. Действительно, из выражения для квадратичной формы Φ''_2 мы видим, что эта форма обращается в нуль, когда мы положим одновременно

$$\frac{p_1}{\sqrt{\Lambda_1^{(0)}}} = \frac{p_2}{\sqrt{\Lambda_2^{(0)}}} = \dots = \frac{p_n}{\sqrt{\Lambda_n^{(0)}}},$$

и

$$\frac{q_1}{\sqrt{\Lambda_1^{(0)}}} = \frac{q_2}{\sqrt{\Lambda_2^{(0)}}} = \dots = \frac{q_n}{\sqrt{\Lambda_n^{(0)}}},$$

откуда следует, что

$$\Delta'(0) = 0,$$

что и доказывает сделанное замечание.

Теперь, считая, что равный нулю корень есть β'_1, мы получим общее решение системы (13.113) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} p_s &= +B_1K'_{s1}\cos g'_1 + \sum_{j=2}^{n} B_jK'_{sj}\cos(\beta'_jt + g'_j), \\ q_s &= -B_1K'_{s1}\sin g'_1 - \sum_{j=2}^{n} B_jK'_{sj}\sin(\beta'_jt + g'_j), \end{aligned}\right\} \qquad (13.115)$$

где B_j и g'_j суть произвольные постоянные.

Так как приближенно мы имеем

$$p_s = \sqrt{\Lambda_s^{(0)}}\sin i'_s\cos\Omega'_s, \quad q'_s = -\sqrt{\Lambda_s^{(0)}}\sin i'_s\sin\Omega'_s,$$

то из (13.115) имеем также следующие приближенные формулы:

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{\Lambda_s^{(0)}}\sin i'_s\cos\Omega'_s &= \sum_{j=1}^{n} B_jK'_{sj}\cos(\beta'_jt + g'_j), \\ \sqrt{\Lambda_s^{(0)}}\sin i'_s\sin\Omega'_s &= \sum_{j=1}^{n} B_jK'_{sj}\sin(\beta'_jt + g'_j) \end{aligned}\right\} \qquad (13.115')$$

$(\beta'_1 = 0)$, откуда, так же как в предыдущем разделе, находим

$$\Lambda_s^{(0)}\sin^2 i'_s = B_1^2K'^2_{s1} + B_2^2K'^2_{s2} + \dots + B_n^2K'^2_{sn} + \\ + 2\sum B_iB_jK'_{si}K'_{sj}\cos\left[(\beta'_i - \beta'_j)t + g'_i - g'_j\right],$$

и

$$\operatorname{tg}\Omega'_s = \frac{B_1K'_{s1}\sin g'_1 + B_2K'_{s2}\sin(\beta'_2t + g'_2) + \dots + B_nK'_{sn}\sin(\beta'_nt + g'_n)}{B_1K'_{s1}\cos g'_1 + B_2K'_{s2}\cos(\beta'_2t + g'_2) + \dots + B_nK'_{sn}\cos(\beta'_nt + g'_n)},$$

что позволяет находить числовые значения наклонностей и долгот восходящих узлов оскулирующих орбит на основе теории вековых возмущений Лагранжа.

Заметим еще, что из приближенных формул (13.111) и (13.115′) в силу интегралов (13.105′) и (13.113) следуют также равенства

$$\Lambda_1^{(0)}e_1'^2 + \Lambda_2^{(0)}e_2'^2 + \ldots + \Lambda_n^{(0)}e_n'^2 = C, \qquad (13.116)$$

$$\Lambda_1^{(0)}\sin^2 i_1' + \Lambda_2^{(0)}\sin^2 i_2' + \ldots + \Lambda_n^{(0)}\sin^2 i_n' = C'. \qquad (13.116')$$

Отсюда следует, что если эксцентриситеты и наклонности оскулирующих орбит малы в начальный момент времени, то постоянные C и C' будут положительными малыми величинами, а значит, как видно из (13.116) и (13.116′), эксцентриситеты и наклонности будут всегда оставаться малыми.

Это есть теорема Лапласа, доказанная несколько иным путем, чем ранее, и притом для осредненных уравнений, в силу которых величины Λ_s, т. е. большие полуоси оскулирующих орбит, остаются постоянными.

Нужно, кроме того, иметь ввиду, что полученные сейчас результаты выведены не из полных осредненных уравнений (13.96), а из уравнений первого приближения (13.105) и (13.113), вследствие чего и сделанные заключения также надлежит рассматривать как приближенные.

ГЛАВА XIV

ЗАДАЧА ТРЕХ ТЕЛ

§ 1. Дифференциальные уравнения общей задачи трех тел

1. Рассмотрим общую, или неограниченную, задачу трех тел, т. е. задачу о движении системы, состоящей из трех материальных точек с произвольными конечными массами, взаимно притягивающихся по закону Ньютона*).

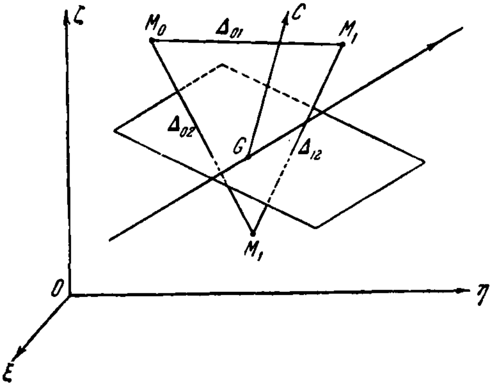


Рис. 68.

В некоторой абсолютной системе координат с неизменными направлениями осей дифференциальные уравнения движения в этой задаче имеют, как известно, следующий вид ($i=0, 1, 2$):

$$m_i\ddot{\xi}_i = \frac{\partial U}{\partial \xi_i}, \quad m_i\ddot{\eta}_i = \frac{\partial U}{\partial \eta_i},$$

$$m_i\ddot{\zeta}_i = \frac{\partial U}{\partial \zeta_i}, \qquad (14.1)$$

где U — полная силовая функция, определяемая здесь формулой

$$U = f\left(\frac{m_0 m_1}{\Delta_{01}} + \frac{m_0 m_2}{\Delta_{02}} + \frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}}\right), \qquad (14.2)$$

а

$$\Delta_{ij} = \sqrt{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2 + (\zeta_i - \zeta_j)^2} \qquad (14.2')$$

есть взаимное расстояние между точками M_i и M_j, обладающими массами m_i и m_j ($i, j=0, 1, 2$), причем ясно, что $\Delta_{ji}=\Delta_{ij}$ (рис. 68).

---

*) См. часть вторую. Мы сохраняем термин «тело», так как действительные тела, являющиеся шарами со сферическим распределением плотностей, притягиваются взаимно как материальные точки. С другой стороны, тела любой формы и структуры, расстояния между которыми достаточно велики, также притягиваются как и математические материальные точки.

Уравнения (14.1) полезно написать также полностью в раскрытом виде, т. е.:

$$\left.\begin{aligned}
m_0\frac{d^2\xi_0}{dt^2} &= fm_0m_1\frac{\xi_1-\xi_0}{\Delta_{01}^3}+fm_0m_2\frac{\xi_2-\xi_0}{\Delta_{02}^3},\\
m_0\frac{d^2\eta_0}{dt^2} &= fm_0m_1\frac{\eta_1-\eta_0}{\Delta_{01}^3}+fm_0m_2\frac{\eta_2-\eta_0}{\Delta_{02}^3},\\
m_0\frac{d^2\zeta_0}{dt^2} &= fm_0m_1\frac{\zeta_1-\zeta_0}{\Delta_{01}^3}+fm_0m_2\frac{\zeta_2-\zeta_0}{\Delta_{02}^3},\\
m_1\frac{d^2\xi_1}{dt^2} &= fm_1m_0\frac{\xi_0-\xi_1}{\Delta_{10}^3}+fm_1m_2\frac{\xi_2-\xi_1}{\Delta_{12}^3},\\
m_1\frac{d^2\eta_1}{dt^2} &= fm_1m_0\frac{\eta_0-\eta_1}{\Delta_{10}^3}+fm_1m_2\frac{\eta_2-\eta_1}{\Delta_{12}^3},\\
m_1\frac{d^2\zeta_1}{dt^2} &= fm_1m_0\frac{\zeta_0-\zeta_1}{\Delta_{10}^3}+fm_1m_2\frac{\zeta_2-\zeta_1}{\Delta_{12}^3},\\
m_2\frac{d^2\xi_2}{dt^2} &= fm_2m_0\frac{\xi_0-\xi_2}{\Delta_{20}^3}+fm_2m_1\frac{\xi_1-\xi_2}{\Delta_{21}^3},\\
m_2\frac{d^2\eta_2}{dt^2} &= fm_2m_0\frac{\eta_0-\eta_2}{\Delta_{20}^3}+fm_2m_1\frac{\eta_1-\eta_2}{\Delta_{21}^3},\\
m_2\frac{d^2\zeta_2}{dt^2} &= fm_2m_0\frac{\zeta_0-\zeta_2}{\Delta_{20}^3}+fm_2m_1\frac{\zeta_1-\zeta_2}{\Delta_{21}^3}.
\end{aligned}\right\}\qquad(14.1')$$

Мы знаем, что уравнения абсолютного движения системы, состоящей из любого числа взаимно притягивающихся материальных точек, допускают десять первых (классических) интегралов, имеющих простое механическое значение. Для системы трех тел эти интегралы напишутся следующим образом.

Интегралы движения центра масс трех точек:

$$\left.\begin{aligned}
m_0\dot\xi_0+m_1\dot\xi_1+m_2\dot\xi_2 &= a_1,\\
m_0\dot\eta_0+m_1\dot\eta_1+m_2\dot\eta_2 &= a_2,\\
m_0\dot\zeta_0+m_1\dot\zeta_1+m_2\dot\zeta_2 &= a_3,\\
m_0\xi_0+m_1\xi_1+m_2\xi_2 &= a_1t+b_1,\\
m_0\eta_0+m_1\eta_1+m_2\eta_2 &= a_2t+b_2,\\
m_0\zeta_0+m_1\zeta_1+m_2\zeta_2 &= a_3t+b_3,
\end{aligned}\right\}\qquad(14.3)$$

которые показывают, что центр масс (или центр инерции системы) G движется относительно абсолютных осей $O\xi\eta\zeta$ прямолинейно и равномерно (рис. 68).

Три интеграла площадей, или интегралы сохранения момента количества движения системы:

$$\left.\begin{aligned}
m_0(\eta_0\dot\zeta_0-\zeta_0\dot\eta_0)+m_1(\eta_1\dot\zeta_1-\zeta_1\dot\eta_1)+m_2(\eta_2\dot\zeta_2-\zeta_2\dot\eta_2)&=c_1,\\
m_0(\zeta_0\dot\xi_0-\xi_0\dot\zeta_0)+m_1(\zeta_1\dot\xi_1-\xi_1\dot\zeta_1)+m_2(\zeta_2\dot\xi_2-\xi_2\dot\zeta_2)&=c_2,\\
m_0(\xi_0\dot\eta_0-\eta_0\dot\xi_0)+m_1(\xi_1\dot\eta_1-\eta_1\dot\xi_1)+m_2(\xi_2\dot\eta_2-\eta_2\dot\xi_2)&=c_3.
\end{aligned}\right\}\qquad(14.3')$$

Напомним, что плоскость, проходящая через центр масс, перпендикулярно к вектору $c=(c_1,\ c_2,\ c_3)$, сохраняет неизменную ориентацию относительно абсолютных осей и называется неизменяемой плоскостью Лапласа (рис. 68).

Интеграл живой силы, или интеграл энергии:

$$\frac{1}{2}m_0(\dot\xi_0^2+\dot\eta_0^2+\dot\zeta_0^2)+\frac{1}{2}m_1(\dot\xi_1^2+\dot\eta_1^2+\dot\zeta_1^2)+\\
+\frac{1}{2}m_2(\dot\xi_2^2+\dot\eta_2^2+\dot\zeta_2^2)=U+h.\qquad(14.3'')$$

Эти десять первых интегралов, которые легко вывести также и непосредственно из уравнений (14.1'), позволяют, вообще говоря, понизить порядок системы (14.1) на десять единиц. Однако практически довольствуются понижением порядка первоначальной системы (системы 18-го порядка) только на шесть единиц при помощи интегралов (14.3).

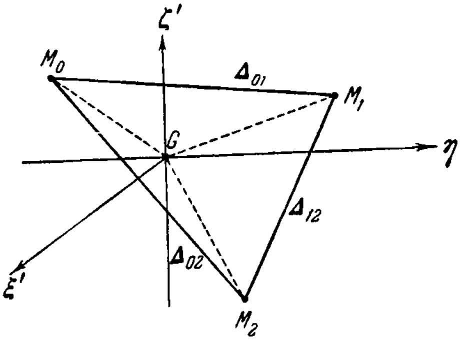


Рис. 69.

2. Перейдем сначала к барицентрической системе координат с началом в общем центре масс G трех точек и с неизменными направлениями осей, параллельными соответствующим осям абсолютной системы. Делая это преобразование, мы получим уравнения такого же вида, как и (14.1) ($i=0,\ 1,\ 2$):

$$m_i\ddot\xi'_i=\frac{\partial U}{\partial\xi'_i},\quad m_i\ddot\eta'_i=\frac{\partial U}{\partial\eta'_i},\quad m_i\ddot\zeta'_i=\frac{\partial U}{\partial\zeta'_i},\qquad(14.4)$$

где ξ'_i, η'_i, ζ'_i — координаты точки M_i в этой барицентрической системе координат (рис. 69).

Система (14.4) имеет 12-й порядок, так как барицентрические координаты удовлетворяют трем соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} m_0\xi_0' + m_r\xi_1' + m_2\xi_2' &= 0, \\ m_0\eta_0' + m_1\eta_1' + m_2\eta_2' &= 0, \\ m_0\zeta_0' + m_1\zeta_1' + m_2\zeta_2' &= 0, \end{aligned}\right\} \qquad (14.4')$$

с помощью которых можно исключить координаты какой-либо одной из трех точек, например, координаты ξ_0', η_0', ζ_0' точки M_0:

$$\left.\begin{aligned} \xi_0' &= -\frac{1}{m_0}(m_1\xi_1' + m_2\xi_2'), \\ \eta_0' &= -\frac{1}{m_0}(m_1\eta_1' + m_2\eta_2'), \\ \zeta_0' &= -\frac{1}{m_0}(m_1\zeta_1' + m_2\zeta_2'), \end{aligned}\right\} \qquad (14.4'')$$

вследствие чего получим систему из шести уравнений, определяющих координаты точек M_1 и M_2. Эти уравнения напишутся следующим образом *):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2\xi_1'}{dt^2} &= -f\,\frac{(m_0+m_1)\,\xi_1' + m_2\xi_2'}{\Delta_{10}^3} + fm_2\,\frac{\xi_2' - \xi_1'}{\Delta_{12}^3}, \\ \frac{d^2\eta_1'}{dt^2} &= -f\,\frac{(m_0+m_1)\,\eta_1' + m_2\eta_2'}{\Delta_{10}^3} + fm_2\,\frac{\eta_2' - \eta_1'}{\Delta_{12}^3}, \\ \frac{d^2\zeta_1'}{dt^2} &= -f\,\frac{(m_0+m_1)\,\zeta_1' + m_2\zeta_2'}{\Delta_{10}^3} + fm_2\,\frac{\zeta_2' - \zeta_1'}{\Delta_{12}^3}, \\ \frac{d^2\xi_2'}{dt^2} &= -f\,\frac{(m_0+m_2)\,\xi_2' + m_1\xi_1'}{\Delta_{20}^3} + fm_1\,\frac{\xi_1' - \xi_2'}{\Delta_{21}^3}, \\ \frac{d^2\eta_2'}{dt^2} &= -f\,\frac{(m_0+m_2)\,\eta_2' + m_1\eta_1'}{\Delta_{20}^3} + fm_1\,\frac{\eta_1' - \eta_2'}{\Delta_{21}^3}, \\ \frac{d^2\zeta_2'}{dt^2} &= -f\,\frac{(m_0+m_2)\,\zeta_2' + m_1\zeta_1'}{\Delta_{20}^3} + fm_1\,\frac{\zeta_1' - \zeta_2'}{\Delta_{21}'}, \end{aligned}\right\} \qquad (14.5)$$

---

*) Уравнения (14.5) являются частным случаем уравнений (7.22) гл. VII и получаются из них при $n=2$. Нетрудно получить также эти уравнения непосредственно из (14.4).

где взаимные расстояния в силу (14.4″) определяются следующими формулами:

$$\Delta_{10}^2=\left[\frac{(m_0+m_1)\,\xi_1'+m_2\xi_2'}{m_0}\right]^2+\left[\frac{(m_0+m_1)\,\eta_1'+m_2\eta_2'}{m_0}\right]^2+\\+\left[\frac{(m_0+m_1)\,\zeta_1'+m_2\zeta_2'}{m_0}\right]^2,$$

$$\Delta_{20}^2=\left[\frac{(m_0+m_2)\,\xi_2'+m_1\xi_1'}{m_0}\right]^2+\left[\frac{(m_0+m_2)\,\eta_2'+m_1\eta_1'}{m_0}\right]^2+\\+\left[\frac{(m_0+m_2)\,\zeta_2'+m_1\zeta_1'}{m_0}\right]^2,$$

$$\Delta_{12}^2=(\xi_2'-\xi_1')^2+(\eta_2'-\eta_1')^2+(\zeta_2'-\zeta_1')^2.$$

Уравнения (14.4) имеют уже только четыре первых интеграла — три интеграла площадей (момента количества движения) и интеграл энергии (живой силы), которые в барицентрических координатах имеют точно такой же вид, как и в абсолютных, при условии (14.4″). Исключая из этих интегралов координаты и составляющие скорости точки M_0, мы получим соответствующие интегралы системы (14.5) в следующей форме *):

$$\frac{1}{2m_0}\left[(m_1\dot\xi_1'+m_2\dot\xi_2')^2+(m_1\dot\eta_1'+m_2\dot\eta_2')^2+(m_1\dot\zeta_1'+m_2\dot\zeta_2')^2\right]+\\+\frac{1}{2}m_1\left(\dot\xi_1'^2+\dot\eta_1'^2+\dot\zeta_1'^2\right)+\frac{1}{2}m_2\left(\dot\xi_2'^2+\dot\eta_2'^2+\dot\zeta_2'^2\right)=U+h', \qquad (14.5')$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{m_0}(m_1\eta_1'+m_2\eta_2')(m_1\dot\zeta_1'+m_2\dot\zeta_2')-\frac{1}{m_0}(m_1\zeta_1'+m_2\zeta_2')\times\\&\times(m_1\dot\eta_1'+m_2\dot\eta_2')+m_1(\eta_1'\dot\zeta_1'-\zeta_1'\dot\eta_1')+m_2(\eta_2'\dot\zeta_2'-\zeta_2'\dot\eta_2')=c_1',\\&\frac{1}{m_0}(m_1\zeta_1'+m_2\zeta_2')(m_1\dot\xi_1'+m_2\dot\xi_2')-\frac{1}{m_0}(m_1\xi_1'+m_2\xi_2')\times\\&\times(m_1\dot\zeta_1'+m_2\dot\zeta_2')+m_1(\zeta_1'\dot\xi_1'-\xi_1'\dot\zeta_1')+m_2(\zeta_2'\dot\xi_2'-\xi_2'\dot\zeta_2')=c_2',\\&\frac{1}{m_0}(m_1\xi_1'+m_2\xi_2')(m_1\dot\eta_1'+m_2\dot\eta_2')-\frac{1}{m_0}(m_1\eta_1'+m_2\eta_2')\times\\&\times(m_1\dot\xi_1'+m_2\dot\xi_2')+m_1(\xi_1'\dot\eta_1'-\eta_1'\dot\xi_1')+m_2(\xi_2'\dot\eta_2'-\eta_2'\dot\xi_2')=c_3'.\end{aligned}\right\} \qquad (14.5'')$$

3. Можно также, как известно, понизить порядок системы (14.1) на шесть единиц, переходя от абсолютных координат к относительным. Пусть, например, за новое начало взята точ-

---

*) См. формулы (7.22′) и (7.22″) гл. VII, из которых при $n=2$ получаем написанные интегралы (14.5″) и (14.5′).

ка M_0, а новые оси соответственно параллельны абсолютным осям.

Тогда в этой относительной системе координат уравнения движения точек M_1 и M_2 имеют следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x_1}{dt^2}+\frac{f(m_0+m_2)x_1}{r_1^3}=fm_2\left(\frac{x_2-x_1}{\Delta_{12}^3}-\frac{x_2}{r_2^3}\right),\\
&\frac{d^2y_1}{dt^2}+\frac{f(m_0+m_1)y_1}{r_1^3}=fm_2\left(\frac{y_2-y_1}{\Delta_{12}^3}-\frac{y_2}{r_2^3}\right),\\
&\frac{d^2z_1}{dt^2}+\frac{f(m_0+m_1)z_1}{r_1^3}=fm_2\left(\frac{z_2-z_1}{\Delta_{12}^3}-\frac{z_2}{r_2^3}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{14.6}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2x_2}{dt^2}+\frac{f(m_0+m_2)x_2}{r_2^3}=fm_1\left[\frac{x_1-x_2}{\Delta_{21}^3}-\frac{x_1}{r_1^3}\right],\\
&\frac{d^2y_2}{dt^2}+\frac{f(m_0+m_2)y_2}{r_2^3}=fm_1\left[\frac{y_1-y_2}{\Delta_{21}^3}-\frac{y_1}{r_1^3}\right],\\
&\frac{d^2z_2}{dt^2}+\frac{f(m_0+m_2)z_2}{r_2^3}=fm_1\left[\frac{z_1-z_2}{\Delta_{21}^3}-\frac{z_1}{r_1^3}\right],
\end{aligned}\right\} \tag{14.6'}$$

где

$$\left.\begin{aligned}
r_1^2&=x_1^2+y_1^2+z_1^2,\\
r_2^2&=x_2^2+y_2^2+z_2^2
\end{aligned}\right\} \tag{14.7}$$

и

$$\Delta_{12}^2=\Delta_{21}^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2. \tag{14.7'}$$

Найдя относительные координаты точек M_1 и M_2, мы можем определить также барицентрические координаты всех трех точек по формулам (7.26) гл. VII, из которых имеем

$$\begin{aligned}
\xi_0'&=-\frac{m_1}{m}x_1-\frac{m_2}{m}x_2,\\
\xi_1'&=\frac{m_0+m_2}{m}x_1-\frac{m_2}{m}x_2,\\
\xi_2'&=-\frac{m_1}{m}x_1+\frac{m_0+m_1}{m}x_2,
\end{aligned}$$

и такие же формулы для ординат и аппликат η_s' и ζ_s', причем в этих формулах $m=m_0+m_1+m_2$.

Четыре первых интеграла системы уравнений (14.6), (14.6′) можно вывести непосредственно из самих этих уравнений или получить преобразованием интегралов в барицентрических координатах, или написать по образцу интегралов (7.27), (7.27′), полагая в последних $n=2$. Эти интегралы напишутся здесь в таком виде:

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{m}\left[(m_1y_1+m_2y_2)(m_1\dot z_1+m_2\dot z_2)-\right.\\
&\qquad\left.-(m_1z_1+m_2z_2)(m_1\dot y_1+m_2\dot y_2)\right]+m_1(y_1\dot z_1-z_1\dot y_1)+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+m_2(y_2\dot z_2-z_2\dot y_2)=c_1',\\
&-\frac{1}{m}\left[(m_1z_1+m_2z_2)(m_1\dot x_1+m_2\dot x_2)-\right.\\
&\qquad\left.-(m_1x_1+m_2x_2)(m_1\dot z_1+m_2\dot z_2)\right]+m_1(z_1\dot x_1-x_1\dot z_1)+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+m_2(z_2\dot x_2-x_2\dot z_2)=c_2',\\
&-\frac{1}{m}\left[(m_1x_1+m_2x_2)(m_1\dot y_1+m_2\dot y_2)-\right.\\
&\qquad\left.-(m_1y_1+m_2y_2)(m_1\dot x_1+m_2\dot x_2)\right]+m_1(x_1\dot y_1-y_1\dot x_1)+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+m_2(x_2\dot y_2-y_2\dot x_2)=c_3',
\end{aligned}\right\}\qquad(14.8)$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2m}\left[(m_1\dot x_1+m_2\dot x_2)^2+(m_1\dot y_1+m_2\dot y_2)^2+(m_1\dot z_1+m_2\dot z_2)^2\right]+\\
&\qquad+\frac{1}{2}m_1\left(\dot x_1^2+\dot y_1^2+\dot z_1^2\right)+\frac{1}{2}m_2\left(\dot x_2^2+\dot y_2^2+\dot z_2^2\right)=U+h'.\qquad(14.8')
\end{aligned}$$

4. Наконец, понизить порядок системы (14.1) на шесть единиц можно еще при помощи преобразования Якоби.

В этом преобразовании движение точки M_1 относится к системе координат с началом в точке M_0, а движение точки M_2— к системе с началом в центре масс G_1 двух точек M_0 и M_1. Оси обеих систем сохраняют неизменные направления и соответственно параллельны осям абсолютной системы.

Уравнения движения в координатах Якоби имеют такой вид:

$$\left.\begin{aligned}
m_1'\ddot x_1'&=\frac{\partial U}{\partial x_1'}, & m_1'\ddot y_1'&=\frac{\partial U}{\partial y_1'}, & m_1'\ddot z_1'&=\frac{\partial U}{\partial z_1'},\\
m_2'\ddot x_2'&=\frac{\partial U}{\partial x_2'}, & m_2'\ddot y_2'&=\frac{\partial U}{\partial y_2'}, & m_2'\ddot z_2'&=\frac{\partial U}{\partial z_2'},
\end{aligned}\right\}\qquad(14.9)$$

где U — та же самая силовая функция, что и в системе (14.1), а m_1' и m_2' — «приведенные массы», определяемые формулами

$$m_1'=\frac{m_0m_1}{m_0+m_1},\qquad m_2'=\frac{m_2(m_0+m_1)}{m_0+m_1+m_2}.\qquad(14.9')$$

Взаимные расстояния Δ_{ij} в координатах Якоби определяются следующими формулами:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta_{01}^2 &= x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2,\\
\Delta_{02}^2 &= \left(x_2' + \frac{m_1}{m_0+m_1}x_1'\right)^2 + \left(y_2' + \frac{m_1}{m_0+m_1}y_1'\right)^2 + \\
&\qquad\qquad + \left(z_2' + \frac{m_1}{m_0+m_1}z_1'\right)^2,\\
\Delta_{12}^2 &= \left(x_2' - \frac{m_0}{m_0+m_1}x_1'\right)^2 + \left(y_2' - \frac{m_0}{m_0+m_1}y_1'\right)^2 + \\
&\qquad\qquad + \left(z_2' - \frac{m_0}{m_0+m_1}z_1'\right)^2.
\end{aligned}\right\}\qquad (14.9'')$$

Относительные координаты, рассмотренные в предыдущем разделе, выражаются через координаты Якоби формулами

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= x_1', & x_2 &= x_2' + \frac{m_1}{m_0+m_1}x_1',\\
y_1 &= y_1', & y_2 &= y_2' + \frac{m_1}{m_0+m_1}y_1',\\
z_1 &= z_1', & z_2 &= z_2' + \frac{m_1}{m_0+m_1}z_1'.
\end{aligned}\right\}\qquad (14.9''')$$

Четыре первых интеграла системы (14.9) имеют, как известно (см. гл. VII), такой же вид, как и интегралы уравнений абсолютного движения, и мы имеем:

$$\left.\begin{aligned}
m_1'(y_1'\dot z_1' - z_1'\dot y_1') + m_2'(y_2'\dot z_2' - z_2'\dot y_2') &= c_1',\\
m_1'(z_1'\dot x_1' - x_1'\dot z_1') + m_2'(z_2'\dot x_2' - x_2'\dot z_2') &= c_2',\\
m_1'(x_1'\dot y_1' - y_1'\dot x_1') + m_2'(x_2'\dot y_2' - y_2'\dot x_2') &= c_3',
\end{aligned}\right\}\qquad (14.10)$$

$$\frac{1}{2}m_1'\left(\dot x_1'^2 + \dot y_1'^2 + \dot z_1'^2\right) + \frac{1}{2}m_2'\left(\dot x_2'^2 + \dot y_2'^2 + \dot z_2'^2\right) = U + h', \qquad (14.10')$$

где m_1', m_2' — приведенные массы, определяемые формулами (14.9′).

Следует заметить, что постоянные c_1', c_2', c_3' и h' имеют те же числовые значения, что и в первых интегралах уравнений барицентрического или относительного движений.

Напишем в заключение уравнения (14.9) в раскрытом виде. Дифференцируя для этого силовую функцию U по координатам

x_1' и x_2', например, имея при этом в виду формулы для взаимных расстояний (14.9), мы получим

$$\frac{\partial U}{\partial x_1'} = -f\frac{m_0 m_1 x_1'}{\Delta_{01}^3} - f\frac{m_0 m_2}{\Delta_{02}^3}\cdot\frac{m_1}{\sigma_1}\left(x_2' + \frac{m_1}{\sigma_1}x_1'\right) + \\ + f\frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}^3}\cdot\frac{m_0}{\sigma_1}\left(x_2' - \frac{m_0}{\sigma_1}x_1'\right),$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2'} = -f\frac{m_0 m_2}{\Delta_{02}^3}\left(x_2' + \frac{m_1}{\sigma_1}x_1'\right) - f\frac{m_1 m_2}{\Delta_{12}^3}\left(x_2' - \frac{m_0}{\sigma_1}x_1'\right).$$

Полагая затем для сокращения

$$r_1' = \Delta_{01}, \quad \mu_1 = f(m_0 + m_1), \quad \mu_1' = \frac{fm_2}{m_0 + m_1},$$
$$\mu_1'' = fm_2, \quad \mu_2' = \frac{f(m_0 + m_1 + m_2)}{m_0 + m_1},$$

мы напишем уравнения (14.9) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x}_1' &= -\frac{\mu_1 x_1'}{r_1'^3} - \mu_1' x_1'\left(\frac{m_1}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_0}{\Delta_{12}^3}\right) - \mu_1'' x_1'\left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3}\right),\\
\ddot{y}_1' &= -\frac{\mu_1 y_1'}{r_1'^3} - \mu_1' y_1'\left(\frac{m_1}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_0}{\Delta_{12}^3}\right) - \mu_1'' y_1'\left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3}\right),\\
\ddot{z}_1' &= -\frac{\mu_1 z_1'}{r_1'^3} - \mu_1' z_1'\left(\frac{m_1}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_0}{\Delta_{12}^3}\right) - \mu_1'' z_1'\left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3}\right),
\end{aligned}\right\} \quad (14.11)$$

$$\left.\begin{aligned}
\ddot{x}_2' &= -m_1'\mu_2' x_1'\left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3}\right) - \mu_2' x_2'\left(\frac{m_0}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1}{\Delta_{12}^3}\right),\\
\ddot{y}_2' &= -m_1'\mu_2' y_1'\left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3}\right) - \mu_2' y_2'\left(\frac{m_0}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1}{\Delta_{12}^3}\right),\\
\ddot{z}_2' &= -m_1'\mu_2' z_1'\left(\frac{1}{\Delta_{02}^3} - \frac{1}{\Delta_{12}^3}\right) - \mu_2' z_2'\left(\frac{m_0}{\Delta_{02}^3} + \frac{m_1}{\Delta_{12}^3}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (14.11')$$

§ 2. Уравнения Ляпунова. Частные решения задачи трех тел

1. Так как, кроме классических первых интегралов, нам до сих пор не известны никакие другие интегралы, то дифференциальные уравнения общей задачи трех тел не могут быть проинтегрированы полностью и общее решение этой задачи мы получить (по крайней мере в настоящее время) не можем.

Однако еще Лагранж заметил, что общая задача трех тел допускает некоторые простые частные решения, в которых все три материальные точки M_0, M_1, M_2 находятся в некоторой неизменной плоскости и каждая из этих точек описывает в этой плоскости кеплеровскую орбиту с общим фокусом в центре масс системы G *). При этом конфигурация трех тел также остается неизменной и точки M_0, M_1, M_2 все время образуют равносторонний треугольник или все время располагаются на прямой линии.

Чтобы обнаружить эти частные решения, удобнее и проще всего воспользоваться уравнениями движения трех тел в форме Ляпунова, которые мы прежде всего и выведем **).

Три точки, M_0, M_1, M_2, всегда образуют треугольник, и поэтому всегда находятся в одной плоскости, положение которой вообще изменяется с течением времени.

Если в каждый момент времени мы будем знать положение плоскости треугольника (в системе координат с неизменными направлениями осей) и положение каждой из его вершин в этой плоскости, то движение каждого из трех тел будет известно и задача будет решена.

Положение плоскости треугольника (M_0, M_1, M_2) можно определить обычными астрономическими элементами — наклонностью J и долготой узла Ω. Положение (или ориентация) треугольника в его плоскости определится положением одной из его вершин и углом, который образует одна из сторон с линией пересечения плоскости треугольника (линией узлов) с основной координатной плоскостью. Положения двух других вершин в плоскости треугольника определятся, если будут известны их расстояния от первой вершины и угол, образуемый этими расстояниями.

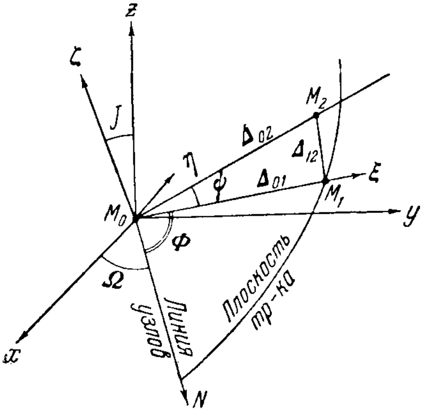


Рис. 70.

Возьмем относительную систему координат с началом в точке M_0 (рис. 70) и преобразуем относительные уравнения (14.6), (14.6′) к новым переменным, которые только что были описаны.

---

*) См. J. Lagrange, Eessais sur le problème de trois corps. Oeuvres complets, т. 6.

**) См. А. М. Ляпунов, Об устойчивости движения в задаче о трех телах, 1889 г., Собрание сочинений А. М. Ляпунова, т. 1, Изд-во АН СССР, 1954.

Введем для этого подвижную систему координат с началом в точке M_0, основной плоскостью которой является плоскость треугольника $(M_0M_1M_2)$. Примем за новую ось абсцисс — ось $M_0\xi$ — направление, идущее от начала M_0 к точке M_1, за новую ось ординат — ось $M_0\eta$ — направление, перпендикулярное к $M_0\xi$ в плоскости треугольника, составляющее острый угол с направлением M_0M_2, и за новую ось аппликат — ось $M_0\zeta$ — направление, перпендикулярное к плоскости треугольника $(M_0M_1M_2)$, притом такое, чтобы система $(M_0\xi\eta\zeta)$ могла быть совмещена надлежащим вращением с системой (M_0xyz)*) (см. рис. 70).

Обозначим через a_{ij} направляющие косинусы, определяющие ориентацию новой системы по отношению к старой по следующей схеме:

	ξ	η	ζ
x	a_{11}	a_{12}	a_{13}
y	a_{21}	a_{22}	a_{23}
z	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Эти девять направляющих косинусов выражаются через три эйлеровых угла подвижной системы $M_0\xi\eta\zeta$ — долготу узла Ω, наклонность J и угол собственного вращения Φ — известными формулами, которыми нам здесь не придется пользоваться и которые поэтому выписывать здесь мы не будем**).

Старые координаты x, y, z (т. е. координаты в относительной системе (M_0xyz)) какой угодно точки пространства выражаются через новые координаты ξ, η, ζ очевидными формулами:

$$\left.\begin{aligned} x &= a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta, \\ y &= a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta, \\ z &= a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta. \end{aligned}\right\} \qquad (14.12)$$

Но координаты точек M_1 и M_2 в подвижной системе координат будут, очевидно,

$$\left.\begin{array}{lll} \xi_1 = r_1, & \eta_1 = 0, & \zeta_1 = 0, \\ \xi_2 = r_2\cos\psi, & \eta_2 = r_2\sin\psi, & \zeta_2 = 0, \end{array}\right\} \qquad (14.12')$$

---

*) Эти координаты ξ, η, ζ не следует смешивать с абсолютными координатами в уравнениях (14.1), которые были обозначены теми же буквами.

**) См. формулы (1.27) гл. I.

где через ψ обозначен угол, образованный радиусами-векторами r_1 и r_2. Теперь формулы (14.12) и (14.12′) дают

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{11}r_1, & x_2 &= a_{11}r_2\cos\psi + a_{12}r_2\sin\psi, \\ y_1 &= a_{21}r_1, & y_2 &= a_{21}r_2\cos\psi + a_{22}r_2\sin\psi, \\ z_1 &= a_{31}r_1, & z_2 &= a_{31}r_2\cos\psi + a_{32}r_2\sin\psi. \end{aligned}\right\} \qquad (14.13)$$

Формулы (14.13) выражают относительные координаты точек M_1 и M_2 в неизменной системе (M_0xyz) через величины

$$r_1, \quad r_2, \quad \psi, \quad \Omega, \quad J, \quad \Phi, \qquad (14.14)$$

которые и могут быть приняты за новые переменные.

Величины r_1, r_2 и ψ полностью определяют треугольник $(M_0M_1M_2)$. Действительно, обозначим два других внутренних угла треугольника соответственно через φ_1 и φ_2 и положим, сверх того, $\Delta_{12}=\Delta$.

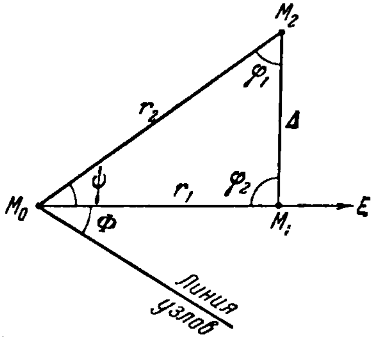


Рис. 71.

Тогда из треугольника $(M_0M_1M_2)$ имеем (рис. 71)

$$\left.\begin{aligned} &\Delta = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\psi}, \\ &\sin\varphi_1 = \frac{r_2}{\Delta}\sin\psi, \quad \sin\varphi_2 = \frac{r_1}{\Delta}\sin\psi. \end{aligned}\right\} \qquad (14.15)$$

Теперь вместо углов Эйлера Ω, J, Φ, определяющих положение плоскости треугольника в системе координат (M_0xyz) и положение треугольника в его плоскости, введем, согласно Ляпунову, три новые переменные, а именно проекции угловой скорости триэдра $(M_0\xi\eta\zeta)$ (подвижной системы координат) ω_1, ω_2, ω_3 на оси $M_0\xi$, $M_0\eta$, $M_0\zeta$ соответственно.

Эти новые величины связаны с углами Эйлера известными кинематическими уравнениями Эйлера,

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \sin\Phi\sin J\cdot\dot\Omega + \cos\Phi\cdot\dot J, \\ \omega_2 &= \cos\Phi\sin J\cdot\dot\Omega - \sin\Phi\cdot\dot J, \\ \omega_3 &= \cos J\ \ \dot\Omega + \dot\Phi, \end{aligned}\right\} \qquad (14.16)$$

которые представляют три дифференциальных уравнения первого порядка, определяющие функции Ω, J, Φ, когда ω_1, ω_2, ω_3 известны как функции времени.

2. Чтобы получить дифференциальные уравнения, определяющие переменные

$$r_1,\ r_2,\ \psi,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3, \tag{14.17}$$

поступим следующим образом: умножим сначала уравнения (14.6) соответственно на x_1, y_1, z_1 и сложим, что дает

$$x_1\ddot{x}_1 + y_1\ddot{y}_1 + z_1\ddot{z}_2 + \frac{f(m_0+m_1)}{r_1} = fm_2\left[-\frac{r_1\cos\varphi_1}{\Delta^2} - \frac{r_1\cos\psi}{r_2^2}\right]. \tag{14.18}$$

Но

$$x_1\ddot{x}_1 + y_1\ddot{y}_1 + z_1\ddot{z}_1 = r_1\ddot{r}_1 - \dot{r}_1^2 - (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2),$$

а из формул (14.13) найдем

$$\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{z}_1^2 =$$
$$= \dot{r}_1^2 + 2(a_{11}\dot{a}_{11} + a_{21}\dot{a}_{21} + a_{31}\dot{a}_{31})r_1\dot{r}_1 + (\dot{a}_{11}^2 + \dot{a}_{21}^2 + \dot{a}_{31}^2)r_1^2.$$

Используя теперь свойства направляющих косинусов и формулы, дающие производные от направляющих косинусов по времени *), мы приведем равенство (14.18) к следующему виду:

$$\ddot{r}_1 - r_1(\omega_2^2 + \omega_3^2) + \frac{f(m_0+m_1)}{r_1^2} + \frac{fm_2\cos\psi}{r_2^2} + \frac{fm_2\cos\varphi_1}{\Delta^2} = 0, \tag{14.18'}$$

а это есть первое из уравнений Ляпунова.

Умножая затем уравнения (14.6) соответственно на 0, $-z_1$, $+y_1$, потом на $+z_1$, 0, $-x_1$ и, наконец, на $-y_1$, $+x_1$, 0 и складывая каждый раз результаты, мы выведем три следующих равенства:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(y_1\dot{z}_1 - z_1\dot{y}_1) = fm_2(y_1z_2 - z_1y_2)\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r_2^3}\right),\\
&\frac{d}{dt}(z_1\dot{x}_1 - x_1\dot{z}_1) = fm_2(z_1x_2 - x_1z_2)\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r_2^3}\right),\\
&\frac{d}{dt}(x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1) = fm_2(x_1y_2 - y_1x_2)\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r_2^3}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{14.19}$$

---

*) Как известно, мы имеем

$$\dot{a}_{ij} = \omega_{(j+2)}a_{j,\,(i+1)} - \omega_{(j+1)}a_{i,\,(j+2)},$$

причем когда в скобке выходит число, большее трех, то тройка должна быть отброшена (см., например, Г. К. Суслов, Теоретическая механика).

Но из формул (14.12), используя выражения производных от направляющих косинусов, мы находим

$$y_1\dot{z}_1 - z_1\dot{y}_1 = r_1^2(a_{13}\omega_3 + a_{12}\omega_2), \quad y_1z_2 - z_1y_2 = a_{13}r_1r_2\sin\psi,$$
$$z_1\dot{x}_1 - x_1\dot{z}_1 = r_1^2(a_{23}\omega_3 + a_{22}\omega_2), \quad z_1x_2 - x_1z_2 = a_{23}r_1r_2\sin\psi,$$
$$x_1\dot{y}_1 - y_1\dot{x}_1 = r_1^2(a_{33}\omega_3 + a_{32}\omega_2), \quad x_1y_2 - y_1x_2 = a_{33}r_1r_2\sin\psi.$$

Пользуясь этими равенствами, мы приведем уравнения (14.19) к следующему виду:

$$a_{13}\frac{d}{dt}(\omega_3r_1^2) + a_{12}\frac{d}{dt}(\omega_2r_1^2) + (\dot{a}_{13}\omega_3 + \dot{a}_{12}\omega_2)r_1^2 = \\ = fm_2a_{13}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)r_1r_2\sin\psi,$$

$$a_{23}\frac{d}{dt}(\omega_3r_1^2) + a_{22}\frac{d}{dt}(\omega_2r_1^2) + (\dot{a}_{23}\omega_3 + \dot{a}_{22}\omega_2)r_1^2 = \\ = fm_2a_{23}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)r_1r_2\sin\psi,$$

$$a_{33}\frac{d}{dt}(\omega_3r_1^2) + a_{32}\frac{d}{dt}(\omega_2r_1^2) + (\dot{a}_{33}\omega_3 + \dot{a}_{32}\omega_2)r_1^2 = \\ = fm_2a_{33}\left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r_2^3}\right)r_1r_2\sin\psi.$$

Для исключения направляющих косинусов умножим последние уравнения соответственно на a_{13}, a_{23}, a_{33} и сложим, а затем на a_{12}, a_{22}, a_{32} и опять сложим. Используя еще формулы (14.15), мы получим в результате следующие два уравнения Ляпунова:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(\omega_3r_1^2) + \omega_1\omega_2r_1^2 + fm_2\frac{r_1\sin\psi}{r_2^2} - fm_2\frac{r_1\sin\varphi_1}{\Delta^2} = 0, \\ &\frac{d}{dt}(\omega_2r_1^2) - \omega_1\omega_3r_1^2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (14.19')$$

Подобным же образом мы поступим и с уравнениями (14.6′). Для этого вводим вторую подвижную систему координат, направляя ось абсцисс от начала M_0 к точке M_2, ось аппликат перпендикулярно к плоскости треугольника, а ось ординат выбирая в плоскости треугольника так, чтобы вторая система могла быть совмещена надлежащим вращением с первой.

Обозначая проекции угловой скорости нового триэдра на новые подвижные оси через ω_1', ω_2', ω_3' и пользуясь формулами, совершенно аналогичными формулам (14.12), (14.12′), (14.13), мы выведем еще три уравнения, совершенно подобные уравнениям (14.18′) и (14.19′).

В результате будем иметь следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2r_1}{dt^2}-\left(\omega_2^2+\omega_3^2\right)r_1+\frac{f(m_0+m_1)}{r_1^2}+\\
&\qquad\qquad+\frac{fm_2\cos\psi}{r_2^2}+\frac{fm_2\cos\varphi_1}{\Delta^2}=0,\\
&\frac{d}{dt}\left(\omega_3r_1^2\right)+\omega_1\omega_2r_1^2+\frac{fm_2r_1\sin\psi}{r_2^2}-\frac{fm_2r_1\sin\varphi_1}{\Delta^2}=0,\\
&\frac{d}{dt}\left(\omega_2r_1^2\right)-\omega_1\omega_3r_1^2=0,\\
&\frac{d^2r_2}{dt^2}-\left(\omega_2'^2+\omega_3'^2\right)r_2+\frac{f(m_0+m_2)}{r_2^2}+\\
&\qquad\qquad+\frac{fm_1\cos\psi}{r_1^2}+\frac{fm_1\cos\varphi_2}{\Delta^2}=0,\\
&\frac{d}{dt}\left(\omega_3'r_2^2\right)+\omega_1'\omega_2'r_2^2+\frac{fm_1r_2\sin\varphi_2}{\Delta^2}-\frac{fm_1r_2\sin\psi}{r_1^2}=0,\\
&\frac{d}{dt}\left(\omega_2'r_2^2\right)-\omega_1'\omega_3'r_2^2=0.
\end{aligned}\right\}\qquad(14.20)$$

Замечая теперь, что

$$\left.\begin{aligned}
\omega_1'&=+\omega_1\cos\psi+\omega_2\sin\psi,\\
\omega_2'&=-\omega_1\sin\psi+\omega_2\cos\psi,\\
\omega_3'&=\omega_3+\dot\psi,
\end{aligned}\right\}\qquad(14.21)$$

мы видим, что уравнения (14.20) образуют систему девятого порядка с шестью неизвестными функциями (14.17), после интегрирования которой мы должны проинтегрировать еще отдельную систему трех уравнений (14.16) с тремя неизвестными функциями Ω, J, Φ. Следовательно, полное решение задачи зависит от интегрирования двух последовательных систем, образующих вместе систему 12-го порядка. Если эта полная система проинтегрирована, то формулы (14.13) дадут и относительные координаты точек M_1 и M_2 в системе (M_0xyz).

Полная система 12-го порядка, образованная двумя системами (14.20) и (14.16), получена преобразованием первоначальной системы 12-го порядка (14.6), (14.6′), а поэтому, разумеется, имеет четыре первых интеграла, которые можно вывести из интегралов (14.8) и (14.8′) при помощи формул преобразования (14.13).

Однако эти интегралы имеют довольно громоздкий вид и мы их приводить здесь не будем.

Примечание. Если мы положим в первых трех уравнениях (14.20) $m_2=0$, а во вторых трех уравнениях этой системы $m_1=0$, то получим две раздельные системы, каждая из которых определяет невозмущенное движение одной из точек относительно точки M_0.

3. Чтобы установить существование частных решений общей задачи трех тел, найденных Лагранжем, заметим сначала, что если начальные скорости всех трех тел располагаются в плоскости треугольника, образованного начальными положениями этих тел, то три точки, M_0, M_1, M_2, всегда будут оставаться в этой плоскости, т. е. движение системы будет плоским*).

Изучение этого плоского движения составляет несколько более простую задачу, называемую плоской задачей трех тел, дифференциальные уравнения которой получаются из дифференциальных уравнений общей (пространственной) задачи трех тел при условии, что во все время движения положение плоскости треугольника, образованного тремя точками, M_0, M_1, M_2, не изменяется, т. е. что мы имеем

$$\Omega = \mathrm{const}, \quad J = \mathrm{const}, \tag{14.22}$$

и, следовательно,

$$\Omega = 0, \quad \dot{J} = 0.$$

Тогда формулы (14.16) и (14.21) дают

$$\left.\begin{array}{lll} \omega_1 = 0, & \omega_2 = 0, & \omega_3 = \dot{\Phi} = \omega, \\ \omega_1' = 0, & \omega_2' = 0, & \omega_3' = \omega + \dot{\psi}, \end{array}\right\} \tag{14.23}$$

и уравнения (14.20) примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2r_1}{dt^2} - \omega^2 r_1 + \frac{f(m_0+m_1)}{r_1^2} + \frac{fm_2\cos\psi}{r_2^2} + \frac{fm_2\cos\varphi_1}{\Delta^2} = 0, \\ &\frac{d^2r_2}{dt^2} - (\omega+\dot{\psi})^2 r_2 + \frac{f(m_0+m_2)}{r_2^2} + \\ &\qquad\qquad + \frac{fm_1\cos\psi}{r_1^2} + \frac{fm_1\cos\varphi_2}{\Delta^2} = 0, \\ &\frac{d}{dt}\left(\omega r_1^2\right) + \frac{fm_2r_1\sin\psi}{r_2^2} - \frac{fm_2r_1\sin\varphi_1}{\Delta^2} = 0, \\ &\frac{d}{dt}\left[(\omega+\dot{\psi})\, r_2^2\right] + \frac{fm_1r_2\sin\varphi_2}{\Delta^2} - \frac{fm_1r_2\sin\psi}{r_1^2} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{14.24}$$

---

*) Частные решения Лагранжа соответствуют плоским движениям в задаче трех тел, что мы и покажем.

и образуют независимую систему седьмого порядка с четырьмя неизвестными функциями

$$r_1,\ r_2,\ \psi,\ \omega, \tag{14.24'}$$

вполне определяющими треугольник $(M_0M_1M_2)$ и его положение в неизменной плоскости $\Omega=\text{const}$, $J=\text{const}$.

Теперь легко установить существование лагранжевых частных решений. Покажем сначала, что существует решение, в котором три тела, т. е. точки M_0, M_1, M_2, образуют равносторонний треугольник, т. е. что уравнения (14.24) имеют частное решение

$$r_1=\rho,\quad r_2=\rho,\quad \psi=\frac{\pi}{3}, \tag{14.25}$$

где величины ρ и ω суть некоторые функции времени.

В самом деле, если переменные имеют значения (14.25), то мы имеем также

$$\Delta=\rho,\quad \varphi_1=\frac{\pi}{3},\quad \varphi_2=\frac{\pi}{3} \tag{14.25'}$$

и все уравнения (14.24) будут удовлетворены, если функции ρ и ω определены следующими уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2\rho}{dt^2}-\omega^2\rho+\frac{f(m_0+m_1+m_2)}{\rho^2}&=0,\\ \rho^2\omega&=c,\end{aligned}\right\} \tag{14.26}$$

где c — произвольная постоянная.

Но уравнения (14.26) представляют собой дифференциальные уравнения в полярных координатах кеплеровского движения точки единичной массы, притягиваемой к началу координат точкой с массой $m_0+m_1+m_2$. Это движение происходит по эллипсу, гиперболе или параболе в согласии с законами Кеплера, а каждая из точек M_1 и M_2 описывает подобную кеплеровскую орбиту, фокус которой находится в точке M_0.

В самом деле, примем в уравнениях (14.26) за независимую переменную вместо времени t полярный угол ϑ, определяемый формулой *)

$$\omega\, dt=c\frac{dt}{\rho^2}=d\vartheta \tag{14.27}$$

и положим для краткости

$$f(m_0+m_1+m_2)=\mu.$$

---

*) Так как $\frac{d\vartheta}{dt}=\omega=\dot{\Phi}$, то угол ϑ отличается от угла собственного вращения Φ только на постоянную.

Тогда первое из уравнений (14.26) примет вид

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\vartheta^2}+\frac{1}{\rho}=\frac{\mu}{c^2}=\frac{1}{p} \tag{14.28}$$

и представляет собой известное уравнение Бине для случая силы, обратно пропорциональной квадрату расстояния от притягивающего центра.

Решение этого уравнения имеет вид (см. § 4 гл. IX)

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos(\vartheta-\varphi)}; \tag{14.28'}$$

это — уравнение конического сечения с параметром p и эксцентриситетом e.

Уравнения орбит, описываемых точками M_1 и M_2 вокруг точки M_0, напишутся, как легко видеть, следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} r_1&=\frac{p}{1+e\cos v_1}, & v_1&=\vartheta-\varphi,\\ r_2&=\frac{p}{1+e\cos v_2}, & v_2&=\vartheta-\varphi+60^\circ, \end{aligned}\right\} \tag{14.29}$$

причем угол ϑ связан с временем t формулой (14.27), которая представляет собой интеграл площадей в плоскости орбиты в полярных координатах.

В частности, может быть $e=0$ и тогда точки M_1 и M_2 описывают вокруг точки M_0 окружности одинакового радиуса. В этом случае треугольник $(M_0M_1M_2)$ остается неизменным, вращаясь вокруг вершины M_0 с постоянной угловой скоростью.

Вместо того чтобы рассматривать движения точек M_1 и M_2 вокруг точки M_0, мы можем рассматривать движения всех трех точек вокруг общего центра масс G. В этом случае каждая из точек M_0, M_1, M_2 будет описывать вокруг точки G подобную кеплеровскую орбиту с фокусом G, или, в частности, концентрические окружности с центром в G.

Чтобы убедиться в этом, возьмем в плоскости треугольника $(M_0M_1M_2)$ неизменную систему координат с началом в M_0, причем ее осью абсцисс служит направление, от которого отсчитывается угол ϑ. Тогда координаты точек M_1 и M_2 определятся формулами

$$\begin{aligned} x_1&=r_1\cos\vartheta, & x_2&=r_2\cos(\vartheta+\psi),\\ y_1&=r_1\sin\vartheta, & y_2&=r_2\sin(\vartheta+\psi), \end{aligned}$$

а координаты точки G найдутся по формулам

$$\bar{x}=\frac{1}{m}\left[m_1r_1\cos\vartheta+m_2r_2\cos(\vartheta+\psi)\right],$$

$$\bar{y}=\frac{1}{m}\left[m_1r_1\sin\vartheta+m_2r_2\sin(\vartheta+\psi)\right].$$

В лагранжевом частном решении (рис. 72)

$$r_1 = r_2 = \rho, \quad \psi = 60^\circ,$$

и мы имеем

$$x_1 = \rho \cos \vartheta, \quad x_2 = \rho \cos(\vartheta + 60^\circ),$$
$$y_1 = \rho \sin \vartheta, \quad y_2 = \rho \sin(\vartheta + 60^\circ),$$
$$\bar{x} = \frac{\rho}{m}\left[m_1 \cos \vartheta + m_2 \cos(\vartheta + 60^\circ)\right],$$
$$\bar{y} = \frac{\rho}{m}\left[m_1 \sin \vartheta + m_2 \sin(\vartheta + 60^\circ)\right].$$

Вычисляя при помощи этих формул расстояния точек M_0, M_1, M_2 от общего центра масс G, мы найдем

$$\left.\begin{aligned}
\overline{M_0G} &= \rho_0 = \nu_0\rho, & \nu_0 &= \frac{1}{m}\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_1 m_2},\\
\overline{M_1G} &= \rho_1 = \nu_1\rho, & \nu_1 &= \frac{1}{m}\sqrt{m_0^2 + m_2^2 + m_0 m_2},\\
\overline{M_2G} &= \rho_2 = \nu_2\rho, & \nu_2 &= \frac{1}{m}\sqrt{m_0^2 + m_1^2 + m_0 m_1}.
\end{aligned}\right\} \qquad (14.30)$$

Эти формулы показывают, что каждая из трех точек в треугольном лагранжевом решении описывает вокруг точки G кеплеровскую орбиту. Все эти три орбиты имеют один и тот же эксцентриситет и поэтому являются одновременно либо эллипсами (в частности, окружностями), либо гиперболами, либо параболами*).

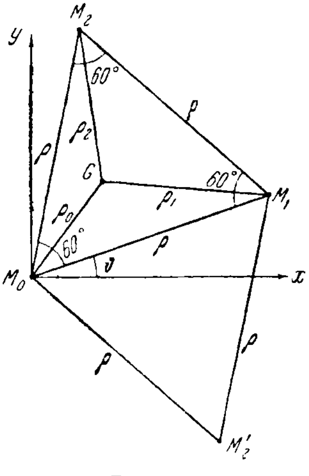


Рис. 72.

Заметим еще, что меняя местами точки M_1 и M_2, мы получим второе треугольное решение (на рис. 71 это второе решение соответствует треугольнику $(M_0M_1M_2')$).

4. Рассмотрим другое лагранжево решение, в котором все три точки располагаются на одной прямой, проходящей, конечно, через общий центр масс G. Таких решений имеется три, которые мы будем различать по положению массы m_2 относительно двух других m_0 и m_1. Эти решения назовем прямолинейными, или коллинеарными, и будем обозначать для краткости буквами L_1, L_2, L_3. Для однородности, можем обозна-

---

*) В вырожденном случае (когда $c=0$) все три орбиты превращаются в прямые, проходящие через G. В этом случае три точки либо движутся к G либо от G к бесконечности.

чить два треугольных решения, рассмотренные в предыдущем разделе (треугольники $(M_0M_1M_2)$ и $(M_0M_1M_2')$) соответственно символами L_4 и L_5.

Прямолинейное решение L_1. Легко видеть, что уравнения (14.24) будут удовлетворены, если мы положим

$$\left.\begin{array}{lll} \psi = 180^\circ, & \varphi_1 = 0, & \varphi_2 = 0, \\ r_2 = \rho, & r_1 = a\rho, & \Delta = (a+1)\rho, \end{array}\right\} \qquad (14.31)$$

где a есть некоторая постоянная, а функции ρ и ω удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\rho}{dt^2} - \omega^2\rho + \frac{\mu_1}{\rho^2} = 0, \quad \omega\rho^2 = c, \\ &\mu_1 = f\left[\frac{m_0+m_1}{a^3} + \frac{m_2}{a(a+1)^2} - \frac{m_2}{a}\right] = \\ &\qquad = f\left[(m_0+m_2) - \frac{m_1}{a^2} + \frac{m_1}{(a+1)^2}\right], \end{aligned}\right\} \qquad (14.31')$$

тождественным по виду с уравнениями (14.26). Отсюда следует, что точки M_1 и M_2, располагаясь на одной прямой с точкой M_0 (рис. 73), описывают подобные кеплеровские орбиты, фокус которых лежит в M_0. Постоянная a определяется условием, чтобы значение μ_1, вытекающее из первого и второго уравнений (14.24), было одно и то же, что дает для нахождения a следующее уравнение:

$$\frac{m_0+m_1}{a^3} + \frac{m_2}{a(a+1)^2} - \frac{m_2}{a} = (m_0+m_2) - \frac{m_1}{a^2} + \frac{m_1}{(a+1)^2},$$

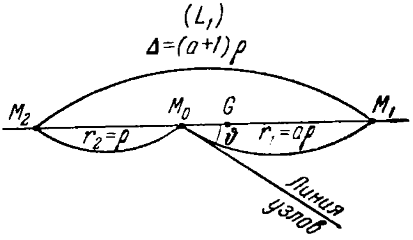


Рис. 73.

которое приводится к уравнению пятой степени, выведенному Лагранжем и имеющему вид

$$\begin{aligned} F_1(a) = (m_0+m_2)a^5 + (2m_0+3m_2)a^4 + (m_0+3m_2)a^3 - \\ - (m_0+3m_1)a^2 - (2m_0+3m_1)a - (m_0+m_1) = 0. \quad (14.31'') \end{aligned}$$

Это уравнение имеет только одну перемену знаков, а поэтому, по теореме Декарта, имеет только один вещественный положительный корень, которому соответствует единственное положение точки M_2 слева от M_0 на прямой (M_0M_1).

Будем считать, для определенности, что не нарушает общности, что массы точек удовлетворяют неравенству

$$m_0 \geqslant m_1 \geqslant m_2.$$

Тогда, так как

$$F_1(0) = -(m_0 + m_1), \quad F_1(1) = 7(m_2 - m_1),$$
$$F_1(2) = 63m_0 - 19m_1 + 104m_2,$$

при неравных массах положительный корень уравнения (14.31″) лежит в промежутке (1, 2) и равен единице, если $m_2 = m_1$.

Если рассматривать движения всех трех точек относительно общего центра масс G, то, так же как и выше, установим, что каждая из трех точек, M_0, M_1, M_2, описывает вокруг G подобную кеплеровскую орбиту.

Эти орбиты могут быть, в частности, окружностями, а в вырожденном случае все три точки движутся по неизменной прямой.

Прямолинейное решение L_2. Уравнения (14.24) будут также удовлетворены, если мы положим

$$\left.\begin{array}{lll} \psi = 0, & \varphi_1 = 0, & \varphi_2 = 180^\circ, \\ r_2 = \rho, & r_1 = (a+1)\rho, & \Delta = a\rho, \end{array}\right\} \qquad (14.32)$$

где a опять постоянная, а функции ρ и ω удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2\rho}{dt^2} - \omega^2\rho + \dfrac{\mu_2}{\rho^2} = 0, \quad \omega\rho^2 = c, \\ \mu_2 = f\left[\dfrac{m_0 + m_1}{(a+1)^3} + \dfrac{m_2}{a+1} + \dfrac{m_2}{a^2(a+1)}\right] = \\ \qquad = f\left[(m_0 + m_2) + \dfrac{m_1}{(a+1)^2} - \dfrac{m_1}{a^2}\right], \end{array}\right\} \qquad (14.32')$$

такого же вида, как и уравнения (14.31′). Постоянная a определяется уравнением

$$\frac{m_0 + m_1}{(a+1)^3} + \frac{m_2}{a+1} + \frac{m_2}{a^2(a+1)} = (m_0 + m_2) + \frac{m_1}{(a+1)^2} - \frac{m_1}{a^2},$$

которое приводится к виду

$$F_2(a) = (m_0 + m_2)a^5 + (3m_0 + 2m_2)a^4 + (3m_0 + m_2)a^3 -$$
$$- (3m_1 + m_2)a^2 - (3m_1 + 2m_2)a - (m_1 + m_2) = 0. \qquad (14.32'')$$

Это уравнение, отличающееся от уравнения (14.31″) только порядком расположения трех масс, также имеет единственный вещественный положительный корень. Так как, притом,

$$F_2(0) = -(m_1 + m_2), \quad F_2(1) = 7(m_0 - m_1),$$

то этот корень лежит между нулем и единицей и равен единице, если $m_1=m_0$. Иными словами, в этом решении точка M_2 располагается или ближе к точке M_1 (если $m_1 \neq m_0$) или находится посередине между M_0 и M_1 (если мы имеем $m_1=m_0$) (рис. 74).

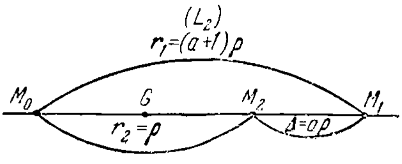


Рис. 74.

Орбиты точек M_1 и M_2 относительно M_0, или орбиты всех трех точек относительно G суть подобные кеплеровские орбиты, в частности, окружности, а в вырожденном случае все три точки движутся по неизменной прямой.

Прямолинейное решение L_3. Наконец, уравнения движения (14.24) будут удовлетворены, если мы положим

$$\left.\begin{aligned} \psi=0, \quad \varphi_1=180^\circ, \quad & \varphi_2=0, \\ r_1=\rho, \quad r_2=(a+1)\rho, \quad & \Delta=a\rho, \end{aligned}\right\} \tag{14.33}$$

где a также постоянная, а функции ρ и ω удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\rho}{dt^2}-\omega^2\rho+\frac{\mu_3}{\rho^2}=0, \quad \omega\rho^2=c, \\ &\mu_3=f\left[(m_0+m_1)+\frac{m_2}{(a+1)^2}-\frac{m_2}{a^2}\right]= \\ &\qquad =f\left[\frac{m_0+m_2}{(a+1)^3}+\frac{m_1}{a+1}+\frac{m_1}{a^2(a+1)}\right] \end{aligned}\right\} \tag{14.33'}$$

такого же вида, как и уравнения (14.26). Постоянная a в этом решении определяется уравнением

$$(m_0+m_1)+\frac{m_2}{(a+1)^2}-\frac{m_2}{a^2}=\frac{m_0+m_2}{(a+1)^3}+\frac{m_1}{a+1}+\frac{m_1}{a^2(a+1)},$$

которое приводится к такому же виду, как и в двух предыдущих случаях:

$$\begin{aligned} F_3(a)=(m_0+m_1)a^5+(3m_0+ \\ +2m_1)a^4+(3m_0+m_1)a^3- \\ -(m_1+3m_2)a^2-(2m_1+ \\ +3m_2)a-(m_1+m_2)=0. \end{aligned} \tag{14.33''}$$

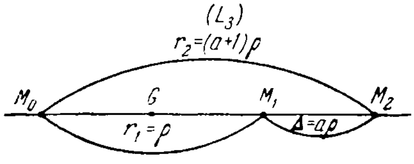


Рис. 75.

Это уравнение также имеет единственный вещественный положительный корень. Так как в этом случае

$$F_3(0)=-(m_1+m_2), \quad F_3(1)=7(m_0-m_1),$$

то этот корень лежит между нулем и единицей, если $m_2 \neq m_0$, и равен единице, если $m_2=m_0$. Расположение трех масс в этом решении указано на рис. 75.

§ 3. Ограниченная задача трех тел

1. В предыдущих параграфах мы рассматривали общую, или неограниченную, задачу трех тел (материальных точек!), где на три массы m_0, m_1, m_2 мы не накладывали никаких ограничений. Однако во многих случаях астрономической практики встречаются задачи, где масса одного из трех тел весьма мала по сравнению с двумя другими массами. Такова, например, задача о движении малой планеты или кометы под действием притяжения Солнца и Юпитера, или задача о движении космического корабля под действием притяжений Земли и Луны и т. д. В этих случаях малая масса практически не оказывает никакого влияния на две конечные массы, как если бы она была равна нулю, но сама ими, конечно, притягивается.

Пренебрегая в уравнениях движения общей задачи трех тел теми членами, которые имеют множителем малую массу, мы получим некоторые приближенные уравнения, описывающие движение «нулевой» массы под действием притяжения двух конечных масс и придем, таким образом, к задаче, которая, по предложению Пуанкаре, называется «ограниченной задачей трех тел».

Будем считать, что точки M_0 и M_1 имеют конечные массы m_0 и m_1 (не нарушая общности, можем считать, что $m_0 \geqslant m_1$), а точка M_2 имеет ничтожно малую, или, как иногда говорят, «нулевую» массу.

Дифференциальные уравнения этой задачи можно, конечно, вывести непосредственно, рассматривая движение материальной точки M_2 под действием ньютонианского притяжения двух других материальных точек M_0 и M_1, предполагая, что масса движущейся точки M_2 настолько мала, что ее можно считать равной нулю и что две другие массы конечны.

Однако проще получить нужные уравнения из уравнений общей задачи в относительных координатах (барицентрических, относящихся к точке M_0, Якоби или Ляпунова), полагая в этих уравнениях $m_2=0$. Тогда во всех этих случаях уравнения движения точек M_1 и M_2 «расщепляются», как нетрудно убедиться, на две отдельные системы, одна из которых определяет кеплеровское движение точки M_1 (относительно M_0 или относительно центра масс G точек M_0 и M_1 *)), а другая определяет движение «нулевой» массы, т. е. движение точки M_2 под действием притяжений точек M_0 и M_1.

Рассмотрим, для определенности, уравнения движения в координатах Якоби (14.9), или уравнения (14.11), (14.11′). По-

---

*) Очевидно, что при $m_2=0$ центр масс трех точек M_0, M_1 и M_2 совпадает с центром масс двух точек M_0 и M_1.

лагая в этих уравнениях $m_2=0$, мы приведем их к следующему виду:

$$\ddot{x}_1' = \frac{\partial U_1}{\partial x_1'}, \quad \ddot{y}_1' = \frac{\partial U_1}{\partial y_1'}, \quad \ddot{z}_1' = \frac{\partial U_1}{\partial z_1'}, \tag{14.34}$$

$$\ddot{x}_2' = \frac{\partial U_2}{\partial x_2'}, \quad \ddot{y}_2' = \frac{\partial U_2}{\partial y_2'}, \quad \ddot{z}_2' = \frac{\partial U_2}{\partial z_2'}, \tag{14.35}$$

где положено

$$U_1 = \frac{f(m_0+m_1)}{\Delta_{01}}, \quad U_2 = f\left(\frac{m_0}{\Delta_{02}} + \frac{m_1}{\Delta_{12}}\right). \tag{14.36}$$

Интегралы (14.10) и (14.10′) при $m_2=0$ примут вид

$$\left.\begin{aligned} y_1'\dot{z}_1' - z_1'\dot{y}_1' = \bar{c}_1', \quad z_1'\dot{x}_1' - x_1'\dot{z}_1' = \bar{c}_2', \quad x_1'\dot{y}_1' - y_1'\dot{x}_1' = \bar{c}_3', \\ \frac{1}{2}\left(\dot{x}_1'^2 + \dot{y}_1'^2 + \dot{z}_1'^2\right) = U_1 + \bar{h}'. \end{aligned}\right\} \tag{14.34′}$$

Очевидно, что уравнения (14.34) определяют движение точки M_1 по отношению к точке M_0 так, как будто точка M_2 вовсе не существует, а (14.34′) суть интегралы площадей и живой силы этой кеплеровской задачи.

Поэтому уравнения (14.34) могут быть полностью проинтегрированы, а координаты x_1', y_1', z_1' могут рассматриваться как известные функции времени и начальных значений

$$x_{10}', \quad y_{10}', \quad z_{10}', \quad \dot{x}_{10}', \quad \dot{y}_{10}', \quad \dot{z}_{10}',$$

которые являются произвольными постоянными этой задачи. Вместо начальных значений координат и составляющих скорости точки M_1 можно ввести, если угодно, обычные кеплеровские элементы орбиты, которая может быть эллипсом (в частности, окружностью), параболой или гиперболой в зависимости от знака постоянной энергии кеплеровского движения $\bar{h}'$.

Но если координаты точки M_1 суть известные функции времени, то силовая функция U_2 в уравнениях (14.35) есть известная функция от t и координат x_2', y_2', z_2' точки M_2. Поэтому уравнения (14.35) определяют движение точки M_2, масса которой ничтожно мала, под действием притяжения двух центров, один из которых неподвижен, а другой движется вокруг этого неподвижного по кривой второго порядка в согласии с законами Кеплера.

Однако уравнения (14.35) не имеют, вообще говоря, известных первых интегралов*) и не допускают интегрирования в

---

*) Исключение составляет так называемая круговая ограниченная задача, в которой точка M_1 движется вокруг M_0 по круговой орбите и где существует первый интеграл (см. ниже).

квадратурах, а поэтому ограниченная задача трех тел, хотя и более проста, чем общая, все же представляет значительные математические затруднения и ее решение не найдено и в настоящее время.

2. Известно (см. часть третью этой книги), что движение точки M_1 вокруг точки M_0 происходит в неизменной плоскости, проходящей через M_0 перпендикулярно к вектору момента скорости точки M_1, составляющие которого суть $\overline{c}'_1$, $\overline{c}'_2$, $\overline{c}'_3$.

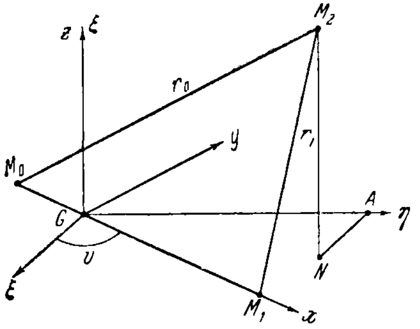


Рис. 76.

Так как выбор неизменных направлений осей якобиевских систем координат $M_0x'_1y'_1z'_1$ и $Gx'_2y'_2z'_2$ совершенно произволен, лишь бы соответствующие оси были параллельны, то мы можем выбрать эти направления так, чтобы оси аппликат обеих систем были перпендикулярны к упомянутой плоскости.

Пусть $G\xi\eta\zeta$ — система координат, в плоскости $(\xi\eta)$ которой движется точка M_1 (рис. 76). Уравнения движения точки M_2 («нулевой» массы!) будут иметь совершенно такой же вид, как и уравнения (14.35), так что дифференциальные уравнения нашей задачи могут быть написаны в следующем виде:

$$\ddot{\xi} = \frac{\partial W}{\partial \xi}, \quad \ddot{\eta} = \frac{\partial W}{\partial \eta}, \quad \ddot{\zeta} = \frac{\partial W}{\partial \zeta}, \tag{14.35'}$$

где положено

$$W = f\left(\frac{m_0}{r_0} + \frac{m_1}{r_1}\right), \tag{14.36'}$$

а взаимные расстояния определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} r_0^2 &= (\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2 + \zeta^2, \\ r_1^2 &= (\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2 + \zeta^2 \end{aligned}\right\} \quad (\zeta_0 = \zeta_1 = 0), \tag{14.36''}$$

где ξ_0, η_0 и ξ_1, η_1 суть координаты точек M_0 и M_1 в системе $(G\xi\eta)$.

Эти координаты определяются очевидными формулами

$$\left.\begin{aligned} (m_0 + m_1)\,\xi_0 &= -m_1 r \cos v, & (m_0 + m_1)\,\eta_0 &= -m_1 r \sin v, \\ (m_0 + m_1)\,\xi_1 &= +m_0 r \cos v, & (m_0 + m_1)\,\eta_1 &= +m_0 r \sin v, \end{aligned}\right\} \tag{14.36'''}$$

где $r = \overline{M_0M_1}$ есть радиус-вектор точки M_1, а v — угол, образуемый радиусом вектором с положительным направлением оси $G\xi$.

Величины r и v являются известными функциями времени, определяемыми формулами кеплеровского движения.

Но орбита точки M_1 (в плоскости $G\xi\eta$), определяемая уравнением

$$r=\frac{p}{1+e\cos v}, \tag{14.37}$$

может быть окружностью ($e=0$), эллипсом ($e<1$), параболой ($e=1$) или гиперболой ($e>1$), в зависимости от величины начальной скорости точки M_1 по отношению к точке M_0.

Поэтому в небесной механике различаются следующие случаи: случай гиперболической ограниченной задачи, в котором орбита точки M_1 есть гипербола с фокусом в точке M_0; случай эллиптической ограниченной задачи, когда орбита точки M_1 есть эллипс с фокусом в точке M_0 и случай круговой ограниченной задачи, в котором орбита точки M_1 есть окружность с центром в точке M_0 *).

Перейдем теперь в уравнениях (14.35′) от неподвижной системы осей $G\xi\eta\zeta$ к вращающейся вокруг оси $G\zeta$ так, чтобы новая ось абсцисс всегда проходила через точки M_0 и M_1. Обозначая координаты точки M_2 в новой системе координат просто буквами x, y, z, мы имеем следующие формулы, связывающие старые и новые координаты:

$$\left.\begin{aligned}\xi&=x\cos v-y\sin v,\\ \eta&=x\sin v+y\cos v,\\ \zeta&=z,\end{aligned}\right\} \tag{14.38}$$

где v есть тот же самый угол, что и в формуле (14.37), т. е. истинная аномалия кеплеровского движения точки M_1 (см. рис. 76).

Координаты точки M_2 во вращающихся осях определятся следующими уравнениями (см. гл. VI):

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}-2\dot{v}\dot{y}-\dot{v}^2x-\ddot{v}y&=\frac{\partial W}{\partial x},\\ \ddot{y}+2\dot{v}\dot{x}-\dot{v}^2y+\ddot{v}x&=\frac{\partial W}{\partial y},\\ \ddot{z}&=\frac{\partial W}{\partial z},\end{aligned}\right\} \tag{14.39}$$

---

*) Можно рассматривать также еще параболическую ограниченную задачу, в которой орбита точки M_1 есть парабола, и прямолинейную ограниченную задачу, когда точка M_1 движется по прямой, проходящей через точку M_0.

где силовая функция определяется той же самой формулой (14.36′), но расстояния r_0 и r_1 ввиду (14.38) будут даны формулами

$$\left.\begin{aligned} r_0^2 &= (x - x_0)^2 + y^2 + z^2, \\ r_1^2 &= (x - x_1)^2 + y^2 + z^2, \end{aligned}\right\} \tag{14.39′}$$

где

$$x_0 = -\frac{m_1 r}{m_0 + m_1}, \quad x_1 = \frac{m_0 r}{m_0 + m_1}. \tag{14.39″}$$

Далее, так как

$$r^2 \dot{v} = c = \text{const},$$

то мы имеем

$$\dot{v} = \frac{c}{p^2}(1 + e\cos v)^2; \quad \ddot{v} = -\frac{2c^2 e}{p^4}(1 + e\cos v)^3. \tag{14.40}$$

Если, в частности, орбита точки M_1 есть окружность радиуса a, то $e = 0$, $\dot{v} = \frac{c}{a^2} = n$, $\ddot{v} = 0$, и координаты x_0, x_1 точек M_0 и M_1 суть величины постоянные

$$x_0 = -\frac{m_1 a}{m_0 + m_1}, \quad x_1 = \frac{m_0 a}{m_0 + m_1}. \tag{14.40′}$$

Тогда уравнения (14.39) превратятся в уравнения движения классической ограниченной круговой задачи трех тел и могут быть написаны в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} - 2n\dot{y} &= \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} &= \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= \frac{\partial \Omega}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{14.41}$$

где

$$\Omega = \frac{n^2}{2}(x^2 + y^2) + W \tag{14.41′}$$

зависит только от координат точки M_2 и, значит, не зависит явно от времени. Благодаря этому обстоятельству система (14.41) имеет один первый интеграл, аналогичный интегралу живой силы в неограниченной задаче и называемый интегралом Якоби*).

Чтобы получить этот интеграл непосредственным путем, умножим уравнения (14.41) соответственно на $2\dot{x}$, $2\dot{y}$, $2\dot{z}$, сложим и проинтегрируем, что дает

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = n^2(x^2 + y^2) + 2f\left(\frac{m_0}{r_0} + \frac{m_1}{r_1}\right) + 2h, \tag{14.42}$$

---

*) Это наименование было затем распространено на интегралы более общего типа любой гамильтоновой системы (см. гл. VI).

или

$$V^2 = 2\Omega + 2h, \tag{14.42'}$$

где

$$V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

есть относительная скорость точки M_1, а h есть произвольная постоянная, полностью определяемая начальным положением и начальной скоростью точки M_1.

3. Дифференциальные уравнения ограниченной задачи можно также написать и в другой форме. Получим сначала уравнения задачи в канонической форме. Так как живая сила T точки M_2 в относительных координатах выражается формулой *)

$$T = \frac{1}{2}\left[\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2\dot{v}(x\dot{y} - y\dot{x}) + \dot{v}^2(x^2 + y^2)\right], \tag{14.43}$$

то, принимая x, y, z за первую группу канонических переменных (обобщенные координаты), мы получим для второй группы канонических сопряженных переменных (обобщенных импульсов) следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \dot{x} - \dot{v}y, \\ y' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \dot{y} + \dot{v}x, \\ z' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = \dot{z}, \end{aligned}\right\} \tag{14.43'}$$

и уравнения (14.39) напишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x'}, & \frac{dx'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y'}, & \frac{dy'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial z}, & \frac{dz'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{14.44}$$

где характеристическая функция (или гамильтониан) определится следующей формулой (см. опять гл. VI):

$$H = \frac{1}{2}\left[x'^2 + y'^2 + z'^2 + 2\dot{v}(yx' - xy')\right] - W. \tag{14.44'}$$

Заметим, что в общем случае H зависит явно от времени t (через посредство $\dot{v}$). Если же рассматривается ограниченная

---

*) См. § 4 гл. VI. Формулу (14.43) можно также получить и непосредственным путем, преобразуя выражение для живой силы в неподвижной системе ($M_0\xi\eta\zeta$) к новым координатам с помощью формул преобразования (14.38).

круговая задача, то $\dot{v}=\mathrm{const}$, и H не зависит явно от времени, вследствие чего уравнения (14.44) имеют очевидный первый интеграл

$$H = h, \tag{14.44'}$$

который, разумеется, совпадает с интегралом Якоби, только выражен в канонических переменных.

Рассмотрим теперь одно примечательное преобразование уравнений (14.39), примененное впервые Нехвилом *) в плоской ограниченной эллиптической задаче трех тел, но пригодное вполне также и в общем случае.

Введем вместо x, y, z новые переменные, которые обозначим через ξ, η, ζ, подстановкой

$$x = \rho\xi, \quad y = \rho\eta, \quad z = \rho\zeta, \tag{14.45}$$

где

$$\rho = \frac{r}{p} = \frac{1}{1+e\cos v}, \tag{14.45'}$$

и примем за новую независимую переменную вместо t истинную аномалию кеплеровского движения точки M_1, т. е. угол v, связанный с временем дифференциальным соотношением

$$\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{c}{p^2}\cdot\frac{1}{\rho^2}. \tag{14.46}$$

Тогда, как легко проверить, имеем

$$\dot{x} = (\rho'\xi + \rho\xi')\,\dot{v},$$
$$\ddot{x} = (\rho''\xi + 2\rho'\xi' + \rho\xi'')\,\dot{v}^2 + (\rho'\xi + \rho\xi')\,\dot{v}\dot{v}'$$

(штрихи обозначают здесь дифференцирования по переменной v) и подобные же формулы для двух других координат.

Подставляя выражения для старых координат и их производных в уравнения (14.39), мы имеем, например,

$$\rho\dot{v}^2\xi'' + (2\rho'\dot{v} + \rho\dot{v}')(\xi' - \eta)\,\dot{v} - 2\rho\dot{v}^2\eta' + (\rho''\dot{v} + \rho'\dot{v}' - \dot{v}\rho)\,\dot{v}\xi = \Xi.$$

Но простое вычисление дает

$$2\rho'\dot{v} + \rho\dot{v}' = 0, \quad \rho''\dot{v} + \rho'\dot{v}' - \dot{v}\rho = -\frac{c}{p^2}.$$

Далее имеем

$$\Xi = \frac{1}{\rho^2}\left[-\frac{fm_0(\xi-\xi_0)}{\rho_0^3} - \frac{fm_1(\xi-\xi_1)}{\rho_1^3}\right],$$

---

*) V. Nechvil, Sur une nouvelle forme des équations différentielles du problème restreint elliptique. Compte Rendus, т. 182, 1926. Для простоты мы обозначили координаты Нехвила теми же буквами, какими выше были обозначены координаты в неподвижной системе осей.

где ввиду формул преобразования

$$\xi_0 = -\frac{pm_1}{m_0+m_1}, \qquad \xi_1 = \frac{pm_0}{m_0+m_1}, \tag{14.47}$$

а

$$\left.\begin{aligned} \rho_0^2 &= (\xi-\xi_0)^2+\eta^2+\zeta^2, \\ \rho_1^2 &= (\xi-\xi_1)+\eta^2+\xi^2. \end{aligned}\right\} \tag{14.47'}$$

Полагая теперь

$$R = \frac{m_0}{\rho_0} + \frac{m_1}{\rho_1}, \tag{14.48}$$

мы получим

$$\Xi = \frac{f}{\rho^2}\frac{\partial R}{\partial \xi},$$

и преобразованное уравнение примет чрезвычайно простой вид. Преобразовывая таким же образом остальные два уравнения, мы получим в результате вместо системы (14.39) следующую:

$$\left.\begin{aligned} \xi'' - 2\eta' - \rho\xi &= \nu^2\rho\frac{\partial R}{\partial \xi}, \\ \eta'' + 2\xi' - \rho\eta &= \nu^2\rho\frac{\partial R}{\partial \eta}, \\ \zeta'' + e\cos v\cdot\rho\zeta &= \nu^2\rho\frac{\partial R}{\partial \zeta}, \end{aligned}\right\} \tag{14.49}$$

где

$$\nu^2 = \frac{fp^4}{c^2} = \frac{p^3}{m_0+m_1}. \tag{14.49'}$$

Преимущество этих уравнений заключается в том, что функция R не содержит в своем выражении независимую переменную v, так как ξ_0 и ξ_1 здесь величины постоянные.

Уравнения Нехвила (14.49) можно написать еще иначе, вводя в рассмотрение функцию (Ω), аналогичную функции Ω, определяемой формулой (14.41′).

Действительно, полагая

$$(\Omega) = \rho\left\{\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2) - \frac{1}{2}e\cos v\cdot\zeta^2 + \nu^2 R\right\}, \tag{14.50}$$

мы получим вместо (14.49)

$$\left.\begin{aligned} \xi'' - 2\eta' &= \frac{\partial(\Omega)}{\partial \xi}, \\ \eta'' + 2\xi' &= \frac{\partial(\Omega)}{\partial \eta}, \\ \zeta'' &= \frac{\partial(\Omega)}{\partial \zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{14.51}$$

Эти уравнения имеют такой же вид, как и уравнения (14.41) ограниченной круговой задачи, и превращаются в них, как легко убедиться, при $e=0$.

Рассмотрим еще преобразование общих уравнений (14.39) к цилиндрическим координатам, для чего сделаем подстановку *):

$$x=\rho\cos\lambda,\quad y=\rho\sin\lambda. \tag{14.52}$$

Тогда выражение (14.43) примет следующий вид:

$$T=\frac{1}{2}\left[\dot\rho^2+\rho^2\dot\lambda^2+\dot z^2+2\dot v\rho^2\dot\lambda+\dot v^2\rho^2\right]. \tag{14.53}$$

Воспользовавшись опять уравнениями Лагранжа второго рода, мы найдем для определения цилиндрических координат следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\ddot\rho-\rho(\dot\lambda+\dot v)^2&=\frac{\partial W}{\partial\rho},\\ \frac{d}{dt}\left[\rho^2(\dot\lambda+\dot v)\right]&=\frac{\partial W}{\partial\lambda},\\ \ddot z&=\frac{\partial W}{\partial z},\end{aligned}\right\} \tag{14.54}$$

где W по-прежнему определяется формулой

$$W=f\left(\frac{m_0}{r_0}+\frac{m_1}{r_1}\right), \tag{14.54'}$$

в которой теперь

$$\left.\begin{aligned}r_0^2&=\rho^2+z^2-2x_0\rho\cos\lambda+x_0^2,\\ r_1^2&=\rho^2+z^2-2x_1\rho\cos\lambda+x_1^2,\end{aligned}\right\} \tag{14.54''}$$

а x_0 и x_1 даются формулами (14.39').

Если положить в уравнениях (14.54) $r=a$, $\dot v=n$, то получим уравнения круговой задачи в цилиндрических координатах:

$$\left.\begin{aligned}\ddot\rho-\rho(\dot\lambda+n)^2&=\frac{\partial W}{\partial\rho},\\ \frac{d}{dt}\left[\rho^2(\dot\lambda+n)\right]&=\frac{\partial W}{\partial\lambda},\\ \ddot z&=\frac{\partial W}{\partial z}.\end{aligned}\right\} \tag{14.55}$$

---

*) Здесь буква ρ обозначает проекцию радиуса-вектора точки M_2 на плоскость (xy).

4. Все рассмотренные в предыдущих разделах этого параграфа уравнения определяют движение точки M_2 («нулевой» массы) в пространстве, так что, вообще говоря, траектория точки M_2 есть пространственная кривая (кривая двоякой кривизны).

Но если в начальный момент времени точка M_2 находится в плоскости движения двух конечных масс и вектор ее начальной скорости также лежит в этой плоскости, то точка M_2 всегда будет оставаться в этой плоскости и ее орбита будет плоская кривая.

Иными словами, уравнения движения точки M_2 в виде (14.35′) или (14.39), или (14.49), или (14.54) всегда могут быть удовлетворены, если мы положим аппликату точки и ее первую производную равными нулю.

Тогда для определения движения точки в плоскости движения двух конечных масс мы будем иметь систему четвертого порядка, задача интегрирования которой, конечно, несколько проще задачи интегрирования первоначальной системы шестого порядка.

Соответствующая механическая задача называется плоской ограниченной задачей трех тел и ее дифференциальные уравнения (которые имеет смысл выписать отдельно) имеют следующий вид: в системе ($G\xi\eta\zeta$) с неизменными направлениями осей

$$\left.\begin{aligned} \ddot{\xi} &= \frac{\partial W}{\partial \xi} = -fm_0\frac{\xi-\xi_0}{r_0^3} - fm_1\frac{\xi-\xi_1}{r_1^3}, \\ \ddot{\eta} &= \frac{\partial W}{\partial \eta} = -fm_0\frac{\eta-\eta_0}{r_0^3} - fm_1\frac{\eta-\eta_1}{r_1^3}, \end{aligned}\right\} \tag{14.56}$$

где

$$\left.\begin{aligned} r_0^2 &= (\xi-\xi_0)^2+(\eta-\eta_0)^2, \\ r_1^2 &= (\xi-\xi_1)^2+(\eta-\eta_1)^2, \end{aligned}\right\} \tag{14.56′}$$

а ξ_0, η_0 и ξ_1, η_1 имеют прежние значения.

Во вращающейся системе координат имеем уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}-2\dot{v}\dot{y}-\dot{v}^2x-\ddot{v}y &= \frac{\partial W}{\partial x} = -fm_0\frac{x-x_0}{r_0^3} - fm_1\frac{x-x_1}{r_1^3}, \\ \ddot{y}+2\dot{v}\dot{x}-\dot{v}^2x+\ddot{v}y &= \frac{\partial W}{\partial y} = -fm_0\frac{y}{r_0^3} - fm_1\frac{y}{r_1^3}, \end{aligned}\right\} \tag{14.57}$$

где

$$\left.\begin{aligned} r_0^2 &= (x-x_0)^2+y^2+z^2, \\ r_1^2 &= (x-x_1)^2+y^2+z^2, \end{aligned}\right\} \tag{14.57′}$$

а x_0 и x_1 определяются формулами (14.39′) (рис. 77).

При $\dot v = \text{const}$ получаем уравнения круговой плоской задачи

$$\left.\begin{aligned}\ddot x - 2n\dot y - n^2x &= \frac{\partial W}{\partial x},\\ \ddot y + 2n\dot x - n^2y &= \frac{\partial W}{\partial y}\end{aligned}\right\}\qquad(14.58)$$

с интегралом Якоби

$$\dot x^2 + \dot y^2 = n^2(x^2+y^2) + 2f\left(\frac{m_0}{r_0} + \frac{m_1}{r_1}\right) + 2h, \qquad (14.59)$$

причем x_0 и x_1 суть постоянные, определяемые формулами (14.40′).

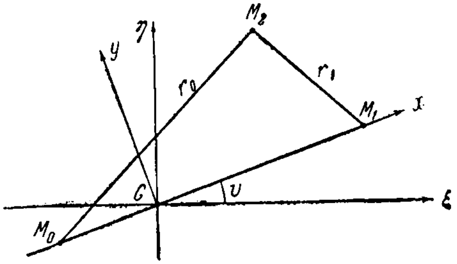


Рис. 77.

Канонические уравнения плоской ограниченной задачи во вращающихся осях имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x'}, & \frac{dx'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x},\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y'}, & \frac{dy'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y},\end{aligned}\right\}\qquad(14.60)$$

где характеристическая функция определяется формулой

$$H = \frac{1}{2}\left[x'^2 + y'^2 + 2\dot v(yx' - xy')\right] - W, \qquad (14.60')$$

а

$$x' = \dot x - \dot v y, \quad y' = \dot y + \dot v x.$$

При $\dot v = n$ имеем канонические уравнения круговой плоской задачи, которые имеют интеграл Якоби

$$H = h. \qquad (14.60')$$

Далее, в координатах Нехвила *) имеем следующие уравнения

---

*) Величины ξ, η не нужно смешивать с координатами в неподвижных осях.

плоской ограниченной задачи:

$$\left.\begin{aligned} \xi'' - 2\eta' - \rho\xi &= \nu^2\rho\frac{\partial R}{\partial \xi} = \nu^2\rho\left(-m_0\frac{\xi-\xi_0}{\rho_0^3} - m_1\frac{\xi-\xi_1}{\rho_1^3}\right), \\ \eta'' + 2\xi' - \rho\eta &= \nu^2\rho\frac{\partial R}{\partial \xi} = \nu^2\rho\left(-m_0\frac{\eta}{\rho_0^3} - m_1\frac{\eta}{\rho_1^3}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (14.61)$$

где

$$\left.\begin{aligned} \rho_0^2 &= (\xi-\xi_0)^2 + \eta^2, \\ \rho_1^2 &= (\xi-\xi_1)^2 + \eta^2, \end{aligned}\right\} \qquad (14.61')$$

а ξ_0 и ξ_1 определяются формулами (14.47) и суть величины постоянные.

Наконец, в цилиндрических координатах, отнесенных к неподвижным осям, имеем следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \ddot\rho - \rho(\dot\lambda + \dot v)^2 &= \frac{\partial W}{\partial \rho} = -fm_0\frac{\rho - x_0\cos\lambda}{r_0^3} - fm_1\frac{\rho - x_1\cos\lambda}{r_1^3}, \\ \frac{d}{dt}[\rho^2(\dot\lambda + \dot v)] &= \frac{\partial W}{\partial \lambda} = -fm_0\frac{x_0\sin\lambda}{r_0^3} - fm_1\frac{x_1\sin\lambda}{r_1^3}, \end{aligned}\right\} \qquad (14.62)$$

где

$$\left.\begin{aligned} r_0^2 &= \rho^2 - 2x_0\rho\cos\lambda + x_0^2, \\ r_1^2 &= \rho^2 - 2x_1\rho\cos\lambda + x_1^2. \end{aligned}\right\} \qquad (14.62')$$

§ 4. Частные решения ограниченной задачи трех тел. Точки либрации

1. Рассматривая уравнения Ляпунова (14.24), определяющие плоские движения трех тел с произвольными массами и полагая в этих уравнениях $m_2=0$, мы получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2r_1}{dt^2} - \omega^2 r_1 + \frac{f(m_0+m_1)}{r_1^2} = 0, \\ &\frac{d}{dt}(\omega r_1^2) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (14.63)$$

и

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2r_2}{dt^2} - (\omega + \dot\psi)^2 r_2 + \frac{fm_0}{r_2^2} + \frac{fm_1\cos\psi}{r_1^2} + \frac{fm_1\cos\varphi_2}{\Delta^2} = 0, \\ &\frac{d}{dt}\left[(\omega + \dot\psi) r_2^2\right] + \frac{fm_1 r_2\sin\varphi_2}{\Delta^2} - \frac{fm_1 r_2\sin\psi}{r_1^2} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (14.64)$$

Уравнения (14.63) содержат только неизвестные r_1 и ω и определяют поэтому кеплеровское движение точки M_1 под действием притяжения точки M_0 так, как будто бы точка M_2 вовсе и не существовала.

Проинтегрировав эти уравнения, мы получим r_1 и ω как известные функции времени, а тогда уравнения (14.64) определят движение «нулевой» массы, т. е. точки M_2, притягиваемой точками M_0 и M_1, но не оказывающей на них никакого влияния.

Таким образом, уравнения (14.64) являются уравнениями ограниченной задачи, определяющей движение точки M_2 в плоскости кеплеровской орбиты точки M_1 вокруг M_0.

Но в § 2 было показано, что уравнения (14.24) имеют частные решения, в которых все три точки M_0, M_1 и M_2 образуют равносторонний треугольник или располагаются все на одной и той же прямой, проходящей через центр масс G.

Существование этих частных решений не зависит от значений масс m_0, m_1 и m_2, а поэтому эти лагранжевы решения имеют место и при $m_2=0$, т. е. и в ограниченной задаче.

Нетрудно, впрочем, убедиться и непосредственно, что уравнения (14.64) удовлетворяются, если мы положим

$$r_2 = r_1, \quad \psi = \pm 60^\circ, \tag{14.65}$$

что соответствует двум треугольным лагранжевым решениям L_4 и L_5.

Уравнения (14.64) удовлетворяются также, если мы положим соответственно:

$$r_2 = \frac{1}{a} r_1, \quad \psi = 180^\circ, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad (L_1) \tag{14.66}$$

$$r_2 = \frac{1}{a+1} r_1, \quad \psi = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 180^\circ, \quad (L_2) \tag{14.67}$$

$$r_2 = \frac{1}{a+1} r_1, \quad \psi = 0, \quad \varphi_1 = 180^\circ, \quad \varphi_2 = 0, \quad (L_3) \tag{14.68}$$

где a есть постоянная, определяемая соответственно уравнениями, получаемыми из уравнений (14.31″), (14.32″), (14.33″) при $m_2=0$, а поэтому имеющими такой вид:

$$m_0a^5 + 2m_0a^4 + m_0a^3 - \\ - (m_0 + 3m_1)a^2 - (2m_0 + 3m_1)a - (m_0 + m_1) = 0, \tag{14.66′}$$

$$m_0a^5 + 3m_0a^4 + 3m_0a^3 - 3m_1a^2 - 3m_1a - m_1 = 0, \tag{14.67′}$$

и

$$(m_0 + m_1)a^5 + (3m_0 + 2m_1)a^4 + (3m_0 + m_1)a^3 - \\ - m_1a^2 - 2m_1a - m_1 = 0. \tag{14.68′}$$

Считая по-прежнему $m_0 \geqslant m_1$, мы видим, что каждое из этих уравнений имеет единственный положительный корень, больший или равный единице для (L_1), меньший или равный единице для (L_2) и меньший единицы для (L_3).

Пять точек L_1, L_2, L_3, L_4, L_5 в плоскости треугольника ($M_0M_1M_2$) (рис. 78), называемые точками либрации, соответствуют пяти частным решениям ограниченной задачи (круговой, эллиптической, параболической или гиперболической), и каждая из них описывает кеплеровскую орбиту вокруг точки M_0 или вокруг центра масс G точек M_0 и M_1, подобную той кеплеровой орбите, которую описывает точка M_1 в своем невозмущенном движении вокруг точки M_0 или вокруг точки G.

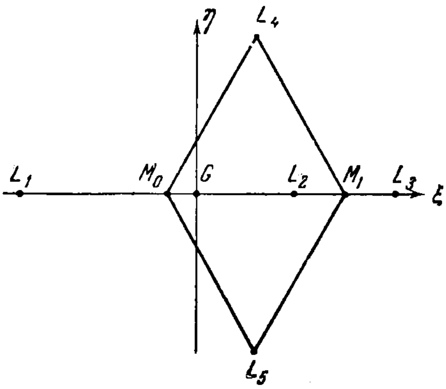


Рис. 78.

2. Представляет интерес установить существование лагранжевых частных решений, исходя также из уравнений движения ограниченной задачи в координатной форме.

Обратимся для этого к уравнениям Нехвила (14.49) пространственной ограниченной задачи, которые перепишем здесь в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} \xi'' - 2\eta' &= \rho F(\xi, \eta, \zeta), \\ \eta'' + 2\xi' &= \rho\Phi(\xi, \eta, \zeta), \\ \zeta'' &= \rho\Psi(\xi, \eta, \zeta; v), \end{aligned}\right\} \qquad (14.69)$$

где

$$\left.\begin{aligned} F(\xi, \eta, \zeta) &= \xi - \nu^2\left[m_0\frac{\xi-\xi_0}{\rho_0^3} + m_1\frac{\xi-\xi_1}{\rho_1^3}\right], \\ \Phi(\xi, \eta, \zeta) &= \eta\left[1 - \nu^2\left(\frac{m_0}{\rho_0^3} + \frac{m_1}{\rho_1^3}\right)\right], \\ \Psi(\xi, \eta, \zeta; v) &= \zeta\left[-e\cos v - \nu^2\left(\frac{m_0}{\rho_0^3} + \frac{m_1}{\rho_1^3}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (14.69')$$

Покажем, что уравнения (14.69) могут быть удовлетворены некоторыми постоянными значениями координат Нехвила ξ, η и ζ. Прежде всего заметим, что последнее из уравнений (14.69) может быть удовлетворено постоянным значением ζ только в том случае, когда это значение есть нуль*). Тогда уравнения (14.69) имеют постоянное решение

$$\xi = \alpha, \quad \eta = \beta, \quad \zeta = 0, \qquad (14.70)$$

---

*) При $e \neq 0$ функция Ψ не может обратиться в нуль ни при каких постоянных значениях ξ, η, ζ, а при $e=0$ Ψ есть существенно отрицательная величина.

где α и β удовлетворяют двум конечным уравнениям с двумя неизвестными, которые напишутся следующим образом:

$$F(\xi, \eta, 0) = 0, \quad \Phi(\xi, \eta, 0) = 0, \tag{14.71}$$

где левые части равенств определяются формулами (14.69′), в которых нужно положить $\zeta = 0$ и

$$\left.\begin{aligned} \rho_0^2 &= (\xi - \xi_0)^2 + \eta^2, \\ \rho_1^2 &= (\xi - \xi_1)^2 + \eta^2, \end{aligned}\right\} \tag{14.71′}$$

причем

$$\xi_0 = -\frac{pm_1}{m_0 + m_1}, \quad \xi_1 = \frac{pm_0}{m_0 + m_1}. \tag{14.71″}$$

Каждому вещественному решению системы (14.71) соответствует постоянное частное решение уравнений (14.69), представляющее в системе координат Нехвила ($G\xi\eta\zeta$) (в которой точки M_0 и M_1 неподвижны) некоторую точку, лежащую в плоскости ($\xi\eta$), т. е. в плоскости орбиты точки M_1 относительно точки M_0 (или относительно точки G).

Следовательно, в каждом таком частном решении ограниченной задачи трех тел (материальных точек) точка «нулевой» массы M_2 также остается неподвижной в плоскости ($\xi\eta$), образуя вместе с точками M_0 и M_1 некоторую неизменную конфигурацию.

Эти неподвижные точки плоскости ($\xi\eta$), соответствующие частным решениям уравнений Нехвила (14.69), будем называть, как уже было отмечено, точками либрации.

Нетрудно установить (что уже было сделано выше другим путем), что таких точек либрации существует только пять, причем три из них (L_1, L_2 и L_3) лежат на оси абсцисс, т. е. на прямой, проходящей через точки M_0 и M_1, а две остальные (L_4 и L_5) находятся в вершинах двух равносторонних треугольников, общим основанием которых служит отрезок $\overline{M_0M_1}$.

Обратимся теперь к нахождению этих точек либрации, т. е. к разысканию вещественных решений системы уравнений (14.71).

3. Прежде всего замечаем, что так как $\Phi(\xi, 0, 0) \equiv 0$, то система (14.71) имеет решения, в которых $\eta = \beta = 0$ и которые, следовательно, соответствуют точкам либрации, лежащим на оси абсцисс, т. е. на прямой M_0M_1.

Абсциссы этих («прямолинейных», как их образно называют) точек либрации определяются уравнением

$$f(\xi) = F(\xi, 0, 0) = 0, \tag{14.72}$$

где, очевидно,

$$f(\xi) = \xi - \nu^2 \left[m_0 \frac{\xi - \xi_0}{[(\xi - \xi_0)^2]^{3/2}} + m_1 \frac{\xi - \xi_1}{[(\xi - \xi_1)^2]^{3/2}} \right]. \tag{14.72′}$$

Функция $f(\xi)$, определяемая формулой (14.72′), конечна и непрерывна при всех вещественных значениях переменной ξ, за исключением значений $\pm\infty$, ξ_0, ξ_1, при которых она обращается в бесконечность.

Далее, обозначая через ε весьма малое положительное число, мы видим из (14.72′), что знаки функции $f(\xi)$ чередуются следующим образом (см. график функции, изображенный на рис. 79):

$$f\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right)<0,\ f(\xi_0-\varepsilon)>0,\ f(\xi_0+\varepsilon)<0,\ f(\xi_1-\varepsilon)>0,$$

$$f(\xi_1+\varepsilon)<0,\ f\left(+\frac{1}{\varepsilon}\right)>0.$$

Отсюда следует, что функция $f(\xi)$ (т. е. уравнение (14.72)) имеет только три вещественных корня: $\alpha_1<\xi_0$, $\xi_0<\alpha_2<\xi_1$ и $\alpha_3>\xi_1$.

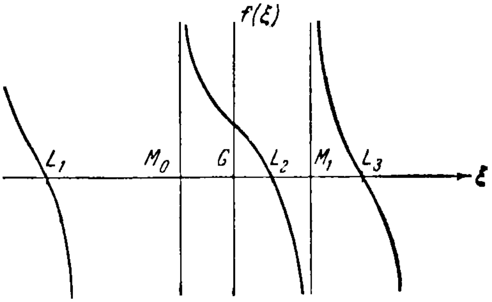


Рис. 79.

Поэтому, действительно, на прямой M_0M_1 мы имеем только три точки либрации: $L_1(\alpha_1, 0, 0)$, лежащую левее точки M_0, $L_2(\alpha_2, 0, 0)$, лежащую между точками M_0 и M_2, и $L_3(\alpha_3, 0, 0)$, лежащую правее точки M_1 (см. рис. 79).

Чтобы найти α_1, α_2, α_3, определяющие положения точек либрации L_1, L_2, L_3 на оси абсцисс $G\xi$, поступим следующим образом.

Для нахождения точки L_1 положим

$$\xi=\alpha_1=\xi_0-\frac{p}{a}=-\frac{pm_1}{m_0+m_1}-\frac{p}{a}.$$

Тогда имеем

$$\xi-\xi_0=\alpha_1-\xi_0=-\frac{p}{a},\quad \xi-\xi_1=\alpha_1-\xi_1=-\frac{a+1}{a}p.$$

Подставляя эти значения в уравнение (14.72) и сделав необходимые приведения и упрощения, мы получим, как нетрудно проверить, то же самое уравнение (14.66′), какое мы вывели в предыдущем разделе.

Мы перепишем это уравнение несколько иным образом, полагая

$$\frac{m_1}{m_0+m_1}=\mu\leqslant\frac{1}{2},\quad \frac{m_0}{m_0+m_1}=1-\mu\geqslant\frac{1}{2}, \tag{14.73}$$

так что для определения точки L_1 будем иметь следующее уравнение:

$$F_1(a, \mu) = (1-\mu)a^5 + 2(1-\mu)a^4 + (1-\mu)a^3 - \\ -(1+2\mu)a^2 - (2+\mu)a - 1 = 0. \quad (14.74)$$

При $\mu = 0$ это уравнение имеет корень, равный единице. Так как

$$F_1(1, 0) = 0, \quad F'_{1a}(1, 0) = 12 \neq 0,$$

то при $\mu \neq 0$, но достаточно малом, это уравнение имеет единственный корень, представимый рядом, расположенным по степеням μ и обращающийся в единицу при $\mu = 0$ *).

Таким образом, будем иметь

$$a = 1 + a_1\mu + a_2\mu^2 + \ldots,$$

где по формулам Тейлора

$$a_k = \frac{1}{k!}\left(\frac{d^k a}{d\mu^k}\right)_{\mu=0} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Дифференцируя последовательно уравнение (14.74) по переменной μ, рассматривая a как неявную функцию от μ и полагая после каждого дифференцирования $\mu = 0$, $a = 1$, мы найдем числовые значения коэффициентов нашего ряда и в результате получим

$$a = 1 + \frac{7}{12}\mu + \frac{49}{144}\mu^2 + \ldots \qquad (14.74')$$

Для нахождения точки L_2 положим

$$\xi = \alpha_2 = \xi_0 + \frac{p}{a+1} = \frac{p}{a+1} - \frac{pm_1}{m_0 + m_1},$$

откуда

$$\xi - \xi_0 = \alpha_2 - \xi_0 = \frac{p}{a+1}, \quad \xi - \xi_1 = \alpha_2 - \xi_1 = -\frac{ap}{a+1}.$$

Подставляя опять эти значения в уравнение (14.72), мы получим, как легко видеть (после приведений и упрощений), то же самое уравнение (14.67′), которое с помощью (14.73) напишем здесь в следующей форме:

$$F_2(a, \mu) = (1-\mu)a^5 + 3(1-\mu)a^4 + 3(1-\mu)a^3 - \\ -3\mu a^2 - 3\mu a - \mu = 0. \quad (14.75)$$

При $\mu = 0$ это уравнение имеет тройной корень, равный нулю, а поэтому, как это следует из общих теорем о неявных функ-

---

*) См., например, Э. Гурса, Курс математического анализа, т. 1, перев. с франц., 1933, или любой другой учебник математического анализа.

циях*), при $\mu \neq 0$, но достаточно малом, уравнение (14.75) имеет вещественный корень, представимый рядом, расположенным по целым степеням $\mu^{\frac{1}{3}}$.

Чтобы найти простейшим путем этот ряд, положим $\mu = \chi^3$ и перепишем уравнение (14.75) в виде

$$a = \chi\left[a^3 + 3 - \frac{6a+8}{a^2+3a+3}\right]^{\frac{1}{3}}. \tag{14.75'}$$

Полагая теперь

$$a = a_1\chi + a_2\chi^2 + a_3\chi^3 + \ldots$$

и находя коэффициенты путем последовательных дифференцирований уравнения (14.75′), мы имеем

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}, \quad a_2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{9}}, \quad a_3 = \frac{2}{27}, \ \ldots$$

и искомый ряд будет иметь следующий вид:

$$a = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{2}{3}} + 2\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{3}{3}} + \ldots \tag{14.75''}$$

Наконец, для нахождения точки L_3 положим

$$\xi = \alpha_3 = ap + \xi_1 = ap + \frac{pm_0}{m_0 + m_1}.$$

Тогда

$$\xi - \xi_0 = \alpha_3 - \xi_0 = (a+1)p; \quad \xi - \xi_1 = \alpha_3 - \xi_1 = ap.$$

После подстановки этих значений в уравнение (14.72), приведений и упрощений, мы получим, как можно видеть, уравнение (14.68′), которое напишем с помощью (14.73) в виде

$$F_3(a, \mu) = a^5 + (3-\mu)a^4 + (3-2\mu)a^3 - \mu a^2 - 2\mu a - \mu = 0. \tag{14.76}$$

При $\mu = 0$ это уравнение также имеет тройной нулевой корень, а следовательно, при $\mu \neq 0$, но достаточно малом, будет иметь корень, представляемый рядом, расположенным по целым степеням $\mu^{\frac{1}{3}}$, обращающимся в нуль при $\mu = 0$.

Определяя коэффициенты этого ряда таким же образом, как и в предшествующем случае, мы найдем

$$a = \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\mu}{3}\right)^{\frac{3}{3}} + \ldots \tag{14.76'}$$

---

*) См. Э. Губса, Курс математического анализа, т. I.

4. Обратимся теперь к нахождению точек либрации, не лежащих на оси абсцисс. Тогда $\eta \neq 0$, вследствие чего координаты этих точек определятся следующей системой уравнений:

$$F(\xi, \eta, 0) = 0, \quad \frac{1}{\eta}\Phi(\xi, \eta, 0) = 0. \tag{14.77}$$

Умножая второе из этих уравнений соответственно на $\xi - \xi_0$, $\xi - \xi_1$ и вычитая каждое произведение из первого уравнения системы (14.77), мы получим следующую систему, равносильную предыдущей:

$$\left.\begin{aligned} F - \frac{\xi - \xi_0}{\eta}\Phi &= \xi_0 + \frac{m_1\nu^2(\xi_1 - \xi_0)}{\rho_1^3} = 0, \\ F - \frac{\xi - \xi_1}{\eta}\Phi &= \xi_1 - \frac{m_0\nu^2(\xi_1 - \xi_0)}{\rho_0^3} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{14.77'}$$

Используя теперь (14.47) и (14.49′), мы приведем уравнения (14.77′) к простейшему виду:

$$\frac{p^3}{\rho_1^3} - 1 = 0, \quad 1 - \frac{p^3}{\rho_0^3} = 0. \tag{14.77''}$$

Единственные вещественные решения этих уравнений суть

$$\rho_0 = p, \quad \rho_1 = p, \tag{14.78}$$

и следовательно, мы действительно имеем две точки либрации, каждая из которых находится в вершине равностороннего треугольника с основанием $\overline{M_0M_1}$ (см. рис. 78).

Координаты этих точек L_4 и L_5 легко найти из уравнений (14.78) или просто из чертежа, воспользовавшись свойствами равностороннего треугольника, и мы имеем

$$\left.\begin{aligned} \alpha_4 = \alpha_5 &= \frac{p(m_0 - m_1)}{2(m_0 + m_1)} = \frac{p}{2}(1 - 2\mu), \\ \beta_4 = -\beta_5 &= \frac{p\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{14.78'}$$

Отметим, в заключение этого раздела, как изменяются положения точек либрации, когда меньшая из двух конечных масс неограниченно уменьшается.

Переходя к пределу при $\mu \to 0$, мы найдем следующие предельные значения расстояний прямолинейных точек либрации от M_0 и M_1 (при этом считается, что точки M_0 и M_1 остаются на месте):

$$\begin{aligned} L_1&: \quad \lim_{\mu \to 0} \rho_{01} = p, \quad \lim_{\mu \to 0} \rho_{11} = 2p, \\ L_2&: \quad \lim_{\mu \to 0} \rho_{02} = p, \quad \lim_{\mu \to 0} \rho_{12} = 0, \\ L_3&: \quad \lim_{\mu \to 0} \rho_{03} = p, \quad \lim_{\mu \to 0} \rho_{13} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что при уменьшении μ точка L_1 перемещается слева направо, приближаясь к своему предельному положению $\bar{L}_1(-p+\xi_0, 0)$. Точка L_2 также перемещается слева направо, приближаясь к точке M_1, а точка L_3 перемещается справа налево, приближаясь к точке M_1.

Точки L_4 и L_5 при $\mu \to 0$, разумеется, остаются в вершинах равностороннего треугольника, основание которого есть $\overline{M_0M_1}$. Но центр масс G, очевидно, перемещается справа налево и приближается к точке M_0.

5. В системе координат Нехвила точки M_0 и M_1 неподвижны, а поэтому все точки либрации также неподвижны. Чтобы найти реальные движения «нулевой» массы, т. е. точки M_2, в каждом из найденных частных решений уравнений Нехвила нужно возвратиться к неподвижной системе координат с неизменным масштабом. Обозначим для этого расстояния точек либрации L_k ($k=1, 2, 3, 4, 5$) до начала координат G в системе Нехвила через δ_k. Тогда имеем, вообще,

$$\delta_k = \sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2}. \tag{14.79}$$

Далее, из формул (14.15) находим решения уравнений движения во вращающихся осях (14.39), соответствующие либрационным решениям уравнений Нехвила:

$$x_k = \alpha_k\rho, \quad y_k = \beta_k\rho, \quad z_k = 0, \tag{14.80}$$

где ρ определяется формулой (14.45′) и есть известная функция времени. Полагая еще

$$R_k = \sqrt{x_k^2 + y_k^2 + z_k^2},$$

мы имеем из (14.80)

$$R_k = \rho\sqrt{\alpha_k^2 + \beta_k^2} = \rho\delta_k. \tag{14.80′}$$

Возвращаясь, наконец, к неподвижной системе координат *) ($G\xi\eta\zeta$), мы получим из (14.33) при помощи (14.80) следующие выражения для координат точки M_2, соответствующие частным решениям уравнений (14.35′):

$$\left.\begin{aligned} \xi_k &= \rho(\alpha_k \cos v - \beta_k \sin v) = R_k \cos v_k, \\ \eta_k &= \rho(\alpha_k \sin v + \beta_k \cos v) = R_k \sin v_k, \end{aligned}\right\} \tag{14.81}$$

где v_k обозначает угол, образованный радиусом-вектором R_k в этих частных решениях с положительным направлением оси

---

*) Напоминаем, что здесь буквы ξ, η, ζ обозначают уже не координаты Нехвила, а координаты в неизменной системе.

$G\xi$, т. е. с направлением на перицентр кеплеровской орбиты точки M_1. Легко видеть, что

$$\left.\begin{aligned} &v_1 = v + 180^\circ, \quad v_2 = v, \quad v_3 = v, \\ &v_4 = v + 60^\circ, \quad v_5 = v - 60^\circ. \end{aligned}\right\} \tag{14.81'}$$

Из (14.80′), (14.81) и (14.81′) непосредственно видно, что в каждом из пяти частных лагранжевых решений точка M_2 описывает вокруг точки G (или вокруг точки M_0) кеплеровскую орбиту, эксцентриситет которой равен эксцентриситету e кеплеровской орбиты точки M_1. Таким образом, в лагранжевых решениях ограниченной задачи трех тел все три точки M_0, M_1, M_2 ($m_2=0$) описывают подобные конические сечения (эллипсы, параболы или гиперболы, в частности, окружности) вокруг общего центра масс G, сохраняя при этом во все время движения неизменную конфигурацию или оставаясь на одной и той же прямой, или образуя равносторонний треугольник.

Найдем еще скорость V_k ($k=1, 2, 3, 4, 5$) точки M_2 в каждом из лагранжевых решений относительно неподвижной системы координат ($G\xi\eta\zeta$).

Из формул (14.81) находим составляющие скорости V_k в неподвижных осях с началом в центре масс G точек M_0 и M_1:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi}_k &= \frac{\delta_k}{p}(\dot{r}\cos v_k - r\dot{v}_k \sin v_k), \\ \dot{\eta}_k &= \frac{\delta_k}{p}(\dot{r}\sin v_k + r\dot{v}_k \cos v_k). \end{aligned}\right\} \tag{14.82}$$

Далее, формулы (14.36‴) дают составляющие скорости V точки M_1 в той же системе координат*):

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi} &= (1-\mu)(\dot{r}\cos v - r\dot{v}\sin v), \\ \dot{\eta} &= (1-\mu)(\dot{r}\sin v + r\dot{v}\cos v). \end{aligned}\right\} \tag{14.82'}$$

Отсюда находим

$$V_k^2 = \frac{\delta_k^2}{p^2}(\dot{r}^2 + \dot{v}_k^2 r^2), \quad V^2 = (1-\mu)^2(\dot{r}^2 + \dot{v}^2 r^2).$$

Так как $\dot{v}_k = \dot{v}$, то имеем

$$V_k = \frac{\delta_k}{(1-\mu)p} V, \tag{14.83}$$

т. е. скорость точки M_2 в каждом из лагранжевых движений пропорциональна скорости кеплеровского движения точки M_1.

---

*) Координаты точки M_1 здесь обозначены просто через ξ и η.

Далее, из (14.82) и (14.82′) имеем для $k=1, 2, 3$

$$\frac{\dot{\xi}_k}{V_k} = \pm\frac{\dot{\xi}}{V}, \quad \frac{\dot{\eta}_k}{V_k} = \pm\frac{\dot{\eta}}{V}$$

(знак минус для $k=1$, знак плюс для $k=2, 3$), откуда следует, что скорость M_2 в лагранжевых движениях L_2 и L_3 параллельна скорости точки M_1 и имеет с ней одинаковое направление, а скорость M_2 в лагранжевом движении L_1 параллельна и противоположна по направлению скорости точки M_1.

Для $k=4, 5$ находим из (14.82) и (14.82′)

$$\frac{\dot{\xi}_k}{V_k} = \frac{\dot{\xi}}{V}\cos 60^\circ \mp \frac{\dot{\eta}}{V}\sin 60^\circ, \quad \frac{\dot{\eta}_k}{V_k} = \frac{\dot{\xi}}{V}\sin 60^\circ \pm \frac{\dot{\eta}}{V}\cos 60^\circ,$$

откуда следует, что направление скорости точки M_2 в лагранжевых движениях L_4 и L_5 образует с направлением скорости точки M_1 угол, равный $\pm 60^\circ$.

Лагранжевы решения ограниченной задачи трех тел принимают особенно простой вид в случае круговой задачи. Действительно, в этом случае точка M_1 описывает вокруг M_0 (или вокруг центра масс G) окружность, и мы имеем $e=0$, $\rho=1$ и $\dot{v}=n$. Тогда различие между системой (14.41) и системой уравнений Нехвила исчезает и все точки либрации оказываются неподвижными и в системе $(Gxyz)$. Следовательно, в каждом из лагранжевых решений точка M_2 описывает вокруг точки G окружность радиуса a с постоянной угловой скоростью, равной угловой скорости движения точки M_1.

Неизменные конфигурации трех точек в этом случае оказываются также *постоянными конфигурациями*, так что в прямолинейных решениях все три точки остаются на одной прямой, а расстояния между ними суть величины постоянные. В треугольных решениях все три точки остаются в вершинах равностороннего треугольника, стороны которого также остаются равными одной и той же постоянной величине.

Примечание. Мы не только установили существование пяти частных решений ограниченной задачи трех тел, в которых отношения расстояний между движущимися точками остаются постоянными, но и доказали, по существу, что никаких других частных решений этого рода ограниченная задача трех тел не имеет. Действительно, уравнения Нехвила (14.69) имеют постоянные частные решения только при таких значениях координат, которые удовлетворяют одновременно всем трем уравнениям (14.69′). Но было показано, что эти уравнения могут быть удовлетворены, во-первых, только при $\zeta=0$, а во-вторых, когда две другие координаты удовлетворяют двум первым уравнениям (14.69), в которых положено $\zeta=0$.

Эти два первые уравнения имеют, как было показано, только пять решений, соответствующих пяти точкам либрации (в системе координат Нехвила), три из которых лежат на оси абсцисс, а две остальные находятся в вершинах равносторонних треугольников, имеющих общим основанием отрезок $\overline{M_0M_1}$.

Так как никаких других решений уравнения (14.69) не имеют, то ограниченная задача трех тел не имеет никаких других частных решений, в которых отношения расстояний между тремя точками оставались бы постоянными.

Разумеется, ограниченная задача трех тел имеет бесчисленное множество частных решений другого рода (например, решения, близкие к лагранжевым), но они не являются столь простыми, как решения Лагранжа и не могут быть представлены конечными формулами.

§ 5. Задача двух неподвижных центров

1. Несмотря на то, что нам известны некоторые частные решения ограниченной (и даже общей) задачи трех тел, общее ее решение до сих пор не найдено, так что уравнения движения этой задачи мы не умеем (при современном состоянии математики, по крайней мере) проинтегрировать до конца.

Даже в простейшем случае — круговой ограниченной задачи, где существует один первый интеграл (интеграл Якоби), мы не можем довести интегрирование до конца.

Однако один частный, или, лучше сказать, специальный случай ограниченной круговой задачи трех тел оказывается вполне интегрируемым, и общее решение задачи в этом специальном случае может быть написано в квадратурах. Мы имеем в виду так называемую задачу двух неподвижных центров, которая была проинтегрирована еще Эйлером и с тех пор неизменно привлекала к себе внимание многих механиков и математиков. Задача двух неподвижных центров заключается в определении движения материальной точки «нулевой массы», притягиваемой двумя конечными неподвижными точечными массами, но не оказывающей на них никакого влияния. Поэтому эту задачу можно рассматривать как специальный случай ограниченной задачи, в котором только две конечные массы остаются неподвижными, не только в относительной, но и в неизменной системе координат.

Дифференциальные уравнения движения точки M_2 в задаче двух неподвижных центров получатся из общих уравнений ограниченной задачи трех тел (14.35′), если координаты ξ_0, η_0 и ξ_1, η_1 двух конечных масс M_0 и M_1 рассматривать как величины постоянные, или, если положить в уравнениях (14.39) $\dot{v}=0$, $e=0$.

Если рассматривать уравнения круговой ограниченной задачи (14.41) и положить в этих уравнениях $n=0$, то опять получим уравнения задачи двух неподвижных центров.

Таким образом, если рассмотреть две материальные точки M_0 и M_1, с массами m_0 и m_1 соответственно, неподвижные в неизменной системе координат $(Gxyz)$, с началом в центре масс G этих точек, ось абсцисс которой проходит через точки

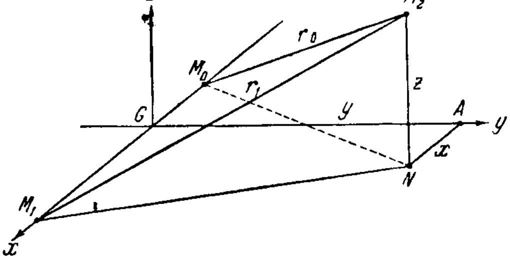


Рис. 80.

M_0, M_1, то уравнения движения материальной точки M_2 (пренебрежимо малой или нулевой массы) напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{x}&=\frac{\partial\Omega}{\partial x}=-fm_0\frac{x-x_0}{r_0^3}-fm_1\frac{x-x_1}{r_1^3},\\ \ddot{y}&=\frac{\partial\Omega}{\partial y}=-fm_0\frac{y}{r_0^3}-fm_1\frac{y}{r_1^3},\\ \ddot{z}&=\frac{\partial\Omega}{\partial z}=-fm_0\frac{z}{r_0^3}-fm_1\frac{z}{r_1^3},\end{aligned}\right\}\qquad(14.84)$$

где

$$\Omega=f\left(\frac{m_0}{r_0}+\frac{m_1}{r_1}\right).\qquad(14.85)$$

Расстояния r_0 и r_1 движущейся точки M_2 до неподвижных центров M_0 и M_1 определяются уже известными формулами (см. формулы (14.39′)) (рис. 80)

$$\left.\begin{aligned}r_0^2&=(x-x_0)^2+y^2+z^2,\\ r_1^2&=(x-x_1)^2+y^2+z^2,\end{aligned}\right\}\qquad(14.86)$$

где

$$x_0=-\frac{2cm_1}{m_0+m_1},\quad x_1=\frac{2cm_0}{m_0+m_1},\qquad(14.87)$$

причем расстояние $\overline{M_0M_1}$ между неподвижными точками M_0 и M_1 обозначено через $2c$.

Уравнения (14.84) можно также, разумеется, написать в канонической форме, принимая x, y, z за канонические координаты, а их производные по времени, т. е. $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, за сопряженные им обобщенные импульсы.

Канонические уравнения задачи двух неподвижных центров будут иметь вид

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{dx}{dt}=+\dfrac{\partial H}{\partial \dot{x}}, & \dfrac{dy}{dt}=+\dfrac{\partial H}{\partial \dot{y}}, & \dfrac{dz}{dt}=+\dfrac{\partial H}{\partial \dot{z}}, \\ \dfrac{d\dot{x}}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial x}, & \dfrac{d\dot{y}}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial y}, & \dfrac{d\dot{z}}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial z}, \end{array}\right\} \tag{14.88}$$

где характеристическая функция (гамильтониан) определяется формулой

$$H=T-\Omega=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-f\left(\frac{m_0}{r_0}+\frac{m_1}{r_1}\right). \tag{14.89}$$

Уравнения (14.84) имеют очевидный интеграл (получающийся также из интеграла Якоби (14.42) при $n=0$)

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2=2f\left(\frac{m_0}{r_0}+\frac{m_1}{r_1}\right)+2h, \tag{14,84'}$$

которому соответствует интеграл энергии системы (14.88) в виде

$$H=h=\text{const}, \tag{14.88'}$$

но уравнения задачи имеют в этом случае и другие интегралы, которые будут выведены в следующем разделе.

Мы уже отметили, что задача двух неподвижных центров известна еще со времен Эйлера и с тех пор служит источником множества работ, в которых рассматривались различные приемы интегрирования уравнений (14.84) и изучались весьма подробно общие свойства движений и траекторий. Однако до самого недавнего времени эта любопытная задача не имела никаких астрономических приложений, разумеется, из-за отсутствия в космическом пространстве таких систем небесных тел, которые могли бы считаться неподвижными.

Тем не менее, и ранее указывалось на возможность использования задачи двух неподвижных центров, как некоторого первого приближения в реальных астрономических задачах, например, в задачах о движении малых планет или комет под действием притяжения Солнца и Юпитера *). Действительно, так как Юпитер описывает свою почти круговую орбиту вокруг

---

*) См., например, Jacobi, Vorlesungen uber dynamik, Berlin, 1884; русский перевод под ред. проф. Н. С. Кошлякова, ОНТИ, 1936; C. L. Charlier, Die mechanik des himmels, Berlin, 1927; русский перевод под ред. проф. Б. М. Щиголева, «Наука», 1966.

Солнца примерно за 12 лет, то в течение небольшого промежутка времени его можно считать неподвижным, а тогда движение малой планеты или кометы можно определить в первом приближении формулами задачи двух неподвижных центров. Задачу о движении космического корабля к Луне также можно рассматривать в первом приближении, как задачу двух неподвижных центров, так как за время перелета к Луне (около четырех суток) последняя переместится по своей почти круговой орбите вокруг Земли не очень значительно.

В настоящее время появились и другие возможности использования задачи двух неподвижных центров, о чем будет речь ниже.

2. Для интегрирования задачи двух неподвижных центров рассмотрим канонические уравнения (14.88).

Однако, так же как и в случае задачи двух тел (см. часть 3), применить непосредственно к системе (14.88) метод Гамильтона — Якоби не удается, поскольку в соответствующем уравнении с частными производными переменные не разделяются.

Для того чтобы получить интегрируемое в квадратурах уравнение Гамильтона — Якоби, нужно перейти к новым переменным, что можно сделать множеством различных способов.

Сделаем здесь следующее преобразование. Введем вместо координат x, y, z новые переменные, которые обозначим буквами λ, μ, w, посредством подстановки

$$\left.\begin{aligned} x &= c\lambda\mu + \frac{1}{2}(x_0 + x_1), \\ y &= c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}\cos w, \\ z &= c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}\sin w, \end{aligned}\right\} \tag{14.90}$$

где в действительных движениях

$$+1 \leqslant \lambda < +\infty, \quad -1 \leqslant \mu \leqslant +1. \tag{14.90'}$$

Выразим теперь через новые переменные живую силу T и силовую функцию Ω. Прежде всего заметим, что, так как

$$\frac{x_0 + x_1}{2} = \frac{m_0 - m_1}{m_0 + m_1}\cdot c, \qquad \frac{x_1 - x_0}{2} = c,$$

то формулы (14.86) дают

$$r_0^2 = (x - x_0)^2 + y^2 + z^2 = c^2(\lambda + \mu)^2,$$
$$r_1^2 = (x - x_1)^2 + y^2 + z^2 = c^2(\lambda - \mu)^2,$$

откуда имеем

$$r_0 = c(\lambda + \mu), \quad r_1 = c(\lambda - \mu). \tag{14.91}$$

Из этих формул следует

$$\lambda = \frac{r_0 + r_1}{2c}, \quad \mu = \frac{r_0 - r_1}{2c}, \tag{14.91'}$$

что дает простое геометрическое значение новых переменных λ и μ. Из (14.91′) видно, что уравнение $\lambda = \text{const}$ представляет собой эллипсоид вращения вокруг оси (Gx), фокусы которого находятся в точках M_0 и M_1. Уравнение $\mu = \text{const}$ представляет гиперболоид вращения вокруг оси (Gx) также с фокусами в M_0 и M_1.

Заметим еще, что так как

$$\frac{y}{z} = \operatorname{ctg} w,$$

то уравнение $w = \text{const}$ есть уравнение плоскости, проходящей через ось (Gx). Поэтому переменные λ, μ, w являются некоторым частным случаем эллипсоидальных координат Ламе (см. гл. V этой книги).

Теперь формулы (14.91) дают выражение для силовой функции Ω, определяемой формулой (14.85), в новых переменных:

$$\Omega = \frac{f}{c} \cdot \frac{(m_0 + m_1)\lambda - (m_0 - m_1)\mu}{\lambda^2 - \mu^2}. \tag{14.92}$$

Дифференцируя теперь формулы (14.90), мы найдем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= c(\mu\dot{\lambda} + \lambda\dot{\mu}), \\ \dot{y} &= c\left(\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-1}}\,\lambda\dot{\lambda} - \sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1-\mu^2}}\,\mu\dot{\mu}\right)\cos w - \\ &\qquad - c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}\,\sin w \cdot \dot{w}, \\ \dot{z} &= c\left(\sqrt{\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-1}}\,\lambda\dot{\lambda} - \sqrt{\frac{\lambda^2-1}{1-\mu^2}}\,\mu\dot{\mu}\right)\sin w + \\ &\qquad + c\sqrt{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}\,\cos w \cdot \dot{w}, \end{aligned}\right\} \tag{14.93}$$

откуда получим без труда выражение для живой силы T в новых переменных:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \\ &= \frac{c^2(\lambda^2-\mu^2)}{4}\left[\frac{\dot{\lambda}^2}{\lambda^2-1} + \frac{\dot{\mu}^2}{1-\mu^2}\right] + \frac{c^2(\lambda^2-1)(1-\mu^2)\dot{w}^2}{2}. \end{aligned} \tag{14.94}$$

Введем обобщенные импульсы λ', μ', w' обычными формулами:

$$\left.\begin{aligned} \lambda' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2-1} \dot{\lambda}, \\ \mu' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\mu}} = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\mu^2} \dot{\mu}, \\ w' &= \frac{\partial T}{\partial \dot{w}} = c^2 (\lambda^2-1)(1-\mu^2) \dot{w}. \end{aligned}\right\} \qquad (14.94')$$

Выражение для T может быть теперь написано в виде

$$T = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2-\mu^2} \lambda'^2 + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1-\mu^2}{\lambda^2-\mu^2} \mu'^2 + \\ + \frac{1}{2c^2} \cdot \frac{1}{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)} w'^2. \qquad (14.95)$$

Величины

$$\left.\begin{matrix} \lambda, & \mu, & w \\ \lambda', & \mu', & w' \end{matrix}\right\} \qquad (14.96)$$

являются каноническими переменными (см. § 4 гл. VI) и определяются системой Гамильтона:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda'}, & \frac{d\lambda'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda}, \\ \frac{d\mu}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mu'}, & \frac{d\mu'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mu}, \\ \frac{dw}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial w'}, & \frac{dw'}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial w} \end{aligned}\right\} \qquad (14.97)$$

с характеристической функцией

$$H = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2-\mu^2} \lambda'^2 + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1-\mu^2}{\lambda^2-\mu^2} \mu'^2 + \frac{w'^2}{2c^2(\lambda^2-1)(1-\mu^2)} - \\ - \frac{f}{c} \cdot \frac{(m_0+m_1)\lambda - (m_0-m_1)\mu}{\lambda^2-\mu^2}. \qquad (14.97')$$

3. Для интегрирования системы (14.97) составим соответствующее уравнение Гамильтона — Якоби, которое ввиду (14.97′) напишется следующим образом:

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2-\mu^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \lambda}\right)^2 + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1-\mu^2}{\lambda^2-\mu^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \mu}\right)^2 + \frac{1}{2c^2(\lambda^2-1)(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial S}{\partial w}\right)^2 - \\ - \frac{f}{c} \frac{(m_0+m_1)\lambda - (m_0-m_1)\mu}{\lambda^2-\mu^2} = h, \qquad (14.98)$$

откуда, после упрощений, имеем

$$(\lambda^2-1)\left(\frac{\partial S}{\partial \lambda}\right)^2 + (1-\mu^2)\left(\frac{\partial S}{\partial \mu}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda^2-1} + \frac{1}{1-\mu^2}\right)\left(\frac{\partial S}{\partial w}\right)^2 = \\ = fc(m_0+m_1)\lambda - fc(m_0-m_1)\mu + hc^2(\lambda^2-\mu^2). \qquad (14.98')$$

Полный интеграл этого уравнения легко найти по способу разделения переменных. Действительно, будем искать решение уравнения (14.98′) в виде

$$S(\lambda,\ \mu,\ w)=S_1(\lambda)+S_2(\mu)+\alpha_3 w, \tag{14.99}$$

где α_3 — произвольная постоянная. Тогда уравнение (14.98′) будет удовлетворяться, если мы положим

$$\left.\begin{aligned}(\lambda^2-1)\left(\frac{dS_1}{d\lambda}\right)^2+\frac{\alpha_3^2}{2(\lambda^2-1)}-fc(m_0+m_1)\lambda-hc^2\lambda^2&=+\alpha_2,\\(1-\mu^2)\left(\frac{dS_1}{d\mu}\right)^2+\frac{\alpha_3^2}{2(1-\mu^2)}+fc(m_0-m_1)\mu+hc^2\mu^2&=-\alpha_2,\end{aligned}\right\} \tag{14.99′}$$

где α_2 — другая произвольная постоянная.

Каждое из уравнений (14.99) содержит только одну независимую переменную и интегрируется немедленно квадратурами. Полагая для сокращения

$$\left.\begin{aligned}L(\lambda)&=\alpha_2(\lambda^2-1)+fc(m_0+m_1)\lambda(\lambda^2-1)+\\&\quad+hc^2\lambda^2(\lambda^2-1)-\frac{1}{2}\alpha_3^2=hc^2\lambda^4+fc(m_0+m_1)\lambda^3+\\&\qquad\qquad+(\alpha_2-hc^2)\lambda^2-fc(m_0+m_1)\lambda-\frac{1}{2}\alpha_3^2,\\M(\mu)&=\alpha_2(\mu^2-1)+fc(m_0-m_1)\mu(\mu^2-1)+\\&\quad+hc^2\mu^2(\mu^2-1)-\frac{1}{2}\alpha_3^2=hc\mu^4+fc(m_0-m_1)\mu^3+\\&\qquad\qquad+(\alpha_2-hc^2)\mu^2-fc(m_0-m_1)\mu-\frac{1}{2}\alpha_3^2,\end{aligned}\right\} \tag{14.100}$$

мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned}S_1(\lambda)&=\int\frac{\sqrt{L(\lambda)}\,d\lambda}{\lambda^2-1},\\S_2(\mu)&=\int\frac{\sqrt{M(\mu)}\,d\mu}{1-\mu^2},\end{aligned}\right\} \tag{14.100′}$$

и искомый интеграл уравнения Гамильтона — Якоби (14.98) напишется следующим образом:

$$S(\lambda,\ \mu,\ w,\ h,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=\int\frac{\sqrt{L(\lambda)}\,d\lambda}{\lambda^2-1}+\int\frac{\sqrt{M(\mu)}\,d\mu}{1-\mu^2}+d_3 w. \tag{14.101}$$

Найдя функцию S, которая содержит три произвольные постоянные, $h=\alpha_1$, α_2, α_3, мы можем написать теперь общий интеграл системы (14.97) при помощи общей теоремы Гамильтона — Якоби об интегрировании канонических систем.

Этот общий интеграл напишется следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial h} &= \frac{c^2}{2}\int\frac{\lambda^2\,d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}} - \frac{c^2}{2}\int\frac{\mu^2\,d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} = t+\beta_1,\\
\frac{\partial S}{\partial \alpha_2} &= \frac{1}{2}\int\frac{d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}} - \frac{1}{2}\int\frac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} = \beta_2,\\
\frac{\partial S}{\partial \alpha_3} &= w - \frac{\alpha_3}{2}\int\frac{d\lambda}{(\lambda^2-1)\sqrt{L(\lambda)}} - \frac{\alpha_3}{2}\int\frac{d\mu}{(1-\mu^2)\sqrt{M(\mu)}} = \beta_3,
\end{aligned}\right\} \tag{14.102}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial \lambda} &= \frac{\sqrt{L(\lambda)}}{\lambda^2-1} = \lambda'; & \dot\lambda &= \frac{2}{c^2}\frac{\sqrt{L(\lambda)}}{\lambda^2-\mu^2},\\
\frac{\partial S}{\partial \mu} &= \frac{\sqrt{M(\mu)}}{1-\mu^2} = \mu'; & \dot\mu &= \frac{2}{c^2}\frac{\sqrt{M(\mu)}}{\lambda^2-\mu^2},\\
\frac{\partial S}{\partial w} &= \alpha_3 = w'; & \dot w &= \frac{\alpha_3}{c^2(\lambda^2-1)(1-\mu^2)},
\end{aligned}\right\} \tag{14.102'}$$

где β_1, β_2, β_3 — три новые произвольные постоянные.

Уравнения (14.102) связывают эллипсоидальные координаты λ, μ, w с временем t и шестью произвольными постоянными:

$$\left.\begin{aligned}
h=\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \alpha_3,\\
\beta_1,\quad \beta_2,\quad \beta_3,
\end{aligned}\right\} \tag{14.103}$$

и представляют собой, таким образом, уравнения орбиты (или траектории) точки M_2, движущейся под действием притяжения двух неподвижных центров M_0 и M_1.

Найдя λ, μ, w из этих уравнений в зависимости от времени и шести произвольных постоянных, мы получим затем без всякого труда обобщенные импульсы λ', μ', w', а также обобщенные скорости $\dot\lambda$, $\dot\mu$, $\dot w$.

После этого формулы (24.90) и (14.93) дадут прямоугольные координаты x, y, z и составляющие скорости $\dot x$, $\dot y$, $\dot z$.

Однако такая процедура требует прежде всего определения из двух первых уравнений (14.102) двух неизвестных λ и μ, что связано с решением сложной системы трансцендентных уравнений, левые части которых содержат эллиптические квадратуры.

Проще поступить следующим образом. Рассмотрим уравнения, определяющие обобщенные скорости, и напишем их в виде системы трех дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\left.\begin{aligned}
c^2(\lambda^2-\mu^2)\frac{d\lambda}{dt} &= 2\sqrt{L(\lambda)},\\
c^2(\lambda^2-\mu^2)\frac{d\mu}{dt} &= 2\sqrt{M(\mu)},\\
c^2(\lambda^2-\mu^2)\frac{dw}{dt} &= \frac{\alpha_3(\lambda^2-\mu^2)}{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)}.
\end{aligned}\right\} \tag{14.104}$$

Введем в этих уравнениях новую независимую переменную σ с помощью подстановки:

$$dt = \frac{1}{2} c^2 (\lambda^2 - \mu^2)\, d\sigma. \qquad (14.105)$$

Тогда уравнения (14.104) напишутся в виде

$$\frac{d\lambda}{d\sigma} = \sqrt{L(\lambda)}, \quad \frac{d\mu}{d\sigma} = \sqrt{M(\mu)}, \quad \frac{dw}{d\sigma} = \frac{\alpha_3 (\lambda^2 - \mu^2)}{2(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \qquad (14.104')$$

и каждое из этих уравнений интегрируется по отдельности.

Интегрируя сначала первые два уравнения (14.104), имеем

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}} = \sigma - \sigma_0, \quad \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}} = \sigma_0 - \sigma \qquad (\sigma_0 = -\beta_2),$$

откуда обращением эллиптических интегралов получим λ и μ:

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= \lambda(\sigma - \sigma_0,\ \lambda_0,\ h,\ \alpha_2,\ \alpha_3), \\ \mu &= \mu(\sigma - \sigma_0,\ \mu_0,\ h,\ \alpha_2,\ \alpha_3), \end{aligned}\right\} \qquad (14.106)$$

как эллиптические функции вспомогательной переменной σ.

После этого квадратурами получим также w и t, как функции переменной σ:

$$\left.\begin{aligned} w - w_0 &= \frac{\alpha_3}{2} \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{(\lambda^2 - \mu^2)\, d\sigma}{(\lambda^2 - 1)(1 - \mu^2)}, \\ t - t_0 &= \frac{c^2}{2} \int_{\sigma_0}^{\sigma} (\lambda^2 - \mu^2)\, d\sigma \end{aligned}\right\} \qquad (14.106')$$

и задача будет полностью разрешена.

Произвольными постоянными в формулах (14.106), (14.106′) являются h, α_2, α_3, λ_0, μ_0 и w_0, которые связаны с начальными значениями прямоугольных координат и составляющих скорости легко выводимыми соотношениями.

4. Орбиту точки M_2, определяемую квадратурами (14.102) задачи двух неподвижных центров, можно рассматривать так же, как первоначальную, промежуточную или невозмущенную орбиту в ограниченной задаче трех тел. Тогда метод изменения произвольных постоянных позволит нам найти решение ограниченной задачи, определяемое теми же формулами (14.102), (14.102′), в которых только произвольные постоянные (элементы невозмущенной орбиты) будут некоторыми функциями времени, определяемыми соответствующей системой канонических уравнений.

Чтобы показать это, возьмем уравнения ограниченной задачи (круговой, эллиптической, параболической или гиперболической) в координатах Нехвила, т. е. уравнения (14.98), в которых ξ_0 и ξ_1 суть величины постоянные, так что M_0 и M_1 являются в этой системе координат неподвижными центрами.

Для большего удобства введем в этих уравнениях вместо v новую независимую переменную τ, посредством подстановки

$$dv = n\,d\tau, \quad n = \frac{\sqrt{f}}{\nu}, \tag{14.107}$$

так что уравнения (14.49) будут иметь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\xi}{d\tau^2} - 2n\frac{d\eta}{d\tau} - n^2\rho\xi = \frac{\partial\Omega}{\partial\xi}, \\ &\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + 2n\frac{d\xi}{d\tau} - n^2\rho\eta = \frac{\partial\Omega}{\partial\eta}, \\ &\frac{d^2\zeta}{d\tau^2} + e\cos v\cdot n^2\rho\zeta = \frac{\partial\Omega}{\partial\zeta}. \end{aligned}\right\} \tag{14.108}$$

Нетрудно видеть, что уравнения (14.108) можно рассматривать как уравнения Лагранжа второго рода, в которых живая сила T определяется формулой

$$T = \frac{1}{2}(\dot\xi^2 + \dot\eta^2 + \dot\zeta^2) + n(\xi\dot\eta - \eta\dot\xi) + \\ + \frac{1}{2}n^2\rho(\xi^2 + \eta^2 - e\cos v\cdot\zeta^2), \tag{14.109}$$

а силовая функция есть

$$\Omega = f\rho R = f\rho\left(\frac{m_0}{\rho_0} + \frac{m_1}{\rho_1}\right). \tag{14.110}$$

Введем теперь вместо прямоугольных координат Нехвила эллипсоидальные координаты λ, μ, w теми же формулами (14.90), в которых нужно только буквы x, y, z заменить на ξ, η, ζ. Тогда первые производные $\dot\xi$, $\dot\eta$, $\dot\zeta$ *) определятся также формулами (14.93) и выражение для живой силы T в новых переменных представится в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0, \tag{14.109'}$$

где T_2 определяется формулой (14.94), T_1 есть линейная функция от $\dot\lambda$, $\dot\mu$, $\dot w$ вида **)

$$T_1 = b_1\dot\lambda + b_2\dot\mu + b_3\dot w,$$

---

*) «Точкой» здесь обозначено дифференцирование по переменной τ, которая совпадает с t в случае круговой задачи.

**) Развернутые выражения для T_1 и T_0 легко написать.

коэффициенты которой зависят от λ, μ, w, а T_0 — некоторая функция от эллипсоидальных координат.

Теперь вводим обобщенные импульсы обычными формулами, которые здесь напишутся следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \lambda' &= \frac{\partial T}{\partial \dot\lambda} = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\lambda^2-\mu^2}{\lambda^2-1}\dot\lambda + b_1, \\ \mu' &= \frac{\partial T}{\partial \dot\mu} = \frac{c^2}{2} \cdot \frac{\lambda^2-\mu^2}{1-\mu^2}\dot\mu + b_2, \\ w' &= \frac{\partial T}{\partial \dot w} = c^2(\lambda^2-1)(1-\mu^2)\dot w + b_3. \end{aligned}\right\} \qquad (14.110')$$

Определяя отсюда $\dot\lambda$, $\dot\mu$, $\dot w$ и подставляя полученные значения в формулу (14.109), мы получим новое выражение для T, которое представим в следующей форме:

$$T = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\lambda^2-1}{\lambda^2-\mu^2}\lambda'^2 + \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1-\mu^2}{\lambda^2-\mu^2}\mu'^2 + \frac{1}{2c^2}\,\frac{w'^2}{(\lambda^2-1)(1-\mu^2)} + \\ + B_1\lambda' + B_2\mu' + B_3 w' + T_0(\lambda,\ \mu,\ w,\ \tau). \qquad (14.110'')$$

Переменные λ, μ, w и λ', μ' w' являются сопряженными каноническими переменными, а поэтому уравнения ограниченной задачи в канонических эллипсоидальных координатах могут быть написаны в таком виде:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\tau} &= +\frac{\partial H}{\partial \lambda'}, & \frac{d\mu}{d\tau} &= +\frac{\partial H}{\partial \mu'}, & \frac{dw}{d\tau} &= +\frac{\partial H}{\partial w'}, \\ \frac{d\lambda'}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda}, & \frac{d\mu'}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial \mu}, & \frac{dw'}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial w}, \end{aligned}\right\} \qquad (14.111)$$

где характеристическая функция H определяется формулой

$$H = T_2 - T_0 - \Omega. \qquad (14.111')$$

Разобьем функцию H на сумму двух слагаемых, полагая

$$H = H_0 + H_1, \qquad (14.112)$$

где

$$H_0 = T_2 - \frac{1}{\rho}\Omega = \frac{1}{c^2}\frac{\lambda^2-1}{\lambda^2-\mu^2} \cdot \lambda'^2 + \frac{1}{c^2}\frac{1-\mu^2}{\lambda^2-\mu^2} \cdot \mu'^2 + \\ + \frac{w'^2}{2c^2(\lambda^2-1)(1-\mu^2)} - \frac{f}{c} \cdot \frac{(m_0+m_1)\lambda - (m_0-m_1)\mu}{\lambda^2-\mu^2} \qquad (14.112')$$

и

$$H_1 = -T_0 - e\cos v \cdot \Omega = -\tilde{H}. \qquad (14.112'')$$

Если мы заменим теперь в уравнениях (14.111) функцию H на H_0, определяемую формулой (14.112′), то получим в точности канонические уравнения задачи двух неподвижных центров, общий интеграл которой представится формулами (14.102), (14.102′) с заменой t на τ.

Метод изменения произвольных постоянных Лагранжа позволяет теперь представить общий интеграл уравнений (14.111), т. е. уравнений движения ограниченной задачи трех тел, теми же самыми формулами (14.102), (14.102′), в которых только величины α_k и β_k ($k=1, 2, 3$) уже не являются постоянными, а суть некоторые функции времени, определяемые следующей канонической системой:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{d\tau} &= +\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\beta_1}, & \frac{d\alpha_2}{d\tau} &= +\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\beta_2}, & \frac{d\alpha_3}{d\tau} &= +\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\beta_3}, \\ \frac{d\beta_1}{d\tau} &= -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\alpha_1}, & \frac{d\beta_2}{d\tau} &= -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\alpha_2}, & \frac{d\beta_3}{d\tau} &= -\frac{\partial\tilde{H}}{\partial\beta_3}. \end{aligned}\right\} \quad (14.113)$$

Уравнения (14.113) являются точными уравнениями возмущенного движения, для которого оскулирующей орбитой является орбита задачи двух неподвижных центров, независимо от типа движения конечных масс (в неподвижных осях).

Если ограниченная задача является круговой или эллиптической и если угловая скорость n и эксцентриситет e орбиты точки M_1 суть величины малые, то и возмущающая функция в системе (14.113) будет сохранять, по крайней мере в течение некоторого времени, численно малые значения и для нахождения приближенных значений функций α_k и β_k можно с успехом применить те же методы, которые были описаны в гл. XIII.

Однако для интегрирования уравнений (14.113) необходимо знать выражения для эллипсоидальных координат λ, μ, w в функции τ и величин α_k и β_k. Как уже было отмечено, эти выражения являются комбинациями эллиптических функций, тип которых зависит от начальных значений эллипсоидальных координат и их производных по времени.

Нашей целью было только указать, что для интегрирования ограниченной задачи трех тел (круговой, эллиптической, параболической или гиперболической) вполне можно использовать в качестве первого приближения (промежуточной орбиты) орбиту точки, притягиваемой двумя неподвижными центрами, а развитие метода и вывод всех необходимых и весьма громоздких формул не входит в задачи этой книги.

§ 6. Обобщенная задача двух неподвижных центров

1. В последнее время выявилась возможность использовать результаты интегрирования классической задачи двух неподвижных центров для изучения движения материальной точки (весьма малой, «нулевой» массы) в гравитационном поле, близком

к гравитационному полю Земли, или Луны, причем было отмечено, что возможна такая постановка задачи, в которой дифференциальные уравнения движения могут быть проинтегрированы в квадратурах*).

Рассмотрим сначала общую задачу о движении материальной точки в гравитационном поле произвольного твердого тела, которое, для простоты, будем здесь рассматривать как неподвижное.

Пусть нам задано некоторое твердое тело, т. е. заданы его форма, размеры и внутренняя структура. Выберем некоторую прямоугольную декартову систему координат с неизменными направлениями осей и с началом в центре масс O этого тела.

Тогда дифференциальные уравнения движения материальной точки P, притягиваемой (но не притягивающей) телом M, будут иметь следующий вид:

$$\ddot{x}=\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \ddot{y}=\frac{\partial U}{\partial y}, \quad \ddot{z}=\frac{\partial U}{\partial z}, \tag{14.114}$$

где U — силовая функция притяжения точки P телом M, определяемая вообще следующим разложением (см. гл. V):

$$U=f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Y_n(\theta, v)}{r^{n+1}}, \tag{14.115}$$

где

$$Y_n(\theta, v)=\sum_{k=0}^{n}P_n^{(k)}(\cos\theta)\left[A_{nk}\cos kv+B_{nk}\sin kv\right], \tag{14.115'}$$

а A_{nk} и B_{nk} суть постоянные коэффициенты, характеризующие форму, размеры и структуру тела M.

Выделим из разложения (14.115) члены, не зависящие от долготы v, и положим

$$U=U_0+\tilde{U}, \tag{14.116}$$

где

$$U_0=f\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_{n0}P_n(\cos\theta)}{r^{n+1}}, \tag{14.116'}$$

а $\tilde{U}$ — остальная часть разложения.

---

*) См. Е. А. Гребеников, В. Г. Демин, Е. П. Аксенов, Общее решение задачи о движении искусственного спутника в нормальном поле притяжения Земли. См. также Г. Н. Дубошин, Небесная механика. Аналитические и качественные методы, гл. VI; Д. Брауэр и Дж. Клеменс, Методы небесной механики. См. также статьи в сборнике «Проблемы движения искусственных небесных тел», 1963.

Обозначая через m массу тела M, а через a некоторую постоянную, имеющую размерность длины *), мы напишем разложение функции U_0 в следующей стандартной форме:

$$U_0 = \frac{fm}{r}\left\{1 + \sum_{n=2}^{\infty} J_n \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^n \cdot P_n\left(\frac{z}{r}\right)\right\}, \qquad (14.117)$$

где коэффициенты J_n выражаются через коэффициенты A_{n0} формулами

$$J_n = \frac{A_{n0}}{m \cdot a^n} \qquad (J_1 = 0). \qquad (14.117')$$

Задача о движении материальной точки в силовом поле, определяемом функцией (14.117), приводится к кеплеровской задаче, если все коэффициенты J_n равны нулю. В самом деле, тогда

$$U_0 = \frac{fm}{r} \qquad (r^2 = x^2 + y^2 + z^2),$$

и уравнения (14.114) определяют движение точки под действием ньютоновского притяжения неподвижной массы m, находящейся в начале координат. Если коэффициенты J_n не равны все нулю, то уравнения (14.114) вообще не интегрируются в квадратурах, и для решения задачи мы можем применить только метод изменения произвольных постоянных, основываясь на общей теории возмущенного кеплеровского движения и рассматривая функцию

$$U_0 - \frac{fm}{r} = \frac{fm}{r}\sum_{n=2}^{\infty} J_n \cdot \left(\frac{a}{r}\right)^n \cdot P_n\left(\frac{z}{r}\right)$$

как возмущающую функцию.

Однако, как показал М. Д. Кислик, коэффициенты J_n можно подобрать таким образом, чтобы уравнения движения (14.114) также интегрировались в квадратурах и чтобы подобранная таким образом силовая функция была достаточно близка к силовой функции (14.117), которая в свою очередь является главной частью разложения полной силовой функции U.

Проще всего показать это, рассматривая некоторую задачу двух неподвижных центров, которую мы поставим здесь (несколько меняя для удобства обозначения предыдущего параграфа) следующим образом.

2. Представим себе на оси аппликат системы координат ($Oxyz$) две материальные точки M_1 и M_2 (неподвижные центры), массы которых обозначим через m_1 и m_2, а аппликаты соответственно через c_1 и c_2.

---

*) Для Земли эта постоянная есть не что иное, как экваториальный радиус земного шара. В формуле (14.117) J_n — безразмерные величины.

Тогда задача о движении материальной точки P, притягиваемой этими двумя неподвижными центрами (но не притягивающей их!), приведется к интегрированию системы такого же вида как система (14.114), но с силовой функцией

$$\Omega = f\left(\frac{m_1}{r_1} + \frac{m_2}{r_2}\right), \tag{14.118}$$

где расстояния r_1 и r_2 точки P до неподвижных центров M_1 и M_2 определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= x^2 + y^2 + (z - c_1)^2, \\ r_2^2 &= x^2 + y^2 + (z - c_2)^2, \end{aligned}\right\} \tag{14.118'}$$

Рассмотрим какое-либо из двух обратных расстояний, например, функцию r_1^{-1}. Мы имеем

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2c_1 z + c_1^2}} = \frac{1}{r}\left[1 - 2\frac{c_1}{r}\cdot\frac{z}{r} + \left(\frac{c_1}{r}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

По свойствам производящей функции многочленов Лежандра (см. формулы (4.31) и (4.31′) гл. IV) мы можем теперь написать

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c_1}{r}\right)^n \cdot P_n\left(\frac{z}{r}\right), \quad \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c_2}{r}\right)^n \cdot P_n\left(\frac{z}{r}\right),$$

где второе разложение написано по очевидной аналогии.

Вследствие этих разложений силовая функция Ω представится следующим разложением:

$$\Omega = \frac{fm}{r}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n}{r^n}\cdot P_n\left(\frac{z}{r}\right)\right\}, \tag{14.119}$$

где положено

$$m = m_1 + m_2, \quad m\gamma_n = m_1 c_1^n + m_2 c_2^n. \tag{14.119'}$$

Сравнивая теперь разложения (14.117) и (14.119), мы видим, что силовая функция (14.118) может представить силовую функцию U_0 некоторого осесимметричного тела, если характеристические постоянные последнего удовлетворяют следующим условиям:

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_n = J_n \cdot a^n. \tag{14.120}$$

Считая величины m, a и все J_n данными, посмотрим, можно ли определить m_1, m_2, c_1 и c_2 так, чтобы выполнялись условия

(14.120). Формулы (14.119′) и (14.120) дают прежде всего следующие четыре уравнения:

$$\left.\begin{aligned} m_1 + m_2 = m, \quad & m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2 = mJ_2 a^2, \\ m_1 c_1 + m_2 c_2 = 0, \quad & m_1 c_2^3 + m_2 c_2^3 = mJ_3 a^3, \end{aligned}\right\} \qquad (14.121)$$

из которых выводим

$$m_1 = \frac{-mc_2}{c_1 - c_2}, \qquad m_2 = \frac{+mc_1}{c_1 - c_2}, \qquad (14.122)$$

что определяет массы двух неподвижных центров M_1 и M_2, когда известны аппликаты c_1, c_2, и

$$c_1 c_2 = -J_2 a^2, \qquad c_1 + c_2 = a \frac{J_3}{J_2}, \qquad (14.123)$$

что определяет аппликаты c_1 и c_2.

Равенства (14.123) показывают, что аппликаты c_1 и c_2 являются корнями квадратного уравнения

$$\chi^2 - a \frac{J_3}{J_2} \chi - J_2 a^2 = 0, \qquad (14.124)$$

решая которое, найдем c_1 и c_2, а затем, по формулам (14.122), m_1 и m_2.

Этим мы установили, что первые три члена в разложениях (14.117) и (14.119) совпадают, но все остальные члены в этих разложениях, конечно, совпадать не будут, так как все J_n $(n>2)$ суть определенные для данного тела постоянные, а найденные уже m_1, m_2, c_1, c_2 вообще не будут удовлетворять соотношениям (14.120) для $n \geqslant 4$.

Однако если $r > a$, то степени отношения a/r весьма быстро убывают при возрастании показателя n, а поэтому практически можно добиться, чтобы разложения (14.117) и (14.119) совпадали с достаточной степенью точности. Вследствие этого для приближенного изучения движения точки P в гравитационном поле тела с силовой функцией (14.117) можно в ряде случаев пользоваться формулами, получаемыми при решении задачи двух неподвижных центров.

Более строго задачу о движении точки в гравитационном поле любого (неподвижного) тела можно трактовать следующим образом. Представим силовую функцию U, определяемую общим разложением (14.115), в виде

$$U = \Omega + R_1 + R_2, \qquad (14.125)$$

где Ω определяется формулой (14.118), которой соответствует разложение (14.119), а R_1 и R_2 определяются соответственно формулами

$$R_1 = U_0 - \Omega = \frac{fm}{r} \sum_{n=4}^{\infty} \frac{J_n \cdot a^n - \gamma^n}{r^n} \cdot P_n\left(\frac{z}{r}\right), \qquad (14.125')$$

и

$$R_2 = U - U_0 = f\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{P_n^{(k)}(\cos\theta)\left[A_{nk}\cos kv + B_{nk}\sin kv\right]}{r^{n+1}}. \qquad (14.125'')$$

Движение точки P в силовом поле, определяемом функцией Ω, мы можем рассматривать как невозмущенное движение, а функции R_1, или R_1+R_2 как возмущающие функции. Но уравнения невозмущенного движения суть уравнения движения в задаче двух неподвижных центров, общий интеграл которой может быть получен, как показано выше, в виде квадратурных соотношений. Применяя теперь к уравнениям движения с полной силовой функцией U метод изменения произвольных постоянных, мы можем также найти решение (приближенное) первоначальной задачи. Пренебрегая частью R_2 полной силовой функции, мы получим несколько более простую задачу, которая также решается методом вариации постоянных.

3. Исследуем теперь полученные в предыдущем разделе формулы, определяющие массы и аппликаты двух неподвижных центров, когда все характеристические постоянные тела M известны.

Если рассматриваемое тело, все параметры которого будем считать действительными (причем m и a — положительными), таково, что дискриминант квадратного уравнения (14.124) есть величина положительная, то корни этого уравнения, т. е. величины c_1 и c_2, окажутся действительными, а следовательно, действительными будут также массы неподвижных центров m_1 и m_2, определяемые формулами (14.122). Силовая функция Ω задачи двух неподвижных центров также, разумеется, будет действительной.

Этот случай мы будем иметь когда $J_2>0$ (как, например, для однородного вытянутого эллипсоида вращения; см. § 5, гл. V) или при выполнении условия $J_3^2/J_2^2+4J_2>0$.

Если же дискриминант уравнения (14.124) отрицателен, то корни c_1, c_2 этого уравнения будут комплексными сопряженными, а тогда и величины m_1, m_2 также выйдут комплексными сопряженными.

Получающаяся задача, в которой массы и аппликаты неподвижных центров суть величины комплексные, называется в настоящее время обобщенной задачей двух неподвижных центров.

Следует заметить, что силовая функция Ω этой обобщенной задачи будет действительна, что вытекает из сопряженности комплексных масс и комплексных радиусов-векторов. Легко также убедиться, что все коэффициенты γ_n также окажутся величинами действительными.

Случай обобщенной задачи будет иметь место, когда $J_2 < 0$, и при этом выполняется неравенство $J_3^2/J_2^2 < -4J_2$.

Это имеет место для реальной Земли. Действительно, мы имеем следующие значения коэффициентов J_2 и J_3, полученные из обработки наблюдений искусственных спутников или из геодезических измерений (мы приводим округленные значения)

$$J_2 \approx -10^{-3}. \quad J_3 \approx +10^{-5}.$$

Таким образом, для Земли $\frac{J_3^2}{J_2^2} + 4J_2 < 0$, а поэтому и массы неподвижных центров и их аппликаты суть величины комплексные.

Заметим, что коэффициент J_3, характеризующий асимметрию Земли относительно экватора, весьма мал. Если пренебречь членом с этим коэффициентом, то величины c_1 и c_2 окажутся чисто мнимыми, а массы m_1 и m_2 — действительными, каждая из которых равна $m/2$.

Рассмотрим теперь обобщенную задачу двух неподвижных центров несколько подробнее. Положим для удобства последующих выкладок

$$c_1 = c(\sigma + i), \quad c_2 = c(\sigma - i), \quad i = \sqrt{-1}, \tag{14.126}$$

так что имеем

$$c = \frac{a}{2}\sqrt{-\Delta}, \quad \sigma = \frac{J_3}{2\sqrt{-\Delta}}, \quad \Delta = \frac{J_3^2}{J_2^2} + 4J_2. \tag{14.126$'$}$$

Очевидно, постоянная c имеет размерность длины, а σ есть безразмерная постоянная, характеризующая асимметрию тела M относительно его экватора *). Если тело M симметрично, то $J_3 = \sigma = 0$ и $c_1 = +ci$, $c_2 = -ci$.

Теперь из (14.122) с помощью (14.126) получим

$$m_1 = \frac{m}{2}(1 + \sigma i), \quad m_2 = \frac{m}{2}(1 - \sigma i), \tag{14.126$''$}$$

и силовая функция Ω обобщенной задачи двух неподвижных центров представится следующей формулой:

$$\Omega = \frac{fm}{2}\left\{\frac{1 + \sigma i}{r_1} + \frac{1 - \sigma i}{r_2}\right\}, \tag{14.127}$$

где радиусы-векторы r_1 и r_2 определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} r_1^2 &= x^2 + y^2 + [z - c(\sigma + i)]^2, \\ r_2^2 &= x^2 + y^2 + [z - c(\sigma - i)]^2. \end{aligned}\right\} \tag{14.127$'$}$$

---

*) «Экватором» тела M мы называем плоскость, проходящую через его центр инерции перпендикулярно к оси вращения (см. часть первую, гл. V).

Дифференциальные уравнения движения точки P в действительных прямоугольных координатах имеют вид

$$\ddot{x}=\frac{\partial\Omega}{\partial x},\quad \ddot{y}=\frac{\partial\Omega}{\partial y},\quad \ddot{z}=\frac{\partial\Omega}{\partial z}. \tag{14.128}$$

Интегрирование этих уравнений даст, как уже было установлено, некоторое первое приближение в задаче о движении точки P в гравитационном поле произвольного неподвижного твердого тела.

Так как формулы рассматриваемой обобщенной задачи двух неподвижных центров несколько отличаются (впрочем, только обозначениями) от соответствующих формул обычной задачи двух неподвижных центров, рассмотренной в предыдущем параграфе, то полезно вывести все эти формулы непосредственно.

Обозначая через T живую силу движущейся точки, т. е. полагая

$$T=\frac{1}{2}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2\right), \tag{14.129}$$

мы можем опять рассматривать уравнения (14.128) как уравнения Лагранжа второго рода, что позволяет весьма просто перейти от прямоугольных координат x, y, z к каким угодно новым переменным, например, к эллипсоидальным координатам.

4. Введем вместо действительных переменных x, y, z новые действительные переменные λ, μ, w подстановкой

$$\left.\begin{aligned} x&=c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\cos w,\\ y&=c\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\sin w,\\ z&=c\sigma+c\lambda\mu. \end{aligned}\right\} \tag{14.130}$$

Тогда формулы (14.127′) дают

$$r_1=c(\lambda-\mu i),\quad r_2=c(\lambda+\mu i), \tag{14.131}$$

откуда имеем также

$$\lambda=\frac{r_1+r_2}{2},\quad \mu=\frac{r_2-r_1}{2i}. \tag{14.131′}$$

Подставляя в формулу (14.127) вместо r_1 и r_2 их выражения (14.131), мы получим без труда выражение силовой функции Ω в новых переменных:

$$\Omega=\frac{fm}{c}\,\frac{\lambda-\sigma\mu}{\lambda^2+\mu^2}. \tag{14.132}$$

Это выражение оказывается действительным, как это и должно быть.

Дифференцируя затем формулы (14.130) по времени t, имеем следующие выражения для составляющих скорости в новых переменных:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\dot{x}}{c}&=\frac{\lambda\dot{\lambda}(1-\mu^2)-\mu\dot{\mu}(1+\lambda^2)}{\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}}\cos w-\\&\qquad-\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\,\dot{w}\sin w,\\\frac{\dot{y}}{c}&=\frac{\lambda\dot{\lambda}(1-\mu^2)-\mu\dot{\mu}(1+\lambda^2)}{\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}}\sin w+\\&\qquad+\sqrt{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\,\dot{w}\cos w,\\\frac{\dot{z}}{c}&=\mu\dot{\lambda}+\lambda\dot{\mu}.\end{aligned}\right\}\qquad(14.133)$$

Подставляя эти выражения в (14.129), получим

$$T=\frac{c^2}{2}\left\{\frac{\lambda^2+\mu^2}{1+\lambda^2}\dot{\lambda}^2+\frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\dot{\mu}^2+(1+\lambda^2)(1-\mu^2)\dot{w}^2\right\}.\qquad(14.134)$$

Определяя теперь обобщенные импульсы формулами

$$\left.\begin{aligned}\lambda'&=\frac{\partial T}{\partial\dot{\lambda}}=c^2\frac{\lambda^2+\mu^2}{1+\lambda^2}\dot{\lambda},\\\mu'&=\frac{\partial T}{\partial\dot{\mu}}=c^2\frac{\lambda^2+\mu^2}{1-\mu^2}\dot{\mu},\\w'&=\frac{\partial T}{\partial\dot{w}}=c^2(1+\lambda^2)(1-\mu^2)\dot{w},\end{aligned}\right\}\qquad(14.133')$$

мы будем иметь также

$$T=\frac{1}{2c^2}\left\{\frac{1+\lambda^2}{\lambda^2+\mu^2}\lambda'^2+\frac{1-\mu^2}{\lambda^2+\mu^2}\mu'^2+\frac{w'^2}{(1+\lambda^2)(1-\mu^2)}\right\}.\qquad(14.134')$$

Новые переменные

$$\lambda,\quad\mu,\quad w,\quad\lambda',\quad\mu',\quad w'$$

определятся канонической системой

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\lambda}{dt}&=+\frac{\partial H}{\partial\lambda'},&\frac{d\mu}{dt}&=+\frac{\partial H}{\partial\mu'},&\frac{dw}{dt}&=+\frac{\partial H}{\partial w'},\\\frac{d\lambda'}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial\lambda},&\frac{d\mu'}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial\mu},&\frac{dw'}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial w},\end{aligned}\right\}\qquad(14.135')$$

с характеристической функцией

$$H=T-\Omega,\qquad(14.135)$$

где Ω и T определяются формулами (14.132) и (14.134').

Интегрирование системы (14.135) приводится, как известно, к решению соответствующего уравнения Гамильтона — Якоби, которое напишется в виде

$$(1+\lambda^2)\left(\frac{\partial S}{\partial\lambda}\right)^2+(1-\mu^2)\left(\frac{\partial S}{\partial\mu}\right)^2+\left[\frac{1}{1-\mu^2}-\frac{1}{1+\lambda^2}\right]\left(\frac{\partial S}{\partial w}\right)^2=$$
$$=2fmc(\lambda-\sigma\mu)+2hc^2(\lambda^2+\mu^2). \qquad (14.136)$$

Полагая

$$S=S_1(\lambda)+S_2(\mu)+\alpha_3 w, \qquad (14.136')$$

где α_3 есть произвольная постоянная, мы удовлетворим уравнению (14.136), выбирая функции S_1 и S_2 согласно следующим уравнениям:

$$\left.\begin{aligned}(1+\lambda^2)\left(\frac{dS_1}{d\lambda}\right)^2&=2hc^2\lambda^2+2fmc\lambda+\frac{\alpha_3^2}{1+\lambda^2}+2\alpha_2,\\ (1-\mu^2)\left(\frac{dS_2}{d\mu}\right)^2&=2hc^2\mu^2-2fmc\sigma\mu-\frac{\alpha_3^2}{1-\mu^2}-2\alpha_2,\end{aligned}\right\} \qquad (14.136'')$$

где α_2 — новая произвольная постоянная.

Полагая для сокращения

$$\left.\begin{aligned}L(\lambda)&=2(1+\lambda^2)\left(hc^2\lambda^2+fmc\lambda+\alpha_2\right)+\alpha_3^2,\\ M(\mu)&=2(1-\mu^2)\left(hc^2\mu^2-fmc\sigma\mu-\alpha_2\right)-\alpha_3^2\end{aligned}\right\} \qquad (14.137)$$

и интегрируя равенства (14.136''), мы найдем S_1 и S_2, а затем и нужное решение уравнения (14.136) в виде

$$S=\int\frac{\sqrt{L(\lambda)}\,d\lambda}{1+\lambda^2}+\int\frac{\sqrt{M(\mu)}\,d\mu}{1-\mu^2}+\alpha_3 w. \qquad (14.138)$$

Зная S, найдем обычным способом общий интеграл канонической системы (14.135) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}&\int\frac{\lambda^2\,d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}}+\int\frac{\mu^2\,d\mu}{\sqrt{M(\mu)}}=\frac{1}{c^2}(t+\beta_1),\\ &\int\frac{d\lambda}{\sqrt{L(\lambda)}}-\int\frac{d\mu}{\sqrt{M(\mu)}}=\beta_2,\\ &\alpha_3\int\frac{d\lambda}{(1+\lambda^2)\sqrt{L(\lambda)}}-\alpha_3\int\frac{d\mu}{(1-\mu^2)\sqrt{M(\mu)}}+w=\beta_3,\end{aligned}\right\} \qquad (14.139)$$

$$\frac{\sqrt{L(\lambda)}}{1+\lambda^2}=\lambda', \quad \frac{\sqrt{M(\mu)}}{1-\mu^2}=\mu', \quad \alpha_3=w', \qquad (14.139')$$

где β_1, β_2, β_3 — три новые произвольные постоянные.

Уравнения (14.139) и (14.139') дают полное решение обобщенной задачи двух неподвижных центров, рассматриваемой как первое приближение задачи о движении в гравитационном поле тела M.

Рассматривая теперь величины α_k и β_k как функции времени, определяемые каноническими уравнениями $(\alpha_1=h)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\alpha_1}{dt}&=+\frac{\partial R}{\partial\beta_1}, & \frac{d\alpha_2}{dt}&=+\frac{\partial R}{\partial\beta_2}, & \frac{d\alpha_3}{dt}&=+\frac{\partial R}{\partial\beta_3},\\ \frac{d\beta_1}{dt}&=-\frac{\partial R}{\partial\alpha_1}, & \frac{d\beta_2}{dt}&=-\frac{\partial R}{\partial\alpha_2}, & \frac{d\beta_3}{dt}&=-\frac{\partial R}{\partial\alpha_3}, \end{aligned}\right\} \qquad (14.140)$$

где возмущающая функция

$$R=R_1+R_2 \qquad (14.140')$$

должна быть выражена через λ, μ, w при помощи формул (14.130), мы получим общее решение уравнений (14.114).

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

НЕВОЗМУЩЕННОЕ КЕПЛЕРОВСКОЕ ДВИЖЕНИЕ

ЧАСТЬ ЧЕТВЕРТАЯ

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕННОГО ДВИЖЕНИЯ

Георгий Николаевич Дубошин

Небесная механика. Основные задачи и методы

М., 1968 г., 800 стр. с илл.

Редактор *И. Е. Рахлин*
Технический редактор *В. Н. Крючкова*
Корректоры *Е. А. Белицкая, М. Л. Липелис*

Сдано в набор 5/IV 1968 г. Подписано к печати 21/X 1968 г. Бумага 60×90$^1/_{16}$. Физ. печ. л. 50. Условн. печ. л. 50. Уч.-изд. л.47,17. Тираж 10500 экз. Т-14852. Цена книги 1 р. 83 к. Заказ № 1196.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.