В. С. ЧУВИКОВСКИЙ

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ В СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ КОРАБЛЯ

(ОБЩАЯ ТЕОРИЯ, ОДНОМЕРНЫЕ И КВАЗИОДНОМЕРНЫЕ ПРОЦЕССЫ)

• • •

20
477381
Отдел учебников
БИБЛИОТЕКА
Лен. Кораблестроительного
института

ИЗДАТЕЛЬСТВО «СУДОСТРОЕНИЕ»
ЛЕНИНГРАД
1976

УДК 629.12.001.24 : 539 4
Ч82

**Численные методы расчетов в строительной механике корабля (Общая теория. Одномерные и квазиодномерные процессы).** Чувиковский В. С. Л., «Судостроение», 1976. с. 376.

В книге изложены общая теория численных расчетов прочности, устойчивости и вибрации судовых корпусных конструкций, а также методы и алгоритмы этих расчетов применительно к одномерным и квазиодномерным процессам. Особое внимание уделено вопросам оценки накопления погрешностей алгоритмов и обеспечения надежности получаемых результатов.

Основная идея книги — показать место, которое могут занять модели с учетом причинно-следственных связей в строительной механике корабля и в прикладной математике. Именно такие модели позволяют получить картину указанных связей в любых одномерных и квазиодномерных процессах, сделать обобщение теории устойчивости А. М. Ляпунова для случая неодносторонних процессов, проанализировать и развить ряд эффективных численных методов решения краевых задач, создать общие представления об устойчивости объектов и, в конечном счете, найти решение многих вопросов, связанных с изучением прочности судовых корпусных конструкций.

Ил. 125. Литерат. 50 назв.

**Рецензент д-р техн. наук В. Т. Томашевский**

Ч $\frac{31805-048}{048(01)-76}$ 18—76

© Издательство «Судостроение», 1976 г.

## ОТ АВТОРА

Численные расчеты прочности широко используются в практике отечественного и мирового судостроения. Имеются многочисленные публикации по методам и алгоритмам этих расчетов, созданы и применяются различные конкретные программы, записанные как на универсальных языках, так и в адресах тех или иных машин, создаются новые методы и программы, выполняются теоретические исследования. В связи с этим назрела необходимость обобщения полученных результатов в книгах монографического и справочного характера, которые позволили бы читателю сравнительно быстро ориентироваться в основных идеях и методах, открывающихся возможностях и достижениях, а также в реальных трудностях и проблемах всестороннего использования вычислительных машин для анализа напряженного и деформированного состояния корпусных конструкций.

Данная книга — попытка ответить на такую потребность. Многообразие проблем заставило автора ограничиться изложением общей теории численных расчетов и теории расчетов одномерных и квазиодномерных процессов. Многомерные процессы будут рассмотрены в специальной монографии.

При написании книги подобного характера можно избрать два пути: либо составить подробный сборник «рецептов», готовых формул, реестр программ и т. п., либо предложить по возможности краткую сводку основных научных результатов, идей, подходов, методов и представлений, снабдив их рассмотрение достаточным количеством примеров и наиболее важными для практики решениями. Автор сознательно избрал второй путь, полагая, что чтение сборников «рецептов» не сможет удовлетворить современного инженера в век научно-технической революции, когда всякие рецепты нередко устаревают еще до их опубликования. Ориентируясь же в существе проблемы численных расчетов прочности, специалист сумеет сознательно оценить, выбрать и грамотно использовать нужные ему результаты и рабочие программы, а в случае необходимости и составить требуемый расчетный алгоритм. Что касается самих типовых рабочих программ расчетов, то их подробная и систематическая публикация — дело специальных организаций. Но, пользуясь этими программами, важно твердо придерживаться общего положения: внедрять в практику даже хорошо отработанную программу только на основе всестороннего понимания особенностей заложенных в нее методов и алгоритмов.

Кроме сведений собственно математического характера, непосредственно относящихся к численным методам и алгоритмам, книга содержит некоторые важные, но еще недостаточно освещенные в литературе сведения по строительной механике, необходимые для правильного и обоснованного выбора исходных физических и математических моделей.

Книга рассчитана на широкие круги инженерно-технических работников судостроительной промышленности, а также на студентов старших курсов и аспирантов кораблестроительных институтов и факультетов, занимающихся изучением и расчетами прочности судового корпуса. Содержащиеся в ней сведения общего характера по теории численных алгоритмов могут представить интерес для специалистов других областей науки и техники, которые так или иначе сталкиваются с численными расчетами на ЭВМ и расчетами прочности различных конструкций и сооружений.

## ВВЕДЕНИЕ

Современный этап развития судостроения характеризуется рядом особенностей, которые обусловливают необходимость разработки и самого широкого внедрения численных методов расчета прочности корпусных конструкций, включая оценку напряженного и деформированного состояния при статическом нагружении, устойчивости состояний равновесия, вибрации, а также результатов воздействия динамических нагрузок импульсивного характера. К числу этих особенностей можно отнести использование все более прочных корпусных материалов, увеличение размеров судов и скорости их движения, появление судов новых типов, в частности судов с динамическими принципами поддержания, и т. п.

Новые корпусные материалы, обладая увеличенной удельной прочностью по сравнению с ранее применявшимися, как правило, недостаточно властичны, сравнительно легко деформируются и, кроме того, проявляют порой ряд неожиданных свойств вроде ползучести при обычных температурах. С увеличением размеров судов при сохранении относительной массы корпуса происходит рост напряжений и уменьшение жесткости конструкций. Увеличение скорости движения приводит к значительному росту динамических составляющих внешних сил, действующих на корпус судна. Разработка новых типов судов требует создания совершенно новых конструктивных форм и т. д.

В этих все усложняющихся условиях рациональное проектирование корпусов становится возможным лишь при существенно более высокой, чем раньше, точности, быстроте и многовариантности расчетной оценки прочности, устойчивости и вибрации всех конструктивных элементов и конструкций в целом, что никак не может быть достигнуто прежними аналитическими методами и «ручным счетом».

В связи с этим развитие численных методов строительной механики корабля, усвоение их самыми широкими кругами исследователей и практиков судостроительной промышленности — насущная задача сегодняшнего дня, которая не нуждается в специальных обоснованиях и пояснениях.

Однако не следует думать, что появление современных ЭВМ, создание сети вычислительных центров, обучение кадров программистов и операторов решает указанную задачу чисто автоматически, стоит лишь дать возможность специалистам по строительной механике и расчетчикам-прочнистам использовать эти кадры, центры и машины. Программисты, операторы, вычислительные центры, машины, конечно, нужны. Но их еще недостаточно для достижения поставленной цели — разработки и широкого внедрения в практику проектирования и исследования прочности судовых корпусов современных по своему научному уровню эффективных численных методов.

Дело в том, что численным методам свойственны многие особенности, без знания которых специалист в области прочности не сумеет зачастую даже грамотно сформулировать на языке численной математики конкретный вопрос строительной механики или использовать ту или иную стандартную программу, приложенную к машине в качестве ее математического обеспечения.

Возьмем такой, казалось бы, простой вопрос, как решение систем линейных алгебраических уравнений. Далеко не все знают, что на самой современной машине нельзя иногда решить и десяти уравнений с десятью неизвестными, если они имеют определенный «неудобный» набор коэффициентов и свободных членов (даже при «любой программе»); а данная стандартная программа иногда хорошо решает «положенную ей» систему, но для другой системы нужна совсем иная программа, основанная на другом методе.

А между тем даже небольшие изменения в исходной физической модели, положенной в основу предлагаемого решения, дали бы очень «удобные» уравнения, и задача была бы численно решена в короткий срок. Но для такого перестроения необходимо, чтобы специалист в области прочности достаточно ориентировался в существе и особенностях численных методов, мог найти «общий язык» со специалистами по численной математике и программистами, умел, когда надо, пойти им навстречу, а когда следует — потребовать от них преодоления вполне преодолимых конкретных затруднений.

Или другой простой пример. Пусть нам нужно решить несложное дифференциальное уравнение вида $y'' = 10\,y' + 11\,y$ при начальных условиях $y\,(0) = 1$, $y'\,(0) = -1$. Требуется найти соответствующее частное решение на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 3$. Точное решение этого уравнения при данных условиях известно. Оно имеет вид $y\,(x) = e^{-x}$ и при $x = 3$ равно $y\,(3) \approx 0{,}049\,8$.

Но употребляемые обычно численные методы решения дифференциальных уравнений дадут здесь совершенно ложный ответ. В самом деле, общее решение данного уравнения $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{11x}$, где $C_1$, $C_2$ — произвольные постоянные. Допустим, что с помощью численного метода, использованного в стандартной программе машины (например, метода Рунге—Кутта или Адамса—Штермера),



последовательно вычисляются одно за другим значения $y_1, y_2, \ldots$ в точках $x_1, x_2, \ldots$. В этом случае вследствие погрешностей округлений, неизбежных при любом методе, появляется компонента погрешности, пропорциональная $e^{11x}$. В идеальном случае отсутствия погрешностей самого метода эта компонента, имеющая при некотором $x = \xi$ значение $\varepsilon$, уже при $x = \xi + 2$ увеличится до $\varepsilon e^{22} \approx 3{,}6 \cdot 10^9\,\varepsilon$. Если счет, допустим, ведется с семью знаками, то отмеченная погрешность полностью покрывает исчезающее по сравнению с ним точное решение $y = e^{-x}$. Очевидно, что стандартные программы могут привести к ошибкам при их недостаточно продуманном использовании.

Именно этот пример заставил известного специалиста по численным методам Л. Коллатца сказать: « . . . Ясно, что приближенно решать задачу шаг за шагом, не учитывая поведения интегральных кривых, значит уподобляться человеку, который пускается в путь по замерзшему озеру, не зная толщины льда» [14, с. 10].

Но кто, как не человек, задавший задачу, должен в первую очередь предварительно оценить упомянутое поведение кривых и сделать соответствующие выводы? Кстати, в дальнейшем мы увидим, что физическое осмысливание применительно к данной задаче непригодности конкретного численного метода позволяет зачастую сделать очень важные практические выводы, даже не прибегая к дальнейшему счету.

Приведенные примеры, количество которых можно существенно увеличить, свидетельствуют, что особенности численных методов требуют весьма осторожного и квалифицированного подхода к этим мощным средствам исследования, причем соответствующей квалификацией должен обладать не только «исполнитель», т. е. математик и программист, но и специалист, в чьих интересах решается задача.

Следует со всей определенностью подчеркнуть, что успешное использование в той или иной организации ЭВМ и численных методов (как и вообще любых методов автоматической переработки информации) требует хорошо согласованных усилий следующих категорий сотрудников: специалистов по эксплуатации и ремонту ЭВМ, специалистов-операторов и программистов, специалистов по численным методам и, наконец, специалистов по основной проблематике данной организации (в нашем случае прочнистов-кораблестроителей), хорошо знакомых с особенностями численной математики и использованием ЭВМ.[1] Недостаток в специалистах хотя бы одной из указанных категорий или их плохая работа сводит на нет усилия всего коллектива.

---

[1] В некоторых случаях специалист по основной проблематике после соответствующей подготовки может заменить, скажем, специалиста по численным методам, однако подобное совмещение профессий не меняет существа дела.

Специалист по основной проблематике, т. е. прочнист, обязан грамотно поставить задачу на математическом языке, выбрав для этого адекватную физике явлений и непременно достаточно «удобную» для дальнейшего использования математическую модель; если выбранная модель по тем или иным причинам оказывается неприемлемой, он перестраивает и корректирует ее, обращаясь иногда за помощью к специалисту по численным методам, но не перекладывая на этого специалиста свои дела, так как всякая перестройка и корректировка модели немыслимы без углубленного физического анализа задачи с учетом всех ее конкретных особенностей. На прочнисте лежит и объединение усилий указанного выше коллектива для фактического выполнения численного расчета и, конечно, анализ окончательных результатов.

Специалист по численным методам, приняв эстафету от прочниста, преобразует в случае необходимости исходную математическую модель к более удобному для численных методов виду (например, заменяет дифференциальные уравнения конечно-разностными), а главное, выбирает или создает численный метод расчета, приемлемый для данной ЭВМ по объему арифметических операций, длине будущей программы (т. е. по памяти машины) и устойчивости (нечувствительности к неизбежным погрешностям счета, связанным хотя бы с округлениями значащих цифр). Результаты своей работы он излагает в виде математических формул, удобных для непосредственных вычислений и снабженных словесными пояснениями.

Программист «переводит» все расчетные формулы и пояснения на «язык машины», т. е. в систему команд, определяющих ввод исходной информации и все ее преобразования вплоть до получения окончательных результатов расчета. Оператор фактически управляет машиной с помощью данной программы. Эксплуатационник-ремонтник обеспечивает правильную эксплуатацию, исправность и ремонт машины.

Их усилия тоже очень важны, а зачастую оказываются определяющими. Например, от программиста в первую очередь зависит компактность конкретной программы, удобство ее использования и представления окончательных результатов, удобство контроля счета, не говоря уже о правильности самих команд. Не лишне напомнить хорошо известные в технической литературе факты, когда одна единственная ошибка в программе приводила к неверным результатам, которые влекли за собой весьма тяжелые практические последствия.

Создание и внедрение в практику того или иного численного расчета очень напоминают работы по проектированию и внедрению в производство нового технического изделия, требуют в сложных случаях много времени и усилий.

Постановка задачи, ее предварительный анализ, выбор численного метода, составление предварительной укрупненной программы (так называемой блок-программы) вместе с необходимыми оценками, а иногда и экспериментальными расчетами отдельных разделов будущего полного расчета составляют первый этап работы, аналогичный разработке эскизного проекта. Он очень важен, коренным образом определяет успех всего дела, но связан обычно с меньшими трудоемкостью и затратами времени, чем остальные этапы.

Второй этап — составление и отладка действующей предварительной или так называемой внутренней программы расчета — аналог технического проекта, заканчивающегося выпуском опытного действующего образца будущего изделия. С помощью внутренней программы ее исполнитель в состоянии практически выполнить требуемый расчет, но он еще не может передать ее для использования при массовом счете другим исполнителям, а сама программа обычно еще далека от должного совершенства по числу операций и необходимому машинному времени. Затраты времени и трудоемкость на втором этапе зачастую существенно больше, чем на первом.

Третий этап — составление и отладка рабочей программы — напоминает рабочий проект и наладку серийного производства на головном заводе. Он, как правило, наиболее трудоемок и длителен. Рабочая программа должна быть достаточно совершенной и пригодной для выполнения массовых расчетов любыми квалифицированными исполнителями в условиях вычислительного центра, создавшего программу.

Наконец, четвертый этап — передача рабочей программы в другие вычислительные центры и отладка ее там — представляет собой, по существу, передачу рабочей документации изделия и налаживание его серийного производства на других заводах.

В указанном делении и в приведенных аналогиях нет ничего странного. Современные мощные вычислительные центры называют заводами по переработке и созданию новой информации. Следует также заметить, что за рубежом рабочие программы обычно не публикуются: фирмы, разработавшие программы, предлагают заказывать им выполнение расчетов или купить у них лицензии на использование программ, оговорив, если нужно, содействие и консультацию фирмы при их внедрении.

В заключение следует еще раз подчеркнуть особую важность первого этапа работы. В интересной книге Эттингера и Ситтинга [1] произведен анализ изменения результирующих эффективных затрат в зависимости от качества решений, принимаемых на различных этапах разработки и производства промышленной продукции. Основная мысль этого анализа ясна: «По мере принятия решений на предыдущих этапах число степеней свободы соответственно уменьшается, и это же относится к количеству ошибок, которые могут быть сделаны (все зависит от того, были приняты правильные или ошибочные решения). Таким образом, на последующих этапах ста-

[1] Эттингер, Ситтинг. Больше... через качество. М., Изд-во стандартов, 1968.

*новится* все труднее *оказать благоприятное влияние на весь* комплекс проблем, связанных с осуществлением проекта, если ранее принятые неоптимальные решения не будут пересмотрены. Приятный фасад отеля и тщательно разработанные детали вряд ли помогут архитектору исправить основную ошибку, например неправильный расчет мест в отеле, вдвое превышающий потребности. *Подрядчик, сооружающий торговый центр, независимо от того,* насколько эффективна его деятельность на строительной площадке, не достигнет успеха, если были допущены серьезные ошибки в выборе места для строительства» (с. 31). Результаты анализа впечатляющие: по мнению авторов, качество основных функциональных решений (т. е. качество исходного технического задания) может изменить затраты *на* $\pm$ *50%; качество проектно-конструкторских решений* — на $\pm$ 25%, а производственно-технологических решений — всего на $\pm$ 10%.

Конечно, эти ориентировочные средние цифры могут сильно колебаться в различных частных случаях, однако общая тенденция ясна и достаточно устойчива — первые этапы работы имеют громадное значение.

Аналогичным образом чрезвычайно важен и первый этап разработки любого численного расчета: неудачно выбранная физическая модель никогда не позволит перейти к удачной математической модели; некачественная математическая модель не позволит предложить эффективный математический метод, а недостатки метода не дадут удовлетворительного результата при всем искусстве программиста и оператора.

Поэтому основная цель последующего изложения — помочь исследователю и расчетчику при выполнении главным образом первого этапа, а также при анализе окончательных результатов.

Глава 1.

# ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ И АЛГОРИТМОВ

В данной главе изложены основные положения общей теории численных методов и алгоритмов, необходимые для понимания дальнейшего содержания книги.

Большое внимание уделено постановке задач численного расчета *и главной проблеме создания каждого эффективного алгоритма* — анализу его устойчивости, т. е. степени чувствительности к неизбежным погрешностям вычислений. Показано, что исследование самого исходного понятия устойчивости любых объектов (в частности, процессов) дает возможность установить глубокие связи между устойчивостью изучаемого объекта и соответствующего *расчетного алгоритма, если смотреть на алгоритм как на объект* особого рода. При этом часто удается обеспечить прямую аналогию между обоими видами устойчивости, т. е. выполнить так называемый принцип соответствия. Тогда отмеченная главная проблема снимается — можно уже не анализировать аналитически устойчивость алгоритмов в общем виде, а лишь *«экспериментально проверять» ее путем всегда выполнимого численного эксперимента в каждом* частном случае конкретного расчета. Положительный результат проверки дает уверенность в расчете, а отрицательный свидетельствует о неустойчивости самого изучаемого объекта, т. е. о принципиальной невозможности установить детерминированные результаты, когда любой детерминированный расчет бессмыслен. *Аналогичным образом можно* органически связать устойчивость алгоритма с наблюдаемостью или в общем случае индивидуальной определенностью объекта, а затем использовать эту связь.

Рассмотрены и другие возможные принципы построения алгоритмов.

## *§ 1. Основные абстракции математики.* Классическая и неклассическая математика

Серьезное изучение теории численных алгоритмов требует анализа основных абстракций классической математики, а затем отказа от некоторых из них и перехода к так называемой неклассической математике. Дело в том, что реализация численного алгоритма на любой ЭВМ адекватно описывается именно неклассической математикой, где нет абстракции абсолютной точности, а также абстракции нивелирования причин, условий, следствий. Уяснение этого обстоятельства позволяет избежать многих недоразумений и ошибок при анализе результатов численных расчетов.

1. Абстракция отождествления, потенциальной осуществимости и актуальной бесконечности. В литературе по логическим и методологическим основам современной математики [13, 20, 27] отмечается, что математика использует три основные абстракции: отождествления, потенциальной осуществимости и актуальной бесконечности.

Первая из них состоит в образовании абстрактных понятий путем объединения и практического отождествления (идентифицирования) ряда предметов, связанных отношением типа равенства, путем отвлечения (абстрагирования) от всех различий таких предметов. Это — основная и неизбежная абстракция, по существу, всех наук, иначе мы вынуждены были бы изучать каждый индивидуальный предмет отдельно. Без нее мы не можем даже ввести содержательное понятие натурального числа как меры количества: считая, скажем, количество листов в данном корпусе судна и заявив, что их $n$ штук, мы невольно полагаем все листы идентичными предметами, хотя, конечно, их полного совпадения нет.

*Введение абстракции отождествления, неизбежное само по себе,* требует, однако, тщательного анализа условий абстрагирования. Желая ремонтировать корпус, мы не станем идентифицировать *все листы, а будем различать их по изношенности, толщинам и т. п.* Или возьмем такой простой конструктивный элемент, как балку. Обычно с достаточным основанием считают две балки идентичными, *если они имеют одинаковые условия заделки концов, длину $l$,* жесткость на изгиб $EI(x)$, нагрузку $q(x)$, где $x$ — ордината вдоль оси балки. Но для коротких балок такая идентификация *оказывается неправильной, поскольку у них начинает играть большую* роль жесткость на сдвиг $G\Omega(x)$, которая ранее не учитывалась и потому могла быть у идентифицированных балок различной. Здесь требуется уточнение признаков, по которым сравниваются балки.

Абстракция потенциальной осуществимости постулирует идеализированное предположение о том, что мы обладаем возможностью строить математические объекты, отвлекаясь от материальных условий этого построения, т. е. делать любое количество алгоритмических шагов, оперировать со сколь угодно большими множествами и т. д. Именно указанная абстракция позволяет нам говорить о сколь угодно длинных программах в теории алгоритмов, о бесконечных рядах и т. п. По мнению некоторых специалистов [13], она издавна получила настолько широкое распространение, что математика фактически неотделима от нее. Тем не менее ее нельзя считать строго обязательной во всех случаях, и в математической



кибернетике уже выдвинута проблема соответствующего ограничения [27].

С абстракцией потенциальной осуществимости тесно связана абстракция потенциальной бесконечности, т. е. представление о бесконечно развертывающихся и никогда не завершающихся процессах. Обе они используются, в частности, при оперировании со сколь угодно большими последовательностями множеств. Иногда их даже не различают между собой.

Абстракция актуальной бесконечности состоит в том, что бесконечность иногда рассматривается как актуальная или завершенная, объекты которой представлены одновременно в виде готового, сформировавшегося, т. е. актуально существующего бесконечного множества. В качестве примера можно привести числовой отрезок $[0, 1]$, т. е. множество чисел $x$, отвечающих условию $0 \leqslant x \leqslant 1$. Указанное множество бесконечно в том смысле, что нет конца пересчету его элементов, и актуально в том смысле, что все входящие в него числа мыслятся данными одновременно. В настоящее время ведется дискуссия между представителями основного направления, признающими необходимость и правомерность абстракции актуальной бесконечности, и так называемыми интуиционистами и конструктивистами, *возражающими,* в частности, *против ее использования* в логических и математических построениях. Заметим, что речь идет именно о математике и логике, которые сами по себе не *существуют, а создаются человеком. В материальном мире,* согласно нашим представлениям, актуальная бесконечность реализована непосредственно и вовсе не оказывается абстракцией. Дело, *следовательно, не в том, что актуальная бесконечность привносится* в природу, подобно абстракции отождествления или потенциальной осуществимости, а в том, что человек, строя идеальные математические *объекты, не только предполагает у себя безграничные* конструктивные возможности, но считает эти объекты уже построенными, даже если они состоят из бесконечного количества элементов.

В литературе [13] справедливо отмечается, что в разных случаях нужно использовать математику, опирающуюся на разные виды абстрагирования. Скажем, при построении теории алгоритмов часто бывает неправильным использование абстракции актуальной бесконечности, а в лучшем случае допустимо использовать алгоритмы, где число операций больше любого наперед заданного числа. Но в общей классической теории множеств использование абстракции актуальной бесконечности вполне приемлемо. Указанное важное положение нам следует запомнить для дальнейшего.

2. Абстракции абсолютной точности и нивелирования причин, условий, следствий. В классической математике имеются еще две абстракции, к сожалению, пока не обратившие на себя должного внимания исследователей.

Анализ первой из них — абстракции абсолютной точности — удобно начать с некоторого развития представлений о множествах.

Пусть дано непустое множество $M$. Если мы можем фактически совершенно точно идентифицировать (т. е. отождествить с чем-то известным) любой элемент этого множества, то мы назовем $M$ множеством со строгой идентификацией элементов. В противном случае будем говорить, что $M$ — множество без строгой идентификации элементов. *Например*, $M_1 = \{1;\ 3;\ 11;\ 126\}$ — множество со строгой идентификацией элементов; $M_2 = \{$все вещественные числа$\}$ — множество без строгой идентификации элементов. Взяв *в $M_2$ произвольное иррациональное число $\alpha$, мы не сможем точно* идентифицировать его, так как для этого нам пришлось бы выписать бесконечное количество значащих цифр, что принципиально невозможно даже при выполнении абстракции потенциальной осуществимости. Проводя вычисления на конкретной машине с $n$ значащими цифрами, мы не можем строго идентифицировать и многие рациональные числа.

Принять абстракцию абсолютной точности — значит считать, что все множества являются множествами со строгой идентификацией элементов.

Из приведенного примера с множеством $M_2$ может показаться, что абстракция абсолютной точности сводится к абстракции актуальной бесконечности. Однако это не так.

Рассмотрим хотя бы измерение длины твердого материального предмета. С точки зрения математика, процесс измерения трактуется как идентификация из всего множества положительных чисел *такого числа, которое выражало бы эту длину в принятой системе* единиц. Пусть абстракция актуальной бесконечности справедлива и мы можем представить себе сразу записанной любую, включая и бесконечную, последовательность цифр. Но у нас еще остается принципиальная ограниченность чувствительности измерительного прибора. Наконец, если абстрагироваться и от нее, то само понятие постоянной длины перестанет существовать, как только мы перейдем в область слишком высоких точностей (влияние колебаний молекул и атомов, составляющих предмет).

В реальной действительности из-за невыполнения абстракции абсолютной точности мы часто ограничиваемся не строгой, а условной, т. е. приблизительной, идентификацией элементов. Это ограничение, неизбежное при отражении реального мира, носит принципиальный характер и, как показано в дальнейшем, сильно проявляется при анализе устойчивости, а также наблюдаемости и вообще индивидуальной определенности любых объектов.

*Другая еще недостаточно рассмотренная абстракция*, названная абстракцией нивелирования причин, условий, следствий, состоит в том, что классическая математика исключает из рассмотрения физически направленные связи, существующие между *причинами* и условиями, с одной стороны, и следствиями этих причин и условий — с другой. Для математика, стоящего на последовательно классической точке зрения, уравнение второго закона механики $F_x = m\ddot{x}$ есть просто некоторая зависимость между величиной $F_x$, называемой составляющей силы вдоль оси $x$, величиной $m$, называемой массой материальной точки, и величиной $\ddot{x}$, называемой ускорением движения материальной точки вдоль оси $x$. Между тем в механике не без глубокого основания говорят о составляющей $F_x$ как о причине движения, а под $m$ понимают некоторую характеристику материальной точки (условие), от которой зависит эффект действия силы, т. е. следствие в виде ускорения $\ddot{x}$. Вторая абстракция тоже весьма существенна: без ее исключения, как будет показано далее, невозможен анализ проблемы устойчивости, индивидуальной определенности и наблюдаемости объектов.

3. Множества с условной идентификацией элементов. Некоторые результаты отказа от абстракции абсолютной точности. Назовем условиями идентификации элементов в непустом множестве $M$ алгоритм $\gamma = \gamma\,(m_1,\ m_2)$ и критерии, с помощью которых можно фактически выяснить, является или не является любой конкретный элемент $m_2 \in M$ условно идентичным (практически одинаковым) с любым фиксированным элементом $m_1 \in M$. Множество, в котором установлены условия идентификации, т. е. определено *отношение условной идентичности между элементами, называется* множеством с условной идентификацией элементов. Выражение $m_2 \simeq m_1$ означает, что элемент $m_2 \in M$, называемый *идентифицируемым элементом*, условно идентичен фиксированному элементу $m_1 \in M$, называемому базовым элементом. Условно идентифицировать элемент $m_2 \in M$ — значит указать хотя бы один базовый элемент $m_1 \in M$, с которым условно идентичен $m_2$.

Условия идентификации могут при абстрактном рассмотрении задаваться произвольно и не обязательно связываться с метрикой (т. е. определением понятия «расстояния») в $M$. В конкретных условиях их следует определять из физического существа задачи на основе физических критериев. (Слово «физический» здесь и в дальнейшем следует понимать в самом широком смысле как синоним слова «содержательный», а не абстрактный.)

Дело обстоит так. В любых физических задачах мы считаем объект детерминированно определенным, если знаем его с достаточной, но не всегда абсолютной точностью. Тогда объект $m_2 \in M$, подчиняющийся соотношению $m_2 \simeq m_1$, детерминированно определен, если мы знаем объект $m_1 \in M$, с которым он условно идентичен.

*Отметим следующие зависимости, справедливость которых иллюстрируется* рис. 1.1, где заштрихованный круг с центром в точке $m_i$ означает во всех случаях область, в пределах которой все точки *условно идентифицируются с $m_i$* (для простоты взят частный, но важный случай, когда $\gamma\,(m_1,\ m_2) = \gamma\,(m_1)$:

рефлективность (рис. 1.1, *а*) $m_1 \simeq m_1$;

несимметричность (рис. 1.1, *б*, *в*), при которой из $m_2 \simeq m_1$ не следует $m_1 \simeq m_2$ и из $m_2 \not\simeq m_1$ не следует $m_1 \not\simeq m_2$;

нетранзитивность (рис. 1.1, *г*, *д*), когда из $m_2 \simeq m_1$ и $m_3 \simeq m_2$ не следует $m_3 \simeq m_1$ и из $m_2 \not\simeq m_1$ и $m_3 \simeq m_2$ не следует $m_3 \not\simeq m_1$.

Рассмотренные выше множества со строгой идентификацией элементов — частный случай множеств с условной идентификацией элементов.

Если условия идентификации таковы, что идентичность симметрична, т. е. $m_2 \simeq m_1$ означает $m_1 \simeq m_2$, то отношение условной идентичности называется отношением толерантности, а соответствующее *множество* — *толерантным пространством*.

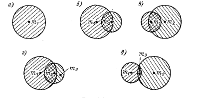



Рис. 1.1.

Обратим внимание, что абстракция абсолютной точности, применяемая в классической математике, тесно переплетается с исходными постулатами логики. В классической логике действует закон исключенного третьего: всякое утверждение либо истинно, либо ложно, третьего не дано. Невыполнение указанной абстракции изменяет этот закон. Пусть на данном участке шоссе запрещено движение со скоростью свыше 60 км/ч. Если бы абстракция абсолютной точности выполнялась, то строго выполнялся бы закон: любая данная машина на данном участке либо нарушает правило ограничения скорости, либо не нарушает его. Но в действительности мы измеряем скорость не абсолютно точно, поэтому всегда имеется «мертвая зона» и можно с равным логическим успехом спорить о нарушении или выполнении правил движения.

Неклассическая точка зрения, связанная с принципиальным отказом от абстракции абсолютной точности, заставляет по-иному смотреть на многие сложившиеся представления математики.

Пусть нам нужно найти производную $\tilde{f}'(x)$ некоторой вещественной непрерывной функции $\tilde{f}(x)$, причем сама функция задана с некоторой точностью $\pm\,\delta$: задан канал шириной $2\delta$ (рис. 1.2, *а*), внутри которого лежит кривая $\tilde{f}(x)$ (рис. 1.2, *б*). Срединой канала является известное приближенное значение $\tilde{f}(x)$ этой функции. Все функции, лежащие внутри канала, идентифицируются. Отмеченная ситуация чрезвычайно характерна — ведь точное значение непрерывной функции есть просто абстракция классической математики.



Заметим, что поставленная задача определения $\tilde{f}'(x)$ по известному значению $\tilde{f}(x)$ не разрешима: мы в принципе не можем составить даже приближенное представление о значении этой производной, как ни мала была бы $\delta$. Действительно (рис. 1.2, *б*), точное значение $\tilde{f}(x)$ может быть любым в пределах нашего канала, и, *следовательно*, *сама точная функция может, например, сколь угодно* быстро колебаться около $\tilde{f}(x)$. При этом значение производной $f'(x)$ при любом $x$ никак не коррелируется с $\tilde{f}(x)$ и вообще может


Рис. 1.2.

быть любым от $-\infty$ до $+\infty$ или даже не иметь значений (наличие «сломов»). Таким образом мы пришли к парадоксальному, но тем не менее верному выводу: нам совершенно неизвестна и никогда не будет известна обычная математическая производная ни от одной реальной приближенно заданной функциональной зависимости. В чем же здесь дело? Ведь мы повседневно находим такие производные, широко пользуемся ими и получаем верные окончательные результаты!

Чтобы ответить на поставленный вопрос, проанализируем сначала *физическое содержание одной конкретной задачи.* Пусть (рис. 1.3, *а*) имеется твердое тело (механизм) *1* массой $m$, закрепленное болтами *2* на жестком фундаменте *3*. Фундамент испытывает вертикальные сотрясения. С помощью датчиков мы приближенно записали вертикальную скорость $\tilde{y} = \tilde{f}(t)$ тела *1* и хотим узнать усилия, воспринимаемые болтами, для последующего анализа прочности болтов. Точность датчиков скорости равна $\pm\,\delta$.

*Казалось бы, ясно, что необходимо найти ускорение* $w(t) = f'(t)$ тела *1*, а затем определить вертикальную силу, передаваемую через болты, как произведение $mw(t)$. Но найти значение $w(t) = f'(t)$ невозможно даже с каким-либо оговоренным приближением, и получается что-то вроде тупика.

К счастью, значение $f'(t)$ нам не требуется, хотя это и странно на первый взгляд. Если величина $\delta$ достаточно мала, то большие отклонения $f'(t)$ от $\tilde{f}'(t)$ могут возникнуть только за счет очень высокочастотных составляющих ускорений, которые соответствуют усилиям на болты. Однако достаточно высокочастотные усилия не *ощущаются болтами, так как их коэффициенты динамичности* близки нулю. Что касается низкочастотных составляющих ускорений и усилий, существенных для прочности болтов, то они неплохо описываются и производной $\tilde{f}'(t)$.

Конечно, приведенные рассуждения о достаточной малости $\delta$, о высокочастотных составляющих носят еще чисто качественный характер. Но существо дела понятно и без количественных расчетов. Выясняется, что нам нужны не мгновенные значения ускорений и сил, а некоторые средние ускорения и силы на малом участке $\Delta t$, т. е. как бы средние значения производной $f'(t)$. Задача же об указанных средних производных всегда определена и разрешима при достаточно малой погрешности $\delta$.

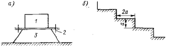



Рис. 1.3.

Аналогичным образом дело обстоит и в других физических процессах. Если воспользоваться несколько расплывчатыми пока, но в общем понятными терминами «жесткий процесс» и «мягкий процесс», то можно сказать следующее. Производная, вводимая в классической математике, характеризует абсолютно локальные свойства функции, т. е. ее свойства в бесконечно малой окрестности точки. Эти свойства ощущаются лишь гипотетическими абсолютно жесткими процессами. Реальные (не абсолютно жесткие) процессы ощущают условно локальные свойства функций, т. е. их свойства на малых участках; причем, чем мягче процесс, тем больше участок.

Пусть мы имеем лестницу (рис. 1.3, *б*) с высотой ступенек $a = 10$ см. Если по лестнице ползет муха, то для нее производная функции, отражающей профиль лестницы, равна попеременно 0 и $\infty$. Это довольно жесткий процесс, при котором, однако, не будут чувствоваться микроскопические выбоины на лестнице, т. е. это — не абсолютно жесткий процесс. Для еще более жесткого процесса — по лестнице передвигается микроорганизм — микроскопические выбоины будут чувствительными и производная оказывается совершенно неопределенной, пока профиль лестницы не будет дан с большой точностью. Спустив по лестнице бочку диаметром 15 м, нетрудно убедиться, что для данного гораздо более мягкого процесса ощущаемая производная близка по абсолютному значению к 1/2, т. е. к средней производной в пределах вертикального и горизонтального участков.

В качестве второго показательного примера изменения основных представлений математики при отказе от абстракции абсолютной точности возьмем разложение функции в тригонометрический ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{1.1}$$

где $l$ — длина интервала разложения; $a_n$ и $b_n$ — коэффициенты ряда.

Мы привыкли оперировать с бесконечными рядами такого вида, полагая, что $f(x)$ задана точно. При ограниченной точности ее задания мы немедленно приходим к конечным рядам. Пусть точность задания равна $\pm\,\delta$ (см. рис. 1.2, *а*) и, следовательно, сама функция *$f(x)$ может как угодно осциллировать внутри заданного канала* (см. рис. 1.2, *б*). Очевидно, мы с хорошим приближением определим первые члены разложения, затем относительные погрешности членов станут возрастать и, наконец, достигнут совершенно неопределенного значения. Ни о каком действительном разложении $f(x)$ в бесконечный ряд не может быть и речи; допустимо оперировать *лишь с каким-то вполне конечным числом членов, возрастающим* с уменьшением $\delta$, но никогда не обращающимся в бесконечность.

Практическая приемлемость рядов Фурье базируется на фундаментальном физическом факте пренебрежимо малого влияния высокочастотных составляющих функции на не абсолютно жесткие физические процессы. Нужно лишь, чтобы точность задания $f(x)$ *была достаточной для уверенного определения всех важных ее* составляющих.

Аналогичные рассуждения относятся и к общему случаю ряда Фурье, когда разложение идет по любым ортогональным функциям.

Изменения, вносимые в классическую математику отказом от абстракции абсолютной точности, столь велики, что, сняв только одну эту абстракцию, мы вынуждены применять в явном или неявном виде, по существу, другую математику. Назовем ее неклассической математикой первого типа (можно было бы использовать термин «прикладная математика», однако такой термин слишком объемен и может вызвать побочные ассоциации).

4. Некоторые результаты отказа от абстракции нивелирования причин, условий, следствий. Отказ от абстракции абсолютной точности делает естественным и отказ от абстракции нивелирования причин, условий, следствий.

Возьмем известное дифференциальное уравнение изгиба балки постоянного сечения

$$EI\,\frac{d^4y}{dx^4} = q(x), \tag{1.2}$$

где $x$ — координата вдоль оси балки; $EI$ — жесткость балки на изгиб; $y = y(x)$ — прогиб балки; $q(x)$ — интенсивность поперечной нагрузки на балку.

*Можно представить себе два случая. В первом случае* $q(x)$ — причина изгиба, $y(x)$ — следствие. Имеется в виду, что балка загружена известной нагрузкой $q(x)$, вследствие чего возникает прогиб. Во втором случае $y(x)$ — причина, а $q(x)$ — следствие. Подразумевается, что балке задается некоторый прогиб $y(x)$ [это можно сделать хотя бы мощным прессом с пуансоном и матрицей, которые отпрофилированы по форме $y(x)$]. Как следствие придания балке прогиба $y(x)$, между элементами прессовой установки и балки возникает давление $q(x)$.

Стоя на позициях абстракции абсолютной точности, следует сказать, что различия между указанными случаями нет. Но в *действительности оно очень велико. Мы не можем дать нагрузку* $q(x)$ абсолютно точно и всегда будем условно идентифицировать ее с некоторой известной функцией. Однако при этом малые изменения в $q(x)$ приводят лишь к незначительным изменениям $y(x)$, и можно считать $y(x)$ детерминированно определенным. Мы не в состоянии абсолютно точно задать и прогиб $y(x)$ и тоже будем условно идентифицировать его. Но тогда нагрузка $q(x)$ не будет детерминированно определена, поскольку она выражается через четвертую производную $y$, а нам не дано находить даже первые производные от неточно заданной функции.

Таким образом, для решения физической задачи без принятия абстракции абсолютной точности нам очень важно знать, что является причиной или условием, а что — следствием в данной конкретной ситуации.

Несмотря на приведенные рассуждения, свидетельствующие как будто о главенствующей роли абстракции абсолютной точности над абстракцией нивелирования причин, условий, следствий, *не нужно придавать последней чисто вспомогательный характер,* так как она имеет и самостоятельное значение.

Чтобы показать это, рассмотрим достаточно убедительный пример анализа понятия многозначного соответствия между множеств (многозначной функции).

Пусть имеются два пульта $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ и $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$, на которых установлены наборы кнопок $a_i$ и $b_j$. Подойдя к пульту $A$ и нажав кнопку $a_k$, мы видим, что она осталась утопленной в гнезде и одновременно оказались утопленными кнопки $b_r$, $b_s$ на пульте $B$. Нажимая теперь последовательно все кнопки на $A$, мы можем выделить подмножество $G$ из декартова произведения $A \times B$, *которое определяет искомое соответствие между элементами* множеств $A$ и $B$. Приведем теперь оба пульта в исходное состояние, затем подойдем к пульту $B$ и нажмем кнопку $b_r$. Мы можем увидеть, что кнопка $b_r$ осталась утопленной, но на пульте $A$ оказалась утопленной не кнопка $a_k$, а кнопки $a_t$, $a_p$. Ведь пульты могуть быть устроены так, что при нажатии кнопки замыкается какая-то сеть, которая подключает определенную схему соединения пультов. Нажимая на кнопку пульта $A$, мы подключаем одну схему, а нажимая на кнопку пульта $B$, подключаем другую схему. В ре-



зультате подмножество $G^{-1}$ *может рассматриваться лишь как условно обратное соответствие*, а реально обратное соответствие определится некоторым подмножеством $F$ декартова произведения $B \times A$, причем в общем случае $G$ и $F$ никак не связаны между собой.

В рассмотренном примере абстракция нивелирования причин, условий, следствий устранена, а абстракция абсолютной точности не устранена. В результате важное математическое понятие претерпело заметные изменения.

Исключение абстракции нивелирования причин, условий, следствий вносит существенные коррективы и во многие другие *математические представления. Математику, не использующую ни* ее, ни абстракцию абсолютной точности, будем называть неклассической математикой второго типа. При исключении только абстракции нивелирования причин, условий, следствий имеем неклассическую математику третьего типа.

Обратим внимание, что и в классической математике иногда вводится нечто подобное «математическим причинам и условиям» и «математическим следствиям»; во всяком случае там для устранения недоразумений иногда рассматривают направленные связи (хотя бы при описании отображений множеств). Однако делается это, в общем, непоследовательно. Учитывая сказанное, мы будем *четко отличать неклассическую математику третьего типа* от классической математики.

Для нас в дальнейшем основное значение имеет неклассическая математика второго типа, поэтому говоря просто о неклассической математике, мы всегда будем иметь в виду именно ее.

5. В з а и м о д е й с т в и е к л а с с и ч е с к о й и н е к л а с с и ч е с к о й м а т е м а т и к и. А б с о л ю т н о о б ъ е к т и в н ы е и о т н о с и т е л ь н о о б ъ е к т и в н ы е п о н я т и я и м о д е л и. Положение дел, возникающее с развитием неклассической математики, нельзя считать чем-то особенным; здесь имеются многие аналогии, например с периодом возникновения квантовой механики.

Согласно классическим представлениям, материальная частица обладает в любой момент времени тремя определенными пространственными координатами, причем этот момент, отсчитываемый от некоторого начала, нетрудно представить как четвертую координату. Таким образом, частице присваиваются четыре координаты, определяющие так называемую *мировую точку; совокупность мировых точек частицы образует ее мировую линию.* Форма мировой линии зависит от взаимодействия частицы с окружающим миром, но не зависит от наблюдений за частицей.

В мире макротел такая модель нас вполне устраивает. Но в микромире принятая абстракция уже не оправдывается: наблюдая микрочастицу, мы либо достаточно хорошо фиксируем ее положение, но непременно меняем скорость, т. е. будущее движение, либо хорошо фиксируем скорость, но тогда очень неточно узнаем положение, либо, наконец, не очень хорошо знаем и положение, и скорость.

Квантовая механика, отбрасывая абстракцию о неизменности мировой линии в зависимости от наблюдений частицы, уже в силу этого преобразуется в новую науку. Но она не перечеркивает положения классической механики, ибо соотношения квантовой механики вообще лишены смысла без классических представлений о движении. В ней указаны условия и пределы классических представлений, и эти указания бессмысленны без классических понятий.

Аналогичным образом все происходит и в нашем случае. Изучая нарушения абстракций абсолютной точности и нивелирования причин, условий, следствий, указывая пределы, где эти абстракции моделей классической математики применимы, а где нет, мы формулируем наши указания в терминах классической математики. Таким образом возникает органическая дополнительность понятий классической и неклассической математик.

Приведенные соображения и аналогии из области квантовой *механики остаются в силе и при более аккуратной формулировке* гносеологических оснований последней, когда воздействие измерительного прибора рассматривается как частный случай изменения условий макроокружения частицы.

Фактическое формирование неклассической математики началось довольно давно, но оно происходило скрытно, т. е. в рамках классических представлений. Рассматривая конкретную физическую задачу, мы, как правило, проводим в ней конкретный анализ причинно-следственных связей, а также условий идентификации *входящих в нее элементов. Затем с учетом указанного анализа* используем классические зависимости, расшифровываем физическое содержание ответа. При этом накапливается материал для обобщений, т. е. для изучения структур отмеченных связей и условий идентификации независимо от деталей данного физического содержания и для развития в конечном итоге их формализованной теории. Последняя и есть, по существу, неклассическая математика.

Так, создавая приближенные численные методы решения дифференциальных уравнений, современные ученые уже занялись в том или ином виде неклассической математикой. Но они рассматривают свои приближенные методы как некий, пусть даже доброкачественный, суррогат так называемых точных методов классической математики. В то же время, изменив точку зрения и в принципе став на позиции неклассической математики, можно прийти к иным выводам, получить новые результаты.

Ничего удивительного в таком инкубационном периоде нет. Не проводя прямых параллелей, вспомним хотя бы, что фактическое начало неэвклидовой геометрии было положено еще исследованиями Саккери (1733 г.) и Ламберта (1766 г.), так как в их работах были сформулированы и доказаны некоторые неэвклидовы теоремы. Но Саккери и Ламберт и не помышляли о действительно новых геометриях — они стояли на позициях Эвклида и пытались лишь найти



какое-нибудь противоречие, отбросив знаменитый пятый постулат. Положение резко изменилось только тогда, когда исследователи твердо стали на новую точку зрения (около 1830 г.).

Против сказанного можно пытаться возражать примерно так. Абстракция абсолютной точности и базирующаяся на ней классическая математика отражают мир точно; мы просто не знаем истинных значений соответствующих величин и потому вынуждены говорить о погрешностях, а если бы мы знали их точно, то все было бы *в порядке.*

Однако буквально так же возражали в свое время и противники понимания одновременности событий, вводимого специальной теорией относительности и являющегося ее основой. События на самом деле одновременны или неодновременны независимо от взаимного расположения точек пространства, говорили оппоненты этой теории, а все рассуждения Эйнштейна базируются на том, что мы просто не умеем посылать мгновенные сигналы. Если представить себе наличие неких абсолютно жестких стержней, мгновенно передающих *импульс (сигнал), то все станет на свои места.*

Ответ на подобные возражения известен. Дело в том, что мы в принципе никогда не будем иметь мгновенных реальных сигналов, и потому реальному миру более адекватна теория относительности, учитывающая указанную принципиальную немгновенность. Аналогичным образом мы никогда не будем иметь абсолютно точных измерений, реально оперировать бесконечным числом значащих цифр, словом, обладать абсолютными условиями идентификации любого элемента любого множества. Таким образом, абстракция *абсолютной точности накладывает серьезные ограничения на* любую содержательную математическую теорию, и, когда они очень дают себя чувствовать, целесообразно переходить к более общим построениям.

Кроме того, напомним об абстракции нивелирования причин, условий, следствий, которая не выполняется в реальном мире, а также о том, что многие понятия (типа уже упоминавшейся длины реального предмета) вообще теряют смысл при неограниченном уточнении определяющих их значений.

Характерной особенностью неклассической математики по сравнению с классической является то, что большинство основных понятий и моделей первой можно назвать относительно объективными, в то время как понятия и модели второй — абсолютно объективными. Суть указанного хотя и не безупречно строгого, но полезного деления можно пояснить примерами.

Пусть мы имеем некоторую функцию $f(x)$. Понятие производной $f'(x)$ этой функции в точке $x$ с позиций классической математики абсолютно в том смысле, что данная производная не зависит от каких-то специальных условий задачи, для которой потребовалось найти $f'(x)$, и от целей конкретного исследования. В то же время понятие производной в неклассической математике относительно в том смысле, что значение $f'(x)$ зависит от «жесткости» процесса, для которого в данной конкретной задаче находится производная, а также от целей предпринимаемого исследования.

Вообще, понятие и модель будем считать абсолютно объективными, если они применимы во всех их деталях к широкому классу задач и не зависят от целей конкретного исследования; в противном случае (конкретная задача и цели исследования определяют многие детали данного понятия или модели) они относительно объективны. Слова «объективное понятие» или «объективная модель» подчеркивают, что рассматриваемые понятия и модели отражают действительные закономерности окружающего нас мира хотя бы с позиций достижения стоящих перед нами целей.

С абсолютно и относительно объективными понятиями и моделями мы неоднократно встретимся еще, что позволит лучше уяснить сущность предлагаемых терминов. Сейчас же следует подчеркнуть, что, во-первых, принятое деление несколько условно и не дает совершенно точных границ, а во-вторых, по мере углубления в любой достаточно развитый предмет изучения тенденция относительной объективности, как правило, начинает ощущаться заметнее.

Первое замечание вовсе не лишает эту терминологию определенной ценности — ведь и другие безусловно ценные и важные деления страдают условностью и расплывчатостью (вспомним хотя бы деление *на «живое» и «неживое»). Второе замечание хорошо* иллюстрируется понятиями длины и времени: в обыденной жизни и в классической механике длина и длительность представляются чем-то абсолютным и не зависящим от целей рассмотрения, а в теории *относительности эта абсолютность явно начинает уменьшаться.* Оказывается, что, имея в виду разные цели и условия, можно и должно говорить о разных длинах одного и того же предмета и разных длительностях данного процесса.

## § 2. Основные представления об устойчивости, индивидуальной *определенности и наблюдаемости* объектов

Неклассическая математика теснейшим образом связана с проблемами устойчивости объектов, их индивидуальной определенности и наблюдаемости. Частным случаем этих проблем является проблема устойчивости численных алгоритмов. При этом важные практические результаты в области последней могут быть достигнуты просто за счет уяснения основных понятий — объект, его устойчивость, индивидуальная определенность и наблюдаемость.

1. Понятие мысленного объекта. Будем называть мысленным объектом *(иногда для краткости просто объектом)* (рис. 1. 4,*а*) мысленную модель чего-то реального или воображаемого (стола, корпуса судна, процесса брожения винограда,



интеграла), определяемую конечной системой так называемых естественных входов или параметров генетической идентификации *1* и естественных выходов или параметров результирующей идентификации *2.* Естественные входы выражают выделенные нами наиболее важные причины и условия образования или проявления реального моделируемого предмета, а естественные выходы — выделенные нами и наиболее важные для нас в данном исследовании свойства предмета. Два предмета практически одинаковы или идентичны для нас (являются в данном рассмотрении практически одним и тем же), если и только если соответствующие им мысленные

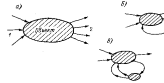



Рис. 1.4.

объекты имеют практически одинаковые системы естественных входов и выходов. Критерии и алгоритмы (условия) идентификации естественных входов назовем условиями генетической идентификации, а критерии и алгоритмы (условия) идентификации естественных выходов — условиями результирующей идентификации.

Одному и тому же предмету в разных исследованиях могут соответствовать разные мысленные объекты с другими естественными входами и выходами. Мысленный объект — заместитель предмета именно в данном исследовании, а не вообще и вечно. Но говоря о данном исследовании, проводимом в конкретных целях, мы действительно подменяем в нем предмет мысленным объектом.

В ряде случаев мы не расчленяем мысленный объект на какие-то внутренние элементы и не рассматриваем, хотя бы приблизительно, *«механизм» преобразования* естественных входов в естественные выходы, т. е. рассматриваем соотношение входов и выходов чисто экспериментально при физической реализации предмета, отображаемого объектом. Тогда появляется некая аналогия с известным *«черным ящиком», столь любимым кибернетиками.* Разница состоит в том, что у черного ящика все входы и выходы даны обычно самой природой, а мы активно определяем и конструируем их, игнорируя (может быть, и не обоснованно) многие природные входы и выходы.

*В качестве конкретного примера возьмем стыковой* шов листов судового корпуса, выполненный автоматической сваркой. Параметрами генетической идентификации (естественными входами) выступают: марка флюса, режимы тока при сварке и т. п. Все они указаны в технических условиях на поставку материала, проволоки, флюса, в технологической документации процесса сварки и т. д. Там же имеются и условия генетической идентификации в виде допусков по химическому составу, по разбросам силы тока и пр. В технической документации на приемку швов содержатся параметры результирующей идентификации (естественные выходы) типа временного сопротивления сварного соединения, ударной вязкости шва, предела текучести, твердости; методы определения указанных параметров и допустимые разбросы дают условия результирующей идентификации.

Заметим, что предлагаемая модель в данном случае, как и во всех других, является относительно объективной. В частности, за параметры результирующей идентификации мы приняли только те свойства соединения, которые нам важны для обеспечения его прочности; условия результирующей идентификации выбраны путем установления приемлемых для наших целей разбросов и т. п.

В принципе возможен случай (рис. 1.4, *б*), когда некоторые выходы объекта жестко связаны с входами (обратная связь). Тогда каждую такую петлю целесообразно разрезать и обе ее ветви рассматривать изолированно, учитывая отдельно дополнительное условие равенства соответствующих входов и выходов. Отмеченное разделение полезно, даже если входы и выходы не сдвинуты во времени — ведь любой вход определяет, вообще говоря, все (в том числе и не связанные со входами) выходы, а потому учет его возможных колебаний весьма существен. Если же вход и выход разделены временным интервалом, то этот интервал оказывается естественным и реальным «разделителем» петли: в данном случае выход определяет не собственный вход, а тот, который скажется на выходе для другого момента времени, т. е. на другом выходе. Иными словами, сама замкнутая петля введена здесь в значительной степени условно.

Для входов и выходов, разделенных во времени, нередко обычные разомкнутые входы и выходы отсутствуют. Если сдвига во времени нет, то предлагаемая модель тривиальна (она моделирует просто наличие чего-то) и в силу этой тривиальности, возможно, неполна — в ней, быть может, отсутствуют некоторые существенные, но не учитываемые нами входы, которые не связаны жестко и неразрывно с соответствующим выходом.

Бывает, что какие-то выходы рассматриваемого объекта определяют какие-то его входы, но не прямым, а трансформированным образом (рис. 1.4, *в*) через дополнительный объект. Здесь также полезно размыкание цепей с записью дополнительных условий. Кроме того, можно изменить саму модель и объединить рассматриваемый объект с дополнительным в единый укрупненный объект, т. е. попросту отнести все замкнутые цепи к внутренним связям и выбросить их из множества параметров генетической и результирующей идентификации.



В последнем примере наглядно видна относительная объективность любых наших моделей предметов изучения, создаваемых нами в наших объективных целях и отражающих реальный мир, но далеко не однозначных, а достаточно гибких и подвижных.

Необходимость гибкого и неформального подхода проявляется даже в простейших задачах. Вспомним хотя бы задачу об изгибе балки поперечной нагрузкой $q(x)$ или пуансоном, отпрофилированным по форме $y(x)$, которую мы рассматривали в § 1. Составляя модель явления, мы принимали в первом случае за его причину нагрузку $q(x)$, считая $y(x)$ следствием, а во втором случае причиной считали принудительный изгиб балки по форме $y(x)$, а нагрузку $q(x)$ на балку — следствием принудительного изгиба.

2. Общее и частные определения устойчивости объектов. Часто необходимо «многоярусное» построение системы понятий, когда верхний ярус составляет какое-то общее, полезное именно своей общностью, но потому несколько расплывчатое и неконкретное понятие, а более низкие ярусы включают все более и более конкретизированные понятия, непосредственно применяемые и полезные в частных вопросах.

Строя общее понятие устойчивости, отметим, что оно органически связано с понятием множественности. Говорить об устойчивости или неустойчивости одного единственного объекта с жестко фиксированными естественными входами и выходами столь же бессмысленно, как о сыграности или несыгранности единственного футболиста.

Суть проблемы устойчивости обусловлена тем, что мы никогда не имеем в природе двух совершенно тождественных предметов с совершенно одинаковым происхождением (генезисом) и совершенно одинаковыми свойствами. Известное выражение о двух каплях воды — не более чем литературный образ. Выясняется, что близкое совпадение генезиса еще не означает достаточно близкого совпадения его результатов, т. е. параметров результирующей идентификации. Когда совпадения результатов нет, то в той или иной форме говорят о неустойчивости предметов и соответствующих им объектов. Устойчивость выражается тезисом: почти одинаковое происхождение означает почти полное совпадение всех интересующих нас в данном исследовании свойств. Более строгое изложение выглядит так.

Назовем объектами данного типа всю совокупность возможных объектов, у которых параметры генетической идентификации и результирующей идентификации качественно (только качественно!) совпадают. Кроме того, введем понятие данного конкретного базового объекта, имеющего конкретные параметры генетической и результирующей идентификации. Ясно, что количество возможных базовых объектов соответствует общему количеству возможных объектов данного типа, так как любой объект может быть принят в качестве базового.

Пусть выбран базовый объект. Тогда устойчивостью объектов, генетически идентичных с данным базовым объектом, по отношению к данным параметрам результирующей идентификации называется определенная степень стабильности этих параметров при многократном физическом повторении указанных генетически идентичных объектов.

Для расшифровки в каждом конкретном случае приведенного весьма общего и поэтому неизбежно расплывчатого определения требуется установить:

— параметры и условия генетической идентификации объектов данного типа;

— параметры и условия результирующей идентификации объектов данного типа;

— критерии и алгоритмы оценки степени стабильности параметров результирующей идентификации при многократных повторениях объектов данного типа, т. е. при многократном воспроизведении практически одинаковых условий генетической идентификации.

Ясно, что объекты могут быть устойчивыми по отношению к одним параметрам результирующей идентификации и неустойчивыми по отношению к другим. Скажем, сварные соединения в ряде случаев устойчивы по ударной вязкости, но неустойчивы по временному сопротивлению, и наоборот. *Устойчивость может быть обеспечена при одном базовом элементе и не обеспечена при другом.* Примем, что к сварным соединениям данного типа относятся все соединения стальных листов любых одинаковых марок стали, сваренных при любых режимах любыми флюсами. При каком-либо конкретном базовом элементе, т. е. конкретном соединении с определенной маркой материала, и определенных режиме и флюсе генетически идентичные соединения могут быть устойчивы по каким-то механическим свойствам, а при другом базовом элементе — неустойчивы.

Заметим, наконец, что качество и устойчивость (т. е. стабильность) — вещи разные. *Прочность сварных соединений может быть* высокой, но неустойчивой; низкой, но устойчивой; высокой и устойчивой.

Рассмотрим простейший, но, пожалуй, основной случай, когда критерием стабильности параметров результирующей идентификации объектов при повторениях служит их неизменная практическая одинаковость с некоторыми фиксированными параметрами базового объекта.

Объекты, генетически идентичные данному базовому объекту, называются детерминированно устойчивыми по отношению к данным параметрам результирующей идентификации (или в отношении данных параметров результирующей идентификации), если и только если: а) у любых таких генетически идентичных объектов эти параметры всегда оказываются практически одинаковыми с фиксированными параметрами базового объекта; б) при всех попытках физического воспроизведения рассматриваемых генетически идентичных объектов никогда не происходит качественного изменения продуктов воспроизведения. (В дальнейшем будем, как правило, называть детерминированно устойчивые объекты просто устойчивыми, а детерминированную устойчивость — просто устойчивостью.)

Но детерминированная устойчивость не является единственно возможным видом устойчивости. Часто употребляется, например, понятие вероятностной устойчивости (или устойчивости по вероятности). Объекты, генетически идентичные данному базовому объекту, назовем вероятностно устойчивыми по отношению к данным параметрам результирующей идентификации, если и только если вероятность практической одинаковости этих параметров с некоторыми фиксированными параметрами базового объекта при генетически идентичном физическом воспроизведении объектов равна заранее оговоренному значению (или больше него). Иными словами, мы полагаем, что данный параметр результирующей идентификации вероятностно устойчив, если, воспроизводя объект, генетически идентичный с базовым, мы знаем, что этот параметр будет практически точно воспроизведен по крайней мере с наперед заданной вероятностью. Более подробно указанное понятие вероятности рассмотрено в § 3.

*Возвращаясь к рассмотренному выше примеру со сваркой*, можно сказать, что швы детерминированно устойчивы в отношении временного сопротивления, если у всех генетически идентичных швов указанное временное сопротивление всегда практически одинаково с некоторым фиксированным временным сопротивлением базового объекта. Швы вероятностно устойчивы в отношении временного сопротивления, если, воспроизводя шов, мы уверены, что с вероятностью, не меньшей, чем заданная, временное сопротивление шва будет практически одинаково с некоторым фиксированным временным сопротивлением базового объекта или больше него.

Любопытно, что вероятностная устойчивость, вероятность *которой равна единице, не совпадает, вообще говоря, с детерминированной устойчивостью.* Достаточно вспомнить известный факт, что событие, вероятность которого равна единице, может все-таки не произойти, а событие, имеющее вероятность нуль, может произойти. Последнее объясняется тем, что событие нулевой вероятности отвечает множеству меры нуль, а невозможное событие — пустому множеству; в то же время событие вероятности единица есть обратное по отношению к событию нулевой вероятности, а достоверное событие — обратное по отношению к невозможному. Таким образом, вероятностная устойчивость, строго говоря, не переходит в пределе и детерминированную.

Обратимся к анализу причин неустойчивости.

Объекты данного типа называются конечнофакторными по отношению к данным параметрам результирующей идентификации, если и только если эти параметры практически полностью (в пределах условий идентификации) определяются конечным числом изменяющихся в принципе физических причин и условий образования или проявления соответствующего предмета. Иными словами, если данные свойства предмета, которые отражаются выбранными естественными выходами объекта, зависят практически лишь от конечного количества переменных физических причин и условий образования или проявления предмета, то соответствующий объект будет конечнофакторным (даже когда его естественные входы включают фактически не все существенные физические причины и условия). В противном случае мы имеем неконечнофакторный объект.

Если естественные входы конечнофакторного объекта отражают все существенные физические причины и условия образования или проявления предмета, то объект называется собственно конечнофакторным или конечнофакторным без скрытых параметров; в противном случае он будет конечнофакторным со скрытыми параметрами.

Очевидно, что детерминированно устойчивыми объектами в отношении некоторого параметра результирующей идентификации могут быть только те, которые в отношении его являются собственно конечнофакторными. Но собственно конечнофакторные объекты часто бывают детерминированно неустойчивыми.

Вероятностной устойчивостью могут обладать и конечнофакторные и неконечнофакторные объекты.

Детерминированная неустойчивость объектов в отношении каких-то параметров результирующей идентификации свидетельствует, таким образом, о пяти основных возможностях: 1) либо объекты относятся к числу неконечнофакторных относительно этих параметров; 2) либо они конечнофакторные, но имеют скрытые параметры, т. е. каталог параметров генетической идентификации неполон и мы упускаем какое-то число важных меняющихся причин и условий существования объекта; 3) либо принятые условия генетической идентификации объектов недостаточно жестки; 4) либо хотя бы некоторые входы не вполне адекватно отражают *соответствующие причины и условия возникновения или проявления* объекта; 5) либо осуществляется какая-то комбинация указанных возможностей.

Вспоминая снова наш пример со сварным швом, заметим, что в первом случае может сказываться влияние необъятного числа мелких факторов металлургического процесса изготовления материала. Во втором случае, предположим, мы забыли принять за один из параметров генетической идентификации процессов сварки температуру окружающего воздуха, которая менялась и заметно влияла на качество шва. В третьем случае могло оказаться, например, что допускаемый разброс содержания серы в материале листов данной марки слишком был велик и привел к недопустимому разбросу ударной вязкости соединения. Четвертый и пятый случаи пояснений не требуют.



Неполнота параметров генетической идентификации бывает весьма своеобразной. Для пояснения проанализируем уже рассмотренный ранее упругий изгиб однопролетной балки. Согласно элементарной теории, он полностью определяется длиной балки $l$, жесткостью на изгиб $EI(x)$, интенсивностью поперечной нагрузки $q(x)$, условиями закрепления концов. Рассматривая достаточно длинные балки, мы найдем, что генетически идентичные процессы устойчивы в отношении прогибов $y(x)$. Но если перейти к коротким балкам, то здесь процессы, генетически идентичные относительно отмеченных параметров генетической идентификации, уже не будут, вообще говоря, устойчивыми в отношении данного параметра результирующей идентификации. Причина ясна — мы знаем, что у коротких балок большую роль начинают играть сдвиги, которые зависят от жесткости сечений на сдвиг $G\Omega(x)$. А последняя не входит в число принятых параметров и поэтому может быть различной. Следовательно, в одних случаях отбрасывание жесткости $G\Omega(x)$ как одного из параметров генетической идентификации вполне оправданно, а в других — оно оказывается неправильным.

Для еще более коротких балок элементарная теория, даже с поправкой на сдвиг, становится не применимой, и нам следует перейти на другое множество параметров генетической идентификации — то, которое входит в зависимости теории упругости.

Из только что приведенного примера видно, что, приняв в качестве параметров генетической идентификации величины $l$, $EI(x)$, $q(x)$ и условия закрепления, мы имеем право отнести к собственно конечнофакторным объектам данного типа лишь достаточно длинные балки.

Объект может оказаться неконечнофакторным не только из-за того, что имеется бесконечно много внешних причин и условий образования или проявления предмета, которые заметно влияют в своей совокупности на интересующие нас свойства, но и в силу неустойчивости внутреннего «механизма» преобразования предметом этих причин и условий в выходные свойства. Именно поэтому мы и отказываемся от более простого термина «бесконечнофакторный объект».

Иногда мы встречаемся с абсолютной неустойчивостью или, наоборот, с абсолютной устойчивостью в отношении некоторых параметров результирующей идентификации.

Конечнофакторные объекты данного типа называются абсолютно неустойчивыми в отношении определенных параметров результирующей идентификации, если и только если нарушение абсолютной тождественности параметров генетической идентификации двух объектов полностью лишает нас возможности судить об указанных параметрах результирующей идентификации. Пример абсолютно неустойчивого объекта — производная функции $f(x)$ в точке $x$.

Конечнофакторные объекты данного типа называются абсолютно устойчивыми в отношении определенных параметров результирующей идентификации, если и только если при любых физически возможных параметрах генетической идентификации этих объектов указанные параметры результирующей идентификации оказываются практически одинаковыми. Соответствующий пример будет дан ниже.

Приведенным выше определениям нетрудно дать наглядную геометрическую интерпретацию (рис. 1.5). Пусть $M$ — множество возможных совокупностей параметров генетической идентификации собственно конечнофакторных объектов данного типа или, иначе, пространство параметров генетической идентификации (ППГИ); точка $m_i \in M$ — конкретная совокупность параметров

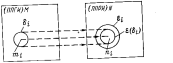



Рис. 1.5.

генетической идентификации некоторого базового объекта («координаты» этой точки — конкретные значения упомянутых параметров). Обозначим буквой $N$ множество возможных совокупностей параметров результирующей идентификации объектов данного типа или, иначе, пространство параметров результирующей идентификации (ППРИ); точка $n_i \in N$ — конкретная совокупность параметров результирующей идентификации объекта, соответствующего $m_i \in M$. Возникновение рассматриваемого базового объекта как бы трансформирует (отображает) точку $m_i$ в точку $n_i$. Задание условий генетической идентификации определяет около точки $m_i$ область $\delta_i$, которая соответствует объектам, генетически идентичным с базовым объектом, а задание условий результирующей идентификации — область $\varepsilon_i$ вблизи точки $n_i$, соответствующую объектам, которые являются результирующе идентичными с базовым. Пусть $\varepsilon(\delta_i)$ — отображение области $\delta_i$ в ППГИ, т. е. в $N$. Если $\varepsilon(\delta_i) \subseteq \varepsilon_i$ (т. е. лежит в $\varepsilon_i$), то объекты, генетически идентичные с базовым объектом $(m_i, n_i)$, устойчивы. В противном случае они неустойчивы. Объекты абсолютно неустойчивы, когда сколь угодно малые отклонения точки $m_i$ от $m_i$ могут приводить к сколь угодно большим отклонениям $n_i$ от $n_i$. Они абсолютно устойчивы, если, взяв $\delta_i = M$, мы отобразим ее в $\varepsilon_i$, т. е. если будет выполнено условие $\varepsilon(M) \subseteq \varepsilon_i$.

Обратим внимание на интересный факт: если мы абсолютно точно воспроизведем физически параметры генетической идентификации базового объекта (т. е. точку $m_i$), то мы не сможем гарантировать



абсолютно точного воспроизведения точки $n_i$; собственная конечнофакторность объекта гарантирует лишь, что эта новая точка $n_i'$ всегда будет лежать в пределах $\varepsilon_i$ (независимо от детерминированной устойчивости или неустойчивости объектов, генетически идентичных с нашим базовым объектом). Таким образом, базовый объект $(m_i, n_i)$ определяется обеими точками $m_i$ и $n_i$.

Считая, что отброшенные нами фактические параметры генетической идентификации (т. е. отброшенные действительные естественные входы) абсолютно не влияют на интересующие нас параметры результирующей идентификации, будем называть объект абсолютно собственно конечнофакторным. Лишь тогда точка $n_i'$ при совершенно точном воспроизведении $m_i$ всегда будет точно совпадать с $n_i$. При рассмотрении моделей строительной механики такой случай довольно характерен.

Если же базовый объект не является собственно конечнофакторным, то точное воспроизведение $m_i$ не гарантирует даже того, что $n_i'$ будет лежать в пределах $\varepsilon_i$.

Положим, что множество $M$ возможных совокупностей параметров генетической идентификации абсолютно собственно конечнофакторных объектов данного типа и множество $N$ возможных совокупностей параметров их результирующей идентификации образуют топологические пространства, т. е. в них определены понятия непрерывности и сходимости. Объекты с параметрами генетической идентификации $m_1 \in M$ называются устойчивыми в малом в отношении параметров результирующей идентификации $n_1 \in N$, если и только если, устремляя параметры генетической идентификации $m_2 \in M$ некоторого объекта данного типа к $m_1$, мы тем самым непременно устремим к $n_1$ параметры его результирующей идентификации $n_2 \in N$ и если в некоторой окрестности точки $m_1$ никогда не произойдет качественных изменений продукта воспроизведения с образованием объектов совсем другой природы.

Когда $M$ и $N$ не только топологические, но и метрические пространства, т. е. когда в них определено понятие «расстояния» между элементами, приведенная формулировка может быть заменена другой. Объекты с параметрами генетической идентификации $m_1 \in M$ называются устойчивыми в малом в отношении параметров результирующей идентификации $n_1 \in N$, если и только если любому сколь угодно малому расстоянию $\rho[n_1, n_3] = \varepsilon$ в пространстве $N$ соответствует достаточно малое расстояние $\rho[m_1, m_3] = \delta$ в пространстве $M$, такое, что при $\rho[m_1, m_2] \leqslant \delta$ всегда выполняется неравенство $\rho[n_1, n_2] < \varepsilon$ и никогда не происходит качественных изменений продукта воспроизведения.

Устойчивость (неустойчивость) объектов в смысле приведенного выше определения детерминированной устойчивости часто называют устойчивостью (неустойчивостью) в большом в отличие от устойчивости в малом.



477381
БИБЛИОТЕКА
Лен. Кораблестроительн.

Имеется много примеров, когда объект, неустойчивый в малом, устойчив в большом и наоборот. Так, движение шарика по наклонному закрытому желобу специальной формы устойчиво в большом, но неустойчиво в малом (рис. 1.6, *а*); движение шарика по открытому желобу *с очень небольшим углублением (рис. 1.6, б)* устойчиво в малом, но неустойчиво в большом.

Необходимо оговорить, что понятие устойчивости в малом является в известном смысле неполноценным, поскольку в реальной действительности нас, как правило, интересует устойчивость в большом. Правда, проверка устойчивости в малом обычно оказывается полезной — при дополнительном физическом анализе она часто позволяет довольно уверенно судить и о действительной устойчивости.

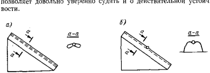



Рис. 1.6.

Обратим внимание на одно из принципиальных различий между понятиями устойчивости в большом и в малом. Первое понятие *относительно, так как требует введения исследователем условий* генетической идентификации и условий результирующей идентификации. Таким образом, при одних условиях, вносимых исследователем, один и тот же объект может быть отнесен к классу устойчивых, а при других условиях — к классу неустойчивых. Второе понятие абсолютно и вытекает только из свойств самого объекта.

Именно импонирующая, на первый взгляд, абсолютность второго понятия и сравнительная простота его математического анализа классическими методами обеспечили ему широкое применение. *Однако, обсуждая указанное различие, следует иметь в виду*, что произвол исследователя при назначении условий генетической и результирующей идентификаций в сущности является кажущимся: ведь исследователь назначает их не произвольно, а исходя из объективного физического анализа существа дела. Что касается сложности исследования, то общее развитие математики и успехи вычислительной техники все чаще позволяют нам преодолевать ее. Мы не говорим уже о случаях неабсолютно собственно конечнофакторных объектов или случаях нетопологических пространств $M$ и $N$, когда понятие *устойчивости в малом просто* бессмысленно.

Если множества $M$ и $N$ метризованы, т. е. в них определены понятия расстояний, и если объекты, определяемые точками $m_1$ и $n_1$, устойчивы, то можно говорить о запасах их устойчивости. Допустимо, например, определить минимальное расстояние между границами $\varepsilon_1$ и $\varepsilon$ $(\delta_1)$.



Подобно тому, как мы говорили ранее о вероятностной устойчивости в большом, можно говорить и о вероятностной устойчивости в малом: объекты с параметрами генетической идентификации $m_1 \in M$ называются вероятностно устойчивыми в малом в отношении параметров результирующей идентификации $n_1 \in N$, если и только если любому сколь угодно малому расстоянию $\rho\,[n_1, n_3] = \varepsilon$ *в пространстве* $N$ *соответствует такое достаточно* малое расстояние $\rho\,[m_1, m_3] = \delta$ в пространстве $M$, что при $\rho\,[m_1, m_2] \leqslant \delta$ с вероятностью, не меньшей заданного $P$, выполняется равенство $\rho\,[n_1, n_2] < \varepsilon$.

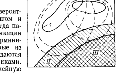



Рис. 1.7.

Приведенные определения вероятностной устойчивости в большом и в малом касаются случая, когда параметры генетической идентификации базового объекта заданы детерминированно. Между тем некоторые из них или даже все иногда задаются вероятностными характеристиками. Нетрудно представить себе линейную механическую систему с несколькими степенями свободы (жесткий корпус судна), находящуюся под действием сил колебательного характера со случайными параметрами (морское волнение со случайными высотами, длинами и фазами волн). В таком случае интересующие нас параметры результирующей идентификации объектов (выходные параметры качки) могут быть определены также лишь вероятностно. Но общая схема анализа вопросов устойчивости здесь, по существу, не меняется: от детерминированно заданных входных параметров мы перешли к их детерминированно заданным характеристикам по вероятности. И все! Эти последние характеристики могут быть приняты новыми детерминированными параметрами. По-прежнему допустимо говорить о конечнофакторных и неконечнофакторных объектах, о детерминированной устойчивости (вероятностные характеристики выходных параметров определяются детерминированно), о вероятностной устойчивости (вероятностные характеристики выходных параметров определяются лишь вероятностно), об устойчивости в большом и в малом и т. д.

Рассмотрев пространство параметров генетической идентификации объектов данного типа (ППГИ) и проанализировав устойчивость, нетрудно нанести на нем, в общем случае, области детерминированной устойчивости, вероятностной устойчивости и т. п. Примерная возможная схема таких областей показана на рис. 1.7, где $I$ — область собственно конечнофакторных объектов; $II$ — область конечнофакторных объектов со скрытыми параметрами; $III$ —

область неконечнофакторных объектов; *1* — граница области детерминированной устойчивости; *2* — граница области вероятностной устойчивости с вероятностью $P_1<1$; *3* — граница области вероятностной устойчивости с вероятностью $P_2<P_1$; *4* — граница области детерминированной устойчивости в малом; *5* и *6* — границы областей вероятностной устойчивости в малом с вероятностями $P_1$ и $P_2$. Можно говорить о запасах устойчивости в данной точке ППГИ по удалению ее от границ областей устойчивости.

В различных реальных случаях вид областей устойчивости может оказаться, конечно, гораздо сложнее.

*Меняя модель объектов (в частности, меняя условия идентификации)*, мы получим другие ППГИ и другие области устойчивости.

Выше мы отмечали, что понятие устойчивости неразрывно связано с понятием множественности. Однако иногда все же имеет смысл анализировать устойчивость данного индивидуального предмета, имея в виду разные моменты времени или вообще несколько разные физические причины и условия его существования. Строго говоря, здесь речь идет также о разных объектах — ведь объект определяется физическими причинами и условиями: меняя последние, меняем сам объект. Следовательно, выражение «устойчивость данного объекта» оказывается несколько условным и вовсе не противоречащим нашим утверждениям о множественности. Все предыдущие рассуждения и определения остаются в силе, если разные причины и условия образования и проявления объекта рассматривать как несколько различные параметры генетической идентификации объектов.

Наконец, введем еще одно понятие — возмущение. Под возмущением будем подразумевать всякое изменение физических причин и условий образования и проявления данного объекта по сравнению с принятым базовым объектом. Возмущения бывают явными и скрытыми. В первом случае они относятся к установленным *параметрам генетической идентификации базового объекта, во втором* — не относятся к ним.

3. Простейшие примеры использования введенных определений. Условия генетической идентификации связаны с реально осуществимой повторяемостью объектов данного типа. Мы можем много раз повторять процесс бросания тела (снаряда) с помощью какого-то устройства (пушки). Чисто операционалистское условие генетической идентификации будет состоять в том, что мы возьмем одну неизменно установленную и наведенную пушку, одинаковые (в промышленной поставке) снаряды, заряды и т. д. При более подробном анализе можно ввести разбросы начальной скорости снаряда и т. д. Но все эти уточненные условия все равно определятся фактическим разбросом соответствующих параметров генетической идентификации при повторных выстрелах.

Условия результирующей идентификации объектов назначают, исходя из конкретного анализа ситуации. Чаще всего они обусловливаются той границей, за которой параметры результирующей идентификации уже не могут рассматриваться как детерминированно определенные.



Пусть снаряд имеет радиус поражения цели $R_п$, Это значит, что можно считать попадание снаряда детерминированно определенным, если разброс в попаданиях находится в пределах от нуля до $R_п$. Отсюда видна глубокая связь условий результирующей идентификации с конкретными особенностями и целями данного исследования. Предположим, что мы сделаем сто повторяющихся выстрелов из данной пушки болванками, форма и вес которых соответствует форме и весу боевых снарядов. Максимальный разброс попаданий на данной дистанции оказался равным $R_{max}$. При каком-то взрывчатом веществе боевого снаряда $R_п<R_{max}$, т. е. стрельба должна быть признана детерминированно неустойчивой. Но если мы заменим взрывчатое вещество более сильным, та же *пушка обеспечит детерминированно устойчивую стрельбу*.

Можно представить себе и такой гипотетический, но очень показательный случай. Предположим, что нас интересует лишь такой грубейший параметр процесса, как направление полета снаряда. Тогда процесс стрельбы детерминированно устойчив в отношении отмеченного параметра и мы имеем дело, по существу, с абсолютной устойчивостью.

Рассмотрим второй пример. Пусть тело сферической формы радиусом $R$ брошено в момент $t=0$ с начальной скоростью $v_0$ в пустоте при отсутствии возмущающих сил. Тогда в инерциальной системе координат оно будет двигаться прямолинейно с той же скоростью. Требуется определить положение центра сферы $x$ в разные моменты времени $t$. Считаем величину $x$ определенной детерминированно, если погрешность не превышает $\pm R$.

Параметрами генетической идентификации процесса бросания будут: направляющие косинусы вектора начальной скорости, начальное положение тела, начальная скорость $v_0$. Допустим для простоты, что первые два параметра повторяются абсолютно точно, а третий параметр реализуется с разбросом $\pm\delta$. Последний мы и примем за условие генетической идентификации.

Приняв начало координат в центре сферы в момент бросания, *имеем $x=v_0t$. Но так как $v$ имеет разброс, то фактическое положение* центра сферы будет находиться в пределах числового сегмента

$$[x_{mim}=v_0t-\delta t,\ x_{max}=x_0t+\delta t].$$

Таким образом, положение центра сферы детерминированно устойчиво в промежутке $0\leqslant t\leqslant\frac{R}{\delta}=t_1$ и неустойчиво при $t>t_1$. Если $t>t_1$, то мы можем судить о положении тела только с вероятностных позиций.

Предположим, что фактические разбросы $v_0$ распределяются по закону равной вероятности. Тогда центр сферы с равной вероятностью совмещается с любой точкой указанного выше сегмента. Следовательно, вероятность $P$ попадания самого тела в наперед *заданную* точку $x = v_0 t$ внутри этого сегмента при $t > t_1$ составляет

$$P = \frac{1 \cdot 2R}{2\delta t} = \frac{R}{\delta t} .$$

Пусть положение тела вероятностно устойчиво, если оно известно с вероятностью, не меньшей, чем $P = P_0$. Тогда эта устойчивость осуществляется в промежутке $0 \leqslant t \leqslant t_2$, где $t_2 = \frac{R}{\delta P_0}$.

Обратимся теперь к устойчивости в малом.

Из приведенных зависимостей видно, что, задав любой конечный интервал времени $0 \leqslant t \leqslant T$, мы всегда можем найти положение $x$ с любой сколь угодно малой погрешностью $\varepsilon$, если обеспечим достаточно малую величину $\delta$. Следовательно, процесс бросания тела устойчив в малом на любом конечном интервале времени.

Но практически это почти ничего не дает. Ведь мы можем на самом деле обеспечить лишь определенную, хотя и малую величину $\delta$. Значит, устойчивость обеспечивается далеко не на любом конечном интервале.

Интересно отметить, что на бесконечном интервале времени не обеспечена и устойчивость в малом. Выбрав $\varepsilon$, мы не можем найти такое конечное $\delta$, при котором погрешность определения $x$ не превысит $\varepsilon$ для любого момента $0 \leqslant t$. Таким образом, предельный переход к бесконечности как бы «продлевает» действенность определения устойчивости в малом для анализа реальной устойчивости движения рассматриваемого объекта.

Именно это чрезвычайно важное обстоятельство обусловливает работоспособность такой известной математической теории, как теория устойчивости движения по Ляпунову, о которой будет сказано в дальнейшем. Последняя оперирует только устойчивостью в малом, что дает возможность ее автору и его последователям оставаться, по существу, в рамках аппарата классической математики и абсолютно объективных моделей. Но тогда, как и в нашем простейшем примере, практически любое движение устойчиво, как бы ни был велик интервал рассматриваемого времени. Ляпунов искусственно вводит именно бесконечное время, когда неустойчивость начинает иногда проявляться, и благодаря такому приему спасает дело.

Впрочем, и при отмеченном приеме анализ устойчивости в малом *не заменяет во всех случаях полного анализа устойчивости.*

Пригодность приведенных ранее определений понятий устойчивости далеко выходит за рамки механики, физики, судостроения, техники и т. п. Становится ясным, почему мы можем говорить об *устойчивых спортивных показателях данного члена Олимпийской* сборной (они мало зависят от таких естественных входов, как настроение данного спортсмена, погода, психологическая обстановка



состязаний и т. п.), об устойчивости рынка (цены, спрос и предложение на нем почти не колеблются в зависимости от локальных конъюнктурных возмущений типа изменений погоды, изменения личной активности того или иного продавца или покупателя и пр.), даже о моральной неустойчивости данного индивидуума (он может быть, вообще говоря, хорошим человеком, но его поведение и поступки сильно меняются при изменении таких входов, как окружающая компания, личное настроение, собственное положение в обществе и др.). Уяснить указанные понятия особенно важно в наш век интенсификации многих технических, общественных и социальных процессов, когда роль неустойчивости начинает возрастать и анализ вопросов устойчивости становится все более актуальным во всех сферах нашей деятельности.

В частности, для судостроения важны и устойчивость применяемых вычислительных алгоритмов, и устойчивость конструкций, и устойчивость свойств конструкционных материалов, и устойчивость всех технологических процессов постройки корпуса, и многое другое.

4. Понятие устойчивости систем. Назовем системой модель объекта, когда сам объект представлен в виде совокупности идеализированных внутренних объектов (элементов системы), имеющих конечное число рассматриваемых свойств и объединенных некоторым взаимодействием и некоторой взаимной зависимостью *между собой, а также связью и зависимостью* с естественными входами исходного объекта. Например, изучая движение реального маятника, мы заменяем его механической системой той или иной степени сложности — абсолютно твердым (или линейно-*упругим) телом, подвешенным без трения (или с заданным трением)* на абсолютно жесткой оси. Система дает представление об «устройстве» объекта и о «механизме» преобразования естественных входов в естественные выходы.

*Система и реальный моделируемый предмет — вовсе не одно* и то же. Город есть город, но социологи заменят его социологической системой, транспортники — транспортной системой, энергетики — энергетической системой и т. д.

Вообще говоря, исследуя любой реальный предмет в определенных целях, мы всегда явно или неявно заменяем его некоторой системой; все сказанное выше об объектах непосредственно относится и к системам. Однако имеется одно важное понятие, которое обычно связывается только со словом система.

Пусть дана базовая система, определяемая какими-то фиксированными параметрами результирующей идентификации. Системы, идентичные с ней по параметрам результирующей идентификации, называются детерминированно устойчивыми в отношении какого-то процесса, если этот в принципе возможный процесс в указанных системах практически отсутствует (понятие процесса считаем интуитивно ясным).

Естественно, что для реализации приведенного определения требуется задать параметры процесса и условия его результирующей идентификации с полностью отсутствующим процессом.

Системы, идентичные с базовой системой по параметрам результирующей идентификации, называются вероятностно устойчивыми в отношении какого-то процесса, если и только если вероятность практического отсутствия указанного процесса в любой из них равна заранее оговоренному значению или больше него.

В приведенных определениях мы говорим о параметрах и условиях результирующей идентификации систем, поскольку именно они служат параметрами и условиями генетической идентификации процессов, происходящих в системах (устройство системы определяет процесс).

Рассматривая в строительной механике устойчивость равновесия деформированной конструкции, мы изучаем, в сущности, устойчивость некоторой механической системы по отношению к процессу движения.

Положим, что возможные совокупности параметров результирующей идентификации систем данного типа образуют топологическое пространство $M$; точка $m_i \in M$ определяет конкретную совокупность этих параметров. Пусть, далее, возможные совокупности параметров результирующей идентификации процесса представлены топологическим пространством $N$; точка $n_i \in N$ дает их конкретную совокупность. Положим, наконец, что полное отсутствие процесса соответствует точке $n_0 \in N$; оно имеет место, когда параметры результирующей идентификации системы выражаются точкой $m_0$.

Система, выражаемая точкой $m_0$, называется устойчивой в малом в отношении данного процесса, если, устремляя точку $m_i$ и $m_0$, мы тем самым устремим к $n_0$ соответствующую точку $n_i$.

Если $M$ и $N$ не только топологические, но и метрические пространства, то вместо этого определения можно дать его эквивалент. Система, выражаемая точкой $m_0$, называется устойчивой в малом в отношении данного процесса, если любому сколь угодно малому расстоянию $\rho\,[n_0,\ n_2] = \varepsilon$ в пространстве $N$ соответствует достаточно малое расстояние $\rho\,[m_0,\ m_2] = \delta$ в пространстве $M$, такое, что из равенства $\rho\,[m_0,\ m_1] \leqslant \delta$ вытекает $\rho\,[n_0,\ n_1] < \varepsilon$.

Как и при рассмотрении устойчивости объектов, проверка устойчивости системы в малом является лишь некоторой заменой проверки устойчивости в большом.

Иногда «механизм» преобразования естественных входов в естественные выходы не включает в себя внутренние элементы объекта; в этом случае мы все равно будем говорить о системе.

5. Классификация процессов. Некоторые особенности анализа устойчивости процессов. В дальнейшем процессом будем называть изменение каких-то заранее оговоренных интересующих нас объектов при изменении некоторых независимых друг от друга скалярных переменных. Число физически существующих независимых скалярных переменных в данном процессе называется его мерностью. Ясно, что сам процесс можно рассматривать так же, как некий сложный объект особого рода. Естественные входы процесса — параметры, характеризующие «устройство» системы, в которой происходит процесс, и ее «состояние» в начале процесса (если процесс не является установившимся во времени). Естественные выходы процесса — интересующие нас объекты, зависящие от упомянутых скалярных переменных. Процесс устойчив, если практическая одинаковость его естественных входов означает практическую одинаковость естественных выходов.



Пусть имеется деформируемое тело, находящееся под действием переменных во времени сил. Если нас интересует вектор перемещений любой его точки или тензор деформаций в любой его точке, то соответствующий процесс является четырехмерным — все интересующие нас объекты изменяются в зависимости от времени и трех геометрических координат точки.

Но если в том же теле нас будет интересовать лишь вектор перемещений данной фиксированной точки тела, то этот процесс будет уже одномерным. Независимое переменное — время.

Допустим, что процесс имеет мерность $n$. Рассмотрим $n$-мерное пространство, координатами точек которого служат произвольные значения $n$ скалярных переменных. Условимся откладывать фактически возможные значения физически существующих независимых скалярных переменных данного процесса вдоль осей, присвоенных этим переменным. Назовем точку $m$ в указанном пространстве определяющей точкой процесса, если все ее координаты будут представлять фактически возможные значения его независимых скалярных переменных.

Если определяющие точки $n$-мерного процесса образуют некоторую непрерывную $n$-мерную область, то будем говорить, что процесс является непрерывным в этой области (независимо от непрерывности или прерывности интересующих нас в этом процессе объектов). Если все определяющие точки процесса расположены дискретно, то процесс называется дискретным. Наконец, если все определяющие точки образуют ряд многообразий мерности меньше $n$, непрерывных вдоль некоторых независимых скалярных переменных и с пустыми промежутками вдоль других, то процесс называется *дискретно-непрерывным*.

Только что рассмотренный процесс деформирования тела — непрерывный. Процесс вычислений, алгоритмизированный по номерам операций — дискретный; он представляет изменение каких-то числовых величин в зависимости от номера операции.

Чтобы представить себе дискретно-непрерывный процесс, возьмем движение механической системы, состоящей из $m$ материальных точек. Будем интересоваться вектором смещений $\mathbf{u}$, характеризующим положение точки, и вектором скорости $\dot{\mathbf{u}}$. Оба вектора *представляют функции четырех перемещений:* трех исходных геометрических координат точек системы (в положении начального отсчета) и времени. Первые три переменные меняются дискретно, четвертая — непрерывно.

Интересно отметить, что последний пример обычно интерпретируется иначе: нумеруют точки ($j = 1, 2, \ldots, m$) и вводят в рассмотрение $2m$ векторов $\mathbf{u}_j$ и $\dot{\mathbf{u}}_j$. Такой процесс вместо четырехмерного становится одномерным непрерывным, правда, число интересующих нас объектов резко возрастает. Таким образом, мерность процесса зависит от системы выбранных объектов исследования.

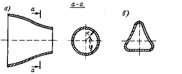



Рис. 1.8.

Если четырехмерный процесс деформирования тела постоянен во времени (стационарен), то мерность может быть условно снижена на единицу; именно условно, так как постоянство объектов вдоль какой-то физически существующей независимой переменной есть все же частный случай их изменения.

Способ условного снижения мерности процесса за счет показа или принятия его стационарности вдоль некоторых физически существующих *независимых переменных назовем методом выделения* стационарностей. Он имеет широкое применение.

Рассмотрим для иллюстрации (рис. 1.8, *а*) произвольную оболочку вращения, загруженную осесимметричной нагрузкой (включая усилия в опорных конструкциях). Введем цилиндрическую систему координат: $x$ — расстояние вдоль оси вращения; $r$ — расстояние от оси вращения по нормали к ней; $\varphi$ — угол по направляющей окружности. Фиксируем произвольные $x$ и $r$ в пределах тела оболочки. Тогда все точки с произвольной координатой $\varphi$ будут лежать на окружности радиусом $r$. Из условий симметрии конструкции и нагрузки следует, что они «равноправны» по отношению друг к другу. Процесс деформирования не зависит, таким образом, от координаты $\varphi$ (стационарен вдоль нее). Из четырехмерного он условно становится трехмерным. Рассмотрение только статических деформаций оболочек из материалов, не обладающих ползучестью, делает процесс условно двухмерным.

Если процесс мерности $n$ не был получен из процесса более высокой мерности путем выделения какого-то числа стационарностей последнего, то он называется истинно $n$-мерным. Если же истинно



$n$-мерный процесс условно сведен к процессу меньшей мерности $s$ путем выделения из него $n—s$ стационарностей, то он называется псевдо-$s$-мерным. Число $n—s$ носит название индекса псевдо-$s$-мерного процесса.

*Ясно, что процесс осесимметричного статического деформирования* произвольной оболочки вращения является псевдодвухмерным с индексом 2.

Иногда снижение мерности процессов производится и без выделения стационарностей. Например, поперечные колебания балки в одной из главных плоскостей изгиба представляют собой четырехмерный процесс: перемещения любой точки зависят от ее положения по длине конструкции, высоте и ширине сечения, а также от времени. Применение известной гипотезы плоских сечений не снижает мерности процесса, но позволяет выделить из него главную часть — двухмерный процесс изгиба нейтральной оси. Изучив последний, мы получаем простые зависимости для анализа четырехмерного процесса. Использование метода главных координат сводит выделенный двухмерный процесс к бесконечному числу истинно одномерных процессов в пространстве и времени без всякого выделения стационарностей.

Данный истинно $n$-мерный процесс называется квази-$k$-мерным ($k<n$), если его исследование сведено к изучению конечного или бесконечного счетного множества процессов, истинная мерность которых не превышает $k$ (но достигает его хотя бы для одного из элементов множества).

Часто оба отмеченных способа снижения мерности процессов соединяют вместе. Скажем, если мы возьмем четырехмерный процесс статического изгиба балки и отбросим время, то получим псевдотрехмерный процесс. Выделение главной части псевдотрехмерного процесса — изгиба нейтральной оси — дает возможность получить псевдоквазиодномерный процесс.

Мы тщательно оговариваем всякое использование условий стационарности, поскольку именно оно иногда сильно влияет на оценку устойчивости процессов.

*Теорема 1.1. Если мы условно снижаем мерность процесса, принимая его стационарным вдоль какой-то физически существующей независимой переменной, и переходим к модели процесса меньшей мерности, то мы лишаемся, вообще говоря, возможности исследовать устойчивость параметров результирующей идентификации относительно возмущений (разбросов параметров генетической идентификации), зависящих от исключенной переменной. Поэтому необходима дополнительная проверка указанной устойчивости.*

Для доказательства достаточно проанализировать характерный пример. Вернемся к уже рассмотренному случаю осесимметричных деформаций оболочек вращения. Выделив псевдоквазиодномерный процесс статического деформирования срединной поверхности оболочки, мы можем изучить осесимметричные деформации и, в частности, проанализировать возможность осесимметричной потери устойчивости. Но мы не выявили хорошо известную возможность потери устойчивости с образованием волн по периметру (рис. 1.8, *б*), которая выявляется лишь исследованием двухмерной задачи, где *учтены переменные $x$ и $\varphi$. Ведь здесь-то и начинает сказываться* действительная, хотя и малая неравноправность всех координат $\varphi$, например из-за наличия начальных погибей в виде зародышевых окружных волн.

Заметим, что время $t$ — универсальная независимая переменная реальных процессов. Если она отбрасывается, то необходимо дополнительно проверять устойчивость стационарности процесса по $t$. Но для каждого индивидуального процесса эта переменная равноправна со всеми остальными стационарными переменными.

Сказанное имеет прямое отношение к так называемому динамическому критерию устойчивости в строительной механике и показывает его истинное место — служить проверкой устойчивости стационарности процесса статического деформирования во времени.

Заметим, что нередко псевдоодномерные и псевдоквазиодномерные процессы условно называют квазиодномерными, если не имеют в виду изучать их устойчивость по исключенным независимым переменным. Именно такая условность и принята нами в подзаголовке книги.

6. Понятия индивидуальной определенности и наблюдаемости объектов. Активные и неактивные информационные модели. Пусть имеются базовый объект $(m_i, n_i)$ и множество объектов данного типа (см. рис. 1.5), определяемых пространством параметров генетической идентификации $M$ (ППГИ) и пространством параметров результирующей идентификации $N$ (ППРИ). В этом случае наблюдаемостью объектов, результирующе идентичных с данным базовым объектом, по отношению к данным параметрам генетической идентификации будет называться определенная степень стабильности этих параметров при многократном физическом повторении указанных результирующе идентичных объектов. Иными словами, наблюдаемость — свойство, в известном смысле обратное устойчивости: при анализе устойчивости мы воспроизводим физически объекты, генетически идентичные с базовым, и проверяем близость их результирующих свойств (естественных выходов) с результирующими свойствами, базового объекта, а при анализе наблюдаемости берем объекты, результирующе идентичные с базовым, и проверяем близость их генетических параметров (естественных входов) к генетическим параметрам базового объекта.

Если объект находится в области устойчивости, то, зная его параметры генетической идентификации, мы можем с достаточной уверенностью судить о параметрах результирующей идентификации; если объект наблюдаем, то, зная его параметры результирующей идентификации, мы можем с достаточной уверенностью судить о параметрах генетической идентификации. При оценке наблюдае-



мости ППГИ и ППРИ как бы меняются местами: не точка $m_i$ отображается в $n_i$, а точка $n_i$ отображается в $m_i$ (рис. 1.9).

Следовательно, можно говорить о детерминированной и *вероятностной наблюдаемости, о наблюдаемости в большом и в малом,* об областях наблюдаемости и т. д. Объекты, чрезвычайно устойчивые [область $\varepsilon(\delta_i)$ на рис. 1.5 мала по сравнению с $\varepsilon_i$], всегда оказываются ненаблюдаемыми, а объекты, очень хорошо наблюдаемые [область $\delta(\varepsilon_i)$ на рис. 1.9 мала по сравнению с $\delta_i$] — всегда неустойчивыми. Они могут быть и наблюдаемыми и устойчивыми при «средней степени» и того и другого; последнее для собственно

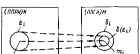



Рис. 1.9.

конечнофакторных объектов записывается условиями $\varepsilon(\delta_i) = \varepsilon_i$ и $\delta(\varepsilon_i) = \delta_i$ (необходимость обоих условий следует из того, что однозначность одного преобразования еще не определяет однозначности второго).

Конечно, может оказаться, что объекты и неустойчивы и ненаблюдаемы, например $\varepsilon(\delta_i) \supset \varepsilon_i$; но обратное преобразование точек $\varepsilon_i$ в ППГИ неоднозначно, и в силу этого появляются точки, принадлежащие ППГИ, но не находящиеся в пределах $\delta_i$.

Оценка наблюдаемости требуется, например, в магнитной геологоразведке: рудное месторождение создает магнитное поле; параметры генетической идентификации этого поля — интересующие нас параметры месторождения (количество руды, глубина ее залегания и т. п.). Измерив с какой-то точностью параметры результирующей идентификации поля (направления силовых линий, напряженность), мы хотим с достаточной точностью найти параметры его генетической идентификации.

Похожие задачи возникают и в других случаях наблюдений. Будем называть их задачами наблюдателя.

Вопрос о наблюдаемости возникает нередко и в задачах проектировщика: мы хотим спроектировать что-то, обладающее данными естественными выходами; для этого нам нужно узнать естественные входы этого чего-то, чтобы, создав их, получить проектируемый объект.

Несмотря на большое сходство, задачи наблюдателя и проектировщика имеют существенное различие: если первая, будучи правильно поставленной, в принципе всегда имеет решение (а иногда и не одно), то вторая может не иметь ни одного решения — проектировщик выдвинул несовместимые между собой требования к свойствам проектируемого объекта.

Большинство исследований устойчивости относится к задачам технолога, который серийно «штампует» объекты данного типа и заинтересован в «похожести» их свойств. Конечно «технологи», «наблюдатели» и «проектировщики» при данной классификации могут быть весьма своеобразными, и потому предлагаемые наименования несколько условны (снова условность и снова, по-видимому, полезная).

Понятие индивидуальной определенности несколько сложнее. Пусть мы имеем какую-то произвольную группу параметров идентификации данного объекта. В общем случае это некая смесь из некоторых естественных входов и естественных выходов. Назовем ее входами задачи об индивидуальной определенности (подчеркиваем, не естественными входами, а просто входами). Требуется найти другую группу параметров идентификации — в общем случае также смесь естественных входов и выходов. Назовем указанную вторую группу выходами задачи об индивидуальной определенности.

Назовем объекты данного типа индивидуально определенными *по данным входам относительно данных выходов, если идентичность их входов с аналогичными входами данного базового объекта обусловливает определенную идентичность их выходов с аналогичными выходами базового объекта.*

Индивидуальная определенность — обобщение понятий устойчивости и наблюдаемости. И здесь нетрудно говорить о детерми*нированной индивидуальной определенности, вероятностной определенности*, областях определенности и т. д. При рассмотрении индивидуальной определенности следует строить пространство входов *M и пространство выходов N. Задача об индивидуальной* определенности может быть и задачей технолога, и задачей наблюдателя, и задачей проектировщика.

*Различия между разными случаями «расшифровки» общей за*дачи анализа индивидуальной определенности удобно проследить с помощью понятий об активных и неактивных информационных *моделях*.

Информационной моделью изучаемого объекта в отношении его данных характеристик назовем систему информации об этом *объекте, которая позволяет после соответствующих преобразова*ний получить сведения об интересующих нас характеристиках объекта.

*Возьмем дифференциальное уравнение изгиба однопролетной* балки (1.2) при граничных условиях

$$EIy^{III}(0)=K_1y(0);\quad EIy^{II}(0)=K_2y^{I}(0);$$
$$EIy^{III}(l)=K_3y(l);\quad EIy^{II}(l)=K_4y^{I}(l), \tag{1.3}$$



где $K$ — коэффициенты, характеризующие условие заделки концов *балки; $l$ — длина балки.*

Это информационная модель процесса изгиба балки, позволяющая определить прогиб. Она дает представление о внутреннем *механизме преобразования естественных входов объекта $E$, $I$, $l$,* $q(x)$, $K_1$, $K_2$, $K_3$, $K_4$ в совокупность естественных выходов $y(x)$. Объект (процесс изгиба) является абсолютно собственно конечно*факторным, если длина $l$ достаточно велика и к балке можно обо*снованно применить элементарную теорию сопротивления материалов.

*Информационная модель объекта на*зывается активной, когда и только когда: 1) искомыми характеристиками *являются некоторые естественные вы*ходы объекта, т. е. некоторые его свойства; 2) исходная информация отражает только и притом всю совокупность параметров генетической идентификации. В частности, уравнение (1.2) однопролетной балки и условие (1.3) представляют активную модель.

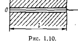


Рис. 1.10.

Пример неактивной модели — уравнение (1.2), подчиненное первым трем условиям (1.3) и четвертому условию

$$y(l/2)=y_0, \tag{1.3 а}$$

где $y_0$ — заданный или наблюдаемый прогиб в середине пролета. *Элемент $y_0$ не является причиной или условием существования* процесса изгиба (полагаем, что в точке $x = l/2$ никто не оттягивал балку домкратом и не закреплял ее; в противном случае это уже не *однопролетная балка).*

Активная модель дает возможность анализировать устойчивость объекта, т. е. рассматривать задачу технолога; неактивная — ре*шать ту или иную задачу наблюдателя или проектировщика.*

Важно подчеркнуть, что одинаковая по математической форме информационная модель может относиться к объектам разного типа, но *для объектов одного типа быть активной, а для другого — неактивной.*

Рассмотрим сначала процесс статического растяжения цилиндрического стержня длиной $l$ и площадью поперечного сечения $\Omega$, *помещенного в линейное упругое пространство винклеровского* типа, которое сопротивляется осевым смещениям $y$ сечений стержня с коэффициентом жесткости $k$ (рис. 1.10). Стержень жестко закреп*лен на левом конце, где помещено начало координат.* Правый конец принудительно оттянут на величину $y_l$, а затем закреплен. Нас интересует закон осевых смещений $y(x)$.

Обозначим $\frac{k}{E\Omega}=\alpha^2>0$. Тогда активная информационная модель процесса растяжения будет состоять из дифференциального уравнения

$$\frac{d^2y}{dx^2}-\alpha^2y=0 \tag{1.4}$$

*и граничных условий*

$$y(0)=0;\ y(l)=y_l. \tag{1.5}$$

С помощью этой модели нетрудно исследовать устойчивость процесса. Положим, что величины $\alpha^2$ и $l$ идентифицируются абсолютно точно и при повторениях процесса возможны лишь разбросы в значениях $y_l$, находящиеся в пределах $\pm\delta_0$ (много раз растяги*вается один и тот же стержень*). Значения $y(x)$ считаем детерминированно определенными, если они найдены с той же погрешностью $\pm\delta_0$.

Общий интеграл уравнения (1.4) имеет вид

$$y=C_1\operatorname{sh}x+C_2\operatorname{ch}x. \tag{1.6}$$

Определяя постоянные из (1.5), получаем

$$y(x)=y_l\frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\alpha l}. \tag{1.7}$$

Из (1.7) видно, что, допуская погрешность в $y_l$, равную $\pm\delta_0$, мы находим любое $y(x)$ с погрешностью

$$\varepsilon(x)=\pm\delta_0\frac{\operatorname{sh}\alpha x}{\operatorname{sh}\alpha l}\leqslant\delta_0 \text{ при } x\leqslant l, \tag{1.8}$$

т. е. процесс устойчив.

Но эта же информационная модель (1.4), (1.5) описывает и совсем другой физический процесс — движение материальной точки массы $m$ под действием «толкающей» позиционной силы $P=k_1y$, где $y$ — отклонение точки от начального положения, $x$ — время, $k_1>0$ — некоторый постоянный коэффициент пропорциональности, $\alpha^2=k_1/m$. Второе условие (1.5) записано на основании того, что, согласно наблюдению, в момент $x=l$ от начала движения ($x=0$, $y=0$) точка имела отклонение $y_l$. Нас интересует закон движения $y(x)$ в интервале между $x=0$ и $x=l$.

Математическая суть вопроса осталась как будто бы той же; и это в самом деле так, если стоять на классической точке зрения. Однако во втором примере рассматриваемая модель уже не активна, так как второе условие (1.5) здесь не причина процесса, а его следствие. Определив значение $y(l)=y_l$ с точностью $\pm\delta_0$, мы можем с помощью приведенных расчетов гарантировать пока лишь детерминированную индивидуальную определенность данного конкретного единичного процесса, т. е. иметь возможность узнать в данном конкретном случае, как двигалась масса $m$ [каков был закон $y(x)$].

Мы можем найти и начальную скорость $\dot{y}(0)=y'(0)$ массы. Из (1.6) и (1.5) имеем

$$\dot{y}(0)=\dot{y}_0=\frac{\alpha y_l}{\operatorname{sh}\alpha l}, \tag{1.9}$$

т. е., зная $y_l$ с точностью $\pm\delta_0$, мы будем знать $\dot{y}_0$ тем точнее, чем больше время $l$.



*Значение $\dot{y}(0)=\dot{y}_0$ — неизвестный нам ранее параметр гене*тической идентификации процесса движения массы, который позволит исследовать устойчивость этого движения. Используя (1.9) и общий интеграл (1.6), получаем

$$y(x)=\frac{\dot{y}_0}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha x. \tag{1.10}$$

Пусть погрешность задания $\dot{y}_0$ при повторных процессах равна $\pm\delta_1$. Тогда отклонение в действительном положении материальной точки по сравнению с формулой (1.10) будет

$$\varepsilon(x)=\frac{\delta_1}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha x. \tag{1.11}$$

При любом сколь угодно малом отклонении $\delta_1$ величина $y(x)$ не будет детерминированно определена вблизи $x=l$, если $l$ достаточно велико. Оказывается, что процесс движения массы $m$, в отличие от процесса растяжения стержня, неустойчив при больших $l$.

Разница между активной и неактивной моделями стала очевидной: хотя исходная математическая модель (1.4), (1.5) для двух рассматриваемых физических процессов совершенно одинакова с точки зрения классической математики, устойчивость этих процессов совершенно различна.

В литературе часто пишут об изоморфных процессах, объектах и т. п., имея в виду полную математическую (в смысле классической математики) идентичность их соответствующих исходных информационных моделей (исходных уравнений вместе с дополнительными условиями и пр.), а следовательно, и идентичность поведения. Из доказанного ранее видно, что такая изоморфность (назовем ее изоморфностью первого рода) еще недостаточна, если говорить не об «идеальном случае поведения объектов», а о реальном сходстве поведения, включая влияние неизбежных неточностей, т. е. *нарушений на практике абстракции абсолютной точности*. Чтобы сходство двух объектов было действительно полным по их поведению, нужна не только идентичность обычных математических моделей, но и идентичность схем причинно-следственных связей. В последнем случае будем говорить о полной изоморфности или изоморфности второго рода. Например, процесс растяжения стержня (см. рис. 1.10) полностью изоморфен процессу кручения призматического стержня, который находится в упругом пространстве винклеровского типа, сопротивляющемся повороту сечений.

Иными словами, анализируя связь входов и выходов информационных моделей, нетрудно усмотреть следующее. Пусть имеется (рис. 1.11, *а*) активная информационная модель, входы которой суть естественные входы данного объекта. С помощью этой модели мы можем найти обычно очень много, а часто и бесконечно много выходов, т. е. свойств (естественных выходов) объекта. Так, в примере со стержнем (см. рис. 1.10) находим бесконечно много значений $y(x)$, а при желании и $y'(x)$. Если модель детерминированная, то входы и выходы модели жестко (с точки зрения классической математики) связаны между собой. Теперь мы можем отбросить некоторые или даже все естественные входы объекта и взять в качестве новых входов модели бывшие выходы объекта. Скажем, в только что рассмотренном примере мы имеем право сделать входами $y(0) = y$ и $y'(0) = \frac{\alpha y_l}{\operatorname{sh} \alpha l}$ или $y(x_1) = y_1$ и $y(x_2) = y_2$ и т. д. *В результате нетрудно получить множество эквивалентных*, в смысле классической математики, моделей (рис. 1.11, *б*, *в*). В принципе можно взять в качестве известных величин (новых входов) излишнее количество бывших выходов,— допустим, определить *и записать значения* $y(x_1)$, $y(x_2)$, $y(x_3)$, $y(x_4)$ *в четырех точках* стержня; если это будут экспериментально найденные величины или вычисленные с помощью основной (первоначальной) модели, то никакой переопределенности задачи не произойдет, так как все «лишние» значения будут автоматически согласованы между собой. *Правда, на практике здесь все же появляется опасность несовместности* из-за неизбежных неточностей экспериментального определения или вычислений. Можно принять за новые входы и недостаточное число бывших выходов; тогда задача станет недоопределенной, т. е. решения окажутся многозначными.

*а)* *б)* *в)*

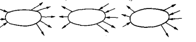


Рис. 1.11.

*Но эквивалентные в смысле классической математики модели* не являются эквивалентными в смысле неклассической математики: в первом случае (исходная модель), они отражают устойчивость объектов, а в других случаях — другие виды их индивидуальной определенности.

## § 3. Вероятностные модели

Рассматриваемые нами модели и понятия позволяют проанализировать многие особенности вероятностных рассуждений, используемых при исследовании разнообразных проблем надежности корпусных конструкций, а в последнее время — и при разработке численных методов решения различных задач строительной механики.



Как это ни странно на первый взгляд, одна из главных трудностей здесь состоит в осмысливании и толковании исходного понятия вероятности. Дело в том, что теория вероятности является наукой о вычислении выходных вероятностей для систем по заданным входным вероятностям характеристик системы и ее элементов, а иногда и взаимосвязей между элементами. К определению исходных вероятностей и содержательному толкованию термина «вероятность» математическая теория, строго говоря, отношения не имеет. Будучи аксиоматизированной наукой, она допускает много логически безупречных содержательных толкований. Именно это и обусловливает возможность одновременного существования ряда широко известных подходов: частотно-статистического (вероятность — величина, около которой стабилизируются относительные частоты события при большом числе опытов), диспозиционного (вероятность — величина, связанная с характером данной, может быть индивидуальной, физической ситуации), логико-субъективного (вероятность — мера уверенности субъекта в наступлении события) и т. д. Выбор между ними или создание любого нового подхода необходимо осуществлять не на чисто логическом уровне, а на уровне анализа и обобщения практики использования теории вероятности. В частности, здесь нужно внимательно проанализировать используемые информационные модели.

Что касается теории вероятности и близко к ней примыкающей вероятностной логики, рассматриваемых как чисто абстрактные непротиворечивые системы, то они вовсе не нуждаются в содержательном толковании исходных понятий, а числовые значения исходных вероятностей там могут задаваться произвольно.

1. Общее содержательное понятие вероятности. Вспоминая сделанное выше замечание о целесообразности построения многоярусной системы сложных понятий, дадим сначала общее содержательное определение вероятности: вероятность события, отнесенного к данной активной или неактивной модели некоторого предмета, выходной характеристикой которой может быть это событие, есть теоретическая мера потенциальной возможности наступления рассматриваемого события в данных четко оговоренных условиях, задаваемых исследователем при построении соответствующей модели с учетом конкретных целей предпринимаемого исследования.

Сложность приведенной формулировки требует пояснений. Прежде всего подчеркнем, что нет какой-то единой вероятности, жестко связанной с данным реальным физическим событием: у данного события одновременно может быть много правильно определенных вероятностей — просто каждая из этих вероятностей связана со своей относительно объективной моделью реального предмета исследования и теряет всякий смысл вне этой модели.

Мы строим, по существу, модель с входами и выходами по типу рис. 1.4, *а*; но входы — уже не обязательно причины и условия возникновения или проявления объекта; выход один — данное событие, т. е. выходная характеристика модели, определяемая по принципу 0 или 1, «да» или «нет», «произошло или не произошло» (конечно, можно одновременно ввести и другие выходы-события). Сконструированная таким образом модель оказывается неустойчивой детерминированно относительно выделенного выхода (выход не может быть условно детерминированно предсказан), и мы пытаемся дать хотя бы теоретическую меру потенциальной возможности его наступления, заботясь лишь о достижении для наших целей точности этой меры. Меняя систему входов или систему условий идентификации, мы меняем модель, а следовательно, и вероятность. Относительная объективность модели обусловливает относительную объективность вероятности.

Сторонники полной (так сказать, абсолютной) объективности вероятности часто приводят пример со страховыми компаниями, которые получают очень устойчивые доходы на основе вероятностных оценок, касающихся смерти или потери трудоспособности своих клиентов. И они правы, так как этот пример очень хорошо показывает, что вероятность в данном случае явно отражает совершенно объективные закономерности, которые можно и полезно использовать на практике. Но претензии на абсолютность здесь не обоснованы. Вспомним хотя бы, что ряд компаний страхует жизнь людей, исходя только из их возраста. Здесь вход один — возраст, выход — вероятность $P_1$, что этот человек проживет еще один год. Но другие компании, получая, в сущности, те же доходы, что и первые, учитывают два входа — возраст и профессию; при этом для данного человека вероятность прожить еще один год будет $P_2 \neq P_1$. А родственники страхуемого явно учтут еще много факторов и будут в своих намерениях исходить из некой третьей вероятности $P_3 \neq P_2 \neq P_1$. И все они по-своему правы. Выдавая страховой полис данному конкретному человеку и имея дело именно с ним, первая компания рассматривает его, в сущности, не индивидуально, а просто как представителя громадной массы страхуемых в данной стране. Она могла бы получить представление и о других входах, уточнив тем самым «индивидуальную вероятность», но это сильно усложнило бы расчеты страхования и не изменило бы реальных доходов, т. е. не соответствовало бы поставленным целям. Другая компания учитывает второй вход не для увеличения доходов с каждого человека и не для уточнения индивидуальных вероятностей как таковых, а главным образом для привлечения дополнительных клиентов из среды не очень опасных профессий, просто «заманивая» их более точной и, по-видимому, более выгодной индивидуальной оценкой. А родственники, заинтересованные именно в данном индивидууме, построят свою модель и, возможно, тоже не ошибутся. Наконец, сам страхуемый, учитывая все хорошо известные ему реальные индивидуальные обстоятельства, часто полагает и $P_1$ и $P_2$ весьма недостоверными, но для его конкретных целей он удовлетворяется и такими оценками.



Итак, осознав цели и задачи конкретного исследования, нужно построить относительно объективную вероятностную модель и именно для этой модели, выходом которой является рассматриваемое событие, попытаться оценить теоретическую меру потенциальной возможности его наступления (если это достижимо с требуемой точностью).

Попытка вероятностного подхода к данному фиксированному выходу (рассматриваемому событию) неизбежна, когда имеет место один из следующих основных случаев: а) модель включает в себя не все входы, практически определяющие данный выход; б) она охватывает все существенные входы, но мы не можем задать или узнать каждый вход с требуемой степенью точности; в) вообще нет конечной или даже любой совокупности входов, практически точно определяющих данный выход; г) хотя бы некоторые входы введены не вполне адекватно реальному положению дел; д) осуществляется какая-то комбинация отмеченных случаев.

Важно иметь в виду следующее. Во-первых, нередко введение вероятностных рассуждений является принципиальной особенностью модели [например, случай «в»], а не просто признаком ее недостаточной «изученности». Иными словами, нельзя полагать, что, продолжая изучать и дополнять данную модель, выявляя скрытые параметры, мы всегда придем к детерминированному подходу (хотя иногда это действительно так). Во-вторых, нельзя думать, что вероятностный подход всегда применим. Нередко у нас нет никаких оснований говорить ни о детерминированном, ни о вероятностном подходе — просто имеющихся сведений в принципе недостаточно для научного анализа.

Трудности практического использования теории вероятностей и математической статистики вызываются главным образом относительной объективностью основного понятия вероятности, т. е. его органической связью с применяемой моделью: прежде всего необходимо построить приемлемую вероятностную модель, а уж потом вводить в нее вероятности, если возможна их практическая оценка с требуемой степенью точности. Но поскольку построение моделей не формализовано и требует искусства исследователя, возникают ошибки. Именно поэтому многие авторитетные статистики утверждают, что сама статистика никогда не предлагает гипотез и не устанавливает никаких закономерностей; она лишь подтверждает или опровергает указанные гипотезы и закономерности.

Приведем два показательных примера построения вероятностной модели из области надежности судовых корпусных конструкций. Начнем с ситуации, сложившейся при отработке и приемке корпусных материалов.

Немногочисленные дорогостоящие и сложные испытания опытных конструкций, крупномасштабных моделей и образцов, важные сами по себе, все же не дают достаточных статистических данных для оценки параметров прочности и работоспособности материала. При испытаниях же малых образцов получается чрезвычайно большой разброс результатов. Кроме того, неясно, какие данные следует принимать во внимание (средние, крайние наихудшие или какие-либо другие). В результате «прямые» статистические подходы оказываются непригодными. Однако дальнейший анализ позволяет найти выход из положения [45].

Была высказана и обоснована гипотеза о затухании и быстром выходе на асимптоту прямого масштабного фактора, связанного с абсолютными размерами и энергоемкостью конструкции. Такого затухания можно добиться и на малом образце, если испытательная машина накапливает достаточную энергию. Кроме того, образец должен быть велик по сравнению с наибольшими размерами зерен металла и изготовлен из листов натурной толщины (влияние толщины листа на качество металла, как известно, не моделируется). Затем было показано, что значительные разбросы данных испытаний малых образцов обусловлены главным образом различием в дефектах, вызванных микроконцентраторами напряжений с характерными размерами концентрационного поля напряжений и деформаций порядка миллиметра (поры, шлаковые включения, подрезы и т. п.). Наконец, обобщение некоторых частных экспериментов позволило сформулировать так называемый принцип предельно острых микроконцентраторов: у каждого конструкционного материала, идущего на изготовление больших конструкций, должен существовать некий предельно острый микроконцентратор, в районе которого влияние остроты выходит на асимптоту. У некоторых материалов вместо предельно острого существует концентратор самой неблагоприятной остроты, так как дальнейшее увеличение остроты даже улучшает положение вследствие повышения прочности материала в вершине надреза и сложного напряженного состояния; впрочем, существо дела от этого не меняется.

Наличие предельно острого микроконцентратора (или его наиболее неблагоприятная острота) непосредственно проверяется и определяется при разных видах нагружений для каждого материала; если их не окажется, то материал не может быть конструкционным или, по крайней мере, пригодным для изготовления больших конструкций, так как в этом случае нельзя прогнозировать наименьшую гарантированную работоспособность материала. Влияние отмеченных, не выявляемых контролем, микроконцентраторов различной остроты удобно отнести к свойствам самого материала, как это давно, хотя и не всегда осознанно, делается для ультрамикроконцентраторов типа дислокаций, вакансий, трещин Гриффитса и т. п. Отсюда возникает очевидная идея искусственного внесения предельно острого микроконцентратора (или микроконцентратора наиболее неблагоприятной остроты) на каждый образец и проведения испытаний малых образцов с микроконцентраторами (надрезами). Поскольку судовые конструкции велики, наличие в них какого-то количества естественных предельно острых и наиболее неблагоприятных микроконцентраторов неизбежно.



Проверка предложенной системы взглядов путем испытаний показала, что разбросы данных при всех испытаниях образцов с микроконцентраторами резко сузились и статистическая обработка их приобрела смысл. При этом в зависимости от вида основных напряженных состояний, уровня технологии и контроля качества работ должны изменяться типы образцов, размеры микроконцентраторов, виды испытаний, однако общие положения и методы обработки данных остаются теми же.

Рассмотрим другой случай, характерный для испытаний корпусных конструкций. Пусть экспериментальная натурная конструкция $A$ была спроектирована в соответствии с действующими нормами прочности, основанными на значении предела текучести материала $\sigma_т$, а затем испытана на циклические нагрузки. Она разрушилась в узле $B$ после $n_1$ циклов, причем максимальные напряжения там были равны $\sigma_1$. Испытания материала показали, что узел $B$ изготовлен из листа с пределом текучести $\sigma_{т1}$, который выше гарантированного техническими условиями предела текучести $\sigma_т$ в $k_1$ раз. Конструкции данного типа проектируются по принципу полной гарантии надежности.

Нельзя, конечно, сказать, что, согласно проведенным испытаниям, конструкции из данного материала выдержат $n_1$ циклов. В большой серии конструкций может оказаться, что узел $B$ будет изготовлен из листа, предел текучести которого равен $\sigma_т$. Поэтому необходимо пересчитать результаты испытаний на указанный более неблагоприятный случай, для чего нужна усталостная кривая материала, дающая число циклов $n$ до разрушения образцов как функцию отношения $\alpha$ действующих напряжений к фактическому пределу текучести материала $n = n(\alpha)$. Пусть отношение $\sigma_1/\sigma_{т1} = \alpha_1$, а отношение $\sigma_1/\sigma_т = \alpha_2 > \alpha_1$. Тогда искомое число циклов $N$ до разрушения конструкций из данного материала равно $N = n_1 [n(\alpha_2)/n(\alpha_1)]$. Здесь мы имеем простейшее рассуждение, основанное на предположении, что характер усталостной кривой для конструкции как функции $\alpha$ подобен аналогичной кривой для образцов. С помощью такого рассуждения мы получаем приемлемый результат даже при испытании одной экспериментальной конструкции. В противном случае число таких испытаний очень бы возросло и потребовалась бы их сложная статистическая обработка.

В заключение нашего обсуждения содержательного понятия вероятности коснемся вкратце еще одного вопроса. Можно ли говорить о вероятностях уникальных событий или они связаны только с совокупностями массовых событий? В литературе большинство авторов склоняется, пожалуй, ко второй точке зрения, но правы ли они?

Пусть мы создали уникальную, т. е. сугубо единичную, хотя, может быть, и очень простую конструкцию из совершенно стандартных «массовых» элементов. Поскольку элементы «массовые», они, конечно, имеют свои вероятности безотказной работы, которые в принципе могут быть оценены. (Другое дело, что, как будет по-

*казано ниже, на практике такая оценка часто производится плохо* или даже фактически неосуществима с нужной точностью, если конструкция сложна.) Но тогда, зная схему соединения элементов, мы приходим к чисто математической задаче оценки выходной вероятности безотказной работы конструкции по известным входным вероятностям безотказной работы конструктивных элементов. Вряд ли сторонники второй точки зрения откажутся от осмысленности такой задачи, особенно когда конструкция проста.

Однако выходная вероятность относится уже к уникальному событию, так как сама конструкция уникальна; и если не признавать вероятностей уникальных событий, то мы должны ее отбросить, хотя это явно нецелесообразно.

Иногда на такие рассуждения отвечают примерно так. Нет, мы все же оставим найденную вероятность, поскольку можно хотя бы принципиально представить себе большую совокупность таких конструкций. И вообще, положение о вероятности как о характеристике непременно массовых событий нельзя понимать формально — выдвигая его, просто имеют в виду, что в случае единичного события можно сильно ошибиться из-за местных флуктуаций вероятности (вероятность 0,999, *а событие все же не произойдет*). Только при действительно массовых событиях можно быть уверенным, что флуктуации ничтожны и вероятность непременно проявит себя (станет достоверностью). С такой интерпретацией можно согласиться, сделав, правда, два замечания.

Во-первых, применяя слово «вероятность» к единичному событию, вряд ли кто спутает его с «достоверностью», понимая, что вероятность 0,999 еще не достоверность. Впрочем, если тут нужна филологическая строгость, можно использовать для единичных событий слово «шанс», обозначая его той же буквой, что и вероятность и не меняя математических зависимостей. Именно так и поступал еще в XIX в. Курно.

Во-вторых, и в массовых событиях бывают заметные флуктуации *вероятностей (на то они и вероятности!). Так, страхование* жизни основано на массовых событиях, причем в силу этого страховой бизнес довольно устойчив; однако внезапные эпидемии уже не раз сильно подводили страховые компании.

2. Методы фактической оценки значений исходных вероятностей. Приведенное ранее общее определение вероятности страдает расплывчатостью и должно быть дополнено методами (критериями) для фактического нахождения значения указанной там теоретической меры. Эти методы довольно часто и не совсем правильно называют определениями вероятности.

Наиболее ранний по времени создания классический метод состоит в использовании физически существующей симметрии, т. е. «равноправия» между возможными вариантами выхода (события), если, конечно, такая симметрия (равноправие) налицо. Так, вероятность выпадения любой грани кубической однородной кости равна $1/_6$. Пользуясь терминологией Лапласа, можно сказать, что вероятность в подобных ситуациях равна отношению числа симметричных случаев, благоприятствующих ожидаемому событию, к числу всех вероятных симметричных и несовместимых друг с другом случаев.

В качестве примера, из которого будет видна важность способа выбора равновероятных случаев, рассмотрим задачу из статистической физики. Пусть имеется $n$ частиц и $N$ ячеек ($N>n$). Каждая частица может находиться с одной и той же вероятностью $1/N$ в любой ячейке. Найти вероятность того, что в определенных $n$ ячейках окажется по одной частице; в каких-то $n$ ячейках окажется по одной частице.

Больцман (статистика Больцмана) принял, что равновероятны любые мыслимые распределения, отличающиеся не только числом, *но и индивидуальностью* частиц. В каждой ячейке может помещаться любое число частиц от 0 до $n$.

Каждая частица может находиться в каждой из $N$ ячеек; если бы частица была одна, то существовало бы $N$ различных способов ее размещения. При двух частицах любому способу размещения первой частицы соответствует $N$ способов размещения второй частицы и общее число возможных размещений равно $N^2$. При $n$ частицах оно будет $N^n$.

При определении первой вероятности число благоприятствующих случаев равно $n!$ Следовательно, вероятность нахождения в определенных $n$ ячейках по одной частице

$$P_1=\frac{n!}{N^n}.$$

При нахождении второй вероятности число благоприятствующих случаев будет в $C_N^n$ раз больше. Следовательно,

$$P_2=\frac{C_N^n \cdot n!}{N^n}=\frac{N!}{N^n(N-n)!}.$$

Бозе и Эйнштейн (статистика Бозе—Эйнштейна) приняли другую гипотезу: они считали равновероятными любые мыслимые распределения, отличающиеся числом частиц в ячейках, но не индивидуальностью самих частиц. Показано (соответствующего анализа ввиду его сравнительной сложности не приводим), что число *равновероятных случаев, согласно Бозе—Эйнштейну*, равно

$$\frac{(n+N-1)!}{n!(N-1)!}.$$

При нахождении первой вероятности обратим внимание на то, что число благоприятных случаев упало до одного и потому

$$P_1=\frac{n!(N-1)!}{(n+N-1)!}.$$

Число благоприятных случаев для второй вероятности составляет $C_N^n$, т. е.

$$P_2 = \frac{C_N^n n!\,(N-1)!}{(n+N-1)!} = \frac{N!\,(N-1)!}{(N-n)!\,(n+N-1)!}.$$

Наконец, Ферми и Дирак (статистика Ферми—Дирака) исходили из третьего предположения: в одной ячейке может находиться либо одна частица, либо не находиться ни одной; при рассмотрении равновероятных случаев индивидуальность частицы не принимается во внимание.

Допустим пока, что условия об уничтожении индивидуальности частиц нет. Тогда первая частица может располагаться $N$ способами, вторая — только $(N-1)$ способами, третья — лишь $(N-2)$ способами, т. е. общее число способов выразится произведением $N(N-1)\ \ldots\ (N-n+1)$.

Чтобы исключить индивидуальность частиц, следует разделить это число на $n!$ Тогда по гипотезе Ферми—Дирака $n$ частиц могут быть расположены по $N$ ячейкам

$$\frac{1}{n!} N(N-1)\ \ldots\ (N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!\,n!}$$

различными равновероятными способами. Отсюда

$$P_1 = \frac{(N-n)!\,n!}{N!};\quad P_2 = 1.$$

Все три решения показывают глубокую связь задач, где используется классический метод определения вероятностей, с комбинаторным анализом (перестановки, сочетания и пр.).

Отмеченный классический метод страдает двумя принципиальными недостатками: он не применим к задачам, где невозможно выделить «симметричные», т. е. равновероятные события; выбор симметричных (равновероятных) событий не всегда ясен, что может привести к ошибкам и недоразумениям.

Ввиду очевидности первого недостатка, мы его подробно рассматривать не будем. Второй недостаток убедительно поясняется некоторыми примерами, принадлежащими Ж. Бертрану.

Пусть окружность радиусом $R$ пересекается хордой. Какова вероятность, что длина произвольно проведенной хорды окажется больше $2l$ (где $2l < 2R$)? Бертран показывает, что ответ существенно зависит от способа рассуждений при выборе симметрии.

*Первое рассуждение*. Положение одного конца хорды (скажем, $C$, можно считать произвольным ввиду «равноправности» всех точек окружности (рис. 1.12, *а*). Чтобы длина хорды оказалась больше $2l$, необходимо и достаточно попадания другого ее конца в произвольную точку дуги $C_1C_4C_2$. Поскольку угол $C_1OC_3$ равен $\arcsin\ l/R$, то дуга $C_1CC_2$ соответствует углу $4\arcsin l/R$, а дуга $C_1C_4C_2$—углу $2\pi - 4\arcsin\ l/R$.



Искомая вероятность равна отношению длины дуги $C_1C_4C_2$ к длине окружности, т. е.

$$1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{l}{R}.$$

*Второе рассуждение*. Чтобы длина хорды была больше $2l$, необходимо и достаточно попадания ее середины в круг радиуса $\sqrt{R^2 - l^2}$ (рис. 1.12, *б*). Вероятность равна отношению площади этого круга к кругу радиуса $R$, т. е.

$$1 - \frac{l^2}{R^2}.$$

Ответы не совпадают.

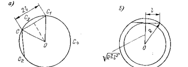



Рис. 1.12.

Обратим внимание, что в физических задачах соображения симметрии и родственные им вовсе не априорны, а основаны на опыте, хотя иногда и в скрытом виде. Архимед в трактате «О равновесии плоских фигур или об их центрах тяжести» приводит математическое доказательство основных зависимостей равновесия рычага исходя из нескольких постулатов типа «равные тяжести, подвешенные на равных длинах, находятся в равновесии». Казалось бы, постулат интуитивно очевиден — ведь если грузы и плечи рычага равны, то в силу симметрии условий нет причин обоим грузам двигаться различно (одному вниз, другому вверх) и, значит, оба они останутся неподвижными. Однако откуда известно, что равновесие зависит только от величины грузов и от длины каждого плеча? Оно могло бы в принципе зависеть от цвета плеч или грузов, от материала, из которого они сделаны, и т. п. При наличии симметрии в весах и длинах плеч возможно великое множество асимметрий другого типа. Следовательно, использовать симметрию допустимо в том и только в том случае, когда из опыта (хотя бы обобщенного) установлена зависимость исследуемого процесса только от факторов, входящих в условие симметрии.

Если в рассмотренном нами примере Бертрана хорды проводит «не думая» конкретный человек, то искомая вероятность будет иметь лишь очень косвенное отношение к исходным симметриям обоих рассуждений.

Второй, а в настоящее время основной, метод оценки значения вероятности события называется частотно-статистическим. Суть его такова.

Назовем опытом физическое воспроизведение или наблюдение объекта, соответствующего данной модели, где выход — рассматриваемое событие $A$. Многократное повторение опыта называется массовой операцией по отношению к событию $A$. Отношение числа появлений $m$ данного события к общему числу $n$ всех произведенных

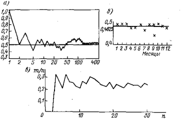



Рис. 1.13.

опытов называется *частотой события* $r = r(n)$ *при данной массовой операции*. Имеется широкий класс массовых операций, когда с увеличением их числа $n$ частота $r = r(n)$ постепенно стабилизируется около некоторого значения.

На рис. 1.13, *а* показана зависимость частоты появления определенной стороны монеты от числа ее бросаний в некоторой конкретной серии опытов (число бросаний отложено по оси абсцисс в логарифмическом масштабе). Очень устойчивы частоты многих явлений демографического характера. На рис. 1.13, *б* представлена частота рождаемости девочек в Швеции в 1935 г. по месяцам; частота за год составляет 0,482 5.[1] Рис. 1.13, *в* иллюстрирует изменение частоты $r(n)$ отказов радиоламп определенной марки, работающих в данных условиях в течение данного времени $t$. Видно, что, начиная с $n = 16$, частота отказов колеблется в узких пределах (0,21—0,26).

*Пусть в результате достаточно большого числа опытов $n$ замечено, что частота события $A$ почти для каждой большой группы опытов лишь незначительно отклоняется от некоторой* (вообще говоря, не вполне определенной) постоянной. Тогда в качестве значения вероятности события $A$ при данных условиях опыта можно принять значение этой постоянной, которое довольно произвольно выбирается внутри интервала изменения частоты, начиная с достаточно большого $n$. Например, при обработке данных рис. 1.13,*в* за вероятность отказа в течение времени $t$ допустимо принять *любое число в интервале 0,22—0,26. При обработке данных о рождаемости девочек в Швеции* за вероятность принято число 0,482 5, равное частоте рождаемости в течение года.

При использовании частотно-статистического метода определения значения вероятности необходимо, чтобы: а) каждый опыт и его результат были практически независимы от всех остальных опытов; б) во время всех опытов оставался неизменным «статистический фон» каждого опыта; в) модель, используемая при опыте, не имела «паразитических» входов, которые отсутствовали в основной статистической модели данной проблемы.

Первое условие довольно очевидно, и мы на нем подробно не останавливаемся. *Проиллюстрируем его лишь простым примером.* Так, если произвести слишком большую серию выстрелов из данной пушки, чтобы статистически оценить параметры рассеивания снарядов, то пушка просто износится и результаты последних выстрелов окажутся сильно зависящими от первых выстрелов (впрочем, иногда можно рассматривать и зависимые друг от друга опыты, если исследователю хорошо известен «механизм» этой зависимости и он в состоянии рационально учесть его).

Второе условие довольно расплывчато ввиду расплывчатости понятия «статистический фон». Тем не менее оно очень важно. Скажем, марка и прочие параметры радиолами (см. рис. 1.13, *в*) могут оставаться постоянными, но технология их производства, организация труда, психологический микроклимат на радиоламповом заводе могут меняться. Тогда в результате очень больших серий испытаний, проводимых в течение длительного времени, такой *стабилизации частоты не наступит. Для ориентировочной оценки вероятности отказа ламп, выпущенных в течение небольшого интервала времени, придется использовать данные коротких серий опытов за предшествующий, также короткий, интервал времени (если между этими интервалами не происходило каких-то явных серьезных изменений условий производства). Особенно точного определения вероятностей здесь ожидать не приходится. Другой интересный пример — статистическая оценка параметров морского волнения, необходимая для расчета долговечности корпуса судна. В данном случае она также будет лишь ориентировочной и основанной на небольшой серии наблюдений по годам — ведь статистическим фоном тут служит климат Земли, который, безусловно, не стабилен и меняется довольно неопределенным образом.

При постоянном статистическом фоне нередко употребляют термины: «статистический ансамбль», «статистическая однородность».

[1] Крамер Г. Математические методы статистики. М., ИЛ, 1948.

Исчерпывающая экспериментальная проверка постоянства статистического фона, вообще говоря, невозможна. Практически для такой проверки обычно поступают так: еще до проведения $n$ опытов принимают, что отдельно будут рассмотрены какие-то определенные достаточно большие выборки $n_1, n_2, \ldots$ из этих опытов. Если фон постоянный, то частоты события в этих выборках, как правило, должны стабилизироваться около значения вероятности, определенного *для всей серии из* $n$ опытов. Впрочем, с логической точки зрения этот прием не безупречен: мы случайно можем задать такую выборку $n_1$, при которой рассматриваемое событие вообще не произойдет, хотя в основной серии оно происходило довольно часто.

*Третье условие достаточно очевидно.*

Учитывая все сказанное, нужно со всей определенностью констатировать, что: 1) частотно-статистический метод также далеко не всесилен, а иногда и вовсе не применим, так как никакой стабилизации *частот события не существует; 2) точность частотно-статистической* оценки вероятности, даже если такая оценка возможна, далеко не всегда удовлетворительна для целей данного конкретного исследования.

*Непонимание второго обстоятельства часто приводит* к эфемерным и даже дезориентирующим результатам расчетов надежности изделий и сооружений. В сложном изделии содержится много элементов, надежность изделия в целом находится обычно путем широкого *использования теоремы о перемножении вероятностей*, следовательно, для получения сколько-нибудь серьезной оценки надежности изделия нужно с тремя, четырьмя и даже пятью знаками знать вероятность безотказной работы каждого элемента. Но такая точность, как правило, недостижима, а почти произвольная запись последних значащих цифр дает в результате совершенно необоснованную окончательную оценку надежности.

Таким образом, не следует сводить такую важную науку, как теорию надежности, к некой прикладной теории вероятностей, что нередко наблюдается в технической литературе. С другой стороны, не следует совсем исключать теорию вероятностей из теории надежности. Скажем, рассмотренный ранее пример с вероятностной оценкой характеристик работоспособности материалов путем введения в образцы предельно острых микроконцентраторов напряжений довольно хорошо иллюстрирует имеющиеся в этой области реальные возможности.

Третий распространенный метод определения значений исходных вероятностей — так называемые экспертные оценки, когда вероятность наступления того или иного события определяется просто мнениями компетентных специалистов — экспертов; он применим и к сугубо индивидуальным событиям, но точность его, как правило, невелика. Несмотря на безусловную «субъективность» указанного метода, не следует относиться к нему с излишним подозрением — ведь субъективное мнение эксперта базируется, как правило, на большом и вполне объективном опыте. В настоящее



время имеются работы по научному обоснованию и уточнению метода экспертных оценок [12].

В заключение основного содержания данного подраздела отметим, что нередко используются вероятностные рассуждения, в которые вообще не входят численные значения вероятностей. Таковы, например, многие оценки справедливости различных научных гипотез: имеется довольно правдоподобная гипотеза $A$; приняв ее, мы предсказываем явление $B$; явление $B$ действительно обнаружено после его предсказания; отсюда делается вывод о существенном повышении правдоподобия гипотезы $A$, хотя в принципе нельзя численно оценить отмеченное повышение и, кроме того, не исключено, что явление $B$ может быть объяснено другой гипотезой. Подробности о таких рассуждениях можно найти в [30].

3. Метод Монте-Карло (статистических испытаний). Теория вероятностей имеет глубокие связи с теорией численных алгоритмов, а нередко оказывается непосредственной основой тех или иных алгоритмических схем.

Метод Монте-Карло (или метод статистических испытаний) представляет собой моделирование на вычислительной машине некого вероятностного процесса, некой статистической ситуации с целью решения определенной вероятностной или даже вполне детерминированной задачи. Поясним его существо на примере численного определения однократных и многократных интегралов.

Пусть нам нужно найти значение определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, т. е., по существу, площадь некоторой фигуры. Задача эта сравнительно проста и обычно решается каким-либо из общеизвестных численных методов (трапеций, Симпсона и т. п.). Правда, и здесь могут встретиться значительные вычислительные трудности, если форма кривой $f(x)$ имеет сильно осциллирующий характер, т. е. когда для достижения приемлемой точности нужно брать очень малый шаг интегрирования (именно так и происходит в механике при вычислении, например, интеграла Дюамеля).

Сравнительно нетрудно вычислить и двукратный интеграл $\int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x, y)\,dydx$, хотя объем вычислений здесь существенно возрастает по сравнению с предыдущим случаем: если раньше требовалось $n$ арифметических операций, то теперь потребуется порядка $n^2$ операций, *так как нужно брать однократный интеграл для вычис*ления каждой ординаты второго интегрирования.

Вычисление трехкратного интеграла заставляет выполнить порядка $n^3$ операций, а $m$-кратного — порядка $n^m$ операций. В ре*зультате вычисление, скажем, шести- или семикратных интегралов* оказывается затруднительным, а иногда непосильным даже при использовании современных ЭВМ (такие задачи встречаются на практике).

Допустим теперь, что мы хотим взять однократный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ методом Монте-Карло. Впишем (рис. 1.14) фигуру $aABb$ в некий прямоугольник $acdb$ с известной нам площадью $F_0$. Представим себе теперь такой физический процесс: мы бросаем в прямоугольник $acdb$ шары, которые, не вылетая за его пределы, с равной вероятностью могут попасть в любую его точку. Если $n$ — достаточно большое число шаров, $m$ — число попаданий в фигуру $aABb$, то частота попаданий $m/n$ практически равна вероятности $P$ этих попаданий. Но $P = F/F_0$, т. е. $F = F_0 P$, где $F$ — искомая площадь фигуры $aABb$ или значение искомого интеграла.

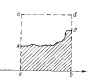



Рис. 1.14.

Описанный процесс можно моделировать на машине, если она снабжена так называемым генератором случайных чисел (точнее цифр), который может выдавать по закону равной вероятности любую цифру от 0 до 9 включительно.

Пусть мы хотим определять координаты точек попадания с точностью до $k$ значащих цифр, где $k$ определяется возможной точностью вычислений на данной машине в данном режиме ее работы. Запустив $k$ раз генератор случайных чисел, мы получим последовательность $p_1, p_2, \ldots, p_k$ цифр. Рассматривая ее как $k$-значное число, получим абсциссу $x$ точки попадания в виде $x = a + 0, p_1, p_2, \ldots, p_k (b-a)$.

Аналогичным образом вычисляем ординату $y$ точки попадания по формуле $y = 0, t_1 t_2 \ldots t_k (c-0) = 0, t_1 t_2 \ldots t_k c$ ($t_i$ — новые случайные цифры) и определяем, оказался ли наш шар в $aABb$. Процесс моделирован.

При однократных интегралах описанный алгоритм целесообразен лишь при сильно осциллирующих $f(x)$, так как число необходимых бросаний определяется только требуемой точностью вычисления интеграла и не связано с осциллированием. Но он незаменим при нахождении многократных интегралов — там сложная многомерная фигура, выражающая интеграл, вписывается в известный многомерный параллелепипед; бросание шаров имитируется нахождением не двух, а большего числа координат. Важно, что объем вычислений растет примерно пропорционально мерности интеграла и, скажем, двадцатикратный интеграл требует всего в 20 раз больше арифметических операций, чем однократный.

Имеются и более совершенные варианты метода Монте-Карло для вычисления многократных интегралов, чем описанный наиболее простой; они содержатся в специальной литературе [4].



Данный пример использования метода Монте-Карло очень характерен — он наглядно показывает, что фактическую реализацию численного алгоритма почти всегда удобно интерпретировать как прямое численное моделирование некого реального физического процесса. Эту важнейшую, хотя и очень простую, мысль, к сожалению, почти всегда упускают в современной литературе по численной математике.

Методом Монте-Карло нередко непосредственно «проигрываются» многие вероятностные задачи, если почему-либо затруднительно получить их прямое аналитическое решение.

Особенно интересно и плодотворно использование метода Монте-Карло при анализе вероятностных моделей, связанных с задачами теории игр, теории операций, общего проектирования судов и т.д. При этом, конечно, особое внимание нужно уделять правильному осмысливанию исходной модели, учету в ней всех основных факторов и связей, а также анализу погрешностей, вносимых неточностью исходных данных.

## § 4. Постановка и классификация задач *численного расчета. Языки классической* и неклассической математики

Введенные ранее представления дают возможность рассмотреть общую постановку и классификацию задач любых детерминированных численных расчетов, что очень важно для осмысленного использования соответствующих численных методов. Основная трудность этой постановки и классификации — наличие и одновременное применение трех, по существу совершенно различных, хотя и дополняющих друг друга, языков: языка классической математики, языка неклассической математики первого типа и языка неклассической математики второго типа.

1. Язык классической математики. Постановка и классификация задач на этом языке. Пользуясь языком классической математики, которая принимает асбтракции абсолютной точности и нивелирования причин, условий, следствий, рассмотрим некоторую детерминированную задачу в классе задач определенного типа (рис. 1.15, *а*).

Имеем совокупность исходных данных, определяющих подобно координатам точку $x_1$ в пространстве $X$ исходных данных (ПИД). Кроме того, задана система исходных уравнений и дополнительных условий, т. е. неявный оператор $a_1$ из класса операторов $A$, преобразующий точку $x_1$ в соответствующую точку $y_1$, которая лежит в пространстве $Y$ искомых результатов (ПИР); координаты $y_1$ суть конкретные интересующие нас результаты. (Иногда набор координат несколько шире, так как мы не можем найти нужное без каких-то ненужных нам сейчас «приложений».) Совокупность $X$, $x_1$, $A$, $a_1$, $Y$ представляет исходную математическую модель данной физической задачи. Множества $X$, $Y$, $A$ имеют строгую идентификацию элементов.

Если задача имеет конкретное физическое содержание, то нередко из физических условий рассматривают не все пространство $Y$, а некоторое его подмножество $Y^0 \subseteq Y$, называемое *множеством физически возможных решений*. Если задача абстрактна, то автоматически $Y^0 = Y$.

Поскольку уравнения и дополнительные условия $a_1$ преобразуют $x_1$ в $y_1$ лишь неявно (они просто удовлетворяются после подстановки в них любым образом найденного $y_1$), требуется решить

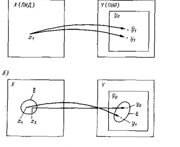



Рис. 1.15.

задачу, т. е. найти явный оператор (алгоритм, решение) $b_1$ такого преобразования, позволяющий вычислить $y_1$. Точное решение (алгоритм) $b_1$ вполне эквивалентно $a_1$, приближенное решение дает преобразование $\bar{b}_1$ значения $x_1$ не в $y_1$, а в некоторую близкую к ней точку $\bar{y}_1$. Приемлемость конкретного приближенного решения оценивается степенью близости $\bar{y}_1$ к $y_1$. Ясно, что в одних об*ластях $X$ данное $\bar{b}_1$ может оказаться приемлемым, в других нет.*

Достаточную для целей конкретного расчета точность $\bar{b}_1$ в точке $x_1$ назовем практической сходимостью решения в этой точке или сходимостью в большом (иногда просто сходимостью). В математике *часто используются приближенные решения, зависящие от* числа принимаемых во внимание параметров (например, от числа удерживаемых членов ряда). Тогда сходимостью решения в малом в точке $x_1$ называется свойство неограниченного приближения $\bar{y}_1$



к $y_1$ по мере неограниченного увеличения числа параметров (пространство $Y$ для этого должно быть топологическим).

Часто неявный оператор $a_1$ неудобен для получения решения и его преобразуют в оператор другого вида (преобразованный оператор), получая преобразованную математическую модель (например, замена дифференциальных уравнений конечно-разностными). Если преобразованная модель не совпадает с исходной, а только близка к ней и зависит от ряда параметров (скажем, шага разности), то здесь также можно говорить о сходимости преобразованной модели в большом и в малом. Преобразованную модель, в свою очередь, нужно исследовать с помощью точного или хотя бы сходящегося решения и т. д.

Не следует смешивать только что указанные преобразованные математические модели с рассмотренными ранее в § 2 эквивалентно преобразованными моделями. Преобразованная модель имеет те же входы и выходы, что и исходная, но в ней по сравнению с исходной заменен, может быть приближенно, неявный оператор (точнее, все множество неявных операторов). А в эквивалентно преобразованной модели изменены входы и выходы, причем без всякого *нарушения точности оператора.*

Кроме указанных ранее обычных, т. е. правильно сформулированных или достаточно обусловленных задач, можно говорить о несовместных задачах, где в $Y^0$ нет точки $y_1(x_1)$, и о *недостаточно обусловленных задачах, где в $Y^0$ имеется ряд точек $y_{1,i}(x_1)$*, которые не могут реализоваться одновременно, и где, следовательно, необходимы дополнительные условия для выбора из них нужных нам ответов.[1]

*Иногда задача достаточно обусловлена в одних областях $X$ и не*достаточно обусловлена в других, несовместна в третьих и т. п.

Пример достаточно обусловленной задачи — система двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными

$$a_{11}z_1 + a_{12}z_2 = c_1;$$

$$a_{21}z_1 + a_{22}z_2 = c_2.$$

Здесь $X$ — множество всевозможных упорядоченных шестерок вещественных чисел; $x_1 = (a_{11}, a_{12}, c_1, a_{21}, a_{22}, c_2)$ — конкретная шестерка; $Y$ — множество всевозможных упорядоченных пар вещественных чисел; $y_1 = (z_1, z_2)$ — конкретная пара; $a_1$ — структура уравнения; $A$ — множество, состоящее из одной точки $a_1$.

Достаточная обусловленность задачи нарушается на множестве точек $x \in X$, где детерминант системы равен нулю, т. е. $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$.

[1] Заметим, что иногда имеется ряд точек $y_{1,i}(x_1)$, которые могут реализовываться одновременно. В этом случае задача оказывается правильно сформулированной, несмотря на множественность $y_{1,i}$.

Явный оператор $b_1$ определяется известными формулами Крамера

$$z_1 = \frac{c_1 a_{22} - c_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}; \quad z_2 = \frac{c_2 a_{11} - c_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}.$$

Одно уравнение с двумя неизвестными дает хороший пример недостаточно обусловленной задачи, а три уравнения с двумя неизвестными — *пример несовместной задачи* (кроме случаев, когда одно из уравнений — прямое следствие двух других, т. е. представляет их линейную комбинацию).

2. *Язык неклассической математики первого типа.* Постановка и классификация задач на этом языке. Как уже отмечалось ранее, *неклассическая математика первого типа* отказывается от абстракции абсолютной точности, но принимает абстракцию нивелирования причин, условий, следствий.

Назовем строго детерминированной задачу, у которой пространство исходных данных $X$, пространство исходных решений $Y$ и пространство операторов $A$ являются множествами со строгой идентификацией элементов. Попросту говоря, это детерминированная задача, рассматриваемая классической математикой. Неклассическая математика решает условно детерминированные задачи, т. е. такие, у которых хотя бы одно из указанных множеств является множеством с условной идентификацией элементов.

Каждая условно детерминированная задача может рассматриваться как некоторое многоэлементное или даже бесконечное множество строго детерминированных задач. Возьмем условно детерминированную задачу $y = a_1 [x_1]$. Она означает в общем случае, что имеется множество точек $x_2 \simeq x_1$ и множество операторов $a_2 \simeq a_1$. Взяв любую точку $x_2$, полагаем, что взяли $x_1$; взяв любой оператор $a_2$, полагаем, что взяли $a_1$. В результате будет образовываться множество точек $y$, являющихся результатом воздействия операторов $a_2$ на точки (элементы) $x_2$.

Найти решение конкретной условно детерминированной задачи $y = a_1 [x_1]$ — значит фактически преобразовать конкретную точку $x_2 \simeq x_1$ с помощью конкретного оператора $a_2 \simeq a_1$ в конкретную точку $y$, условно идентичную известной точке множества $Y^0$. Решить эту задачу — значит фактически найти совокупность точек из $Y^0$, не являющихся условно идентичными *между собой*, с которыми могут быть условно идентифицированы все точки, представляющие результат преобразования данной точки $x_2 \simeq x_1$ с помощью данного оператора $a_2 \simeq a_1$.

Используя язык неклассической математики первого типа, нужно прежде всего учесть, что обычно мы не знаем все исходные данные *и оператор с абсолютной точностью. Именно поэтому* дополнительно вводятся понятия хорошо и плохо обусловленной задачи (рис. 1.15, *б*). Задача хорошо обусловлена (точнее, *хорошо обусловлена в большом) в точке $x_1$ при операторе $a_1$,* если и только



если, принимая исходные данные в точке $x_2$, лежащей в некоторой *области δ около точки $x_1$, и совершая точно преобразование $a_2$,* условно идентичное с $a_1$, мы всегда получим соответствующую точку $y_2 = y_2(x_2)$ [или точки $y_{2,i}(x_2)$] в пределах достаточно малой области ε (или областей $\varepsilon_i$) около точки $y_1(x_1)$ [*или точек* $y_{1,i}(x_1)$]. Размеры и формы областей δ и ε зависят от возможных погрешностей в исходных данных и допустимых неточностей результатов (они определяются условиями идентификации в $X$ и $Y^0$). Ясно, что если $y_2$ выходит за пределы ε, т. е. если задача плохо обусловлена, то мы не можем получить ее удовлетворительное детерминированное решение при любом искусстве математика и на любых ЭВМ.

Например, рассмотренная в п. 1 этого параграфа система двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными становится плохо обусловленной в точке $x_1$, где детерминант ее близок к нулю (но еще не нуль). С классической точки зрения такие системы имеют точные решения по формулам Крамера и ничем не примечательны. Однако даже небольшие погрешности в исходных данных (коэффициентах $a_{ij}$ и членах $c_k$) приводят к громадным изменениям в значениях $z_1$ и $z_2$, и задача перестает быть решаемой на современных машинах (достаточно точные исходные данные не только неизвестны фактически, но и не могут быть введены в машину даже чисто условно, поскольку должны быть записаны с громадным числом значащих цифр).

Рассмотренная в п. 6 (§ 2) задача о движении материальной точки согласно уравнению (1.4) при начальных зависимостях $y(0) = y_0 = 0$; $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$ плохо обусловлена, если нас интересуют параметры движения через большой интервал времени: малейшая неточность в значении $\dot{y}_0$ *приводит к большим ошибкам в указанных* параметрах. Вместе с тем, согласно классическим воззрениям, мы не видим тут никаких специфических особенностей и даже имеем точный явный оператор $b_1$, преобразующий исходные данные в искомые результаты.

Приведенная формулировка хорошей обусловленности предполагает, *что для любого $x_2$ из δ* количество соответствующих точек $y_{2,i}(x_2)$, когда их много, равно количеству точек $y_{1,i}(x_1)$. Нарушение этого условия также делает задачу плохо обусловленной.

*Задача называется хорошо обусловленной в малом в точке $x_1$,* если и только если в $Y^0$: существует непустое множество решений $y_{1,i}(x)$; все эти решения в достаточно малой окрестности $(x_1, a_1)$ *непрерывно зависят от исходных данных и оператора; ни в одной* точке достаточно малой окрестности $(x_1, a_1)$ не появляется новых решений.

Условно детерминированная задача $y = a_1 [x_1]$ *называется несовместной,* если и только если, взяв любую точку $x_2 \simeq x_1$ и любой оператор $a_2 \simeq a_1$ и предположив, что мы умеем строго идентифицировать элементы множеств $X$, $A$, $Y^0$, мы не сможем найти ни одного решения в $Y^0$. Она несовместна в малом, если и только если решения строго детерминированной задачи $y = a_1 [x_1]$ не существует и не возникает в достаточно малой окрестности $(x_1, a_1)$.

Приведенные ранее причины плохой обусловленности задачи еще не охватывают всех случаев. Задача называется плохо обусловленной (или плохо обусловленной в большом), если и только если она не является хорошо обусловленной или несовместной. Плохая обусловленность в малом означает, что задача не является хорошо обусловленной в малом или несовместной в малом.

Условно детерминированная задача вполне достаточно обусловлена, если и только если, взяв любую точку $x_2 \simeq x_1$ и любой оператор $a_2 \simeq a_1$ и полагая, что мы научились строго идентифицировать элементы множеств $X$, $A$, $Y^0$, получим достаточно обусловленную строго детерминированную задачу. Ее называют просто достаточно обусловленной, если и только если при тех же предположениях мы получаем либо достаточно обусловленную, либо несовместную *строго детерминированную задачу. Наконец, будем называть ее недостаточно обусловленной, если и только если хотя бы в одной точке* $x_2 \simeq x_1$, хотя бы при одном операторе $a_2 \simeq a_1$ мы получаем недостаточно обусловленную строго детерминированную задачу.

Определения вполне достаточной и просто достаточной обусловленности в малом строятся по уже ясному трафарету.

*Очевидно, что та или иная обусловленность задачи в малом не* гарантирует ее соответствующей обусловленности в большом, и наоборот. В исследованиях реального мира нас интересует обусловленность в большом, поэтому проверка обусловленности в малом представляет, по существу, лишь некий суррогат, часто весьма полезный, если он дополняется некоторыми данными или соображениями.

Из приведенных определений нетрудно сделать заключение, что условно детерминированная задача может быть вполне достаточно и хорошо обусловленной, недостаточно и хорошо обусловленной, вполне достаточно и плохо обусловленной и т. д. Понятия достаточной и недостаточной обусловленности связаны с содержательной расшифровкой ответа, а хорошей и плохой обусловленности — с неточностями в исходных данных и в операторе.

Приведенные формулировки можно уточнить и развить, установив связь, которая существует в некоторых случаях между хорошо обусловленными и достаточно обусловленными задачами. Например, задача может быть недостаточно обусловленной и иметь *несколько решений, между которыми, строго говоря, нужно сделать выбор*; однако эти решения лежат настолько близко друг к другу, что являются условно идентичными, а потому такой выбор практически нецелесообразен. Но мы этого делать не будем, отсылая интересующихся к [47].

В литературе [37] понятие хорошей и достаточной обусловленности в малом дополняется и даже заменяется понятием корректности: задача $y = a_1 [x_1]$ корректна в точке $x_1$, если в этой точке решение существует; оно единственно и непрерывно при непрерыв*ном изменении $x$ в некоторой окрестности $x_1$. Последнее понятие* безусловно оправдано исторически, и его введение явилось в свое время большим шагом вперед. Но сейчас оно не может считаться вполне удовлетворительным. Во-первых, несуществование решения в данной точке $x_1$ при данном операторе $a_1$ и в некоторой окрестности $(x_1, a_1)$ является очень ценной информацией, имеющей всегда глубокое математическое и физическое содержание; поэтому не*совместные задачи полезно выделить особо. Во-вторых, задача может* иметь несколько одновременно реализуемых с физической точки зрения полноценных решений; следовательно, нужно не безоговорочно вводить требование непременной единственности решения, а дать необходимую оговорку. В-третьих, в задаче могут варьироваться не только исходные данные, но и оператор, поэтому нужно оговаривать непрерывность решения и от исходных данных, и от оператора. Наконец, в-четвертых, *говоря о непременной единственности решения в точке $x_1$ при операторе $a_1$*, полезно отметить, что в любой бесконечно малой окрестности $(x_1, a_1)$ не должны появляться новые решения (что вполне вероятно).

В тех случаях, когда та или иная задача недостаточно обусловлена, для физической расшифровки ответа требуется непременно добавочный физический анализ, т. е. введение в задачу дополнительных условий. Важно подчеркнуть, что он лежит в сфере конкретной науки, формулирующей содержательную задачу, но не в сфере чистой математики, хотя при проведении анализа, естественно, не исключено применение математических средств.

3. *Устойчивые и неустойчивые решения.* Решения, соответствующие хорошо обусловленной условно детерминированной задаче $y = a_1 [x_1]$, будем называть устойчивыми (или устойчивыми в большом); решения, соответствующие несовместной задаче — несуществующими (или несуществующими в большом); а решения, соответствующие плохо обусловленной задаче — неустойчивыми (или неустойчивыми в большом). Аналогично опре*деляются решения устойчивые, неустойчивые и несуществующие* в малом. Все вычисления и другие преобразования, связанные с реализацией оператора, считаются в данных определениях абсолютно точными (условная идентификация вносится в исходные данные и в оператор).

Если множества $X$, $A$, $Y^0$ метризованы и решение данной задачи $y_1 = a_1 [x_1]$ устойчиво, то можно говорить о запасах устойчивости решения. Для этого достаточно построить: во множествах $X$ и $A$ области $\delta_X$ и $\delta_A$ точек, условно идентичных точкам $x_1$ и $a_1$; во множестве $Y^0$ область $\delta_Y$ точек, условно идентичных $y_1$, а также область $\delta_{Y^0}$, обусловленную разбросом точек, условно идентичных $x_1$ и $a_1$.

Устойчивость решения означает, что область $\delta_{Y^0}$ лежит внутри области $\delta_Y$.

Теперь можно различным образом оценивать запасы устойчивости. Достаточно, например, «заморозить» значения координат точек, лежащих в $\delta_X$ и $\delta_A$, кроме одной координаты, а затем изменять эту свободную координату до тех пор, пока соответствующая точка во множестве $Y^0$ не выйдет на границу области $\delta_Y$. При этом автоматически выявляется запас устойчивости по свободной координате. Нетрудно по какому-нибудь закону менять сразу несколько координат и т. д.

Вариации неточно заданных исходных данных очевидны. При рассмотрении вопроса о возможных вариациях оператора $a$ в любой конкретной задаче полезно вспомнить очень поучительный пример Бореля.

Возьмем уравнение

$$m\dot{x}^2 + kx^2 = \text{const}. \tag{1.12}$$

Его периодическими решениями, как легко проверить подстановкой, являются синусоидальные функции, имеющие осцилляторный характер с чередованием максимум—нуль—максимум, и т. д.

Если взять уравнение

$$m\dot{x}^2 + kx^2 = \text{const} + \lambda t, \tag{1.12 a}$$

то оно уже не будет иметь осцилляторного решения даже при сколь угодно малых значениях положительного параметра $\lambda$. Действительно, дифференцируя (1.12а), имеем

$$(m\ddot{x} + kx)\dot{x} = \frac{1}{2}\lambda,$$

что исключает возможность равенства $\dot{x} = 0$ и, следовательно, обращения $x$ в максимум или минимум.

*Получив уравнение (1.12а) и отбросив пренебрежимо малый* член $\lambda t$, мы пришли бы к неправильному решению даже для сравнительно малого интервала времени $t$. То же самое будет, если мы «не заметим» этот член при выводе уравнения.

Таким образом, варьирование операторами должно быть очень осторожным. Решение может оказаться крайне неустойчивым по отношению не только к исходным данным, но и к операторам.

4. *Некоторые примеры физического анализа задачи для получения ее достаточной обусловленности и устойчивого решения.* Как уже отмечалось выше, некоторые недостаточно обусловленные математические задачи могут быть успешно решены, если в дополнение к их исходной формальной математической постановке провести физический анализ.



Пусть исследуются [36] периодические установившиеся колебания *нелинейной механической системы с одной степенью свободы*, определяемые уравнением типа Дюффинга

$$\ddot{x} + \alpha^2\dot{x} + \beta^2 x + \gamma^2 x^3 = P_0 \sin \omega t, \tag{1.13}$$

где $\alpha^2$, $\beta^2$, $\gamma^2$, $P_0$, $\omega$ — положительные вещественные числа.

С помощью известного метода Бубнова—Галеркина или других методов можно весьма точно построить амплитудно-частотную кривую (рис. 1.16, *а*), если воспользоваться первым приближением

$$x = A_0 \sin(\omega t + \psi), \tag{1.14}$$

где $A_0$ — искомая амплитуда; $\psi$ — фаза колебания.

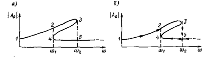



Рис. 1.16.

В довольно широкой области частот $\omega_1 < \omega < \omega_2$ решение оказывается *трехзначным*, т. е. задача недостаточно обусловлена. Однако дополнительный анализ устойчивости движения позволяет установить, что периодические колебания, соответствующие ветви *4—3*, неустойчивы и, следовательно, *физически как установившиеся* существовать не могут.

Кроме того, нетрудно ввести в рассмотрение «историю установления колебаний». Оказывается, если подъем частот возмущающих сил производится постепенно от нуля до значения $\omega$, находящегося в пределах $\omega_1 < \omega < \omega_2$, то соответствующая амплитуда $A_0$ должна сниматься с кривой *2—3* (рис. 1.16, *б*); если же частоты были сначала увеличены до значения $\omega > \omega_2$, а затем уменьшены до $\omega_1 < \omega < \omega_2$, *то амплитуды колебаний будут соответствовать ветви 4—5*, и т. д.

Таким образом, физический анализ позволил дополнить исходные данные (учесть историю установления процесса) и оператор (ввести операцию отсечения ветви *4—3*). Это дало возможность выделить единственное решение, осуществляемое в каждом конкретном случае.

Если уравнение (1.13) описывает не установившиеся колебания *во времени, а иной периодический процесс*, то его периодические решения по-прежнему следует искать в виде (1.14). В этом случае получим амплитудно-частотную кривую, показанную на рис. 1.16,*б*. Однако здесь преодоление *недостаточной обусловленности задачи* в диапазоне $\omega_1 < \omega < \omega_2$ потребует другого физического анализа и может дать совсем иные результаты.

Часто необходимый дополнительный анализ мы делаем автоматически. Возьмем школьную задачу, которая сводится к решению квадратного уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0, \tag{1.15}$$

где $x$ — неизвестное; $a$, $b$, $c$ — известные вещественные числа.

Явно заданный оператор, соответствующий (1.15), имеет вид

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \tag{1.16}$$

многозначность (1.16) делает задачу решения (1.15) в общем случае недостаточно обусловленной.

Однако очень часто множество $Y^0$ физически возможных объектов состоит из вещественных чисел, и мы прямо исключаем комплексные корни. Кроме того, во множестве $Y^0$ нас нередко интересуют лишь положительные решения, и, получив два корня, один из которых положительный, а другой отрицательный, мы уверенно выбираем один из них.

Остановимся более подробно на случае, когда множество $Y^0$ состоит из вещественных чисел, а величина $b^2 - 4ac = 0$, но значения $b$, $a$, $c$ могут иметь в принципе разбросы (погрешности), равные соответственно $\pm \varepsilon_b$, $\pm \varepsilon_a$, $\pm \varepsilon_c$. Ясно, что такая условно детерминированная задача недостаточно обусловлена. Но пусть известно дополнительное физическое условие, из которого следует, что вещественное решение указанной задачи осуществилось. Тогда при малых $\varepsilon$ можно полагать $x = -b/2a$.

Возможность достижения достаточной обусловленности задачи путем добавочного анализа физических факторов не всегда реализуется в действительности. И тогда задача так и остается недостаточно обусловленной.

Если решение неустойчиво, то добиваться его устойчивости можно только ужесточением условий идентификации элементов множеств $X$ и $A$ (когда это возможно).

Обратим внимание на один важный частный случай.

Решение условно детерминированной задачи $y = a_1\,[x]$ называется абсолютно неустойчивым, если нарушение строгой идентификации хотя бы в одном из множеств $X$, $A$ полностью лишает нас возможности судить о решении. Соответствующая задача называется абсолютно плохо обусловленной. Подчеркнем, что понятие абсолютной неустойчивости не совпадает с понятием неустойчивости в малом. Примером абсолютно плохо обусловленной задачи может служить уже рассмотренное выше определение производной от функции. Причины абсолютно плохой обусловленности различны. Задача $y = a_1\,[x]$ может быть абсолютно плохо обусловленной потому, что в бесконечной близости к $x_1$ имеются отдельные точки, где решение не существует, хотя в $x_1$ оно существует, и т. д.



Как мы уже видели, хорошим приемом решения абсолютно плохо обусловленной задачи может явиться ее замена другой, даже более адекватной сути дела задачей.

5. Решение «некорректных задач» методом регуляризирующих функционалов. Рассмотрим с наших позиций очень важный метод регуляризирующих функционалов А. Н. Тихонова [38].

Пусть $z = R\,(u)$ определяет «решение» $z$ по входным данным $u$ задачи. Пусть, далее, объекты $z$ и $u$ являются элементами (точками) метрических пространств $Z$ и $U$, т. е. в $U$ и $Z$ введены понятия расстояния $\rho_u\,(u_1, u_2)$, $\rho_z\,(z_1, z_2)$, когда $u_1, u_2 \in U$; $z_1, z_2 \in Z$. Вместо точного $u$ мы знаем такое приближенное $\tilde{u}^\delta$, что $\rho\,(u, \tilde{u}^\delta) \leqslant \delta$. Следовательно, приближенное значение решения будет $\tilde{z}^\delta = R\,(\tilde{u}^\delta)$.

Если задача $z = R\,(u)$ корректна,[1] то любому сколь угодно малому $\varepsilon > 0$ соответствует такая точность $\delta\,(\varepsilon)$, что из условия $\rho\,(u, \tilde{u}^\delta) \leqslant \delta\,(\varepsilon)$ следует $\rho\,(z, \tilde{z}^\delta) \leqslant \varepsilon$. В случае некорректных задач решение $\tilde{z}^\delta = R\,(\tilde{u}^\delta)$ уже не может обеспечить любой нужной точности при любой сколь угодно большой, но конечной точности задания исходных данных.

Для решения некорректных задач А. Н. Тихонов предлагает заменить исходный функционал $R$ специальным параметрическим функционалом $R\,(\tilde{u}^\delta, \alpha)$, называемым регуляризирующим оператором. Искомое приближенное решение находится как

$$z^\delta = R\,(\tilde{u}^\delta, \alpha) \tag{1.17}$$

при $\alpha = \alpha\,(\delta)$.

В работе [38] сказано:

«Будем говорить, что параметрический функционал $R\,(\tilde{u}, \alpha)$ регуляризирует решение задачи $z = R\,(u)$ $(u \in U,\ z \in Z)$,

— если $R\,(\tilde{u}, \alpha)$ определен для всякого $\alpha > 0$, любого $\tilde{u} \in U$ и непрерывен по $u$;

— если $A\bar{z} = \bar{u}$, то существует такое $\alpha\,(\delta)$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta\,(\varepsilon)$, что если $\rho_u\,(\tilde{u}^\delta, \bar{u}) \leqslant \delta\,(\varepsilon)$, то $\rho_z\,(\tilde{z}^\delta, \bar{z}) \leqslant \varepsilon$, где $\tilde{z}^\delta = R\,(\tilde{u}^\delta, \alpha)$, $\alpha = \alpha\,(\delta)$.

Очевидно, всякий регуляризирующий функционал вместе с выбором $\alpha\,(\delta)$ определяет устойчивый метод приближенного построения решения уравнения $z = R\,(u)$. Очевидно также, что для всякой задачи можно определить много регуляризирующих функционалов. Параметр $\alpha$ может быть не только числовым, но и иметь более сложную структуру».[2]

[1] Напомним, что математическая задача поставлена корректно, если: решение задачи существует; задача имеет единственное решение; решение задачи непрерывно зависит от исходных данных [37].

[2] Согласно обозначениям, принятым в работе [38], в приведенной цитате $\bar{z}$, $\tilde{u}$ — точные значения $z$ и $u$; $A$ — оператор в задаче $u = A\,[z]$.

Вернемся к задаче нахождения производной от приближенно заданной функции $\tilde{f}(x)$. *Это типично некорректная задача.* В работе [10] для нее указан регуляризирующий функционал

$$\tilde{f}'(x) = R(\tilde{f}, \alpha) = \frac{\tilde{f}(x+\alpha) - \tilde{f}(x)}{\alpha}, \qquad (1.18)$$

очень напоминающий обычную формулу для нахождения производных.

Параметр $\alpha = \alpha(\delta)$ определяется по формуле

$$\alpha(\delta) = \frac{\delta}{\eta(\delta)}, \qquad (1.19)$$

где $\eta(\delta)$ — *любая функция*, удовлетворяющая условиям

$$\alpha(\delta) = \frac{\delta}{\eta(\delta)} \to 0 \text{ при } \delta \to 0;$$

$$\eta(\delta) \to 0 \text{ при } \delta \to 0.$$

При достаточно малых $\delta$ предлагается считать

$$\tilde{z}^{\delta} = R(\tilde{f}^{\delta}, \alpha(\delta)) \approx \frac{df}{dx}.$$

Мы говорим «предлагается», поскольку на самом деле, как *показано выше, при любом сколь угодно малом*, но не равном нулю $\delta$ истинная производная $f'(x)$ может сколь угодно отличаться от $\tilde{f}'(x)$, определяемой (1.18) или любым другим сконструированным функционалом от $\tilde{f}(x)$. Она «мгновенно» станет точно равной $f'(x)$ только при $\delta = 0$.

*Метод регуляризирующих функционалов*, как и любой другой метод, в принципе не может дать представления об истинной производной $f'(x)$, если сама функция $f(x)$ задана не абсолютно точно.

Имеет ли смысл с учетом сказанного пользоваться регуляризирующим функционалом? Да, имеет.

Дело в том, что случайная запись $f(x)$ какими-то приборами с погрешностью $\pm\ \delta$ часто дает «дрожание» этой записи внутри рассматриваемого канала, причем последнее обусловлено просто случайным *разбросом данных, а не физическими свойствами функции* $f(x)$. Проанализировав (1.18), нетрудно видеть, что при малых $\delta$ параметр $\alpha$ всегда берется больше $\delta$; это сильно сглаживает влияние разброса экспериментальных данных и делает более достоверными наши представления о средней производной $f(x)$ (так сказать, о главном значении производной).

Аналогичным образом дело обстоит и в других случаях использования метода регуляризирующих функционалов. Не решая исходную задачу, он приводит, *как правило, к некоторой замене* поставленной некорректной задачи близкой к ней и даже более нужной корректной задачей. Его сознательное использование всегда дает *положительный* эффект. Но при этом необходим, хотя бы в



скрытом виде, дополнительный физический анализ исходной задачи с учетом *невыполнения абстракции* абсолютной точности.

Наоборот, формальное использование этого метода может привести к ошибкам. Проанализируем снова задачу о расчете прочности болтов по данным записи скорости *сотрясений механизма* (см. рис. 1.3, *а*). Пусть величина $\delta$ сравнительно велика и мы уже не можем сказать, что составляющие осцилляций $\tilde{f}(t)$ внутри канала шириной $2\delta$ не ощущаются болтами. Тогда, определив приближенно производную $\tilde{f}'(t)$ методом регуляризирующих операторов, *мы допустим значительную погрешность и неверно рассчитаем* болты. Никакая регуляризация тут ничего не даст. А оценить необходимую точность $\delta$ можно лишь из физического анализа динамических характеристик болтов.

6. Х о р о ш о  и  п л о х о  с о в м е с т н ы е  з а д а ч и. Полученные определенным способом решения нередко проверяют, подставляя их в исходный неявно заданный оператор, причем «удовлетворение» этого оператора (т. е. уравнений и дополнительных *условий) рассматривают как необходимый и достаточный критерий* должной точности ответа. На самом деле все гораздо сложнее.

Пусть мы имеем очень хорошо обусловленную задачу, когда даже значительные изменения исходных данных $x_2$ по сравнению с «точными» данными $x_1$ (см. рис. 1.15, *б*), а может быть и изменения оператора, не приводят к сколько-нибудь заметным изменениям результата $y_2$ по сравнению с «точным» результатом $y_1$. Пусть, далее, как это обычно бывает в практических задачах, решение $y$ *непрерывно изменяется с изменением исходных данных* $x$. Тогда, найдя тем или иным способом $y_2$ довольно (но не очень) близким к $y_1$ и подставив его в оператор, мы удовлетворим его только при *исходных данных* $x_{2,0}$, весьма *далеких от данных* $x_1$. А так как мы подставляем исходные данные $x_2$, гораздо более близкие к $x_1$, чем $x_{2,0}$, то удовлетворение исходных уравнений и условий не происходит, хотя, повторяем, на самом деле наше решение вполне удовлетворительно по точности. Следовательно, «удовлетворение» исходного неявно заданного оператора далеко не всегда обязательно для обеспечения достаточной точности результатов, а очень хорошая обусловленность задачи с этой точки зрения — не всегда *абсолютное благо. Иногда дело доходит до того, что, оперируя данным* числом $n$ значащих цифр, мы в принципе не можем достаточно точно выразить искомый результат, чтобы удовлетворить наш неявный оператор.

Наоборот, пусть задача плохо обусловлена, т. е. даже ничтожные изменения исходных данных $x_2$ по сравнению с «точными» данными $x_1$ приводят к очень значительным изменениям результата $y_2$ по сравнению с точным результатом $y_1$. Тогда, найдя тем или иным способом *ответ задачи* $y_2$, весьма далекий от истинного ответа $y_1$, и подставив его в неявный исходный оператор, мы удовлетворим последний при исходных данных $x_{2,0}$, очень близких к действительным исходным данным $x_1$. А так как мы и берем такие близкие данные, то удовлетворение оператора практически всегда обеспечено даже при неудовлетворительных по точности ответах. Следовательно, «удовлетворение» исходного неявного оператора *не всегда является и достаточным критерием приемлемости* результатов.

Таким образом, целесообразно введение понятий хорошо и плохо совместных задач. Сущность этих понятий очевидна из только что изложенного. Очевидна и связь хорошей совместности с плохой обусловленностью и плохой совместности с хорошей обусловленностью. Примеры хорошо и плохо совместных задач нам еще не раз встретятся в дальнейшем.

В заключение заметим, что, рассуждая о хорошо и плохо совместных задачах по сравнению с хорошо и плохо обусловленными, мы уже не имеем права иметь в виду «точного» преобразования *неточных исходных данных $x_2$ в некоторое $y_2$ и обратно* (как это мы делали при анализе устойчивости решений), поскольку тогда $y_2$ непременно преобразуется точно в $x_2$ и не во что другое. Здесь следует учитывать все виды погрешностей, вводимые при вычислении и даже записи результата с определенным числом значащих цифр.

7. Язык неклассической математики второго типа. Постановка и классификация задач на этом языке. Отбросив абстракцию нивелирования причин, условий, следствий, мы приходим к неклассической математике второго типа. Постановка задач при этом еще более расширяется и уточняется. Одновременно появляются новые возможности для уяснения особенностей каждой данной задачи и разумного использования их.

Рассмотрим для иллюстрации сказанного изгиб неразрезной балки постоянного сечения, опертой на $n$ абсолютно жестких промежуточных опор (рис. 1.17, *а*). Используем известный способ Навье, т. е. примем за неизвестные реакции промежуточных опор (рис. 1.17, *б*) и составим систему $n$ алгебраических уравнений вида

$$\delta_{1i}R_1+\delta_{2i}R_2+\ldots+\delta_{ji}R_j+\ldots+\delta_{ni}R_n-v_i(Q)=0, \quad (1.20)$$

где $\delta_{ji}$ — коэффициент податливости балки в точке $i$ от единичной силы, приложенной в точке $j$; $j$ и $i$ — точки, соответствующие $j$-й и $i$-й опорам; $R_j$ — значение реакции на $j$-й опоре; $v_i(Q)$ — прогиб балки без промежуточных опор в точке $i$ под действием внешней поперечной нагрузки $Q$.

Каждое уравнение типа (1.20) выражает равенство нулю прогиба в точке $i$.

Если исходить из строго классических положений, то мы получили некую строго детерминированную задачу, которая имеет единственное и вполне определенное решение. Известны и точные (с точки зрения классической математики) алгоритмы ее конкретного решения — скажем, известный алгоритм Гаусса. Применяя их, мы решаем в ряде случаев десятки тысяч уравнений с десятками тысяч неизвестных. Все, казалось бы, ясно и тривиально.



Но что получается на практике?

Все хорошо, если число опор невелико (не более 5—10). Мы, действительно, можем получить искомое решение без мощных ЭВМ, а лишь с помощью арифмометра. Но пусть $n = 10\,000$ и требуется, допустим, рассчитать прочность рельсов узкоколейки длиной 10 км с расстоянием между шпалами в 1 м, проложенной по жесткой эстакаде. Тогда нам не помогут и ЭВМ, так как мы часто не сможем не только найти эти $R_i$, но даже записать с требуемой

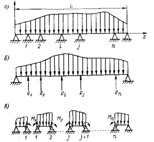



Рис. 1.17.

точностью их значения ввиду ограниченности числа знаков машины. Действительно, поскольку $\delta_{ij}$ растут пропорционально $L^3$, они приобретут громадные значения и тогда малейшая неточность $e_k$ всего в одном значении $R_k$ приведет к большой невязке в уравнениях, равной $\delta_{ki}e_k$ в произвольном $k$-м уравнении.

Многое разъяснится, если дополнить язык классической математики языком неклассической математики первого типа: видно, что задача плохо совместна и именно это обусловливает возникшие затруднения. Но почему она плохо совместна? И что делать для решения практического вопроса?

Если перейти к языку неклассической математики второго типа и проанализировать причинно-следственные связи, то станет ясным, что выявленная плохая совместность нисколько не вредит рассматриваемой реальной конструкции: ведь реакции $R_i$ есть следствие установки в соответствующих местах жестких опор. Иными словами, в нашем случае автоматически устанавливаются и притом с абсолютной точностью такие значения реакций, при которых прогиб над любой опорой оказывается равным нулю. Мы же в наших уравнениях нарушили причинно-следственную связь и стали определять такие активно прикладываемые силы $R_i$, которые обусловили бы прогиб в любой точке $i$ равным нулю. При этом задача оказалась плохо совместной, что очень портит расчет.

Становится ясным и путь дальнейших действий: нужно изменить систему величин, принимаемых за неизвестные, и составить новую исходную задачу. Обычно оказывается достаточно удачной система уравнений, получаемая по известной теореме о трех моментах, когда за неизвестные принимают внутренние опорные моменты в сечениях над опорами (рис. 1.17, *в*), хотя и здесь неизвестные — тоже следствие процесса изгиба, т. е. и здесь мы нарушаем систему естественных причинно-следственных связей (иначе говоря, нарушение указанных связей не всегда губительно).

Только что описанный прием очень характерен и широко используется на практике. Назовем его способом (принципом) перехода к эквивалентной классической модели. Он состоит в том, что исходную математическую модель задачи с характерными для нее входами и выходами эквивалентно преобразуют (в смысле классической математики) в другую модель с другими входами и выходами (см. § 2). В общем это не что иное, как замена основных неизвестных. Такое преобразование изменяет чувствительность выходов по отношению к вариациям входов, т. е. влияет на степень обусловленности и совместности соответствующих задач. Вместо формальной (иногда очень хитроумной) замены переменных в первоначальной модели нередко полезно ввести новые неизвестные прямо из физических соображений и заново составить соответствующую модель.

Возьмем теперь другую *инженерную* задачу. Пусть имеется однопролетная балка длиной $L$, загруженная нагрузкой $Q$. Мы хотим присоединить к ней систему гидравлических домкратов, *подпирающих балку в точках* $1, 2, \ldots, i, \ldots, j, \ldots, n$. *Усилия*, создаваемые домкратами, мы регулируем с некого центрального пульта и хотим, чтобы прогибы над домкратами были равны нулю.

*Мы снова можем получить систему уравнений (1.20), однако* теперь она будет совершенно точно отражать не только идеальные условия, но и причинно-следственные связи в реально изучаемом *процессе. Плохая* совместность *задач здесь означает одно: для* исправной работы конструкции нужно с необыкновенной точностью задавать усилия домкратов. А так как на практике это невозможно, то мы получаем сигнал о принципиальном дефекте самой конструктивной схемы. «Исправлять» постановку задачи путем перехода от первоначально выбранной системы неизвестных к другой системе у нас нет никаких оснований.

Следовательно, естественная постановка задачи без нарушения причинно-следственных связей рассматриваемого процесса обладает рядом преимуществ. Главное из них — соответствие влияния



всех неточностей в решении всем неточностям в процессе, что позволяет в случае затруднений при решении не переформулировывать задачу, а истолковывать их применительно к процессу.

Вместо использования теоремы трех моментов, которое все же приводит иногда к неоправданным затруднениям, можно ввести естественную постановку задачи и для случая изгиба балки на жестких опорах. Она будет в гораздо более общем виде сообщена в главе 3-й.

В литературе вместо термина естественно поставленная задача, т. е. задача, где соответствующая математическая модель активна, нередко пользуются термином «прямая задача» или «обратная задача», если соответствующая модель пассивна или хотя бы неактивна. Однако, вводя эти понятия, часто придают им какой-то абсолютный смысл, не учитывая, что одна и та же по математическому содержанию модель может в одном физическом процессе давать прямую задачу, а в другом — обратную.

Будем называть алгоритмами и критериями обусловленности задачи те конкретные алгоритмы и критерии, с помощью которых производится условная идентификация элементов множеств $X$, $A$, $Y$, $Y^0$.

*Теорема 1.2.* Пусть имеется активная информационная модель собственно конечнофакторного объекта, позволяющая получить сведения об его свойствах. Рассмотрим эту модель (если возможно) как условно детерминированную задачу, в которой множества $X$ и $A$ выражают параметры генетической идентификации объектов данного типа; конкретные точки $x_1$ и $a_1$ — конкретные параметры генетической идентификации данного объекта; множество $Y$ и все решения $y = a_1 [x_1]$ — возможные и конкретные свойства объекта (параметры результирующей идентификации). Зададим алгоритмы и критерии оценки практической *одинаковости параметров* генетической идентификации объектов (условия генетической идентификации), а также алгоритмы и критерии практической одинаковости *свойств объекта (условия результирующей идентификации) и отождествим* их с алгоритмами и критериями обусловленности задачи.

*Тогда вполне достаточная и хорошая обусловленность этой задачи* означает детерминированную устойчивость объектов данного типа, генетически идентичных рассматриваемому объекту, в *отношении свойств* (параметров результирующей идентификации), определяемых точками $y \in Y^0$.

Доказательство теоремы прямо следует из внимательного сопоставления соответствующих определений. Обратная теорема в общем случае неверна (например, задача может быть недостаточно обусловлена, а объект вполне устойчив).

Может оказаться полезной следующая очевидная теорема.

*Теорема 1.3.* Пусть выполнено все перечисленное в первом абзаце теоремы 1.2 и пусть, кроме того, имеет место хотя бы одна из следующих ситуаций:

1) в точке $x_1$ при операторе $a_1$ нет ни одного решения $y_1 \in Y^0$, но хотя бы в одной точке $x_2 \simeq x_1$, хотя бы при одном операторе $a_2 \simeq a_1$ есть хотя бы одно решение $y_2 = a_2 [x_2] \in Y^0$ и нет ни одного решения $y_2^0 = a_2 [x_2] \in (Y/Y^0)$;

2) в точке $x_1$ при операторе $a_1$ есть хотя бы одно решение $y_1 = a_1 [x_1] \in Y^0$ и нет решений $y_1^0 = a_1 [x_1] \in (Y/Y^0)$, однако хотя бы в одной точке $x_2 \simeq x_1$, хотя бы при одном операторе $a_2 \simeq a_1$ нет ни одного решения $y_2 = a_2 [x_2] \in Y^0$;

3) в точке $x_1$ при операторе $a_1$ есть непустое множество решений $y_1^i = a_1 [x_1] \in Y^0$ и нет решений $y_1^0 = a_1 [x_1] \in (Y/Y^0)$, однако хотя бы в одной точке $x \simeq x_1$, хотя бы при одном $a_2 \simeq a_1$ имеется непустое множество решений $y_2^i = a_2 [x_2]$, ни одно из которых не является условно идентичным ни с одним $y_1^i$.

Тогда объекты данного типа, генетически идентичные данному объекту, детерминированно неустойчивы в отношении свойств (параметров результирующей идентификации), определяемых точками $z \in Z$.

Интересен случай, когда при условиях первого абзаца теоремы 1.2 задача $y = a_1 [x_1]$ несовместна. Это значит, что все объекты, генетически идентичные данному, просто не имеют свойств, описываемых точками $y \in Y^0$, а следовательно, в определенном смысле устойчивы.

## § 5. Устойчивость численных алгоритмов. Общая схема численного решения задач

В предыдущем параграфе мы вводили точные и приближенные, но сходящиеся алгоритмы решения, т. е. явно заданные операторы задачи, полагая, что вычисления по этим алгоритмам производятся абсолютно точно (без округлений).

Но погрешности округлений неизбежны, и потому, помимо анализа постановки задачи, возникает необходимость анализа устойчивости алгоритма, т. е. степени чувствительности окончательных результатов к этим погрешностям. Неустойчивый алгоритм может привести к совершенно неверному результату, даже если он абсолютно точен в смысле классической математики, а исходная задача очень хорошо и достаточно обусловлена.

Правда, влияние накопления погрешностей округлений несколько снижается при увеличении числа значащих цифр, даваемых машиной. Тем не менее слишком уповать на это не следует, поскольку, во-первых, рост числа значащих цифр современных машин идет медленно, во-вторых, усложнение решаемых задач и удлинение программ ставит вопрос борьбы с погрешностями все более остро и, в-третьих, борьба с накоплением погрешностей добавлением учитываемых знаков часто неэффективна, так как даже при небольшом удлинении цепочки вычислений отмеченное накопление обычно возрастает очень сильно.



В данном параграфе проблема устойчивости алгоритмов рассматривается с изложенных выше позиций, касающихся устойчивости объектов и решений.

Основные положения заключаются в следующем.

Всякая конкретная реализация численного алгоритма есть реальный процесс, имеющий свои конкретные причинно-следственные связи, свои параметры генетической и результирующей идентификации. Поэтому подход к устойчивости алгоритмов вполне аналогичен подходу к устойчивости реальных процессов.

Существуют три основных принципа, определяющих рациональное построение алгоритмов: принцип соответствия устойчивости алгоритма и рассматриваемого объекта; принцип максимально возможной устойчивости алгоритма; принцип соответствия устойчивости алгоритма и рассматриваемого решения. Согласно первому принципу, алгоритм строится таким образом, чтобы он численно моделировал изучаемый физический объект, включая его устойчивость. Второй принцип состоит в конструировании алгоритма как процесса с максимальной устойчивостью и последующим рассмотрении решения с квазиклассических позиций. Третий принцип заключается в том, чтобы обеспечить адекватность устойчивости алгоритма и искомого решения. В случае исходной активной модели первый и третий принципы совпадают.

Одновременно с анализом алгоритмов целью параграфа является рассмотрение общей схемы численного решения задач.

1. Основные определения. Детерминированным алгоритмом или просто алгоритмом будем называть детерминированную конечную последовательность каких-то операций, производимых над исходными объектами (данными) для получения необходимого результата. Это какой-то частный вид явного оператора.

Некоторые операции алгоритма бывают абсолютно точными, например операции современной формальной логики. Другие в принципе всегда выполняются с некоторой погрешностью, скажем операции измерения непрерывных величин. В соответствии с этим целесообразно различать алгоритмы с точно выполняемыми операциями, приближенно выполняемыми операциями и операциями смешанного типа.

Поскольку вычисления производятся с ограниченной точностью (принципиально ограниченное число значащих цифр) и вместе с тем включают логические операции, численные алгоритмы относятся к третьему типу.

Переходя к детальному анализу понятия устойчивости алгоритма, заметим, что под этой устойчивостью нередко понимают три существенно разные вещи:

1) степень нечувствительности по отношению к прямым ошибкам в составлении и реализации данной *алгоритмической схемы*;

2) степень влияния так называемых внешних погрешностей алгоритма, связанных с его приближенностью в смысле классиче-

ской математики (замена дифференциальных уравнений конечно-разностными и т. д.);

3) степень нечувствительности к погрешностям, возникающим из-за округления значащих цифр (так называемые внутренние погрешности алгоритма).

Нечувствительность первого рода, прямо или косвенно рассматриваемая в работе [22], неразрывно связана с проблемой надежности. Мы назовем ее надежностью алгоритма и заниматься ею не будем, поскольку она относится к области рационального программирования.

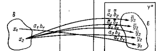



Рис. 1.18.

Внешние погрешности связаны, по нашей терминологии, со сходимостью алгоритма (см. § 4), а не с его устойчивостью. Как уже отмечалось ранее, устойчивость алгоритма (точнее, устойчивость в большом), мы называем достаточную степень его нечувствительности по отношению к внутренним погрешностям, которые обусловлены округлениями значащих цифр. Иными словами, алгоритм устойчив, если результирующая погрешность, вносимая округлениями, не превышает некоторого определенного и заранее оговоренного значения.

Данный алгоритм будем называть устойчивым в малом (суррогат понятия устойчивости в большом), если и только если мы можем сколь угодно уменьшить результирующую погрешность округления за счет достаточного увеличения значащих цифр при операциях. В случае моделей и алгоритмов с неограниченным числом параметров необходим, кроме того, переход к пределу по числу параметров (подобно переходу к неограниченному времени в теории устойчивости движения, разработанной Ляпуновым и его последователями).

Полная картина возможных неточностей и погрешностей при численном решении задачи представлена на рис. 1.18, где $X$ — пространство исходных данных; $Y$ — пространство искомых решений; $Y^\circ$ — пространство физически возможных решений; $\delta$ — область возможных разбросов исходных данных; $\varepsilon$ — область допустимых погрешностей искомых результатов; $x_1$ — исходные данные; $x_2$ — приближенные исходные данные, которые фактически закладываются в решения; $a_1$ и $b_1$ — соответственно неявный и явный точный оператор задачи; $a_2$ и $b_2$ — соответственно неявный и явный оператор задачи, условно идентичный $a_1$ и $b_1$; $\bar{a}_2$ и $\bar{b}_2$ — соответственно неявный и явный преобразованный оператор задачи, определенный без учета погрешностей округления, но учитывающий внешние погрешности преобразованной модели; $\bar{\bar{b}}_2$ — явный преобразованный оператор, учитывающий внешние погрешности преобразованной модели и внешние погрешности этого явного оператора (в случае приближенного разрешения неявного оператора преобразованной модели); $\bar{\bar{b}}_2$ — явный преобразованный оператор (алгоритм), учитывающий внешние погрешности преобразованной модели, внешние погрешности явного оператора и его внутренние погрешности; $y_1$, $y_2$, $\bar{y}_2$, $\bar{\bar{y}}_2$, $\bar{\bar{\bar{y}}}_2$ — решения, т. е. результаты воздействия соответствующих операторов. Задача решена численно с достаточной точностью, если и только если $\bar{\bar{y}}_2$ не вышел за пределы области $\varepsilon$, окружающей $y_1$.



Устойчивость алгоритма определяет расстояние между $\bar{\bar{y}}_2$ и $\bar{\bar{\bar{y}}}_2$.

Погрешности, обусловленные неустойчивостью $\bar{\bar{b}}_2$, могут быть очень большими, как это видно из такого простейшего примера.

Пусть мы решаем численно уравнение вида $\frac{dy}{dt} = p(t)\,y$ при начальном условии $y(t_0) = y_0$ в точке $t_0 < 0$, хотя знаем и аналитическое выражение его общего интеграла $y = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau}$. Положим для определенности $p(t) = \ln 10$ при $0 \leqslant t \leqslant 10$ и $p(t) = 0$ при $t > 10$.

Допустим теперь, что, проходя точку $t = 0$ при последовательном построении интегральной кривой, мы сделали ничтожную погрешность округления в значении $y$, равную $\varepsilon = 10^{-5}$, а все предыдущие и все последующие вычисления производили совершенно точно. Тогда при $t \geqslant 10$ указанная погрешность приведет к неточности в $y$, составляющей $10^5$.

Большие неточности дадут и другие погрешности при других значениях $t$.

Погрешность, определяемая расстоянием между $y_1$ и $y_2$, называется неустранимой погрешностью, поскольку она обусловлена самой постановкой задачи (ее хорошей или плохой определенностью) и никоим образом не зависит от дальнейших усилий математика, решающего задачу, или от возможностей применяемой ЭВМ. Впрочем, математик может принять участие в целесообразном переформулировании исходной задачи (если оно возможно) и таким образом как-то влиять на эту погрешность.

Если преобразованная математическая модель очень точна (имеет высокую сходимость) и примененный алгоритм также очень точен и устойчив, то это означает, что расстояние между $y_1$ и $y_2$ мало по сравнению с размерами области $\varepsilon$. Тогда нетрудно оценить неустранимую погрешность задачи и устойчивость ее решения. Для этого достаточно провести ряд расчетов, меняя исходные данные в пределах точности последних. Однако если все неточности, вносимые преобразованной моделью и алгоритмом, довольно велики и соизмеримы с размерами области $\varepsilon$ или же неопределенны, то подобный способ оценки становится невозможным.

И вообще, в настоящее время, как правило, гораздо легче получить численное решение задачи, чем разумно и обоснованно оценить раздельно или суммарно все виды погрешностей. И здесь может оказать большую помощь анализ, проводимый с позиций неклассической математики.

2. Оценка точности решений детерминированных задач путем варьирования исходных данных. В ряде случаев оценка точности результатов численного решения детерминированной задачи сравнительно легко осуществляется путем варьирования исходных данных, т. е. путем ее обращения. Для этого достаточно определить, при каких исходных данных, измененных по сравнению с первоначальными, полученное конкретное приближенное решение оказывается точным. Если эти измененные данные, соответствующие полученному решению, мало отличаются от действительных первоначальных исходных данных и разница между ними лежит в пределах точности определения первоначальных данных, то решение можно рассматривать как вполне удовлетворительное и обладающее лишь неустранимой погрешностью. Дальнейшее уточнение этого решения чисто эфемерно и потому бессмысленно.

Иногда разница между измененными и первоначальными данными больше точности первоначальных данных, но все же невелика. Тогда уточнять решение в принципе возможно, однако допустимо ограничиться и приближенным решением.

Более подробно сущность указанного способа поясним на примерах.

В качестве простейшего примера рассмотрим свободно опертую балку переменного сечения, длина которой $l$, а момент инерции меняется по закону (начало координат на левом конце балки)

$$I(x)=I_0\left[1+\frac{x}{l}+\Big|_{l/2}\left(1-\frac{2x}{l}\right)\right]. \tag{1.21}$$

*Балка загружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью* $q_0$. Разыскивая прогиб $y$ такой балки хотя бы методом Ритца, представим его в виде одного члена ряда Фурье. Тогда получим

$$y(x)=\frac{16}{\pi^3(5\pi^2+4)}\,\frac{q l_0^4}{EI_0}\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{1.22}$$



Найденное решение можно рассматривать как точное для нагрузки, которая дает фиктивный изгибающий момент согласно выражению

$$M_\Phi=EI(x)\,y''=0{,}1q_0l^2\left(1+\frac{x}{l}\right)\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{1.23}$$

Истинный изгибающий момент

$$M=\frac{ql^2}{2}\,\frac{x}{l}\left(1-\frac{x}{l}\right). \tag{1.24}$$

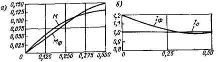



Рис. 1.19.

Сравнение $M$ с $M_\Phi$ (рис. 1.19, *а*) показывает достаточную точность решений (расхождение моментов не превышает 20%). Ясно, что ошибка в определении прогиба будет еще меньше.

Иногда в аналогичных задачах целесообразно варьировать момент инерции балки. Так, рассматривая ту же балку, но имеющую постоянный момент инерции $I_0$, получаем прогиб в виде

$$y(x)=\frac{4}{\pi^5}\,\frac{q_0l^4}{EI_0}\sin\frac{\pi x}{l}. \tag{1.25}$$

Зависимость (1.25) будет точным выражением для прогиба балки с переменным моментом инерции сечения

$$I_\Phi=I_0\,\frac{\pi^3}{8}\,\frac{x}{l}\,\frac{1-\frac{x}{l}}{\sin\frac{\pi x}{l}}. \tag{1.26}$$

Расхождение между $I_\Phi$ и $I_0$ не превышает 20% (рис. 1.19, *б*). Эта разница может быть компенсирована изменением высоты балки всего на 5—6%.

Приведенные тривиальные примеры хорошо поясняют сущность способа варьирования исходных данных, но не являются показательными. Этот способ эффективнее для нелинейных задач, где оценка точности решения другими способами затруднена. Например, исследуя резонансные колебания судовых пластин с учетом влияния распора, т. е. затрудненного сближения их опорных кромок, естественнее задаться постоянной формой прогиба балки—полоски пластины $\varphi(x)$, полученной из соответствующего линейного решения. Используя затем уравнение Лагранжа второго рода, можно получить известное уравнение типа Дюффинга

$$\ddot{w}+Bw^3+Cw=P_0\sin\omega t, \tag{1.27}$$

где $B$, $C$ — постоянные коэффициенты, зависящие от параметров пластины; $w=w(t)$ — перемещение «точки приведения», в которой $\varphi(x)=1$; $P_0$ — амплитуда возмущения, вызываемого гидродинамическим давлением и силами инерции при переносном движении пластины вместе с опорным контуром.

Если задаться в первом приближении

$$w(t)=f_0\sin\omega t \tag{1.28}$$

и применить для решения (1.28) метод Бубнова—Галеркина, то будем иметь для $f_0$ кубическое уравнение

$$\frac{4}{3}Bf_0^3+(C-\omega^2)f_0-P_0=0. \tag{1.29}$$

Указанный способ расчета весьма прост, однако его точность может на первый взгляд вызвать сомнение, поскольку в различные моменты времени форма изгибающейся пластины должна несколько изменяться и потому само исходное уравнение (1.27) не строго. Кроме того, выражение (1.28) представляет собой именно первое приближение.

Чтобы оценить полученное решение, можно рассуждать следующим образом. Если бы решение было точным, то в каждый момент времени существовало бы динамическое равновесие между заданной внешней нагрузкой $p(x)\sin\omega t$, силами упругости и силами инерции $m_0\omega^2 f_0\varphi(x)\sin\omega t$, где $m_0$ — погонная масса. Однако этого нет.

Наложим на рассматриваемую балку-полоску связь, которая не препятствует ее изгибу по закону $f_0\varphi(x)\sin\omega t$, но предотвращает всякое отклонение от него. Тогда балка-полоска действительно будет колебаться именно таким образом и наступит динамическое равновесие, но к указанной выше системе сил нужно будет еще добавить реакции связи.

Сравнение внешних сил с реакциями связи является критерием для оценки решения: решение вполне точно, если к пластине приложена не действительная, а условная внешняя нагрузка $p_\Phi(x, t)$, равная действительной внешней нагрузке за вычетом реакций связи. Что касается реакций связи, то они вычисляются для любого момента времени весьма элементарно на основе обычных зависимостей сопротивления материалов, и специальных пояснений здесь не требуется.

Подробные численные расчеты реальных судовых пластин показывают, что различие между заданными внешними силами $p(x)\sin\omega t$ и нагрузкой $p_\Phi(x, t)$ находится в пределах точности задания внешних сил — гидродинамических давлений, колебаний



контура пластины. Таким образом, погрешность полученного довольно грубого решения лежит в пределах неустранимой погрешности, и дальнейшее его реальное уточнение невозможно.

Решая нелинейную упругопластическую задачу о сложном изгибе стрежня, пластины и оболочки с учетом начальной погиби, исследователь обычно полагает, что конструкция при развитии деформаций не меняет формы начальной погиби, хотя в действительности это изменение (перестраивание), безусловно, происходит. Но, получив указанным способом приближенное решение, часто удается обратить задачу и найти фиктивную начальную погибь, которая, перестраиваясь, будет соответствовать в конце концов найденному приближенному решению, являющемуся таким образом точным для фиктивной погиби.

Если заданная и фиктивная начальные погиби практически одинаковы (находятся в пределах условной идентификации начальных погибей), то найденное приближенное решение имеет лишь неустранимую погрешность.

Отмеченный вариант способа варьирования исходных данных развит в работах О. М. Палия.

Полная бесперспективность уточнений полученного приближенного решения, доказанная способом варьирования исходных данных, еще не решает вопроса. Этому решению не всегда можно верить. Как указывалось в § 4, само искомое решение поставленной условно детерминированной задачи может быть очень неустойчивым, т. е. малейшие изменения исходных данных $x_1$ могут приводить к очень большим изменениям соответствующего элемента во множестве возможных решений $Y$. Тогда, очень сильно отклонившись от искомой точки $x_1$, мы с помощью обратного преобразования $a_1^{-1}$ или $a_2^{-1}\simeq a_1^{-1}$ получим точку $x_2$, очень близкую к $x_1$. Иными словами, именно в этом случае метод варьирования исходных данных будет давать наиболее обнадеживающие результаты.

Но если само решение неустойчиво, то искать удовлетворительного детерминированного ответа вообще нельзя и, следовательно, мы снова имеем возможность ограничиться найденным приближенным решением, правда, не вполне доверяя ему.

Для проверки устойчивости искомого решения следует получить еще несколько приближенных решений, заметно отличающихся от первого, и если их фиктивные исходные данные близко совпадут с фиктивными данными первого приближенного решения, то наши опасения оправданы. Наоборот, если искомое «точное» решение чрезвычайно устойчиво, то даже довольно значительное изменение исходных данных почти не меняет соответствующей точки во множестве $Y$. Поэтому, отступив, хотя и не очень значительно, от искомой точки $y_1$ и взяв $y_2\simeq y_1$, можно иногда получить обратным преобразованием точку $x_2$, совсем не близкую к точке $x_1$. Следовательно, неудача в применении метода варьирования исходных данных еще не означает непригодности найденного приближенного решения. Просто нужны еще другие исследования.

Из всего сказанного следует, что достаточно достоверные приближенные решения, подтверждаемые способом варьирования исходных данных, имеют место при средней степени устойчивости искомого решения $y = a_1 [x_1]$.

3. Взгляд на численное решение, как на некоторый процесс. Принципы построения алгоритмов. Обратимся еще раз к общим представлениям о решениях детерминированных задач, рассмотренным выше. С точки зрения математика, стоящего на позициях абстракции абсолютной точности и нивелирования причин, условий, следствий, это просто преобразование точек $x$ множества $X$ в точки $y$ множества $Y$. С равным успехом можно решать и обратную задачу — взяв обратный оператор, преобразовывать точки $y$ множества $Y$ в точки $x$ множества $X$. Но, поскольку точка $x_1$ известна, а точка $y_1 = a_1 [x_1]$ неизвестна, следует брать ряд точек $y_i$ и варьировать их до тех пор, пока не получится именно точка $y_1$, преобразующаяся в $x_1$.

На практике, когда обращение с обратным оператором удобнее, чем с прямым, часто так и делается. Скажем, ученик умеет возводить числа в квадрат, но не умеет извлекать квадратный корень. Если он сообразителен, то непременно локализует приблизительную область, где расположен искомый корень, а затем начнет возводить числа этой области в квадрат, пользуясь, быть может, примитивной интерполяцией.

Можно поступать несколько иначе. Иногда часть исходных данных, входящих составляющими в точку $x_1$, остается исходными данными, а другая часть отбрасывается и заменяется пока неизвестными, но произвольно задаваемыми составляющими искомой точки $y$. Получается другая комбинация исходных данных, которую нетрудно рассматривать как точку $v$ некоторого множества $V$. Требуется преобразовать эту точку в точку $u$ множества $U$. Составляющими $u$ служат, во-первых, оставшиеся не заданными составляющие искомого первоначального решения $y$ и, во-вторых, отброшенные на первом этапе составляющие первоначальных исходных данных $x_1$. Варьирование произвольно задаваемых составляющими $y$ позволяет в конце концов решить задачу, т. е. найти такую точку $u_1$, у которой соответствующие составляющие равны отброшенным составляющим точки $x_1$. Именно так и поступают, когда преобразование точек $v$ в точки $u$ удобнее, чем точек $x$ в точку $y$.

На этом, в частности, основан широко применяемый в строительной механике и других разделах науки метод начальных параметров. Подробности этого метода мы рассмотрим позже, но уже сейчас проанализируем его основной вариант.

Пусть дана нормальная система обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющая $n$-й порядок:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i [x, y_1 (x), y_2 (x), \ldots, y_n (x)], \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1.30)$$

при краевых, т. е. многоточечных, условиях.



Отбросив все исходные данные, содержащиеся в краевых условиях, задаемся значениями всех $y_i$ в некоторой точке $x = x_0$ из промежутка существования решения. Тогда вместо исходной краевой задачи получаем задачу Коши для системы (1.30), которая сравнительно легко решается разными численными методами, а иногда аналитически. Варьируя значения $y_i (x_0)$, мы в конце концов находим частное решение, удовлетворяющее первоначальным краевым условиям, т. е. решаем исходную задачу.

По той же логической схеме был построен прием, который в свое время применил И. Г. Бубнов для точного решения нелинейной задачи о статическом изгибе балки—полоски пластины (стержня постоянного сечения), когда сближение ее кромок затруднено.

Исходная задача такова. Нужно решить интегродифференциальное уравнение

$$EIw^{IV} (x) + \left\{ \frac{E\Omega}{2l} \int_0^l [w' (x)]^2 dx \right\} w'' (x) - q (x) = 0 \qquad (1.31)$$

при дополнительных условиях

$$EIw'' (0) = K_1 w' (0); \quad EIw'' (l) = K_3 w' (l);$$
$$EIw''' (0) = K_2 w (0); \quad EIw''' (l) = K_4 w (l), \qquad (1.32)$$

где $EI$ — жесткость балки-полоски на изгиб; $w (x)$ — искомый прогиб балки; $\Omega$ — площадь поперечного сечения; $l$ — длина балки-полоски; $K_i$ — коэффициенты, характеризующие жесткости опорных конструкций; $q (x)$ — интенсивность внешней поперечной нагрузки.

Вместо прямого преобразования исходных данных в искомое решение Бубнов задался значениями силы $T$ в балке, равными

$$T = \frac{E\Omega}{2l} \int_0^l [w' (x)]^2 dx. \qquad (1.33)$$

Тогда оказывается достаточным проинтегрировать линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$EIw^{IV} (x) + Tw'' (x) - q (x) = 0 \qquad (1.34)$$

при четырех условиях (1.32), а затем проверить выполнение условия (1.33).

Еще более общий прием подбора удобной структуры решения состоит в том, что берется какая-то произвольная совокупность исходных данных $p$ в другой, как правило более общей, задаче, а затем точка $p$ преобразуется в точки $x_1$ и $y_1$. Таким образом, преобразование $x_1$ и $y_1$ оказывается сильно опосредованным. Могут быть и другие варианты.

В классической математике все такие приемы вполне оправданы и абсолютно правомерны во всех случаях. Но отход от абстракции абсолютной точности и абстракции нивелирования причин, условий, следствий нарушает указанную равноправность. Ведь даже определение корректности задачи вовсе не симметрично относительно множества возможных исходных данных и множества возможных решений. В частности, прямая задача $y_1 = a_1\,[x_1]$ может быть корректной, а обратная $x_1 = a_1^{-1}\,[y_1]$ — некорректной, или наоборот.

Математика численных алгоритмов по самой своей сути не может использовать обе отмеченные абстракции. Отсюда возникает неклассическая точка зрения на численные алгоритмы. Согласно этой точке зрения, можно выдвинуть три основных взаимно дополняющих друг друга принципа: принцип соответствия устойчивости численного алгоритма и рассматриваемого объекта, принцип соответствия устойчивости численного алгоритма и искомого решения, принцип максимальной устойчивости численного алгоритма.

Согласно *первому принципу*, следует *так конструировать численный алгоритм*, чтобы процесс его реализации моделировал изучаемый реальный объект, включая устойчивость последнего. Иными словами, исходная информация, вносимая в алгоритм, должна отражать причины и условия существования объекта (и ничего другого), *а все внешние и внутренние погрешности конкретной реализации* быть такими, чтобы их можно было рассматривать как разбросы в условиях генетической идентификации объекта.

Если, кроме того, значения всех погрешностей реализации соответствуют значениям разбросов в условиях генетической идентификации (условия соответствия устойчивости алгоритма и объекта), то конкретная численная реализация точно соответствует одному из объектов данного типа, генетически идентичных друг другу. Повторяя несколько раз реализацию численного алгоритма и сознательно варьируя в заданных пределах его погрешности (хотя бы изменением некоторых последних значащих цифр исходной информации и промежуточных результатов), мы получим совокупность таких объектов. В результате численные расчеты оказываются в определенном смысле не приближенными, а существенно более *точными и достоверными, чем точное решение исходной задачи*.

Если исходная модель объекта, сформулированная в задаче, не является активной, то нужно все равно исходить из активной модели. Неизвестные элементы последней следует задавать, а затем варьировать таким образом, чтобы в итоге получить, как следствие, отброшенные элементы первоначальной неактивной модели.

Согласно второму принципу, нужно, чтобы исходная информация алгоритма соответствовала исходной информации, даваемой точкой $x_1$ в исходной задаче, а все погрешности конкретной реализации можно было бы трактовать как разбросы в условиях идентификации точек $x_1$ и $a_1$. Если, кроме того, значения погрешностей соответствуют критериям идентификации, то при серии расчетов появляется возможность не только получить решение исходной условно детерминированной задачи, но и оценить его устойчивость. *Мы снова имеем больше достоверной информации, чем получили бы ее из точного решения.*



Таким образом, когда $x_1$ и $a_1$ являются активной моделью, первый и второй принципы совпадают.

Согласно третьему принципу, можно выбирать такой алгоритм, чтобы устойчивость процесса его конкретной реализации была наибольшей независимо от *действительной устойчивости изучаемого* объекта и устойчивости решения исходной задачи. При этом получается наилучшее, хотя и не всегда достаточное приближение к исходному точному решению, но уже без всяких сведений об его устойчивости или об устойчивости изучаемого объекта.

Подробные примеры анализа и использования указанных принципов приведены в главе 3-й, сейчас же лишь немного поясним их применительно к задаче § 2, п. 6 (растяжение стержня и движение точки).

Начнем с движения точки, согласно уравнению (1.4), при условиях $y\,(0) = y_0 = 0$; $\dot{y}\,(0) = \dot{y}$. Зная приведенное ранее аналитическое решение задачи, мы должны сразу насторожиться, поскольку из него видно, что задача плохо обусловлена, но предположим, что решение нам неизвестно и мы вынуждены ограничиться только численным анализом. Будем рассуждать так.

Приняв $y_1 = y$, перепишем (1.4) в виде

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2; \quad \frac{dy_2}{dx} = \alpha^2 y_1, \tag{1.35}$$

где $\alpha^2 = \frac{k}{m} > 0$.

Заменив $dx$, $dy_1$, $dy_2$ на малые конечные приращения $\Delta x$, $\Delta y_1$, $\Delta y_2$, как это делал в аналогичных случаях еще Эйлер, будем иметь

$$\Delta y_1 = y_2 \Delta x; \ \Delta y_2 = \alpha^2 y_1 \Delta x. \tag{1.36}$$

Нам известны значения $y_1\,(0) = 0$, $y_2\,(0) = \dot{y}_0$. Тогда получим: для $x = \Delta x$

$$y_1\,(\Delta x) = \dot{y}_0 \Delta x = y_{1,1}; \ y_2\,(\Delta x) = \dot{y}_0 = y_{2,1}; \tag{1.37}$$

для $x = 2\Delta x$

$$y_1\,(2\Delta x) = y_{1,1} + y_{2,1} \Delta x = y_{1,2}; \ y_2\,(2\Delta x) = y_{2,1} + \alpha^2 y_{1,1} \Delta x. \tag{1.37 а}$$

И вообще,

$$y_1\,(n\Delta x) = y_{1,n-1} + y_{2,n-1} \Delta x = y_{1,n}; \tag{1.38}$$

$$y_2\,(n\Delta x) = y_{2,n-1} + \alpha^2 y_{1,n-1} \Delta x.$$

Используя записанные рекуррентные формулы, можно последовательно вычислять $y_1 = y$ и $y_2 = \dot{y}$ для каких угодно значений $x$, причем все $\Delta x$ не обязательно брать одинаковыми.

Конечно, в предлагаемой процедуре нами допущены и внешние и внутренние погрешности. Первые связаны с заменой истинной интегральной кривой некоторой ломаной, а вторые — с *неточностью вычислений по формулам* (1.38). Однако всю суммарную погрешность допустимо представить как некое возмущение в правых частях (1.35), т. е. считать, что мы интегрируем не приближенно, а точно, но не исходную, а немного возмущенную систему.

Однако истинный рассчитываемый процесс движения точки *также имеет какие-то возмущения. Если эти реальные возмущения* не влияют практически на течение процесса, т. е. движение устойчиво, то и наши суммарные погрешности алгоритма не изменяют существенно результата. В противном случае и счет будет неустойчивым, *и процесс — детерминированно неопределенным. Для полной* строгости такого рассуждения в общем случае нужно, чтобы погрешности счета не превышали ожидаемых и возможных реальных внешних возмущений. Соответствующие оценки всегда выполнимы *практически, а требуемые соотношения могут быть обеспечены* при достаточном числе значащих цифр (кстати, небольшом) и достаточно малом шаге интегрирования $\Delta x$. Таким способом мы обеспечим принцип соответствия алгоритма и анализируемого процесса.

Теперь достаточно произвести расчет и экспериментально проверить его устойчивость (а заодно и степень определенности исходной задачи), повторив все вычисления заново при несколько *измененном числе значащих цифр (если это допускает применяемая* ЭВМ) и при чуть-чуть искусственно измененных исходных данных. Близкое совпадение результатов расчетов покажет достоверность последних и, кроме того, устойчивость процесса движения; *расхождение результатов докажет прежде всего неустойчивость движения*, т. е. явную бессмысленность попыток его детерминированного определения. Какие-либо претензии к расчету автоматически отпадают.

*Если ЭВМ не позволяет менять число значащих цифр*, то при повторении расчета можно вносить искусственные возмущения в последнюю значащую цифру с помощью генератора случайных цифр. Наконец, можно просто изменить шаг интегрирования, т. е. *тоже несколько изменить погрешности и моделируемые ими* возмущения.

Нетрудно догадаться, что в данном конкретном примере счет оказывается неустойчивым, так как мы уже знаем результаты анализа устойчивости процесса. Если же несколько изменить уравнение движения (скажем, ввести знак «минус» в правую часть второго уравнения), то положение изменится: мы получим вполне достоверные параметры устойчивого движения.

Приведенный алгоритм в принципе применим и к задаче о растяжении стержня, когда уравнение (1.4) или система (1.35) решается при граничных условиях. Если даже пренебречь упрощениями, которые следуют из линейности (1.4), то и тогда все довольно просто: как уже было объяснено применительно к системе (1.30), нужно использовать первое условие $y\,(0) = y_1\,(0) = 0$ и отбросить пока второе $y\,(l) = y_1\,(l) = y_l$, заменив его условием $y_2\,(0) = \dot{y}_0$ (как в задаче о движении точки). Варьируя неизвестное заранее значение



$\dot{y}_0$, можно добиться того, что при $x = l$ окажется $y_1\,(l) = y_l$, т. е. второе граничное условие будет удовлетворено в виде следствия.

Но принцип соответствия устойчивости алгоритма и процесса удовлетворен не будет, *поскольку естественные причинно-следственные* связи нарушены. Поэтому не стоит удивляться, что, согласно проведенному ранее анализу, счет будет явно неустойчив при очень устойчивом процессе растяжения. Иначе говоря, процесс имеет *вполне детерминированное течение, но мы не получаем* его в результате данного алгоритма численного решения.

Можно предложить другой путь расчета, при котором обеспечивается принцип соответствия в новых условиях. Поскольку он более сложен, чем только что описанный, мы отложим ознакомление с ним до главы 3-й.

Возьмем третий случай. Рассматривается снова растяжение стержня. Помимо системы (1.35), мы знаем, что $y_1\,(0) = 0$; кроме того, мы измерили значение $y_2\,(0) = \dot{y}_0$. Тогда наш прежний алгоритм опять становится применимым, причем выполняется принцип соответствия устойчивости алгоритма и искомого решения. Неустойчивость счета сигнализирует о неустойчивости решения соответствующей задачи наблюдателя, т. е. о том, что процесс растяжения стержня не наблюдаем и потому не стоит пытаться это делать. Никакого другого алгоритма не требуется.

Принцип максимальной устойчивости алгоритма наиболее ясен, он соответствует классической точке зрения и, видимо, общих пояснений не требует. Применительно, скажем, к традиционной задаче численного решения данной системы линейных алгебраических уравнений он реализуется по схеме: 1) записана система уравнений, не очень чувствительная к возможным погрешностям в коэффициентах и свободных членах; 2) мы собираемся решить ее, найдя корни как можно точнее и не задумываясь об их физическом смысле; 3) имеется ряд алгоритмов «точного» решения таких систем, обладающих в разных случаях разной устойчивостью; 4) нам следует выбрать такой алгоритм, который давал бы в данном конкретном случае минимальную погрешность от округления цифр при счете.

Правда, иногда такая идеальная схема нарушается: в ряде случаев полезно еще более увеличить устойчивость алгоритма даже ценой введения некоторых внешних погрешностей (используется не «точная», а приближенная в смысле классической математики вычислительная схема), поскольку суммарная погрешность в результате уменьшится; иногда жертвуют немного минимальностью суммарной погрешности, получая большой выигрыш в объеме вычислений, и т. д.

4. Общая схема численного решения задач. Обратимся теперь (рис. 1.20) к общей схеме численного решения задач и проанализируем вкратце все ее этапы. Заметим, что на практике некоторые из этих этапов иногда трансформируются

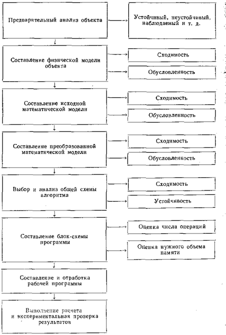



Рис. 1.20



*и даже как бы исчезают. Но такая трансформация обычно не бывает* полной, и исследователь должен знать о ней и учитывать ее соответствующим образом (убедиться, что трансформация действительно целесообразна; вспомнить о возможных погрешностях из-за этой трансформации, если ответ не будет удовлетворительным, и т. д.).

Начинать работу над численным решением задачи лучше всего с общего предварительного анализа изучаемого объекта, особенно его устойчивости, наблюдаемости и т. д. Решающую роль при анализе играют цели решения, т. е. позиция исследователя как «технолога», «наблюдателя», «проектировщика». Нередко здесь удается сразу установить, что объект всегда устойчив (изгиб балки на упругом основании положительной жесткости под действием поперечной нагрузки, изгиб несжатого перекрытия и т. п.), или устойчив лишь в некоторых областях своих параметров, а затем станет неустойчивым (сжато-изогнутая рама), или неустойчив, но наблюдаем, причем нас интересует именно его наблюдаемость (расшифровка результатов измерений при натурных испытаниях прочности конструкции), и т. д. Все это весьма важно для всех этапов последующих действий.

Затем начинается этап составления физической модели объекта. *К сожалению, стандартных рецептов физического анализа задач* не существует. Именно это имел в виду Н. Е. Жуковский, когда говорил, что искусство механика заключается в умении составлять интегрируемые уравнения, хотя сейчас правильнее сказать, что оно состоит главным образом в обоснованном отбрасывании всего несущественного и второстепенного (в *рассматриваемом вопросе*) и удержании всего важного при конструировании физических моделей. Ведь физическая модель есть именно модель, т. е. заместитель объекта для всего последующего исследования. В ней непременно должно быть что-то упрощено, иначе зачем же ее вводить? Но она станет негодной, если упрощения и другие изменения слишком исказят главные черты интересующих нас явлений. Но что такое это «слишком», решает опять исследователь с учетом своих объективных целей.

Возьмем для иллюстрации проблему общей вибрации корпуса судна. У судов со сравнительно жесткими корпусами при невысоких частотах возмущающих сил правильно и целесообразно заменять корпус обычной эквивалентной непризматической балкой. Но даже при этих условиях поперечная жесткость широкого судна иногда недостаточна и оно как бы распадается на несколько упруго связанных между собой параллельных балок (бортов и продольных *переборок вместе с присоединенными поясками). При некотором* увеличении частоты начинаются местные резонансы отдельных элементов корпуса (днищевых перекрытий, переборок, мачт, надстроек) и тяжелого оборудования, которые существенно искажают общую вибрацию, а потому должны дополнительно приниматься во внимание.

Но, может быть, следует всецело положиться на силу современных *вычислительных средств и применять только очень сложные* модели, где учтено буквально все (хотя бы по видимости) важное? Именно так и поступают сейчас многие энтузиасты сложности, ссылаясь на успехи системного подхода, проникающего буквально во все области науки и практики. Действительно, системный подход заслуживает всяческой поддержки и развития, его успехи очень велики и пренебрежение им обычно чревато тяжелыми последствиями. Но системный подход вовсе не сводится к рецепту— учитывай все и превращай любую модель в некий «винегрет». Ведь метод составления таких «винегретов» имеет и обратную сторону: затушевываются влияния отдельных ингредиентов; получив неудовлетворительный результат при оценке работы конструкции, мы не знаем, чему его приписать в первую очередь и как лучше *исправить конструкцию; внеся даже мелкие изменения, мы должны* повторять весь громоздкий анализ заново. Наконец, не следует забывать и о возможной потере точности в локальных эффектах при усложнении модели (а прочность нарушается именно локально), о нарастании возможностей ошибок и погрешностей программ, да и просто о большой затрате времени и стоимости расчета.

Поэтому, например, не стоит увлекаться единым расчетом деформаций группы смежных отсеков корпуса в виде громадной *пространственной конструкции, как это делается сейчас в ряде статей.* Хотя не надо и пренебрегать смежными перекрытиями. Целесообразнее сначала, пренебрегая всеми деталями, представить каждое перекрытие несколько упрощенно, раскрыть статическую неопределимость системы перекрытий, определив основные усилия *взаимодействия между ними, а уж затем вести расчет каждого перекрытия во всех деталях.*

Словом, усложнение моделей — явление естественное, закономерное, но оно вовсе не панацея от всех трудностей физического анализа и не средство автоматического сведения всех физических трудностей к математике. Даже безоговорочно встав только на такой путь, мы не будем застрахованы от промахов и просчетов — ведь часто небольшие, на первый взгляд, факторы оказываются *в действительности очень существенными, и наоборот.*

Например, рассчитывая вибрацию судовых конструкций, нередко очень усложняют модель взаимодействия большого числа связей, забывая о том, что на некоторых частотах может наступить редукция пластин, как присоединенных поясков, которая будет влиять гораздо сильнее, чем многие связи.

Для показа принципиальной неформальности всякого физического анализа интересно обратить внимание на то, что иногда бы*вает полезно не упрощать, а кое в чем усложнять или немного искажать* рассматриваемые явления. Так, в дальнейшем мы познакомимся с методом динамических возмущений, согласно которому, рассчитывая статические деформации конструкции, мы дополнительно снабжаем ее массами и рассматриваем более общую задачу



о колебаниях. А определяя частоты и формы свободных колебаний механических систем, иногда искусственно вводим в них некоторые сопротивления.

В целом широкое применение ЭВМ и численных методов расчета не только не снимает физического анализа задачи и не упрощает его, а, наоборот, требует более утонченного и глубокого анализа, так как численные методы учитывают погрешности и причинно-следственные связи и потому более тесно переплетены с *физическими особенностями изучаемых объектов,* чем *аналитические* методы классической математики.

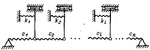



*Рис. 1.21.*

Мы уже видели на примере обычной неразрезной балки, что простая переформулировка расчетной схемы делает задачу из плохо совместной вполне удобной и легко разрешимой. Число подобных примеров необозримо.

Иногда, составив вполне удовлетворительную физическую модель, исследователь вводит еще один этап, не показанный на рис. 1.20,— переходит к преобразованной физической модели, более удобной для будущего численного расчета.

*Возьмем ту же задачу о растяжении стержня в упругом пространстве* винклеровского типа (см. рис. 1.10). Казалось бы, тут физически все ясно. И действительно, мы вполне можем удовлетвориться этой моделью. Однако практически расчет будет проще, если мы перейдем к другой физической модели, показанной на рис. 1.21. Стержень разбивается на ряд участков, в пределах которых его сечение можно считать постоянным. Кроме того, должно выполняться условие постоянства коэффициента жесткости упру*гого основания. Участки стержня заменяются пружинами* жесткости $c_1, c_2, \ldots, c_n$, а упругое пространство — пружинами жесткости $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$. Определение величин $c_i$ и $k_i$ трудностей не представляет и особых пояснений не требует.

Удобство рассматриваемой преобразованной физической модели определяется двумя обстоятельствами. Во-первых, все внешние погрешности решения задачи мы относим к физике явления и делаем их более наглядными и обозримыми, а следовательно, и более уверенно оцениваемыми; ведь преобразованную модель можно рассчитывать совершенно точно в смысле классической математики без всякой замены дифференциалов разностями. Во-вторых, с помощью такой модели, *как правило, удается ограничиться* меньшим числом участков, поскольку вместо чисто формального интегрирования дифференциальных уравнений с заменой интегральных кривых ломаными здесь происходит более совершенное физическое интегрирование с более аккуратным представлением разыскиваемых функций в пределах малых участков.

Удобство подобных приемов введения вспомогательных физических моделей было подмечено еще Ньютоном, который заменял системой масс и последовательно соединенных пружин столб воздуха при расчете скорости звука. Их широко применяют в расчетах крутильных и продольных колебаний стержней, в расчетах судовой вибрации и т. п. Более подробно мы познакомимся с ними в следующих главах.

*Составление физической модели* нужно завершать хотя бы качественной оценкой ее сходимости (достаточного приближения к действительности в предположении точного знания всех параметров) и обусловленности, т. е. влияния неизбежных вариаций параметров.

Переходя к составлению исходной, а затем в случае необходимости к преобразованной математической модели, исследователь преодолевает, по существу, почти те же трудности, что и на предыдущем этапе. Составив общую физическую схему, он должен теперь неформально решить вопрос о степени подробности математического описания явлений, происходящих в физической модели, о необходимости учитывать различные нелинейности или о возможности ограничиться линейным случаем, о форме математического представления, наиболее удобной в конкретных условиях, и пр. Следует помнить, что всякая реальная механическая система не является ни линейной, ни консервативной, ни ограниченной каким-то определенным числом степеней свободы; более того, все свойства ее обычно вообще не могут быть совершенно точно описаны какими-либо конечными математическими соотношениями. *Однако бессмысленно удерживать члены, которые не могут быть* нами оценены с достаточной точностью; если же они заметно влияют на характер изучаемых объектов, то нужно просто засвидетельствовать тот или иной вид плохой обусловленности задачи и сделать отсюда необходимые практические выводы.

При составлении математических моделей полезно использовать различные вспомогательные формализованные методы и приемы типа уравнений Лагранжа, принципа Гамильтона, общих приемов вариационного исчисления и т. п. Но нельзя полагаться только на них или пытаться с их помощью полностью исключить неформальные моменты соответствующих изысканий. Такие попытки чреваты возможностью серьезных ошибок в существе дела.

Выполнение остальных этапов общей схемы, показанной на рис. 1.20, должно быть ясным из сказанного в данном параграфе относительно выбора алгоритмов, а также из общих курсов программирования и организации вычислительных работ. Поэтому



завершим ее описание лишь одним замечанием. Изображенное линейное расположение этапов относится лишь к сравнительно простым и ясным случаям; в более сложных задачах непременно возникают многочисленные обратные связи, когда исследователь неоднократно возвращается к предыдущим этапам, вновь и вновь уточняет их, проводит новый анализ и лишь потом двигается дальше, сделав как бы новое приближение.

Глава 2.

# ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОДНОМЕРНЫХ И КВАЗИОДНОМЕРНЫХ ПРОЦЕССОВ. НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ МЕТОДЫ ИХ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА И МОДЕЛИРОВАНИЯ

Изложенные в первой главе представления о неклассической математике, о вводимых в нее причинно-следственных связях, расширенные представления об устойчивости заставляют рассмотреть с этих позиций некоторые общие вопросы теории одномерных и квазиодномерных процессов, которые являются основным предметом данной книги. В результате анализа этих вопросов *появилась возможность строить теорию численных методов* расчета того или иного процесса указанного типа, используя принципы соответствия устойчивости алгоритма и рассматриваемого объекта, максимальной устойчивости алгоритма или соответствия устойчивости алгоритма и искомого решения. Кроме того, стали более явными многие методологические положения построений исходных математических моделей.

## § 6. Схемы причинно-следственных связей в непрерывных одномерных и квазиодномерных процессах

1. Внутренние параметры процесса. Назовем внутренними параметрами любого $m$-мерного процесса, изучаемого в независимых координатах $x_1, \ldots, x_m$, любые независимые друг от друга скалярные величины, полностью и однозначно определяющие в своей совокупности для любой точки $(x_1, \ldots, x_m)$ всю систему взаимосвязанных физических объектов, меняющихся совместно в данном процессе. Иногда система физических *объектов и число внутренних параметров могут изменяться* от точки к точке. Соответствующие уточнения приведенного определения очевидны.

Процесс называется *n-параметрическим по числу* его внутренних параметров. При одномерных и квазиодномерных процессах приведенное определение можно заменить более удобным: назовем внутренними параметрами такого процесса любые, не зависящие друг от друга, скалярные величины, полностью и однозначно определяющие в своей совокупности непосредственное физическое взаимодействие его частей в любом сечении $x = x_0$. Подчеркнем, что речь идет именно о непосредственном физическом, а не информационном взаимодействии, причем в сечении только самого процесса, но не других связей, быть может, окружающих процесс.

Ясно, что внутренние параметры объявлены именно скалярными, а не какими-то более общими (например, векторными) величинами исключительно в целях сравнения процессов между собой и приведения их к единой мере (вспомним, например, приведение выпущенных тракторов к пятнадцатисильным).

Движение механической системы с $n$ степенями свободы представляет собой $2n$-параметрический процесс. Независимое переменное — время $t$. Непосредственное физическое взаимодействие двух частей процесса при $t \leqslant t_0$ и $t \geqslant t_0$ полностью и однозначно определяется $n$ значениями обобщенных координат $q_i$ ($i = 1, \ldots, n$) и $n$ значениями соответствующих обобщенных скоростей $\dot{q}_i$. Число $2n$ внутренних параметров не изменится, даже если между обеими частями имеется более сложное, чем обычно, взаимодействие, которое, однако, осуществляется не самим процессом, хотя и с его помощью. Скажем, обобщенные силы могут быть заданы как функции обобщенных координат в данные и предшествующие моменты времени $Q_i = Q_i\,[q_1(t-h_1), \ldots, q_n(t-h_n), q_1, \ldots, q_n]$, где $h_j$ — некоторые постоянные положительные величины или даже положительные функции $h_j(t)$ (имеется следящая система, которая фиксирует значения $q_j$ и передает информацию в некий центральный пост, управляющий обобщенными силами с учетом значений $q_j$ в данный и предшествующие моменты времени).

Статический изгиб балки, загруженной поперечной нагрузкой $q(x)$ и продольной нагрузкой $s(x)$, является шестипараметрическим процессом. В качестве внутренних параметров, могут быть приняты изгибающий момент $M(x)$, перерезывающая сила $N(x)$ и осевое внутреннее усилие $T(x)$, а также соответствующие им смещения — угол поворота $\vartheta(x)$, прогиб $w(x)$ и осевое смещение сечения $u(x)$. Число внутренних параметров не изменится, даже если балка лежит на упругом основании невинклеровского типа, у которого сосредоточенная сила, приложенная в некоторой точке, вызывает просадку не только под силой, но и в других точках,— ведь мы рассекаем только сам процесс, т. е. саму балку, и не рассматриваем физические взаимодействия в упругом основании.

Вообще для строительной механики характерна четность числа внутренних параметров — внутренних обобщенных усилий и соответствующих обобщенных смещений (каждому параметру-усилию отвечает параметр-смещение).



*Теорема 2.1. Совокупность внутренних параметров не единственна. Однако общее число этих параметров в любой совокупности неизменно и определяется физической сущностью процесса.*

Действительно, пусть $y_1, \ldots, y_n$ — какая-то совокупность внутренних параметров в точке $(x_1, \ldots, x_m)$. Мы всегда можем ввести другую совокупность $(z_1, \ldots z_n)$, связав все $z_i$ и все $y_j$ соотношениями

$$z_i = \Phi_i(y_1, \ldots, y_n), \tag{2.1}$$

разрешимыми относительно $y_j$:

$$y_j = F_j'(z_1, \ldots, z_n). \tag{2.2}$$

Поскольку множество возможных соотношений (2.1) и (2.2) бесконечно, то бесконечно и множество возможных совокупностей внутренних параметров. Первая часть теоремы доказана.

Вторую ее часть докажем от противного. Пусть имеется совокупность внутренних параметров $y_1, \ldots, y_n$ и совокупность внутренних параметров $z_1, \ldots, z_k$ ($k > n$). Поскольку совокупность $y_j$, как и совокупность $z_s$, полностью отражает все взаимосвязанные физические величины в данной точке процесса, то параметры $z_s$ могут быть выражены через $y_j$:

$$z_s = \Phi_s'(y_1, \ldots, y_n), \quad (s = 1, \ldots, k). \tag{2.3}$$

Возьмем первые $n$ зависимостей (2.3) и выразим все $y_j$ через $z_1, \ldots, z_n$, что всегда возможно, хотя и не всегда однозначно. Итак,

$$y_j = F_j(z_1, \ldots, z_n), \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{2.4}$$

Подставив (2.4) в (2.3) при $s > n$ (любой их вариант в случае неоднозначности), имеем

$$z_r = \Phi_r\,[F_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, F_n(z_1, \ldots, z_n)] \quad (r > n). \tag{2.5}$$

Наличие соотношений (2.5) противоречит условию о независимости параметров $z_s$.

2. Перенос внутренних параметров. Простейшие процессы с односторонним и двусторонним переносом параметров. Возьмем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, записанную в скалярном виде и нормальной форме:

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \ldots y_n), \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{2.6}$$

В ней все неизвестные функции $y_i$ определяют, по существу, *не что иное, как внутренние параметры* некоторого изучаемого одномерного или квазиодномерного процесса в зависимости от значений переменной $x$. Число $n$, называемое порядком системы (2.6), определяет число внутренних параметров.

Переписав (2.6) в виде

$$dy_i = f_i(x, y_1, \ldots, y_n)\,dx, \tag{2.6 a}$$

нетрудно заметить, что дифференциальные уравнения определяют изменения внутренних параметров $y_i$ при изменении $x$, т. е. являются уравнениями переноса этих параметров вдоль независимой переменной. Для определения значений параметров, которые переносятся затем в соответствии с (2.6), нужны дополнительные условия. Простейшими из них являются, как известно, так называемые начальные или одноточечные условия вида

$$y_i(x_0)=y_{i0},\quad (i=1,\ \ldots,\ n),\tag{2.7}$$

когда все параметры непосредственно заданы в некоторой точке $x_0$. Перенося их с помощью (2.6) вдоль $x$, мы находим все функции $y_i(x)$ (достаточно вспомнить хотя бы метод Эйлера, описанный вкратце в главе 1-й).

В более сложных случаях условия могут быть многоточечными или краевыми:

$$f_k[y_1(x_{1,k}),\ \ldots,\ y_n(x_{n,k})]=0,\quad (k=1,\ \ldots,\ n).\tag{2.8}$$

Если точек типа $x_{i,k}$, где заданы условия, всего две, то условия называются двухточечными или граничными (частный случай краевых условий).

Если каждое краевое условие может быть записано в виде

$$f_k[y_1(x_k),\ \ldots,\ y_n(x_k)]=0,\tag{2.9}$$

то условия носят название краевых несвязанных в отличие от общего случая связанных краевых условий (2.8).

Задача о нахождении частного решения дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях называется начальной задачей или задачей Коши, а при заданных краевых условиях — краевой задачей.

К системе (2.6) легко привести любую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенную относительно старших производных всех неизвестных [50]. В частности, если дано уравнение $n$-го порядка

$$y^{(n)}=F(x,\ y,\ \ldots,\ y^{(n-1)}),\tag{2.10}$$

то оно сводится к (2.6) подстановкой

$$y=z_1,\ y'=z_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}=z_n,\tag{2.11}$$

которая дает

$$\frac{dz_1}{dx}=z_2,\quad \frac{dz_2}{dx}=z_3,\quad \ldots,\quad \frac{dz_{n-1}}{dx}=z_n,\tag{2.12}$$

$$\frac{dz_n}{dx}=F(x,\ z_1,\ \ldots,\ z_{n-1}).$$

Первые $(n-1)$ уравнений (2.12) представляют, по существу, определения производных. Ими мы в неявном виде пользуемся и при рассмотрении (2.10). Непосредственная запись (2.12) имеет определенное преимущество: она показывает, что в (2.10) мы имеем



не одну неизвестную функцию, как это кажется на первый взгляд, а $n$ неизвестных функций, так как производные $y$ — самостоятельные неизвестные функции, которые надо искать вместе с $y$, а не после него.

Обратимся теперь к анализу возможных причинно-следственных связей между внутренними параметрами. Для этого представим одномерные и квазиодномерные процессы на некой воображаемой машине. *Заметим, что такая наглядность и введение здесь и* далее машины не снижает общности и строгости последующих рас-

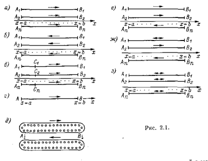


Рис. 2.1.

суждений, подобно тому как использование широко известной в математической логике воображаемой машины Тьюринга [47] оставляет общими и строгими получаемые с ее помощью логические выводы.

Пусть имеется многоленточный транспортер (рис. 2.1, *а*) с $n$ лентами, равномерно движущимися в направлении стрелок. Груз $y_i$ накладывается на каждую $i$-ю ленту в точке $A_i$ с координатой $x=a$, подсыпается на всем участке $A_iB_i$ и сбрасывается в точке $B_i$ с координатой $b>a$. Следящая система, фиксирует в каждой точке $a\leqslant x\leqslant b$ все значения $y_i(x)$, являющиеся внутренними параметрами процесса переноса грузов, посылает информацию об этом в центральный пост. Там информация перерабатывается, и дается команда подсыпать на каждую ленту $i$ груз с интенсивностью $f[x,\ y_1(x),\ \ldots,\ y_n(x)]$. Процесс определяется произвольной системой уравнений (2.6). Для полной определенности задачи, помимо уравнений (2.6), нужно задать начальные условия в виде количества грузов $y_i(a)$, *сразу накладываемых в точках* $A_i$ при $x = a$.

Предложенная модель не позволяет, на первый взгляд, оперировать отрицательными значениями параметров $y_i(x)$ и задавать отрицательные значения $y_i(a)$. Однако легко представить себе, что на лентах перемещаются большие постоянные грузы $Q_i(x) = \text{const}$, а $y_i(x)$ — положительные или отрицательные добавки к $Q_i$. Сделанное замечание будем иметь в виду при дальнейшем развитии модели.

В результате модель, показанная на рис. 2.1, *а*, моделирует, в частности, процессы движения, где независимая переменная — время $t$ — изменяется подобно $x$ в положительном направлении. В общем случае здесь мы имеем модель процесса с односторонним переносом параметров в сторону возрастания независимой переменной.

Назовем активными такие дополнительные условия, которые физически влияют или могут влиять на сам процесс и обеспечивают его протекание в соответствии с каким-то определенным частным решением уравнений переноса, а пассивными — такие условия, которые являются желательными или наблюдаемыми в данном процессе, *но не обеспечивают и не могут обеспечить сами по себе конкретной* реализации процесса согласно частному решению уравнений переноса.

В нашем случае заданные условия $y_i(a)$ — активны. Мы можем отказаться от них, измерить величины $y_i(b)$ в точках $B_i$ и, задавшись этими пассивными условиями, снова найти частный интеграл системы (2.6), отвечающий нашему процессу. Практическая неизменность процесса при небольших изменениях $y_i(a)$, входящих в силу их активности в число параметров генетической идентификации, свидетельствует об его устойчивости. Практическая неизменность частного интеграла при незначительных вариациях (погрешностях) параметров результирующей идентификации $y_i(b)$ показывает его наблюдаемость. Выше мы видели, что очень устойчивый процесс обычно не наблюдаем, а весьма хорошо наблюдаемый процесс — неустойчив. Таким образом, эквивалентные в смысле классической математики условия $y_i(a)$ и $y_i(b)$, дающие один и тот же частный интеграл, вовсе не эквивалентны в смысле неклассической математики. Имея задачу Коши при данных начальных условиях, весьма полезно выяснить, каковы они в смысле активности или пассивности.

Нетрудно запустить все ленты в обратную сторону (рис. 2.1, *б*) и отработать программу управления так, чтобы подсыпка грузов определялась функциями $-f_i(x, y_1, \ldots, y_n)$. Знак минус перед каждой функцией компенсирует аналогичный знак перед $dx$ при смене направления движения. Процесс снова описывается системой (2.6), однако активные начальные условия должны теперь физически задаваться в виде значений $y_i(b)$ в точках $B_i$ с координатой $x = b$; перенос параметров процесса, хотя и остается односторонним, происходит теперь в сторону убывания $x$.



Смена направления потока внутренних параметров, казалось бы, ничего не меняет. Действительно, мы можем задать $y_i(a)$, найти частное решение системы (2.6) при этих начальных условиях и определить из него $y_i(b)$. Можно поступить и наоборот — задать $y_i(b)$, соответствующие $y_i(a)$, т. е. лежащие на одной интегральной кривой, а затем найти по ним $y_i(a)$. Оба реальных процесса, имеющих противоположные потоки параметров, могут удовлетворять одному и тому же частному решению. Но степень устойчивости обоих процессов различна. Устойчивость процесса, изображенного на рис. 2.1, *б*, соответствует наблюдаемости процесса, показанного на рис. 2.1, *а*, и наоборот. Иными словами, направление потока параметров — фактор, достаточно важный.

Возможен интересный третий случай (рис. 2.1, *в*). В процессе, *иллюстрируемом рис. 2.1, а, мы измерили количества грузов* $y_i(c)$ для $x = c$ при $a < c < b$, т. е. в точках $C_i$. Согласно приведенным выше определениям активных и пассивных дополнительных условий, условия $y_i(c)$ активны для части процесса, лежащей вправо от $c$, и пассивны для его левой части.

Рассмотрение модели транспортера с односторонним переносом параметров позволяет сделать некоторые выводы о существовании и единственности решений задач с начальными условиями (задач Коши) для уравнений (2.6). Они в некотором смысле дополняют обычные теоремы существования и единственности, где на функции $f_i$ обычно накладывают довольно жесткие ограничения.

Для простоты и наглядности ограничимся анализом одного уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \varphi[y(x), x]. \tag{2.13}$$

Как и в классической теории дифференциальных уравнений, переход к системам высоких порядков сопряжен в основном лишь с громоздкостью преобразований и рассуждений без изменения основных идей и результатов.

Обычно теорема существования и единственности формулируется примерно так.

*Теорема 2.2. Если функция* $\varphi[y(x), x]$ *непрерывна в некоторой области G изменения переменных x и y и удовлетворяет в G условию*

$$\varphi[y_1, x] - \varphi[y_2, x] \leqslant K\,|y_1 - y_2|,$$

где $K$ — *некоторая сколь угодно большая постоянная (условие Липшица), то в пределах G существует единственное частное решение уравнения (2.13), удовлетворяющее условию* $y(x_0) = y_0$ ($x_0$ *и* $y_0$ *принадлежат G*).

Условие Липшица может быть заменено несколько более грубым условием существования ограниченной по абсолютному значению производной $\varphi'_y[y, x]$ в области $G$, если последняя выпукла по $y$. Область $G$ называется выпуклой по $y$, если отрезок $AB$, который соединяет две точки этой области, имеющие одинаковую координату $x$, лежит внутри этой области.

Используя теорему о конечном приращении функции, имеем

$$|\varphi[y_1, x] - \varphi[y_2, x]| = \varphi'_y[\xi, x]\,|y_1 - y_2|,$$

где $\xi$ — некоторое промежуточное между $y_1$ и $y_2$ значение $y$. Ограниченность $\varphi'_y$ и приводит к условию Липшица.

Представим себе теперь ленту транспортера, начинающуюся *в точке* $x = x_0$ *и движущуюся вправо (см. рис. 2.1, а). Нам* ничто не мешает сразу положить на ленту груз $y = y_0$, т. е. поставить любое начальное условие, а затем следить за движением его по ленте. Очень важно подчеркнуть, что здесь нам не требуется устанавливать во времени процесс перемещения груза — мы следим за данной массой груза, перемещаясь вместе с ней. Требуется лишь, чтобы функция $\varphi$ позволяла получать необходимую информацию для подсылки грузов в любой точке.

Обсудим сначала ограничение, накладываемое в теореме 2.2 условием Липшица.

Если отмеченное условие не выполняется, то даже бесконечно малая погрешность в значении $y(x)$ приведет к вполне конечным изменениям $\varphi[y(x), x]$ и, следовательно, к некой неопределенности левой части (2.13). Отсюда и возникает неединственность точного частного интеграла.

Встав *на неклассическую позицию, мы должны рассмотреть* условие Липшица несколько иначе. Ведь мы все равно знаем функцию $\varphi$ с некоторой конечной точностью и, следовательно, в принципе оперируем не единственным частным решением, а бесконечным множеством частных решений. Когда все элементы указанного бесконечного множества достаточно близки друг к другу, мы условно идентифицируем их и выбираем любой элемент в качестве характерного «представителя» всех прочих. При больших различиях между элементами мы говорим, что численное решение и моделируемый им процесс неустойчивы.

Может оказаться, что бесконечно малые изменения $y$ приводят хотя и к вполне конечным, но малым изменениям $\varphi$; условие Липшица выполняться не будет. Однако даже малые конечные изменения $y$ не очень сильно изменяют $\varphi$, а эти изменения $\varphi$ практически не меняют хода интегральной кривой. Тогда в нашем понимании, несмотря на нарушение условия Липшица, мы получим вполне определенное частное решение.

Иногда, конечно, невыполнение условия Липшица окажется существенным и для нас, но мы это увидим по неустойчивости численного решения.

В первую очередь нам важна однозначность и непрерывность $\varphi[y(x), x]$. Когда же совокупность некоторых значений $\varphi$ непрерывна по $x$, а многозначность проявляется лишь в конечном числе точек и $|\varphi|$ всегда ограничена, мы отбрасываем все значения, кроме тех, которые образуют непрерывную совокупность. Ведь даже если в процесс включаются отброшенные конечные значения $\varphi$, это *никак не сказывается на ходе конечного непрерывного процесса.*

Если $\varphi$ неоднозначна в бесконечном числе точек, но все ее значения лежат в пределах точности задания этой функции, то и здесь упомянутая многозначность нам не страшна и, в сущности, не нарушает достаточной обусловленности задачи.

В тех случаях, когда в каких-то изолированных точках $x_j$ функция $\varphi$ принимает бесконечное значение или терпит разрыв непрерывности, задача становится недостаточно обусловленной и требуются добавочные активные условия, определяемые физическим существом дела.

Пусть при $x = x_1$ функция $\varphi$ бесконечна, т. е. бесконечна производная $dy/dx$. Это означает, что $y(x)$ после перехода через $x_1$ получит какой-то скачок. Однако величина скачка остается неопределенной — из дифференциального уравнения (2.13), записанного в обычных функциях, его в принципе получить нельзя и нужна дополнительная информация, лежащая вне первоначально заданного активного одноточечного условия и уравнения. Например, в точке $x_1$ может стоять устройство, которое, записав значение $y(x_1-0)$, сразу накладывает конечный груз $\Delta y_1 = ky(x_1-0)$, где $k$ — некоторый коэффициент (перенос параметра идет в сторону возрастания $x$). Тогда добавочное активное условие принимает вид

$$y(x_1+0) = y(x_1-0) + ky(x_1-0).$$

Равным образом разрыв значений $\varphi[y(x_k-0), x_k-0]$ и $\varphi[y(x_k+0), x_k+0]$ (мы ограничиваемся рассмотрением разрывов первого рода) не дает нам возможности судить об изменении $y(x)$ в самой точке $x_k$ — уравнение (2.13) показывает только темп нарастания $y(x)$ перед $x_k$ и за ним. В этом случае часто $y(x_k+0) = y(x_k-0)$. Однако эта связь может быть и другой.

Только что сказанное свидетельствует о том, что к уравнению (2.13) может добавляться несколько точечных активных условий, а не одно условие, как это обычно принято считать. В рассмотренных примерах добавочные условия обеспечивают единственность решения.

Пусть снова уравнение (2.13) описывает процесс с переносом параметра в сторону возрастания $x$ и решение определяется активным начальным условием $y(a) = y_0$. Пусть, далее, согласно точному частному решению (2.13), значение $y(x_1) = y_{x_1}$. Подставим в точке $x_1$ второе активное условие $y(x_1) = y_{x_1}$, соответствующее условию $y(a) = y_0$.

С классической точки зрения это вполне возможно, но ничего не дает — частный интеграл от этого не изменится. На самом же деле изменения, конечно, будут. Если рассматриваемый процесс неустойчив, то неизбежные разбросы в условиях генетической идентификации приведут к заметному расхождению истинного значения $y(x_1)$ с $y_{x_1}$. Но установленное в точке $x = x_1$ специальное устройство зафиксирует расхождение и устранит его путем соответствующей отсыпки или досыпки груза. Таким образом, постановка добавочного активного условия изменила устойчивость процесса.

Точечные активные дополнительные условия делятся на основные, вспомогательные и избыточные.

Основными активными дополнительными условиями называются такие, которые действуют физически на процесс и обеспечивают его протекание в соответствии с определенным частным решением соответствующих дифференциальных уравнений, независимо от того, везде или не везде удовлетворены условия единственности интегральной кривой; в последнем случае они выполняют свои функции вместе с вспомогательными условиями.

Вспомогательными активными дополнительными условиями называются активные условия, обеспечивающие определенное протекание процесса в точках, где нарушены условия единственности интегральной кривой исходных уравнений.

Избыточными называются такие активные условия, которые не противоречат частному решению, определяемому основными и вспомогательными активными дополнительными условиями, и не действуют на процесс, когда он идет в соответствующих точках согласно этому частному решению, но начинают непосредственно действовать на него, как только он отклоняется от указанного решения.

В дальнейшем, когда это не будет оговорено особо, мы будем предполагать отсутствие избыточных активных условий. Отсутствие вспомогательных условий не предполагается.

Внешней продольной связью одномерного процесса назовем связь, не входящую непосредственно в рассматриваемый процесс, но активно обеспечивающую определенные соотношения между его внутренними параметрами в разных точках (сечениях) вдоль независимой переменной. О наличии внешней продольной связи безусловно свидетельствуют связанные многоточечные активные условия. Однако внешние связи могут относиться и к пассивным условиям.

Для иллюстрации возьмем однопараметрический процесс с односторонним переносом параметра (рис. 2.1, *г*). В точке $x = b$ поставим датчик, измеряющий количество сбрасываемого груза. Информация от датчика идет в центральный пост, управляющий количеством груза в точке $x = a$. В результате обеспечивается условие

$$y(b) = k_1 y(a), \tag{2.14}$$

где $k_1$ — некоторый заранее заданный постоянный коэффициент.

Это типичный пример внешней продольной связи, которая предопределяет связанное двухточечное (краевое) условие в одномерном процессе. Заметим, что (2.14) не является активным условием, так как на процесс физически по-прежнему воздействует количество груза, сразу помещаемого в точке $x = a$.



Точечные пассивные дополнительные условия в соответствии со сказанным делятся на собственно пассивные и корректирующие пассивные. Собственно пассивным называется такое пассивное условие, которое не соединено с внешними продольными связями. Корректирующим пассивным условием назовем условие, соединенное с какими-то внешними продольными связями и через них корректирующее процесс.

Ясно, что в рассмотренном случае (см. рис. 2.1, *г*) условие (2.14) — пример корректирующего пассивного условия. Корректирующие пассивные условия и внешние продольные связи, так же как и активные условия,— элементы множества параметров генетической идентификации процесса. Конечно, наличие соотношения (2.14) само по себе еще не означает наличия корректирующего условия и внешней связи; оно могло явиться просто результатом наблюдения над соотношениями величин в некотором процессе.

*Одномерный процесс называется неособенным, если у него нет избыточных активных и корректирующих пассивных условий. В противном случае назовем его особенным процессом. В дальнейшем (если нет специальных оговорок) будем считать рассматриваемые процессы неособенными.*

Назовем определяющими условиями такие дополнительные условия, которые в своей совокупности физически определяют частный интеграл, соответствующий данному процессу, но не обязательно сами непосредственно действуют на процесс. *Понятия определяющих и активных условий не совпадают.* Так, условие (2.14) в рассмотренном примере — определяющее, но не активное; условие $y(a) = y_0$, соответствующее (2.14), активно, но в *данной конкретной постановке задачи не является определяющим.*

Здесь уместно спросить, зачем выделять особо корректирующие пассивные условия? Не проще ли отнести их к разряду активных условий, немного изменив соответствующие определения? Тогда, *в частности, отпадает необходимость в понятии определяющих условий.*

Ответом служит следующая теорема.

*Теорема 2.3. Знания определяющих условий, в которых отсутствуют хотя бы некоторые активные условия, еще недостаточно, вообще говоря, для анализа устойчивости процесса.*

Доказательство, как и во многих других случаях, проведем путем анализа характерного примера.

Пусть мы имеем в пределах $0 \leqslant x \leqslant l$ однопараметрический процесс, который описывается уравнением

$$\frac{dy}{dx} = py, \quad p > 0 \tag{2.15}$$

при определяющем граничном условии

$$y(l) - y(0) = A. \tag{2.16}$$

Общий интеграл (2.15) имеет вид

$$y = y(0)\, e^{px} \quad \text{или} \quad y = y(l)\, e^{-p(l-x)}, \tag{2.17}$$

что вместе с (2.16) дает

$$y(0) = \frac{A}{e^{pl}-1}; \qquad y(l) = \frac{A}{e^{pl}-1}\, e^{pl} \tag{2.18}$$

Обратим внимание, что условие (2.16) может быть осуществлено, например, так. Процесс имеет схему, изображенную на рис. 2.1, *г*. В точке $x = l$ установлен измеритель груза, посылающий информацию в центральный пост, который управляет активным условием в точке $x = 0$. Но может иметь место и другая схема: поток параметра направлен справа налево, измеритель груза находится в точке $x = 0$, а активное условие осуществляется в точке $x = l$. Оба возможных процесса имеют разную устойчивость.

В самом деле, разделим отрезок $0 \leqslant x \leqslant l$ на $n$ участков и допустим, что в пределах каждого участка накапливается погрешность $\pm\delta$. Примем также, что любой процесс считается условно идентичным процессу, определяемому зависимостями (2.17), (2.18), если условие (2.16) осуществляется с точностью $\pm\Delta$. Определим требуемое максимальное значение $|\delta|$, чтобы тот и другой процесс были устойчивыми. Это следует делать, полагая, что все погрешности на всех участках направлены в одну сторону.

В первом случае значения погрешностей будут: на первом участке

$$|\delta|;$$

на втором

$$\left|\delta e^{p\frac{l}{n}} + \delta\right|;$$

на третьем

$$\left|\left(\delta e^{p\frac{l}{n}} + \delta\right) e^{p\frac{l}{n}} + \delta\right| = \left|\delta\left(e^{2p\frac{l}{n}} + e^{p\frac{l}{n}} + 1\right)\right|;$$

на $k$-м участке

$$\left|\delta\left(e^{(k-1)p\frac{l}{n}} + e^{(k-2)p\frac{l}{n}} + \ldots + e^{p\frac{l}{n}} + 1\right)\right|.$$

Отсюда для максимального значения $|\delta|$ имеем

$$|\delta|_{\max} = \frac{\Delta}{e^{\frac{n-1}{n}pl} + e^{\frac{n-2}{n}pl} + \ldots + e^{\frac{pl}{n}} + 1}. \tag{2.19}$$

Во втором случае получаем

$$|\delta|_{\max} = \frac{\Delta}{e^{-\frac{(n-1)}{n}pl} + e^{-\frac{n-2}{n}pl} + \ldots + e^{-\frac{pl}{n}} + 1}. \tag{2.20}$$

Неодинаковость (2.19) и (2.20) доказывает наше утверждение.



*Любые две совокупности дополнительных условий, выделяющие* одно и то же частное решение данной системы дифференциальных уравнений, названы нами соответствующими друг другу (примеры этого и сам термин уже встречались ранее). Как следует из сказанного выше, если два процесса определяются одной и той же системой дифференциальных уравнений, имеющих разные, но соответствующие друг другу совокупности дополнительных условий, то устойчивость этих процессов будет, вообще говоря, различной.

Теперь возникают другие вопросы. Может быть, решающую роль в анализе устойчивости играют только активные условия? Или активные и определяющие вместе? Нужно ли детальное рассмотрение схемы потоков параметров? Может быть, схема потоков, хотя и полезная при установлении возможных видов активных условий, сама по себе не является необходимой и в лучшем случае должна рассматриваться как вспомогательное понятие?

На первый взгляд, высказанные предположения имеют много оснований. В только что рассмотренном примере определяющее условие, конечно, необходимо для выделения искомого частного интеграла, однако устойчивость процесса определяется лишь *активным условием. Последнее задает как будто бы и направление* потока параметра.

Но расширим наши представления о возможных потоках параметров. Некоторые или все ленты $n$-ленточного транспортера можно устроить так, что соответствующий параметр будет переноситься в обе стороны. Для этого выполним, скажем, $i$-ленту спаренной, обе рабочие части которой будут двигаться в противоположных направлениях (рис. 2.1, *д*). В точках $A_i$ и $B_i$ происходит перегрузка с одной рабочей части ленты на другую. Подсыпка груза на нижнюю и верхнюю части определяется одной и той же функцией $f_i$, только при подсыпке на верхнюю часть $f_i$ берется с обратным знаком.

Комбинируя одиночные и спаренные ленты, запуская некоторые *одиночные ленты* во *взаимно противоположных направлениях*, мы можем получить в $n$-параметрическом процессе произвольные и весьма разнообразные потоки параметров (рис. 2.1, *е*, *ж*, *з*).

Из приведенных схем видно, что реальные процессы, определяемые одной независимой переменной, делятся на односторонние и двусторонние. Процесс называется односторонним с течением в сторону возрастания (убывания) независимой переменной $x$, если любые локальные изменения, вносимые в него при любом $x = x_1$, не приводят к изменениям процесса при $x < x_1$ (соответственно $x > x_1$). Процесс называется двусторонним, если он не является односторонним, т. е. если некоторые локальные его изменения при некоторых $x = x_1$ изменяют течение процесса и при $x < x_1$ и при $x > x_1$.

Типичным примером одностороннего процесса может служить движение обычной механической системы с $n$ степенями свободы при отсутствии в ней следящих систем. Типичный пример двустороннего процесса — статический изгиб балки под действием поперечной нагрузки.

Пустим $n$-ю ленту транспортера в обратную сторону (см. рис. 2.1, *е*) по отношению к движению остальных лент, изменив знак перед $f_n$. Процесс по-прежнему определится той же системой (2.6), но задача нахождения частного решения из одноточечной (с начальными условиями) превратилась в двухточечную (с граничными условиями): нужно задавать $y_1(a), \ldots, y_{n-1}(a)$ и, кроме того, $y_n(b)$. Изменения процесса при некотором $x = x_1$ будут распространяться в обе стороны.

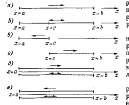



Рис. 2.2.

Для строительной механики, как мы увидим, характерен перенос каждого параметра в обе стороны (см. рис. 2.1, *з*). Процессы деформирования конструкций являются двусторонними.

Отметим, что, говоря о переносе параметра, мы подразумеваем, в сущности, не его непосредственный физический перенос, как это имеет место в нашей воображаемой системе транспортерных лент, а направления причинно-следственных связей. Принятый у нас прямой перенос просто делает эти связи более наглядными.

Вернемся теперь к изучению связи между активными условиями и возможными потоками параметров.

*Теорема 2.4. Активные дополнительные условия в общем случае не определяют однозначно схемы потоков параметров, как и схема потоков параметров в общем случае не определяет однозначно активных условий. Устойчивость процесса зависит, вообще говоря, и от активных условий, и от схемы потоков параметров, и от определяющих условий, которые включают в себя пассивные корректирующие условия.*

Пусть (рис. 2.2, *а*, *б*) на левом конце однопараметрического процесса задано активное условие $y(a) = y_0$. Ясно, что этому условию могут отвечать два потока — и односторонний, и двусторонний. Первое утверждение доказано.

Однако при обоих потоках устойчивость процесса остается в данном случае одинаковой. Для уяснения последнего обстоятельства обратим внимание на то, что равенство параметров (грузов) на обеих рабочих частях ленты при двустороннем установившемся (именно установившемся) переносе выполняется автоматически. Следовательно, зафиксировав в какой-то момент заданный груз в точке $x = a$, можно затем следить за его движением по части



ленты, идущей в сторону возрастания $x$, считая ее единственной. Все будет происходить так же, как в случае одностороннего переноса параметра в сторону $x = b$.

Подчеркнутая характеристика переноса (не просто перенос, а установившийся во времени перенос) очень важна: в отличие от одностороннего движения груза по лентам (см. рис. 2.1, *а*, *б*), когда мы можем следить за порциями груза и не требовать обязательного установления процесса во времени, движение по двусторонним лентам и все остальные потоки параметров требуют непременно установления процесса; иначе, кроме зависимости от $x$, появится зависимость от времени $t$, т. е. процесс будет двухмерным.

Важные следствия, вытекающие из условия установления, мы встретим в дальнейшем.

При двустороннем потоке (см. рис. 2.2, *б*) можно поставить условие $y(a) = y_0$, но можно поставить и условие $y(b) = y_0$ или даже $y(c) = y_0$, где $(a < c < b)$. Второе утверждение доказано.

Устойчивость процесса, иллюстрируемого рис. 2.2, *б*, слева от точки $c$ при третьем варианте активных условий эквивалентна устойчивости процесса, показанного на рис. 2.2, *в*; что касается устойчивости справа от точки $c$, то она эквивалентна устойчивости процесса, представленного на рис. 2.2, *г*.

Чтобы показать влияние потоков параметров на устойчивость процессов, рассмотрим схемы последних, изображенные на рис. 2.2, *д*, *е*, и уравнения переноса, имеющие вид

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1), \quad \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_2) \tag{2.21}$$

при несвязанных граничных активных условиях

$$\varphi_1[y_1(a), y_2(a)] = 0, \quad \varphi_2[y_1(b), y_2(b)] = 0. \tag{2.22}$$

*Ясно, что здесь изменение потока $y_1$ меняет устойчивость процесса.* Отметим, что поток $y_2$ взят двусторонним не случайно — в противном случае условия (2.22) нельзя было бы считать явно активными (они были бы, скорее, пассивными корректирующими).

Влияние вида определяющих условий на устойчивость процесса будет очевидно из примеров, приведенных в главе 3-й.

3. Влияние установления процесса во времени. Более сложные процессы с односторонним и двусторонним переносом параметров. Системы процессов. Вернемся к рассмотренному ранее примеру процесса (*см. рис. 2.1, г*) *с корректирующим пассивным условием (2.14)*. Поставим вопрос — односторонний это процесс или двусторонний? Чтобы ответить на него, рассмотрим два возможных случая.

Первый случай, когда перемещение груза на ленте транспортера — некий установившийся процесс. Иными словами, на ленту непрерывно накладываются грузы в точке $x = a$, и в каждой точке

$x$ ($a \leqslant x \leqslant b$) в любой момент времени находится постоянный груз; все устройства транспортера работают без возмущений во времени. *Тогда процесс, несомненно, должен быть отнесен к классу двусторонних.*

Для доказательства возьмем два таких процесса, отвечающих одному и тому же уравнению первого порядка и одному и тому же условию (2.14). Но во второй процесс внесено локальное возмущение в точке $x = x_1$, отвечающей неравенству $a < x_1 < b$. Если во втором процессе насыпать в точке $x = a$ столько же груза, сколько и в первом, то из-за локального возмущения в точке $x_1$ условие (2.14) не будет выполнено. Следовательно, груз будет насыпаться в другом количестве и наличие локального возмущения изменит течение процесса в обе стороны от $x - x_1$.

Второй случай — не установившийся во времени процесс. В точке $x = a$ время от времени накладывается груз $y(a)$, и мы следим за его прохождением по ленте транспортера вплоть до ссыпания в точке $x = b$. В устройстве системы могут возникать локальные возмущения во времени. Здесь мы имеем дело с неким промежуточным по типу процессом. Наличие условия (2.14), как и в первом случае, заставит при следующем цикле подкорректировать начальное условие, если по длине ленты возникнет локальное возмущение, но этот следующий цикл даст односторонний процесс, где всякое новое локальное возмущение окажет влияние только в последующей части процесса.

Влияние установления процесса существенно и принципиально.

Если процесс односторонний с активными начальными условиями и без продольных связей, то мы всегда можем представить его как не установившийся. Иначе говоря, положив (см. рис. 2.1, *а*) на ленты $i$ произвольные грузы $y_i(a) = y_{i0}$, мы затем просто управляем с помощью уравнений (2.6) трансформацией этих грузов при их перемещении. Если правые части (2.6) заданы правильно и всегда дают однозначный ответ для значений производных $y_i'(x)$, то мы имеем единственное решение соответствующей задачи Коши. В противном (достаточно редком) случае нужно подкорректировать эти правые части или ввести дополнительную информацию исходя из дополнительного физического анализа устройства системы.

Происходит постепенное развертывание причин, но возникающие следствия не имеют с причинами обратной связи. А не имея обратных связей, причины непременно как-то развернутся во времени и мы обязательно будем знать это развертывание, если знаем все физические условия.

Другое дело различного рода двусторонние процессы, где требуется их установление во времени и имеется обратная связь следствий и причин. Тут для существования решения нужно очень жесткое условие установления процесса. Недаром мы зачастую встречаемся с несовместностью краевых задач.

Можно сказать, что любой одномерный двусторонний процесс есть выродившийся после установления двухмерный процесс.



И если двухмерный процесс не устанавливается, то одномерного двустороннего процесса просто не существует.

Чтобы *не быть голословным, возьмем двухпараметрический* процесс (см. рис. 2.1, *е*) с двумя лентами, идущими навстречу друг другу. Пусть в начальный момент ленты запущены, но еще пусты, а следящие системы и центральный пост отключены. В точке $A_1$ непрерывно насыпается груз $y_1(a) = y_{10}$, а в точке $B$ — груз $y_2(b) = y_{20}$. Оба груза пойдут навстречу друг другу, причем процесс на лентах будет зависеть от переменных $x$ и $t$, т. е. описываться дифференциальными уравнениями в частных производных. Если процесс установится, то решение будет описываться системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка при граничных условиях $y_1(a) = y_{10}$, $y_2(b) = y_{20}$. Если же установления не произойдет, то такого решения физически не будет существовать.

Кстати сказать, если решение краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений существует и описывает реальный двусторонний процесс с активными многоточечными условиями, то, получив его, нужно, строго говоря, еще проверить устойчивость соответствующего двухмерного процесса во времени (см. теорему 1.1). Отрицательный результат проверки свидетельствует об эфемерности решения.

Весьма интересно проанализировать с развитой здесь точки зрения одномерные процессы, где внешние продольные связи «подключены» непрерывно; в этом случае мы приходим к дифференциальным уравнениям с отклоняющимися аргументами или к интегродифференциальным уравнениям.

Пусть ленты транспортера движутся в одну сторону (см. рис. 2.1, *а*). В каждой точке $x$ снимаются показания о количестве движущихся по лентам грузов, а центральный пост дает команду подсыпать грузы с интенсивностью $f_i\,[x,\ y_1(x),\ y_1(x-a_1),\ y_2(x),\ y_2(x-a_2),\ \ldots,\ y_n(x),\ y_n(x-a_n)]$, где $a_k$ — некоторые постоянные положительные числа; интенсивность подсыпки зависит от количества грузов не только в самой точке $x$, но и в предшествующих точках; при $(x-a_k) < a$ всегда $y_k = 0$. Тогда получим систему дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i\,[x,\ y_1(x),\ y_1(x-a_1),\ y_2(x),\ y_2(x-a_2),\ \ldots,\ y_n(x),\ y_n(x-a_n)],$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.23}$$

Вместо постоянных чисел $a_k$ можно ввести положительные функции $a_k(x)$.

Нетрудно снять показания и в точках с координатами $[x - b_k(x)]$, где $b_k$ — другие положительные функции, и, кроме того, обусловить интенсивность подсыпки всем предшествующим поведением функций $y_k$, т. е. получить интегродифференциальные уравнения

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i \{x, y_1(x), y_1[x - a_1(x)], y_1[x - b_1(x)], \ldots, y_n(x), y_n[x - a_n(x)], y_n[x - b_n(x)], \int_0^{x-a} \varphi_i [y_1(x-\xi), \ldots, y_n(x-\xi)]\, d\xi \} \quad (2.23\text{а})$$

и т. д.

Поскольку мы обусловили приращения лишь предшествующими значениями $y_k$, то уравнения типа (2.23) и (2.23а) могут относиться к неустановившимся режимам; обратной связи следствий с причинами здесь не существует, и мы, по существу, всегда будем иметь единственное частное решение $y_1(x), \ldots, y_n(x)$.

Если за точку $x = a$ принять не истинное начало процесса, как в нашем случае, а какое-то его сечение, то вместо начальных условий придется задавать на некотором участке левее $x = a$ некоторые начальные функции $y_i$, не равные, вообще говоря, нулю. Принципиальных изменений от этого не произойдет.

Положение станет совсем другим, если в (2.23) изменить все знаки перед $a_k$ и получить уравнения с опережающими аргументами или изменить только некоторые знаки, т. е. иметь уравнения нейтрального типа (часть аргументов — опережающие, часть — запаздывающие).

Поскольку *наличие хотя бы одного опережающего аргумента* $(x + a_k)$ означает при одностороннем переносе всех параметров введение обратной связи между следствиями и причинами, то подобные уравнения могут касаться лишь установившихся процессов, которые были до своего установления двухмерными. А так как установление двухмерного процесса вовсе не обязательно, решения подобной начальной задачи может зачастую и не существовать.

Кстати, мы получили интересный вывод: процесс с односторонним переносом всех параметров и начальными условиями оказывается в целом двусторонним.

Небезынтересен и другой уже вскользь упоминавшийся факт: установившийся процесс с двусторонним переносом каждого параметра может быть и односторонним, если (см. рис. 2.1, *з*) задать на одном конце такого процесса, определяемого уравнениями (2.6), активные одноточечные условия вида $y_i(a) = y_{i0}$ или $y_i(b) = y_{i0}$. Для этого следует поставить устройство, следящее за такими условиями, а при их нарушении — увеличить или уменьшить грузы в данной точке. Если принять первый вариант, то течение одностороннего процесса будет направлено в сторону возрастания $x$; при втором варианте — в сторону убывания $x$. Доказательство очень схоже с приведенным доказательством двусторонности однопараметрического процесса при пассивном корректирующем условии (2.14), и мы его приводить не будем.



Этот пример безусловно установившегося процесса, в сущности, эквивалентен неустановившемуся процессу; таким образом, установление процесса здесь всегда возможно.

При процессе с двусторонним переносом каждого параметра (см. рис. 2.1, *з*) возможны разнообразные варианты активных дополнительных условий.

*Если устройства* $A_i$ *и* $B_i$ *пересыпают грузы без всяких ограничений*, но в произвольной точке $x = x_0$ поставлены измерители грузов и активно обеспечиваются равенства $y_i(x_0) = y_{i0}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то мы имеем процесс с одноточечными активными условиями в середине пролета (подобный случай уже рассматривался).

Можно допустить, что пересыпные устройства работают без ограничений и вообще никаких ограничивающих устройств на транспортерах нет. Имеются возможности реализации любого частного решения системы (2.6): производится бесконечная циклическая транспортировка грузов в соответствии с конкретным частным решением.

Дополнительных условий в самом установившемся процессе выделить нельзя. Следовательно, частное решение определится условиями установления процесса.

В простейшем случае возьмем транспортер, насыплем на каждую спаренную ленту груз $y_i^{\text{ч. р}}(x)$ согласно некоторому частному решению системы (2.6) и запустим ленты. Выбранное нами частное решение будет осуществляться автоматически.

В более сложном случае, когда в начальный момент времени грузы расположены на лентах произвольно, процесс в течение некоторого периода будет неустановившимся — количества грузов окажутся функциями не только координаты $x$, но и времени $t$. Однако при некоторых условиях может произойти установление процесса во времени согласно одному из частных решений уравнений (2.6). Тогда эти условия будут определяющими для него.

Нетрудно моделировать и активные многоточечные (в частности, двухточечные) условия. Положим, пересыпные устройства $A_i$ и $B_i$ не накладывают ограничений, но в точках $x = x_1$, $x = x_2, \ldots, x = x_n$ стоят измерители грузов и обеспечиваются равенства

$$y_1(x_1) = y_{10},\ y_2(x_2) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_n) = y_{n0}. \quad (2.23\text{б})$$

Реализация частного интеграла снова очевидна.

Пусть теперь для определенности процесс будет четырехпараметрическим. Нетрудно представить себе, что пересыпные устройства $A_i$, а также $B_i$ связаны между собой и всегда принудительно выполняются соотношения

$$\begin{aligned} K_1 y_1(a) &= y_3(a); \quad K_2 y_2(a) = y_4(a); \\ K_3 y_1(b) &= y_3(b); \quad K_4 y_2(b) = y_4(b), \end{aligned} \quad (2.24)$$

где $K_i$ — заданные числа. Мы имеем четыре активных условия (балочного типа), которые дают реализацию частного решения.

Количество подобных примеров легко увеличить до бесконечности.

Схема потоков параметров данного процесса и вид активных дополнительных условий не находятся, как уже отмечалось, во взаимно-однозначном соответствии: одной и той же схеме могут соответствовать разные типы условий и наоборот. Но, глядя на схему потоков параметров, обычно легко сказать, какие активные условия ей не могут соответствовать. Скажем, схеме на рис. 2.1, *а* не могут отвечать активные граничные условия.

Отдельного *рассмотрения заслуживают периодические процессы*. Пусть исследуется изгиб замкнутого кольца. Каждый внутренний параметр этого периодического процесса имеет двусторонний перенос.

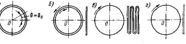



Рис. 2.3.

Введя мысленно разрез в произвольном сечении $\theta = \theta_0$ (рис. 2.3, *а*) и обозначив внутренние параметры буквами $y_i(\theta)$, получим дополнительные условия (условия периодичности)

$$y_i'(\theta) = y_i'(\theta + 2\pi k), \tag{2.25}$$

где $k$ — любое целое число.

Интересно, что зависимости (2.25) автоматически всегда выполняются абсолютно точно; они активны.

*Изучая периодические процессы типа движения* с односторонним переносом параметров, мы должны рассмотреть дополнительные условия того же вида (2.25). Но здесь необходимо учитывать возможность возмущений дополнительных условий.

Схема переноса каждого параметра в процессе типа изгиба *кольца показана на* рис. 2.3, *б*, а соответствующая схема процесса типа движения — на рис. 2.3, *в*. В последнем случае лента транспортера имеет много (потенциально бесконечно много) витков и завивается в виде спирали. Условия (2.25) мы должны рассматривать здесь как чисто пассивные.

*Если* взять для каждого параметра одну кольцевую замкнутую ленту (рис. 2.3, *г*) и пустить ее в определенном направлении, то этот односторонний перенос в отличие от схемы процесса, показанного на рис. 2.3, *в*, даст процесс с автоматически точным удовлетворением условий (2.25), которые станут активными. Иными словами, спаренные *ленты* для активного обеспечения условий периодичности брать не обязательно.

Вспомнив изложенное выше, нетрудно убедиться, что мы доказали следующую, далеко не тривиальную теорему.



*Теорема 2.5. В совокупности реальных одномерных непрерывных процессов, описываемых любыми конкретными уравнениями вида* (2.6), *могут быть реально поставлены произвольные одноточечные, двухточечные и многоточечные активные дополнительные условия, а также активные дополнительные условия, характеризующие установление процесса. Вид возможных активных дополнительных условий в данном конкретном процессе из указанной совокупности зависит от направлений переноса его внутренних параметров.*

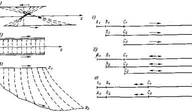



Рис. 2.4.

Говоря о схемах потоков и связях между параметрами, которые наглядно демонстрируются на нашей воображаемой машине с ленточными транспортерами, нужно подчеркнуть не только видимую конкретность машины, но и ее абстрактность. К нашим машинным схемам приводятся процессы, далекие друг от друга и от машины. Даже если ограничиться реальными ленточными машинами, то нетрудно вообразить себе, скажем, систему с лентами разной длины и встречными потоками (рис. 2.4, *а*), но перекрещивающимися связями параметров; она приводится к системе с односторонним потоком параметров, одинаковой протяженностью в диапазоне измерения параметров и активными начальными условиями в точке $x = 0$ (рис. 2.4, *б*). К этой схеме нетрудно привести и машины, где ленты идут вдоль разных осей (рис. 2.4, *в*).

К схеме, типа показанной на рис. 2.4, *в*, а затем к более простым схемам могут быть приведены и процессы, где каждый своеобразный внутренний параметр — функция своей (так сказать, собственной) независимой физической переменной (у одного параметра это длина, у другого — температура, у третьего — время и т. п.). Важно лишь, чтобы сечения каждой из независимых переменных были связаны информационными связями по какому-то подходя-

*щему типу. Тогда одна из независимых переменных окажется «ведущей»*, подобно $x_1$ или $x_2$ на рис. 2.4, *в*.

Конструирование различных ленточных машин позволяет изучить все многообразие причинно-следственных связей, показать роль возможных изменений в них при замене переменных, подстановках и иных преобразованиях. Дальнейшее абстрагирование открывает возможность таких исследований в общих банаховых и других пространствах.

Приведем еще несколько примеров.

Пусть (рис. 2.4, *г*) на первую ленту в точке $A_1$ накладывается груз $y(x_1) = F_1(x_1) = y_{01}$, который затем перемещается до точки $B_1$ с координатой $x_2$, *где подключается вторая лента. На эту ленту* в точке $B_2$ накладывается груз $y_2(x_2) = F_2[x_2, y_1(x_2)]$, и обе ленты работают совместно до точек $C_1$ и $C_2$ с координатой $x_3$. В точке $C_3$ на третью ленту накладывается груз $y_3(x_3) = F_3[x_3, y_1(x_3), y_2(x_3)]$, и все три ленты работают совместно до конечных точек $D_i$ с координатой $x_4$.

Ясно, что мы имеем односторонний процесс, определяемый системой уравнений

$$\frac{dy_1}{dx} = f_{11}(x, y_1)\Big|_{x_1}^{x_2} + f_{12}(x, y_1, y_2)\Big|_{x_2}^{x_3} +$$

$$+ f_{13}(x, y_1, y_2, y_3)\Big|_{x_3}^{x_4} = f_1(x, y_1, y_2\ y_3)];$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_{22}(x, y_1, y_2)\Big|_{x_2}^{x_3} + f_{23}(x, y_1, y_2, y_3)\Big|_{x_3}^{x_4} = f_2(x, y_1, y_2, y_3); \quad (2.26)$$

$$\frac{dy_3}{dx} = f_{33}(x, y_1, y_2, y_3)\Big|_{x_3}^{x_4} = f_3(x, y_1, y_2, y_3)$$

при многоточечных условиях

$$y_1(x_1) = y_{01}; \; y_2(x_2) = F_2[x_2, y_1(x_2)];$$
$$y_3(x_3) = F_3[x_3, y_1(x_3), y_2(x_3)]. \quad (2.27)$$

Прерыватель $\Big|_{x_i}^{x_j}$ означает, что соответствующий член учитывается только при $x_i \leqslant x \leqslant x_j$.

Можно поставить и более сложные связанные краевые условия:

$$y_1(x_1) = y_{01}; \; y_2(x_2) = F_2[x_2, y_1(x_1), y_1(x_2)];$$
$$y_3(x_3) = F_3[x_3, y_1(x_2), y_1(x_3), y_2(x_2), y_2(x_3)] \quad (2.27а)$$

и даже краевые условия с интегральными членами

$$y_1(x_1) = y_{01}; \; y_2(x_2) = F_2\left[x_2, \int_{x_1}^{x_2} y_1 dx\right];$$

$$y_3(x_3) = F_3\left[x_3, \int_{x_1}^{x_2} y_1 dx, \int_{x_1}^{x_2} y_2 dx\right]. \quad (2.27б)$$



Наличие таких сложных краевых условий не меняет односторонности процесса.

Положение не изменится, если в этом примере мы примем схему двустороннего переноса каждого параметра (рис. 2.4, *д*).

Можно сконструировать процесс, односторонний на одних участках *и двусторонний — на других. Возьмем две ленты со спаренными* рабочими частями (рис. 2.4, *е*) и поставим краевые условия в точках $B_i$ и $C_i$. Участки $A_iB_i$ и $C_iD_i$ дадут односторонний процесс, а участок $B_iC_i$ — двусторонний.

Нередко нужно рассматривать системы связанных между собой одномерных и квазиодномерных процессов. Так, любая рамная балочная конструкция — система одномерных процессов изгиба каждой составляющей балки; отдельные процессы связаны друг с другом через краевые условия (рис. 2.5). Связь может быть и более сложной.

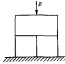



Рис. 2.5.

4. Замена переменных при исследовании процессов. Нетрудно видеть, что замена переменных в исходной математической модели приводит к другой математической модели, которая эквивалентна первой в смысле классической математики, но с позиций неклассической математики отображает процесс с другой, вообще говоря, устойчивостью.

В частности, если взять систему (2.6) при начальных условиях в точке $x = a$ и найти ее частное решение в пределах $a \leqslant x \leqslant b$, то, в сущности, мы опишем процесс типа, показанного на рис. 2.1, *а*. Если теперь сделать замену переменных типа $z = -x$, то мы перейдем к описанию процесса типа, показанного на рис. 2.1, *б*, с совершенно другой устойчивостью (хотя с тем же «идеальным течением»).

Заменяя переменные $z = 3x$, мы как бы «растягиваем» процесс— *делаем изменения внутренних параметров вдоль независимой переменной* «более плавными», что также влияет на устойчивость.

Особенно сильно на устойчивость моделируемых процессов иногда влияет замена зависимых переменных, т. е. внутренних параметров. Пусть мы имеем два уравнения

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2); \; \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2)$$

с активными граничными условиями $y_1(a) = y_{1,a}$, $y_2(b) = y_{2,b}$, $(b > a)$, которые соответствуют процессу, показанному на рис. 2.1, *е*, с встречными потоками параметров. Если сделать замену переменных $z_1 = y_1 + y_2$, $z_2 = y_1 - y_2$, *то мы получим модель процесса* с двусторонним переносом каждого параметра.

Число подобных примеров можно неограниченно увеличивать, но и из приведенных примеров видно, что замена переменных в вычислительной математике позволяет конструировать устойчивые вычислительные алгоритмы, расширяет область использования данного вычислительного метода, обеспечивает принцип соответствия между *устойчивостью алгоритма и рассматриваемого процесса* и т. п. Надлежащие примеры читатель неоднократно встретит в дальнейшем изложении.

## § 7. Составление обыкновенных дифференциальных уравнений и дополнительных условий

1. Общая методология. *Обсудим* более подробно методологию вывода обыкновенных дифференциальных уравнений, вид которых, как ясно из предыдущего, не зависит от направления потока параметров. Чтобы составить дифференциальные уравнения конкретной задачи, целесообразно выбрать определенную, наиболее удобную, систему внутренних параметров; задаться их буквенными значениями в произвольном сечении процесса (при произвольном значении независимой переменной $x$) и, рассмотрев процесс на участке длиной $dx$, выразить значения этих параметров в сечении $x + dx$ через их значения в сечении $x$.

Для рассмотрения процесса на участке от $x$ до $x + dx$ применяются методы специальных наук, изучающих данный физический процесс. Математика сама по себе тут ничего не дает, она лишь позволяет в соответствии с основной идеей исчисления бесконечно малых линеаризировать соответствующие функции на бесконечно малом интервале.

Вид уравнений существенно зависит от выбора положительных *направлений для изменения основной координаты (независимой переменной)* и других координат, а также для всех внутренних параметров. Их целесообразно четко нанести на соответствующий чертеж до начала вывода.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим (рис. 2.6, *а*) уже упоминавшийся ранее процесс растяжения линейно-упругого стержня, помещенного в линейное упругое пространство винклеровского типа. Обозначим: $l$ — длина стержня, $E$ — модуль нормальной упругости, $\Omega = \Omega(x)$ — переменная по длине площадь поперечного сечения стержня, $q(x)$ — интенсивность распределенной вдоль оси стержня продольной нагрузки, $k$ — коэффициент жесткости пространства. Ось $x$ направим, как указано на чертеже.

В качестве внутренних параметров процесса примем величину $P(x)$ внутреннего осевого усилия и величину $y(x)$ осевого смещения поперечного сечения стержня с координатой $x$. Положительные направления $P(x)$ и $y(x)$ показаны стрелками на рис. 2.6, *б*. Тогда, рассматривая элемент длиной $dx$, получаем условие его *равновесия*

$$P + k(x)\,y\,dx = P + dP + q(x)\,dx,$$



т. е.

$$dP = k(x)\,y\,dx - q(x)\,dx$$

или

$$\frac{dP}{dx} = k(x)\,y - q(x).$$

На основании закона Гука сразу имеем

$$dy = \frac{P\,dx}{E\Omega(x)},$$

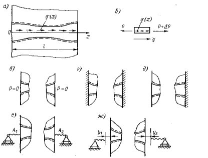



Рис. 2.6.

т. е.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{E\Omega(x)}.$$

Иными словами, рассматриваемый процесс определяется линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами

$$\frac{dP}{dx} = k(x)\,y - q(x),$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{E\Omega(x)}. \tag{2.28}$$

Если положить $q(x) = 0$; $k(x) = \text{const} = k$; $\Omega(x) = \text{const} = \Omega$, продифференцировать второе уравнение (2.28) и учесть первое уравнение, то получим уже встречавшееся ранее уравнение (1.4):

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\alpha^2 y,$$

где

$$\alpha^2=\frac{k}{E\Omega}.$$

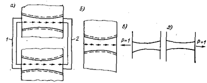



Рис. 2.7.

Активные граничные условия для (2.28) определяются условиями закрепления его концов: при свободных концах имеем (рис. 2.6, *в*)

$$P(0)=0;\ \ P(l)=0; \qquad (2.29а)$$

при жестко заделанных концах (рис. 2.6, *г*)

$$y(0)=0;\ \ y(l)=0; \qquad (2.29б)$$

при одном свободном и другом жестко заделанном конце (рис. 2.6, *д*)

$$P(0)=0;\ \ y(l)=0; \qquad (2.29в)$$

при упруго заделанных концах (рис. 2.6, *е*)

$$y(0)=P(0)\,A_1;\ \ y(l)=-P(l)\,A_2; \qquad (2.29г)$$

при упруго заделанных концах и с предварительными зазорами между концами и концевыми упругими связями (рис. 2.6, *ж*)

$$y(0)=P(0)\,A_1-y_1;\ \ y(l)=y_2-P(l)\,A_2, \qquad (2.29д)$$

где $A_1$ и $A_2$ — коэффициенты податливости заделок на левом и правом концах; $y_1$ и $y_2$ — предварительные зазоры.

Можно представить себе и более сложные условия, если процесс имеет внешние продольные связи.

Допустим, что таких стержней два (рис. 2.7, *а*). Концы стержней соединены жесткими недеформируемыми траверзами *1* и *2*. Нижний стержень можно рассматривать как внешнюю продольную связь *для процесса растяжения верхнего (и наоборот)*.



Рассчитав отдельно нижний стержень при условии свободных краев, найдем перемещение его левого $y_{1,0}$ и правого $y_{2,0}$ краев (рис. 2.7, *б*). Затем уберем распределенную нагрузку на нижний стержень, приложим к его левому концу единичное усилие $P=1$ и найдем смещения левого $y_{1,1}$ и правого $y_{2,1}$ краев (рис. 2.7, *в*). Аналогичным образом (рис. 2.7, *г*) определим смещение $y_{1,2}$ и $y_{2,2}$.

Тогда для расчета верхнего стержня получим связанные граничные условия вида

$$y(0)=-P(0)\,y_{1,1}-P(l)\,y_{1,2}+y_{1,0};$$
$$y(l)=-P(l)\,y_{2,2}-P(0)\,y_{2,1}+y_{2,0}. \qquad (2.29е)$$

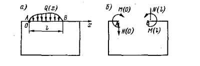



Рис. 2.8.

Если мы имеем балку $AB$ постоянного сечения ($y$ — прогиб балки), работающую в составе рамы (рис. 2.8, *а*), то граничные условия приобретут вид

$$EIy'''(0)\,K_1+EIy'''(l)\,K_2+EIy''(0)\,K_3+EIy''(l)\,K_4=y(0);$$
$$EIy'''(0)\,K_5+EIy'''(l)\,K_6+EIy''(0)\,K_7+EIy''(l)\,K_8=y'(0);$$
$$EIy'''(0)\,K_9+EIy'''(l)\,K_{10}+EIy''(0)\,K_{11}+EIy''(l)\,K_{12}=y(l);$$
$$EIy'''(0)\,K_{13}+EIy'''(l)\,K_{14}+EIy''(0)\,K_{15}+EIy''(l)\,K_{16}=y'(l), \qquad (2.30)$$

где $K_{rs}$ — коэффициенты податливости сечений $A$ и $B$ рамы под действием усилий $N(0)$, $M(0)$, $N(l)$, $M(l)$ (рис. 2.8, *б*); знаки в левых частях (2.30) расставлены условно и могут меняться в зависимости от правил знаков для внутренних усилий и коэффициентов податливости.

Приведем примеры вспомогательных, а также избыточных *активных условий в задачах строительной механики. Для этого проанализируем* более подробно изгиб балки переменной жесткости $EI(x)$, лежащей на упругом основании [коэффициент жесткости $k(x)$] и находящейся под действием произвольной поперечной нагрузки $q$ (рис. 2.9, *а*). Деформации будем считать малыми, т. е. геометрию деформаций линейной.

В качестве внутренних параметров процесса примем прогиб $w$, угол поворота сечений $\vartheta$, перерезывающую силу $Q$ и изгибающий момент $M$. Положительные направления этих параметров показаны стрелками на *рис.* 2.9, *б*.

Из условий равновесия элемента следует

$$Q + k(x)\,w\,dx = Q + dQ + q(x)\,dx;$$

$$M + Q\,dx = M + dM,$$

т. е.

$$dQ = k(x)\,w\,dx - q(x)\,dx;$$

$$dM = Q\,dx.$$

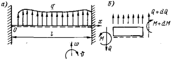



Рис. 2.9.

Из геометрических соотношений ясно, что $\frac{dw}{dx} = -\vartheta$.

Добавляя сюда известное из курса сопротивления материалов общее соотношение $d\vartheta = -\frac{M\,dx}{EI(x)}$, окончательно получаем систему уравнений

$$\frac{dQ}{dx} = k(x)\,w - q(x);$$

$$\frac{dM}{dx} = Q;$$

$$\frac{dw}{dx} = -\vartheta;$$

$$\frac{d\vartheta}{dx} = -\frac{M}{EI(x)}. \qquad (2.31)$$

*Если* $1/EI(x)$, $k(x)$ *и* $q(x)$ *непрерывны в пределах* $0 \leqslant x \leqslant l$, то, согласно известной теореме Пикара из общей теории дифференциальных уравнений, у нас выполнены условия существования и единственности решения задачи Коши для системы (2.31). Но пусть момент инерции балки $I(x)$ изменяется скачкообразно в сечении $x = x_1$. Тогда мы должны записать вспомогательные условия сопряжения участков $(0, x_1)$ и $(x_1, l)$:

$$w(x_1 - 0) = w(x_1 + 0), \;\; \vartheta(x_1 - 0) = \vartheta(x_1 + 0);$$

$$Q(x_1 - 0) = Q(x_1 + 0), \;\; M(x_1 - 0) = M(x_1 + 0). \qquad (2.32)$$



Чтобы показать, что вспомогательные условия записываются далеко не всегда так тривиально, возьмем уравнение

$$EI(x)\frac{d^4w}{dx^4} + 2E\frac{dI}{dx}\frac{d^3w}{dx^3} + E\frac{d^2I}{dx^2}\frac{d^2w}{dx^2} = q(x) - k(x)\,w, \qquad (2.33)$$

эквивалентное (2.31). Запишем его более полно:

$$\frac{dw}{dx} = y_1; \;\; \frac{dy_1}{dx} = y_2; \;\; \frac{dy_2}{dx} = y_3;$$

$$\frac{dy_3}{dx} = \frac{q(x) - k(x)\,w}{EI(x)} - 2\frac{1}{I(x)}\frac{dI}{dx}y_3 - \frac{1}{I(x)}\frac{d^2I}{dx^2}y_2. \qquad (2.34)$$

Для системы (2.34) условия сопряжения в точке $x_1$ имеют вид

$$w(x_1 + 0) = w(x_1 - 0); \;\; y_1(x_1 + 0) = y_1(x_1 - 0);$$

$$y_2(x_1 + 0) = y_2(x_1 - 0)\,K; \;\; y_3(x_1 + 0) = y_3(x_1 - 0)\,K, \qquad (2.35)$$

где $K = \frac{I(x_1 - 0)}{I(x_1 + 0)}$.

Скачки в $y_2$ и $y_3$ обусловлены известными физическими соотношениями теории изгиба балок $y_2 = w'' = M/EI$, $y_3 = w''' = Q/EI$ и физическими условиями $M(x_1 + 0) = M_1(x_1 - 0)$, $Q(x_1 + 0) = Q(x_1 - 0)$.

Пусть прогиб $w(x)$ однопролетной балки в любой ее точке определяется дифференциальными уравнениями изгиба и активными *граничными условиями, которые отражают закрепление ее концов* и выделяют частное решение $w^{\text{ч. р}}(x)$. Ничто не мешает дополнительно поставить в произвольной точке по длине пролета специальное устройство, активно обеспечивающее равенство фактического прогиба $w(x_1)$ значению частного решения $w^{\text{ч. р}}(x_1)$. Тогда мы получим избыточное активное условие.

2. Уравнения и дополнительные условия *для осесимметричных упругих деформаций* произвольных оболочек вращения. Рассмотрим в качестве более сложного примера статические упругие осесимметричные деформации произвольной оболочки вращения. Учтем ее конечную жесткость, т. е. в уравнениях равновесия будем исходить из деформированного состояния конструкции. Геометрия деформаций по-прежнему линейна. Оболочку отнесем к цилиндрической системе координат (рис. 2.10,*а*), где $x$ — координата, отсчитываемая вдоль оси вращения оболочки; $r = r(x)$ — радиус направляющей окружности (срединной поверхности оболочки); $\varphi$ — угол, образованный данным радиусом-вектором с вертикальной плоскостью. Вместо координаты $x$ можно использовать координату $s$, отсчитываемую от какого-то начального сечения вдоль любой образующей. Кроме того, введем угол $\theta$ между осью вращения и главным радиусом кривизны меридиана $R_1$ (рис. 2.10, *б*).

*Процесс статического осесимметричного деформирования* любой оболочки вращения является псевдодвухмерным: перемещения, деформации и напряжения — функции двух координат, например $x$ и $r$ (положение точки по длине и толщине оболочки). Третью координату $\varphi$ можно исключить из рассмотрения ввиду «равноправия» всех точек сечения, лежащих на одной окружности с центром на оси вращения. Аналогичным образом исключается и время.

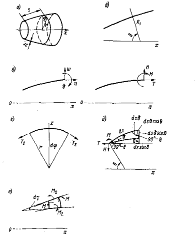


Рис. 2.10.

Использование общепринятых гипотез Лява—Кирхгофа, согласно которым предполагается, что любые нормали к срединной поверхности оболочки остаются прямыми и нормальными к ней и после деформации, позволяет свести изучение данного псевдодвухмерного процесса к исследованию одномерного процесса деформирования срединной поверхности, зависящего лишь от положения сечения по длине оболочки.



Возьмем любое сечение оболочки с координатой $s$. Ясно (рис. 2.10, *в*), что изгиб срединной поверхности характеризуется следующими шестью параметрами: перемещением $w$, направленным вдоль оси вращения оболочки; перемещением $u$, направленным перпендикулярно оси вращения; углом поворота меридиана $\vartheta$; усилием $T$, направленным вдоль оси вращения; усилием $H$, направленным перпендикулярно оси вращения; моментом $M$. Положительные направления параметров указаны стрелками. Таким образом, *в итоге будем исследовать одномерный шестипараметрический процесс.*[1]

Исходные дифференциальные уравнения задачи выведем из рассмотрения деформации элемента оболочки длиной $ds$. При этом будем считать перемещения и углы поворота малыми, а законы деформирования материала — линейными. Кроме того, будем учитывать малость значений относительных деформаций $\varepsilon$ по сравнению с единицей. Внешнюю нагрузку разделим на осевую $q_3$ и радиальную $q_1$ составляющие. Усилия $H$, $M$, $T$ отнесем к единице длины направляющей окружности, а $q_1$ и $q_3$ — к единице поверхности.

Выделим четырьмя сечениями, нормальными к срединной поверхности, малый элемент (рис. 2.11, *а*) и рассмотрим его равновесие. Из условия равновесия сил вдоль оси $x$ следует (рис. 2.11, *б*)

$$-T(r+w)2\pi+(T+dT)(r+dr+w+dw)2\pi+q_3'(r+w)2\pi ds=0$$

или после возможных сокращений, отбрасывания малых членов, согласно сделанным допущениям, и деления на $rds$

$$\frac{dT}{ds}+T\frac{dr}{rds}+q_3=0.$$

Но из геометрических соотношений (рис. 2.11, *в*) ясно, что

$$\frac{dr}{ds}=\cos\theta.$$

Следовательно, в окончательном виде можно записать

$$\frac{dT}{ds}=-\left(\frac{\cos\theta}{r}T+q_s\right). \tag{2.36}$$

Для вывода второго уравнения спроектируем все усилия [включая усилие $T_2$, которое возникает вследствие деформации $w$ кольцевого элемента оболочки (см. рис. 2.10, *г*)] на ось $z$, нормальную к оси $x$. Будем иметь

$$-H(r+w)d\varphi+(H+dH)(r+dr+w+$$
$$+dw)d\varphi+q_1(r+w)d\varphi ds-T_2dsd\varphi=0.$$

[1] В общем случае при наличии внешних скручивающих моментов осесимметричное деформирование должно было бы характеризоваться еще двумя величинами: перемещением $v$ по касательной к направляющей окружности и скручивающим моментом $M_{\text{кр}}$. Однако при действии лишь поперечных нагрузок указанные величины тождественно равны нулю.

Отбросив малые члены, разделив на $rdsd\varphi$ и учтя, что

$$T_2=\frac{Eh}{r}w+\mu T\cos\theta+\mu H\sin\theta,$$

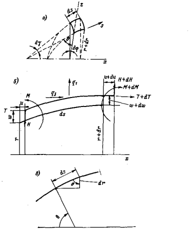



Рис. 2.11.

окончательно уравнение для $dH/ds$ приводим к виду

$$\frac{dH}{ds}=-(1-\mu)\frac{\cos\theta}{r}H+\frac{Eh}{r^2}w+\mu\frac{\sin\theta}{r}T-q_1. \qquad (2.36а)$$

Условие равновесия моментов относительно кромки $r+dr$ малого элемента (см. рис. 2.10, *д*, *е* и рис. 2.11, *а*) дает

$$-M(r+w)\,d\varphi+(M+dM)(r+dr+w+dw)\,d\varphi-$$
$$-H(r+w)\,d\varphi\,[ds\sin\theta+ds\,\vartheta\cos\theta]+T(r+w)\,[ds\cos\theta-$$
$$-ds\,\vartheta\sin\theta]\,d\varphi-M_2 ds\,d\gamma=0$$



или после отбрасывания малых членов с учетом соотношений

$$M_2=\frac{Eh^3}{12}\varkappa_2+\mu M;$$

$$\varkappa_2=\frac{\vartheta\cos\theta}{r}; \qquad (2.37)$$

$$\frac{dr}{ds}=\cos\theta,$$

$$\frac{dM}{ds}=-(1-\mu)\frac{\cos\theta}{r}M+\lambda\vartheta+H(\sin\theta+\vartheta\cos\theta)-$$
$$-T(\cos\theta-\vartheta\sin\theta), \qquad (2.36б)$$

где

$$\lambda=\frac{Eh^3}{12}\frac{\cos^2\theta}{r^2}, \qquad (2.38)$$

Для вывода трех остальных уравнений переноса нужно использовать известные из теории оболочек [1] соотношения упругости

$$M=\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}(\varkappa_1+\mu\varkappa_2);$$

$$\varkappa_1=\frac{d\vartheta}{ds}; \qquad (2.39)$$

$$\varkappa_2=\frac{\vartheta\cos\theta}{r}.$$

Отсюда

$$\frac{d\vartheta}{ds}=\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3}M-\mu\frac{\vartheta\cos\theta}{r}. \qquad (2.36в)$$

Кроме того, известно [1], что

$$\varepsilon_1=\frac{dw}{ds}\cos\theta+\frac{du}{ds}\sin\theta;$$

$$\vartheta=-\frac{dw}{ds}\sin\theta+\frac{du}{ds}\cos\theta;$$

$$T_1=\frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2);$$

$$T_2=\frac{Eh}{1-\mu^2}(\varepsilon_2+\mu\varepsilon_1),$$

где $\varepsilon_1$ — продольная относительная деформация волокна.

Путем несложных преобразований получаем

$$\frac{dw}{ds}=\frac{1-\mu^2}{Eh}(T\sin\theta\cos\theta+H\cos^2\theta)-\mu\frac{w}{r}\cos\theta-\vartheta\sin\theta; \quad (2.36г)$$

$$\frac{du}{ds}=\frac{1-\mu^2}{Eh}(T\sin^2\theta+H\sin\theta\cos\theta)-\mu\frac{w}{r}\sin\theta+\vartheta\cos 0. \quad (2.36д)$$

Таким образом, окончательно система исходных уравнений приобретает вид

$$\frac{dT}{ds}=-\left[\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}T+q_3(s)\right]; \qquad (2.40)$$

$$\frac{du}{ds}=\frac{1-\mu^2}{Eh(s)}[T\sin^2\theta(s)+H\sin\theta(s)\cos\theta(s)]-$$

$$-\mu\frac{w}{r(s)}\sin 0(s)+\vartheta\cos 0(s),$$

а также

$$\frac{dH}{ds}=-(1-\mu)\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}H+\frac{Eh(s)}{r^2(s)}w+\mu\frac{\sin\theta(s)}{r(s)}T-q_1(s),$$

$$\frac{dM}{ds}=-(1-\mu)\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}M+\lambda(s)\vartheta+H\sin\theta(s)+$$

$$+\underline{H\vartheta\cos\theta(s)}-T\cos\theta(s)+\underline{T\vartheta\sin\theta(s)}, \qquad (2.41)$$

$$\frac{dw}{ds}=\frac{1-\mu^2}{Eh(s)}[T\sin\theta(s)\cos 0(s)+H\cos^2\theta(s)]-$$

$$-\mu\frac{w}{r(s)}\cos\theta(s)-\vartheta\sin\theta(s),$$

$$\frac{d\vartheta}{ds}=\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3(s)}M-\mu\frac{\vartheta\cos\theta(s)}{r(s)}.$$

Целесообразность деления системы на две будет объяснена ниже.

*Несвязанные группы граничных условий, характерные для* большинства задач теории тонких оболочек, записываются так:

$$u(0)=H(0)A_{31}^{(0)}+M(0)A_{32}^{(0)}+T(0)A_{33}^{(0)};$$

$$w(0)=H(0)A_{11}^{(0)}+M(0)A_{12}^{(0)}+T(0)A_{13}^{(0)};$$

$$\vartheta(0)=H(0)A_{21}^{(0)}+M(0)A_{22}^{(0)}+T(0)A_{23}^{(0)}; \qquad (2.41а)$$

$$u(l)=-H(l)A_{31}^{(l)}+M(l)A_{32}^{(l)}+T(l)A_{33}^{(l)};$$

$$w(l)=-H(l)A_{11}^{(l)}+M(l)A_{12}^{(l)}+T(l)A_{13}^{(l)};$$

$$\vartheta(l)=-H(l)A_{21}^{(l)}+M(l)A_{22}^{(l)}+T(l)A_{23}^{(l)}.$$

Здесь $A_{ij}^{(0)}$ и $A_{ij}^{(l)}$ — коэффициенты податливости опорных конструкций.[1]

[1] Система и смысл двойной индексации будут ясны из дальнейшего изложения.



В наиболее простом частном случае круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины имеем $\cos\theta=0$, $\sin\theta=1$, $h(s)=h$, $r(s)=r$, $s=x$.

Тогда второе уравнение (2.40) приобретает вид

$$\frac{du}{dx}=\frac{1-\mu^2}{Eh}T-\mu\frac{w}{r}. \qquad (2.40а)$$

Если оболочка не закреплена в осевом направлении и загружена гидростатическим давлением, то вместо первого уравнения (2.40) имеем

$$T=T_0=\frac{-pr}{2},$$

где $(-p)$ — наружное давление.

Четыре уравнения (2.41) записываются в виде

$$\frac{dH}{dx}=\frac{Eh}{r^2}w+\mu\frac{T(x)}{r}-q_1(x);$$

$$\frac{dM}{dx}=H+T(x)\vartheta; \qquad (2.41б)$$

$$\frac{dw}{dx}=-\vartheta;$$

$$\frac{d\vartheta}{dx}=\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3}M.$$

Исключим теперь из (2.41б) $M$, $H$ и $\vartheta$, полагая $T=T_0$. После преобразований получаем

$$\frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}\frac{d^4w}{dx^4}-T_0\frac{d^2w}{dx^2}+\frac{Eh}{r^2}w=q_1(x)-\mu\frac{T_0}{r}. \qquad (2.41в)$$

*Уравнения (2.40а) и (2.41в), как и следовало ожидать,* совпадают с известными уравнениями П. Ф. Папковича, рассмотревшего сложный изгиб круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины при постоянной осевой силе.

Если оболочка на всем ее протяжении гладкая и ничем не подкреплена, сосредоточенных усилий к ней не приложено и скачков нагрузки нет, т. е. коэффициенты системы (2.40), (2.41), а также функции $q_1(s)$ и $q_3(s)$ непрерывны на всем участке интегрирования, то, согласно общей теории, применительно к этой системе выполняются условия существования и единственности решения: через любую точку $x=x_0$ в пределах тела оболочки с заданными произвольными значениями $T(x_0)$, $H(x_0)$, $M(x_0)$, $w(x_0)$, $u(x_0)$ и $\vartheta(x_0)$ проходит одна интегральная кривая.

Однако на практике, как правило, мы имеем дело с подкрепленными оболочками, у которых возможны «сломы» и скачкообразные изменения толщины; к оболочкам могут быть приложены сосредоточенные внешние усилия и т. д. В этих случаях условия единственности решения системы будут нарушены. Это вполне понятно: уравнения (2.40), (2.41) по самому смыслу их не содержат необходимой информации о протекании процесса в точках нарушения упомянутых условий. Следовательно, необходимо ввести дополнительную информацию, т. е. записать условия сопряжения различных участков оболочки.

Так как нарушения гладкости в $q_1(s)$ и $q_3(s)$ не могут привести к скачкам в значениях выбранных нами внутренних параметров процесса, в местах сломов, а также скачков толщины и интенсивности нагрузок выполняются условия

$$\begin{aligned} &u(s_k+0)=u(s_k-0); \quad w(s_k+0)=w(s_k-0);\\ &\vartheta(s_k+0)=\vartheta(s_k-0); \quad T(s_k+0)=T(s_k-0);\\ &M(s_k+0)=M(s_k-0); \quad H(s_k+0)=H(s_k-0). \end{aligned} \tag{2.42}$$

Здесь $s_k$ — координата сечения, где нарушается гладкость; $s_k-0$ — *сечение непосредственно перед* $s_k$; $s_k+0$ — *сечение непосредственно за* $s_k$.

Сказанное относится к случаю, когда срединная поверхность непрерывна. При нарушении этого условия в месте скачкообразного изменения толщины появляются статически определимые сосредоточенные моменты $M_д$, которые нужно учесть дополнительно.

Если в сечении $s_k$ приложены сосредоточенные усилия $T_{0,k}$, $H_{0,k}$, $M_{0,k}$, то условия сопряжения примут вид

$$\begin{aligned} &u(s_k+0)=u(s_k-0); \quad w(s_k+0)=w(s_k-0);\\ &\vartheta(s_k+0)=\vartheta(s_k-0); \quad T(s_k+0)=T(s_k-0)-T_{0k};\\ &M(s_k+0)=M(s_k-0)-M_{0k}; \quad H(s_k+0)=H(s_k-0)-H_{0k}. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Наконец, если в сечении $s_k$ оболочка подкреплена шпангоутом симметричного профиля, то

$$\begin{aligned} &u(s_k+0)=u(s_k-0); \quad w(s_k+0)=w(s_k-0);\\ &\vartheta(s_k+0)=\vartheta(s_k-0); \quad T(s_k+0)=T(s_k-0);\\ &H(s_k+0)=H(s_k-0)+\frac{w(s_k-0)}{A_{11}^{(ш)}};\\ &M(s_k+0)=M(s_k-0)+\frac{\vartheta(s_k-0)}{A_{22}^{(ш)}}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Здесь через $A_{ij}^{(ш)}$ обозначены коэффициенты податливости шпангоутов (рис. 2.12): $A_{11}^{(ш)}$ — вертикальное смещение $w$ верхней кромки шпангоута от единичной погонной силы $R=1$; $A_{22}^{(ш)}$ — угол поворота сечения $\vartheta$ стенки шпангоута от единичного погонного момента $M=1$.



Допустим теперь, что шпангоут несимметричен и обладает кроме $A_{11}^{(ш)}$ и $A_{22}^{(ш)}$ коэффициентами податливости $A_{12}^{(ш)}$ и $A_{21}^{(ш)}$, которые равны вертикальному смещению $w$ от единичного момента $M_k=1$ или углу поворота сечения стенки шпангоута от силы $R=1$. Тогда

$$w=RA_{11}^{(ш)}+M_kA_{12}^{(ш)};$$
$$\vartheta=RA_{21}^{(ш)}+M_kA_{22}^{(ш)},$$

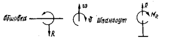



Рис. 2.12.

отсюда

$$R=\frac{w-\dfrac{\vartheta}{A_{22}^{(ш)}}A_{12}^{(ш)}}{A_{11}^{(ш)}-\dfrac{\left(A_{12}^{(ш)}\right)^2}{A_{22}^{(ш)}}};$$

$$M_k=\frac{\vartheta-\dfrac{w}{A_{11}^{(ш)}}A_{12}^{(ш)}}{A_{22}^{(ш)}-\dfrac{\left(A_{12}^{(ш)}\right)^2}{A_{11}^{(ш)}}}.$$

Следовательно,

$$u(s_k+0)=u(s_k-0); \quad w(s_k+0)=w(s_k-0);$$
$$\vartheta(s_k+0)=\vartheta(s_k-0); \quad T(s_k+0)=T(s_k-0);$$

$$H(s_k+0)=H(s_k-0)+\frac{w(s_k-0)}{A_{11}^{(ш)}}\,\frac{1-\dfrac{\vartheta(s_k-0)}{w(s_k-0)}\dfrac{A_{12}^{(ш)}}{A_{22}^{(ш)}}}{1-\dfrac{\left(A_{12}^{(ш)}\right)^2}{A_{11}^{(ш)}A_{12}^{(ш)}}}; \quad (2.45)$$

$$M(s_k+0)=M(s_k-0)+\frac{\vartheta(s_k-0)}{A_{22}^{(ш)}}\,\frac{1-\dfrac{w(s_k-0)}{\vartheta(s_k-0)}\dfrac{A_{12}^{(ш)}}{A_{11}^{(ш)}}}{1-\dfrac{\left(A_{12}^{(ш)}\right)^2}{A_{11}^{(ш)}A_{22}^{(ш)}}}.$$

Рассмотрим определение $A_{11}^{(ш)}$ и $A_{22}^{(ш)}$ у симметричного шпангоута.

Начнем с $A_{11}^{(\text{ш})}$. Расчетная схема здесь такова. Внутренний шпангоут таврового или полособульбового профиля разделяется на круглую кольцевую стенку *1* толщиной $h_c$ и поясок *2* (рис. 2.13, *а*). На наружную кромку пластины действует всесторонняя равномерная нагрузка интенсивностью $p = 1$. Требуется определить радиальное смещение $u = u(r_1)$ наружной кромки пластины.

Поясок *2*, в свою очередь, обладает некоторой податливостью по отношению к обжатию. Пусть $k$ — коэффициент жесткости кольца, т. е. интенсивность реакции его обжатия при $u(r_2) = 1$.

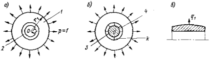


Рис. 2.13.

Тогда расчетная схема преобразуется к виду, представленному на рис. 2.13, *б*, где *3* — некоторая жесткая вставка; *4* — промежуточное упругое основание для стенки, имеющее коэффициент жесткости $k$.

Определение $k$ большой сложности не представляет. В первом (обычно вполне достаточном) приближении его можно считать равным $k = EF/r_2^2$, где $F$ — площадь сечения пояска.

Если мы имеем тавровый профиль с широким пояском, то для вычисления $k$ нужно рассмотреть задачу о *цилиндрической оболочке постоянной или переменной толщины, загруженной в пролете сосредоточенной силой* $q_1$ (рис. 2.13, *в*). Такая задача всегда может быть решена либо в замкнутом виде (для случая постоянной толщины), *либо, например, методом парциальных откликов*.

Расчет конструкции, показанной на рис. 2.13, *б*, представляет собой, по существу, модификацию решения известной задачи Ляме о деформации толстостенных цилиндров, загруженных равномерным давлением. Используя известное решение этой задачи, получим

$$A_{11}^{(\text{ш})} = u(r_1) = \frac{1-\mu}{Eh_c}\left[1 + \frac{\dfrac{1}{r_1^2}}{\dfrac{1}{r_2^2}\,\dfrac{1+k\dfrac{1+\mu}{Eh_c}r_2}{1-k\dfrac{1-\mu}{Eh_c}r_2} - \dfrac{1}{r_1^2}}\right] r_1 +$$

$$+\frac{1+\mu}{Eh_c}\,\frac{\dfrac{1}{r_1}}{\dfrac{1}{r_2^2}\,\dfrac{1+k\dfrac{1+\mu}{Eh_c}r_2}{1-k\dfrac{1-\mu}{Eh_c}r_2} - \dfrac{1}{r_1^2}}.$$

Расчетная схема для наружного шпангоута очевидна. Здесь

$$A_{11}^{(\text{ш})} = u(r_2) = -\frac{1-\mu}{Eh_c}\left[1 + \frac{\dfrac{1}{r_2^2}}{\dfrac{1}{r_1^2}\,\dfrac{1-k\dfrac{1+\mu}{Eh_c}r_1}{1+k\dfrac{1-\mu}{Eh_c}r_1} - \dfrac{1}{r_2^2}}\right] r_2 +$$

$$+\frac{1+\mu}{Eh_c}\,\frac{\dfrac{1}{r_2}}{\dfrac{1}{r_2^2} - \dfrac{1}{r_1^2}\,\dfrac{1-k\dfrac{1+\mu}{Eh_c}r_1}{1+k\dfrac{1-\mu}{Eh_c}r_1}}.$$

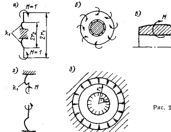


Рис. 2.14.

Приступим теперь к вычислению коэффициента податливости $A_{22}^{(\text{ш})}$. *Для внутреннего шпангоута схема загрузки стенки* показана на рис. 2.14, *а*, *б*. По наружной кромке на нее действует внешний изгибающий момент интенсивностью $M = 1$, внутренняя кромка заделана в отношении углов поворота.

Коэффициент жесткости $k_1$ в первом приближении может быть найден на основе известного решения о кручении упругого кольца $k_1 = Eh_{п}l_{п}^3/12r_{п}^2$, где $l$ — ширина пояска; $h_{п}$ — его толщина; $r_{п}$ — радиус окружности, на которой лежат центры тяжести сечений пояска.

При необходимости уточнений этот коэффициент следует находить из решения задачи о деформациях цилиндрической оболочки, загруженной в середине пролета сосредоточенным моментом (рис. 2.14, *в*).

При наличии наружного шпангоута приходим к схеме, показанной на рис. 2.14, *г*, *д*.

Воспользовавшись известным решением об изгибе кольцевой пластины радиальными моментами, имеем: для внутреннего шпангоута

$$A_{22}^{(ш)} = \vartheta(r_1) = \frac{r_1}{D(1+\mu)}\left[1 + \frac{\frac{1}{r_1^2}}{\frac{1}{r_2^2}\,\frac{1 + k_1\frac{r_2}{D(1-\mu)}}{1 - k_1\frac{r_2}{D(1+\mu)}} - \frac{1}{r_1^2}}\right] +$$

$$+ \frac{\frac{1}{r_1}}{D(1-\mu)}\,\frac{1}{\frac{1}{r_2^2}\,\frac{1 + k_1\frac{r_2}{D(1-\mu)}}{1 - k_1\frac{r_2}{D(1+\mu)}} - \frac{1}{r_1^2}};$$

для наружного шпангоута

$$A_{22}^{(ш)} = \vartheta(fr_2) = -\frac{r_2}{D(1-\mu)}\left[1 - \frac{\frac{1}{r_2^2}}{\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\,\frac{1 - k_1\frac{r_1}{D(1-\mu)}}{1 + k_1\frac{r_1}{D(1+\mu)}}}\right] +$$

$$+ \frac{1}{D(1-\mu)}\,\frac{1}{r_2}\,\frac{1}{\frac{1}{r_2^2} - \frac{1}{r_1^2}\,\frac{1 - k_1\frac{r_1}{D(1-\mu)}}{1 + k_1\frac{r_1}{D(1+\mu)}}},$$

где $D = \dfrac{Eh_c^3}{12(1-\mu^2)}$ — цилиндрическая жесткость пластины.

Вместо приведенных выше точных зависимостей для определения коэффициентов податливости шпангоутов часто можно пользо-



ваться приближенными зависимостями, полученными из расчета шпангоута как кольца:

$$A_{11}^{(ш)} = \frac{r_{ц}^2}{EF}, \qquad A_{22}^{(ш)} = \frac{r_{ц}^2}{EI_{min}}, \tag{2.46}$$

где $r_{ц}$ — радиус, соответствующий центру тяжести поперечного сечения шпангоута; $F$ — площадь поперечного сечения шпангоута; $I$ — момент инерции поперечного сечения относительно вертикальной оси симметрии шпангоута.

Подобно тому как мы это делали выше для шпангоута с симметричным профилем, можно найти точные значения коэффициентов податливости шпангоутов с несимметричным профилем. Однако несимметричные профили имеют лишь сравнительно невысокие катаные шпангоуты, что допускает пользоваться зависимостями, полученными для кольца (рис. 2.15). Поэтому сразу записываем

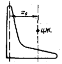



Рис. 2.15.

$$A_{11}^{(ш)} = \frac{r_{ц}^2}{EF} + \frac{x_0^2 r_{ц}^2}{EI_{min}};$$

$$A_{12}^{(ш)} = A_{21}^{(ш)} = \frac{x_0^2 r_{ц}^2}{EI_{min}}; \tag{2.47}$$

$$A_{22}^{(ш)} = \frac{r_{ц}^2}{EI_{min}},$$

где $x_0$ — расстояние по оси $x$ между стенкой профиля и его центром жесткости (Ц.Ж.).

В данном параграфе мы ограничились, по существу, более простыми случаями линейных дифференциальных уравнений [нелинейными являлись только подчеркнутые члены в системе (2.41)].

### § 8. Устойчивость движения и произвольных односторонних процессов. Динамический критерий устойчивости в строительной механике

Продолжая рассмотрение общей проблемы исследования одномерных процессов, обратимся к вопросам устойчивости движения систем и, как следствие, к вопросам устойчивости их равновесия. Начнем с понятий, введенных А. М. Ляпуновым и его последователями [9, 17, 18]. Применение их в строительной механике естественным образом приводит к динамическому критерию устойчивости конструкций.

1. Устойчивость движения в малом и в большом. Общие представления. Движением будем называть в общем случае любые изменения в рассматриваемой *физической системе, происходящие как функции времени*, а не только как механические перемещения.

Пусть движение данной физической системы описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, имеющими нормальную форму

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) (i=1, 2, \ldots, n). \quad (2.48)$$

К ней, как известно, легко приводится любую систему дифференциальных уравнений, разрешенную относительно старших производных всех неизвестных. В частности, если дано уравнение $n$-го порядка

$$y^{(n)}=F\left(t, y, \ldots, y^{(n-1)}\right), \quad (2.49)$$

то оно сводится к (2.48) подстановкой

$$y=x_1,\ y'=x_2,\ \ldots,\ y^{(n-1)}=x_n, \quad (2.50)$$

которая дает

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\ \frac{dx_2}{dt}=x_3,\ \ldots,\ \frac{dx_{n-1}}{dt}=x_n; \quad (2.51)$$

$$\frac{dx_n}{dt}=F(t, x_1, \ldots, x_n).$$

Пусть правые части (2.48) заданы в области $-\infty<x_i<+\infty$ и непрерывны в ней. Коэффициенты уравнений предполагаются не зависящими от $x_1$. Тогда из общей теории дифференциальных уравнений следует, что каждой совокупности вещественных чисел $t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$ из указанной выше области отвечает одно и *только одно частное решение системы* (2.48):

$$x_i=x_i(t, t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}),\ (i=1, 2, \ldots, n), \quad (2.52)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x_i=x_{i0} \text{ при } t=t_0, (i=1, 2, \ldots, n). \quad (2.53)$$

Это решение непрерывно и даже непрерывно дифференцируется по $t$.

Движение, определяемое частным решением (2.52) при точно заданных начальных условиях (2.53), называется невозмущенным движением. Оно представляет собой базовый объект в совокупности движений данной системы, рассматриваемых как реальные объекты данного типа.

Невозмущенное движение (2.52) называется устойчивым в малом относительно возмущений начальных условий (устойчивым по Ляпунову), если по любому вещественному числу $\varepsilon$ можно указать такое вещественное число $\delta=\delta(t_0, \varepsilon)$, при котором в случае $\sum_{i=1}^{n}(x_{i0}-x_{i0}^{1})^2<\delta^2$ будем иметь

$$\sum_{i=1}^{n}\left[x_i(t, t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})-\right.$$
$$\left.-x_i(t, t_0, x_{10}^{1}, x_{20}^{1}, \ldots, x_{n0}^{1})\right]^2<\varepsilon^2$$

при любом $t\geqslant t_0$.



Если число $\delta$ можно выбрать не зависящим от $t_0$, т. е. $\delta=\delta(\varepsilon)$, то говорят, что невозмущенное движение равномерно устойчиво в малом.

Смысл этого определения совершенно ясен. Имеется в виду, что при повторяющихся процессах, практически одинаковых с базовым, неизбежен разброс в начальных условиях и вместо «истинных» условий $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$ реализуются условия $x_{10}^{1}, x_{20}^{1}, \ldots, x_{n0}^{1}$, которые немного отличаются от первых. Разность $x_{i0}-x_{i0}^{1}$ определяет разброс (возмущение) в начальном условии $x_{i0}$. Из-за него вместо невозмущенного движения $x_i(t, t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ будет реализовано возмущенное движение $x_i(t, t_0, x_{10}^{1}, x_{20}^{1}, \ldots, x_{n0}^{1})$. *Возникает вопрос об отличиях возмущенного и невозмущенного движений.* Согласно определению, движения, практически идентичные с базовым, устойчивы, если мы можем сколь угодно приблизить возмущенное движение к невозмущенному, сделав достаточно малыми возмущения.

Очень важно подчеркнуть, что возмущенное и невозмущенное *движения должны быть близки и на бесконечности, когда $t$ больше* любого наперед заданного числа $T$. В противном случае, т. е. при $t_0\leqslant t\leqslant T$, где $T$ — сколь угодно большое, но конечное число, движение, определяемое практически любой системой (2.48), всегда устойчиво в малом.

Действительно, в теории дифференциальных уравнений при *весьма общих предположениях доказана непрерывность решений* от начальных условий. Следовательно, на конечном интервале изменения независимой переменной мы всегда можем добиться сколь угодной близости соответствующих интегральных кривых, если начальные условия, определяющие эти кривые при некотором фиксированном значении переменной, достаточно близки друг к другу.

Невозмущенное движение (2.52) называется неустойчивым в малом относительно возмущений в начальных условиях (неустойчивым по Ляпунову), если существует, по крайней мере, одно вещественное число $\varepsilon$, при котором, какое бы вещественное число $\delta$ мы ни взяли, найдется такой набор чисел $x_{10}^{1}, x_{20}^{1}, \ldots, x_{n0}^{1}$, что в случае $\sum_{i=1}^{n}(x_{i0}-x_{i0}^{1})^2<\delta^2$ будет

$$\sum_{i=1}^{n}\left[x_i(t, t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})-\right.$$
$$\left.-x_i(t, t_0, x_{10}^{1}, x_{20}^{1}, \ldots, x_{n0}^{1})\right]^2\geqslant\varepsilon^2$$

хотя бы для одного значения $t>t_0$.

Заметим, что само понятие устойчивости или неустойчивости по Ляпунову не требует непрерывности функций $f_i$ в уравнениях (2.48).

Если невозмущенное движение (2.52) не только устойчиво в малом, но и удовлетворяет условию $\lim\limits_{\to\infty}|x_{i0}-x_{i0}^{1}|=0$ при $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_{i0}-x_{i0}^{1})^2<\delta^2$, то оно называется асимптотически устойчивым в малом. Если при наличии асимптотической устойчивости число $\delta=\delta(\varepsilon,\ t_0)$ можно выбрать не зависящим от $t_0$, то невозмущенное движение равномерно и асимптотически устойчиво в малом.

Рассмотрим примеры. Пусть движение определяется уравнением $dx/dt=-a^2x$ при начальном условии $x(t_0)=x_0$. Ясно, что $x(t)=x_0e^{-a^2(t-t_0)}$ асимптотически устойчиво.

В самом деле, при $t>t_0>0$

$$(x_0e^{-a^2(t-t_0)}-x_0^1e^{-a^2(t-t_0)})^2=e^{-2a^2(t-t_0)}(x-x_0^1)^2<\varepsilon^2,$$

если $(x_0-x_0^1)^2\leqslant\delta^2<\varepsilon^2$. Кроме того,

$$\lim_{t\to\infty}|e^{-a^2(t-t_0)}(x_0-x_0^1)|=0.$$

Это движение и равномерно асимптотически устойчиво, поскольку $\delta$ не зависит от $t_0$.

Если $dx/dt=a^2x$ при начальном условии $x(t_0)=x_0$, то имеем движение $x(t)=x_0e^{a^2(t-t_0)}$. Оно неустойчиво, поскольку при любой сколь угодно малой разности $|x_0-x_0^1|$ нельзя обеспечить неравенства $(x_0-x_0^1)^2e^{2a^2(t-t_0)}<\varepsilon^2$, если $t$ достаточно велико.

Исследование устойчивости движения удобно свести к исследованию устойчивости равновесия. Для этого введем новое переменное

$$y_i=x_i-x_i(t,\ t_0,\ x_{10},\ x_{20},\ \ldots,\ x_{n0}). \tag{2.54}$$

Продифференцировав (2.54) по $t$ с учетом (2.48), имеем

$$\begin{aligned}\frac{dy_i}{dt}={}&f_i(t,x_1,x_2,\ \ldots,\ x_n)-f_i[t,x_1(t_1,t_0,x_{10},x_{20},\ \ldots,\ x_{n0}),\\ &x_2(t,t_0,x_{10},x_{20},\ \ldots,\ x_{n0}),\ \ldots,\ x_n(t,t_0,x_{10}\,x_{20},\ \ldots,\ x_{n0})]=\\ ={}&f_i[t,x_1(t,t_0,x_{10},x_{20},\ \ldots,\ x_{n0})+y_1,x_2(t,t_0,x_{10},\ \ldots,\ x_{n0})+\\ &+y_2,\ \ldots,\ x_n(t,t_0,x_{10},x_{20},\ \ldots,\ x_{n0})+y_n]-\\ &-f_i[t,x_1(t,t_0,x_{10},x_{20},\ \ldots,\ x_{n0}),x_2(t,t_0,x_{10},\ \ldots,\ x_{n0}),\\ &,\ \ldots,\ x_n(t,t_0,x_{10},x_{20},\ \ldots,\ x_{n0})]=G_i(t,y_1,y_2,\ \ldots,\ y_n).\end{aligned}$$

Система

$$\frac{dy_i}{dt}=G(t,y_1,\ \ldots,\ y_n),\ (i=1,2,\ \ldots,\ n) \tag{2.55}$$

получена из (2.48). Невозмущенному решению (2.52) системы (2.48) при начальных условиях (2.53) в системе (2.55) соответствует нулевое решение $y_i(t)\equiv0$ при всех $t\geqslant t_0$ и $i=1,2,\ \ldots,\ n$.



Нулевое решение системы (2.55), отнесенной к моменту времени $t_0$, называется устойчивым в малом относительно возмущений в начальных условиях (устойчивым по Ляпунову), когда по любому вещественному $\varepsilon$ можно указать такое вещественное число $\delta=\delta(\varepsilon,\ t_0)$, при котором в случае $\sum\limits_{i=1}^{n}y_{i0}^2<\delta^2$ будет

$$\sum_{i=1}^{n}y_i^2(t,t_0,y_{10},y_{20},\ \ldots,\ y_{n0})<\varepsilon^2$$

при любом $t\geqslant t_0$.

Если при наличии устойчивости число $\delta=\delta(\varepsilon,\ t)$ можно выбрать не зависящим от $t_0$, т. е. $\delta=\delta(\varepsilon)$, то нулевое решение системы (2.55) равномерно устойчиво в малом относительно $t_0\geqslant0$.

Нулевое решение системы (2.55) называется асимптотически устойчивым в малом, когда при наличии устойчивости имеем

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^{n}y_i^2(t,t_0,y_{10},y_{20},\ \ldots,\ y_{n0})=0.$$

Если в случае асимптотической устойчивости число $\delta=\delta(\varepsilon,\ t_0)$ можно выбрать не зависящим от $t_0$, т. е. $\delta=\delta(\varepsilon)$, то решение равномерно асимптотически устойчиво в малом.

Приведенные выше формулировки позволяют рассматривать устойчивость процессов движения, когда возмущения (разбросы) при повторных процессах возможны только в начальных условиях. Однако в действительности эти возмущения возникают и в коэффициентах уравнений (параметрах физической системы) и в функциях — свободных членах (внешних воздействиях).

Указанное обстоятельство может быть учтено введением в правую часть исходной системы (2.48) добавочных функций

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,x_2,\ \ldots,\ x_n)+R_i(t,\ x_1,x_2,\ \ldots,\ x_n); \tag{2.56}$$

невозмущенные начальные условия остаются прежними.

Если разброс в параметрах и во внешних воздействиях прекращается при некотором конечном $t=T>t_0$, то при $t\geqslant T$ мы снова возвращаемся к уравнениям (2.48), но уже с несколько измененными условиями $x_{i0}(T)$ в точке $T$.

В теории дифференциальных уравнений при весьма общих предположениях доказывается теорема о непрерывной зависимости частных решений от параметров в правых частях этих уравнений. Если упомянутые условия выполняются, то, делая $|R_i(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)|$ достаточно малой на всем протяжении от $t_0$ до $T$, мы получим сколь угодно малыми изменения начальных условий $x_{i0}(T)$. Таким образом, исследование устойчивости движения в малом по отношению к разбросам в параметрах физической системы *и во внешних воздействиях сводится к исследованию его устойчивости* в начальных условиях.

Однако остается открытым вопрос об устойчивости движения по отношению к неограниченным по времени возмущениям $R_j$.

Подстановка (2.54) позволяет преобразовать систему (2.56) в другую:

$$\frac{dy_i}{dt} = G(t_0, y_1, \ldots, y_n) + Q(t, y_1, \ldots, y_n), \tag{2.57}$$

для которой нужно исследовать нулевое решение.

Нулевое решение системы (2.57) называется устойчивым в малом по отношению к возмущениям в начальных условиях и не ограниченным по времени возмущениям $Q_i$ если для каждого вещественного $\varepsilon$ можно указать такие вещественные $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon, t_0)$, $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon, t_0)$, при которых из неравенств $\sum_{i=1}^{n} y_{i0}^2 < \delta_1^2$, $\sum_{i=1}^{n} Q_i(t \geqslant t_0)^2 < \delta_2^2$ следует $\sum_{i=1}^{n} y_i^2(t, t_0, y_1, \ldots, y_n) < \varepsilon^2$ при любом $t \geqslant t_0$.

Исследования *И. Г. Малкина* [18] показали, что свойство устойчивости по отношению к не ограниченным во времени возмущениям чрезвычайно близко к свойству асимптотической устойчивости по отношению к возмущениям в начальных условиях и даже почти совпадает с ним. Это, впрочем, вытекает и из физических соображений, так как асимптотическая устойчивость означает *«забывание» физической системой старых возмущений*.

Ясно, что в малом (по Ляпунову) можно анализировать не только устойчивость самих процессов, но и некоторых их функций. Соответствующие *определения легко переделываются по следующему образцу*.

Функции $F_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(k = 1, \ldots, m)$ невозмущенного *движения (2.52) называются устойчивыми в малом по отношению* к возмущениям в начальных условиях, если по любому вещественному $\varepsilon$ можно указать такое вещественное $\delta = \delta(\varepsilon, t_0)$, при котором в случае $\sum_{i=1}^{n} (x_{i0} - x_{i0}^1)^2 < \delta^2$ будет

$$\sum_{k=1}^{m} \{F_k[x_i(t, t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})] - \\ - F_k[x_i(t, t_0, x_{10}^1, x_{20}^1, \ldots, x_{n0}^1]\}^2 < \varepsilon^2$$

для любого $t > t_0$.

Согласно общему определению устойчивости объекта, при анализе устойчивости процессов движения следует оперировать конечными разбросами в параметрах генетической идентификации и конечными разбросами в интересующих нас выходных данных (параметрах результирующей идентификации). Именно это и лежит в основе так называемой технической теории устойчивости движения, которая развивается в рамках теории автоматического регулирования. Следует лишь отметить неудачное употребление слова



«техническая», наводящее на мысль о приближенности и огрублении действительности, хотя на самом деле все обстоит как раз *наоборот*.

Параметрами генетической идентификации здесь служат: а) начальные условия движения; б) параметры физической системы (*коэффициенты системы* исходных уравнений); в) внешние воздействия (функции — свободные члены). Условия генетической идентификации данного процесса с базовым могут быть заданы в виде некоторых метрических соотношений. Выбрав затем интересующие нас функции процесса (параметры результирующей идентификации) и назначив из конкретного физического анализа результирующей идентификации, нетрудно использовать непосредственно данные выше определения устойчивости в большом и различные их варианты.

При назначении параметров результирующей идентификации рассматривают как неограниченное время (установившиеся периодические процессы), так и ограниченные периоды $t_0 \leqslant t \leqslant T$.

Поясним подробнее на примерах понятие устойчивости в малом и его связь с понятием устойчивости в большом.

Возьмем класс простых автономных, т. е. не подверженных внешним воздействиям, систем. Пусть для них уравнения (2.55) приводятся к виду

$$\frac{dy}{dt} = p(t)\,y, \tag{2.58}$$

где $p(t)$ — функция, заданная при $t \geqslant 0$ и имеющая на любом конечном промежутке конечное число разрывов первого рода. Положим, далее, что возмущения могут возникать только в начальных условиях — много раз движется одна и та же система.

Общее решение (2.58) имеет вид

$$y = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau}. \tag{2.59}$$

Ясно, что: а) нулевое решение системы (2.58) устойчиво в малом *тогда и только тогда, когда функция* $\int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau$ *ограничена при* всех $t \geqslant t_0$; б) оно устойчиво асимптотически тогда и только тогда, когда, кроме того, $\lim_{t\to\infty} \int_{t_0}^{t} p(\tau)\,d\tau = -\infty$. Случай устойчивости иллюстрируется рис. 2.16, *а*, случай асимптотической устойчивости — рис. 2.16, *б*.

Пусть теперь $p(t) = \ln 10$ при $0 \leqslant t \leqslant 10$, $p(t) = 0$ при $t > 10$. Тогда решение (2.59), удовлетворяющее условию $y(0) = y_0$ будет

$$y(t) = \begin{cases} 10^t y_0 & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant 10; \\ 10^{10} y_0 & \text{при } t > 10. \end{cases}$$

Оно устойчиво в малом, однако при ничтожных начальных отклонениях $y_0 = 10^{-5}$ возникают огромные результирующие отклонения $y = 10^5$. Система, устойчивая в малом, оказывается явно неустойчивой в большом.

Если положить $p(t) = \ln 10$ при $0 \leqslant t \leqslant 10$, $p(t) = -1$ при $t > 10$, то решение будет не только устойчивым в малом, но и асимптотически устойчивым в малом. Однако прежний вывод о неустойчивости в большом при $t \approx 10$ остается в силе.

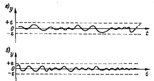



Рис. 2.16.

Если взять $p(t) = -1$ при $0 \leqslant t \leqslant 100$, $p(t) = 10$ при $t > 100$, то

$$y(t) = \begin{cases} e^{-t} y_0 \text{ при } 0 \leqslant t \leqslant 100, \\ e^{-100+10(t-100)} y_0 \text{ при } t > 100. \end{cases}$$

Здесь решение неустойчиво в малом, однако, когда время проявления интересующих нас отклонений $y$ ограничено, скажем, $t = 20$, систему можно считать устойчивой в большом.

Напомним, что в определениях устойчивости и неустойчивости движения относительно возмущений в начальных условиях компоненты начальных возмущений независимы. Однако в некоторых физических системах на начальные возмущения накладываются связи, которые выражаются аналитическими соотношениями между компонентами начальных возмущений, что эквивалентно наличию зависимостей между произвольными постоянными в общем решении системы уравнений вида (2.55). Следовательно, движение определяется не всем общим интегралом, а лишь некоторой его частью. Иногда поведение этой части общего решения отличается от поведения всего общего решения.

Если, без учета связей между начальными возмущениями, движение неустойчиво, а при наличии связей — устойчиво, то говорят о связанной (иногда об условной) устойчивости.

Аналогично можно говорить и об условной устойчивости при не ограниченных во времени возмущениях.



2. **Фазовое пространство. Отражение в нем устойчивых и неустойчивых движений.** Пусть имеется произвольная нормальная система (2.48) $n$-го порядка и начальные условия (2.53).

Если взять пространство $p_1$ мерности $n+1$, отложить по осям декартовой системы координат в этом пространстве время $t$ и значения $x_i(t, t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ согласно (2.52), то мы получим единственную интегральную кривую системы (2.48), проходящую через точку $(t_0, x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ и отражающую искомое частное решение. Само $p_1$ назовем пространством интегральных кривых.

Фазовым пространством $p_2$, связанным с $p_1$, будем называть пространство мерности $n$, которое получается из $p_1$ путем отбрасывания измерения, соответствующего $t$. Проекция интегральной кривой на пространство $p_2$ называется фазовой траекторией, отвечающей данному частному решению. Любая точка $M$ этой траектории есть функция $t$. Поэтому можно сказать, что фазовая траектория — действительно, траектория некой изображающей точки, движущейся во времени в фазовом пространстве с некоторой фазовой скоростью. Координаты изображающей точки — значения искомых переменных $x_i$, характеризующих процесс движения. Чтобы пояснить сказанное, возьмем простой случай системы второго порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, x_2);$$

$$\frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, x_2) \tag{2.60}$$

с начальными условиями

$$x_1(t_0) = x_{10}, \; x_2(t_0) = x_{20}. \tag{2.61}$$

Пространство $p_1$ интегральных кривых в данном случае будет трехмерным. По одной из осей декартовой системы координат откладывается $t$, по двум другим — значения $x_1$ и $x_2$ (рис. 2.17, *а*). Частное решение $x_1 = x_1(t, t_0, x_{10}, x_{20})$, $x_2 = x_2(t, t_0, x_{10}, x_{20})$, дает искомую интегральную кривую.

Фазовое пространство $p_2$ представляет собой плоскость с осями $x_1$ и $x_2$ (рис. 2.17, *б*). Фазовая траектория — проекцию интегральной кривой на фазовую плоскость.

Интегральные кривые, вообще говоря, не могут пересекать сами себя или образовывать касающиеся друг друга участки, так как наличие кратных точек противоречит теореме о существовании и единственности частного решения при данных начальных условиях и будет иметь место лишь при нарушении оговорок теоремы. Что касается фазовых траекторий, то здесь указанное пересечение, вполне возможно, поскольку $x_i$ в (2.52) могут быть многозначными функциями $t$. Более того, в периодических процессах эти функции бесконечнозначны, а фазовая траектория замкнута.

Семейство всех возможных фазовых траекторий системы уравнений (2.48) образует ее фазовый портрет.

Весь класс движений, описываемых системой (2.48), можно, трактовать как некий поток сплошной среды (жидкости), частицы которой совершают движения по всевозможным фазовым траекториям. Сами уравнения (2.48) выражают проекции скоростей частиц на оси координат фазового пространства.

Если в уравнения (2.48) время $t$ явно не входит, то соответствующая физическая система автономна. Автономные системы не испытывают внешних воздействий, зависящих от времени. Их фа-

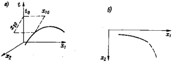



Рис. 2.17.

зовые траектории не могут пересекаться сами с собой или образовывать касающиеся друг друга участки, если только нет нарушений оговорок теоремы единственности. Последнее ясно хотя бы из физических соображений, относящихся к модели в виде потока: частица, попавшая в точку) $x_1, x_2, \dots, x_n$) при не зависящей от времени скорости, всегда будет двигаться затем строго определенным и единственным образом. При нестационарной скорости частицы в правую часть (2.48) явно входит время — эта частица может много раз попадать в одну и ту же точку, но двигаться из этой точки по-разному.

Возьмем в качестве примера систему уравнений

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\quad \frac{dx_2}{dt}=-x_1.$$

Прямой подстановкой нетрудно проверить, что она имеет общее решение

$$x_1=C_1\cos(t-C_2);\quad x_2=-C_1\sin(t-C_2).$$

Рассматривая $t$ как параметр, получим на фазовой плоскости $x_1$, $x_2$ семейство окружностей с центром в начале координат (рис. 2.18). Правая часть нашей системы не зависит от $t$ и удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности; поэтому траектории не пересекаются.

Уравнение траектории имеет вид $x_1^2+x_2^2=C_1^2$ и не зависит от $C_2$. Следовательно, все движения при фиксированном $C_1$ происходят по одной и той же траектории (но начинаются в зависимости



от $C_2$ в разных ее точках). При $C_1=0$ фазовая траектория состоит из одной точки, называемой в этом случае точкой покоя системы. Возрастание $t$ соответствует движению по часовой стрелке.

Проиллюстрируем на модели фазового пространства понятие устойчивости движения. Возьмем системы второго порядка (2.60) при условиях (2.61). Перейдя к изучению нулевого решения системы (2.55), имеющей тоже второй порядок, построим фазовую плоскость с осями $x_1$ и $x_2$ (рис. 2.19, *а*). Обязательно существующее здесь нулевое решение соответствует началу координат. Здесь расположена точка покоя.

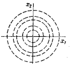



Рис. 2.18.

Опишем около начала координат квадрат со сторонами $2\varepsilon$. Вспомнив определение, видим, что решение устойчиво в малом, если при любом $\varepsilon$ можно выбрать такой квадрат со сторонами $2\delta$, при котором движение изображающей точки $M$, начинающееся внутри этого квадрата, никогда не выйдет за пределы первоначального квадрата. Случаю асимптотической устойчивости соответствует рис. 2.19, *б*, случаю неустойчивости — рис. 2.19, *в*.

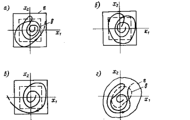



Рис. 2.19.

Мы оперируем квадратами только в силу выбранной конкретной записи ограничений для возмущений. Можно было бы принять: нулевое решение системы (2.55) является устойчивым, если (рис. 2.19, *г*) по любой заданной области допустимых возмущений (отклонений) от нулевого решения (области $\varepsilon$) мы можем указать область $\delta(\varepsilon)$, окружающую нулевое решение и обладающую тем свойством, что ни одно движение $M$, которое начинается внутри $\delta$, никогда не достигнет границы области $\varepsilon$. Впрочем, оба определения, по существу, эквивалентны: в любую область $\varepsilon$ и в любую область $\delta$ нетрудно вписать квадраты.

3. Простейшие типы точек покоя. Устойчивость нулевых решений систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Рассмотрим точку покоя (0, 0) системы однородных уравнений

$$\frac{dx_1}{dt}=a_{11}x_1+a_{12}x_2;$$
$$\frac{dx_2}{dt}=a_{21}x_1+a_{22}x_2, \tag{2.62}$$

где

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Делая обычную подстановку $x_1=\alpha_1 e^{kt}$, $x_2=\alpha_2 e^{kt}$, получаем для $k$ характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-k \end{vmatrix} = k^2-(a_{11}+a_{22})\,k+(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})=0. \tag{2.63}$$

Значения $\alpha_1$ и $\alpha_2$ с точностью до постоянного множителя определяются из любого уравнения:

$$(a_{11}-k)\,\alpha_1+a_{12}\alpha_2=0;$$
$$a_{21}\alpha_1+(a_{22}-k)\,\alpha_2=0. \tag{2.64}$$

Проанализируем возможные случаи корней характеристического уравнения.

3.1. Корни $k_1$ и $k_2$ действительны и различны. Тогда общее решение записывается в виде

$$x_1=C_1\alpha_1 e^{k_1 t}+C_2\beta_1 e^{k_2 t};$$
$$x_2=C_1\alpha_2 e^{k_1 t}+C_2\beta_2 e^{k_2 t}, \tag{2.65}$$

где $\alpha_i$ и $\beta_i$ — постоянные, определяемые из (2.64) соответственно при $k=k_1$ и $k=k_2$; $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные.

При этом возможны такие варианты:

а) если $k_1<0$ и $k_2<0$, то нулевое решение асимптотически устойчиво, поскольку из-за наличия в (2.65) множителей $e^{k_1 t}$ и $e^{k_2 t}$ все точки, находящиеся в начальный момент $t=t_0$ в любой $\delta$-окрестности начала координат, при достаточно большом $t$ переходят в любую сколь угодно малую $\varepsilon$-окрестность, а при $t\to\infty$ стремятся к началу координат (рис. 2.20, *а*). Точка покоя рассматриваемого типа называется устойчивым узлом, стрелками указано направление движения при возрастании $t$;



б) если $k_1>0$ и $k_2>0$, то нулевое решение неустойчиво. Соответствующее решение переходит в предыдущий случай при простой замене $t$ на $-t$ (рис. 2.20, *б*). Точка покоя называется неустойчивым узлом;

в) если $k_1>0$, $k_2<0$, то нулевое решение также неустойчиво, поскольку точка, движущаяся по траектории $x_1=C_1\alpha_1 e^{k_1 t}$, $x_2=C_2\alpha_2 e^{k_1 t}$, выходит из $\varepsilon$-окрестности начала координат при сколь угодно малых значениях $t$. Это прямая $I$ на фазовом портрете (рис. 2.20, *в*). Заметим, что в рассматриваемом случае существуют

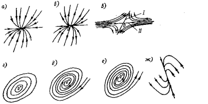



Рис. 2.20.

решения, приближающиеся к началу координат (прямая $II$ на рис. 2.20, *в*): $x_1=C_2\beta_1 e^{k_2 t}$, $x_2=C_2\beta_2 e^{k_2 t}$. Точка покоя в данном случае носит название седла.

3.2. Корни $k_1$ и $k_2$ комплексные: $k_{1,2}=p\pm qi$, $q\neq 0$. Общее решение рассматриваемой системы можно записать так:

$$x_1=e^{pt}\,(C_1\cos qt+C_2\sin qt);$$
$$x_2=e^{pt}\,(C_1^*\cos qt+C_2^*\sin qt); \tag{2.66}$$

где $C_1$ и $C_2$ — произвольные постоянные; $C_1^*$ и $C_2^*$ — некоторые линейные комбинации этих постоянных.

В этом случае возможны следующие варианты:

а) при $p=0$, $q\neq 0$ в силу периодичности вторых множителей в правой части уравнений (2.66) траектории представляют замкнутые кривые, окружающие точку покоя (рис. 2.20, *г*). Решение устойчиво, но не асимптотически. Точка покоя — центр;

б) при $p<0$, $q\neq 0$ наличие стремящегося к нулю множителя $e^{pt}$ $(p<0)$ превращает замкнутые кривые случая 3.1 в спирали, асимптотически приближающиеся при $t\to\infty$ к началу координат (рис. 2.20, *д*). Точка покоя — устойчивый фокус; последний отличается от устойчивого узла тем, что касательная к траекториям не стремится к определенному пределу при приближении точки касания к точке покоя;

в) при $p>0$, $q\neq 0$ вариант переходит в вариант б) при замене $t$ на $-t$ (рис. 2.20, *е*). Точка покоя — неустойчивый фокус.

3.3. Корни кратны $k_1=k_2$. Общее решение имеет вид

$$x_1(t)=(C_1\alpha_1+C_2\beta_1 t)\,e^{k_1 t};$$
$$x_2(t)=(C_1\alpha_2+C_2\beta_2 t)\,e^{k_1 t}, \tag{2.67}$$

причем не исключена возможность случая $\beta_1=\beta_2=0$, когда $\alpha_1$ и $\alpha_2$ — произвольные постоянные. Если $k_1=k_2<0$, то решение устойчиво (рис. 2.20, *ж*). Точка покоя — устойчивый узел. Если $k_1=k_2>0$, то замена $t$ на $-t$ приводит к предыдущему случаю. На фазовом портрете следует изменить направление стрелок. Точка покоя — неустойчивый узел.

Аналогичные утверждения справедливы и для линейных однородных систем $n$-го порядка с постоянными коэффициентами. Считая вещественные числа частным случаем комплексных, можно утверждать, что:

— если у всех корней характеристического уравнения действительные части отрицательные, то нулевое решение асимптотически устойчиво в малом;

— если хотя бы у одного корня характеристического уравнения действительная часть положительная, то нулевое решение неустойчиво в малом;

— если характеристическое уравнение системы имеет простые однократные корни с нулевой действительной частью, а все остальные корни (если они есть) обладают отрицательными действительными частями, то нулевое решение неасимптотически устойчиво в малом.

Пусть корни характеристического уравнения системы удовлетворяют следующим условиям. Имеется один корень (или несколько кратных корней) с нулевой действительной частью, и для каждого такого корня его кратность $m_k$ и ранг $n_k$ соответствующего определителя связаны равенством $n-n_k=m_k$. Среди остальных корней могут быть только простые корни с нулевой действительной частью, а также простые и кратные корни с отрицательными действительными частями. Тогда нулевое решение неасимптотически устойчиво в малом.

Пусть корни характеристического уравнения удовлетворяют следующим условиям. Имеется хотя бы один кратный корень с нулевой действительной частью, и для каждого такого корня его кратность $m_k$ и ранг $n_k$ соответствующего определителя подчинены неравенству $n-n_k\neq m_k$. Среди остальных корней (если они имеются) могут быть только кратные корни с нулевой действительной частью, для каждого из которых выполняется равенство $n-n_k=m_k$, а также простые корни с нулевой действительной частью, простые



и кратные корни с отрицательными действительными частями. Тогда нулевое решение неустойчиво в малом.

Если отбросить особый случай кратных корней с нулевой действительной частью, подчиняющихся условию $n-n_k\neq m_k$, а также не различать асимптотическую и обычную устойчивость в малом, то можно сказать: нулевое решение устойчиво, когда корни характеристического уравнения не имеют положительных вещественных частей.

Решение характеристических уравнений высоких степеней затруднительно, поэтому большое значение имеют методы, позволяющие без решения уравнения установить, будут ли иметь все его корни отрицательную вещественную часть. Один из таких методов дает приводимая ниже без доказательства теорема Гурвица.

Необходимым и достаточным условием отрицательности действительных частей всех корней уравнения

$$z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_{n-1}z+a_n=0 \tag{2.68}$$

с действительными коэффициентами является положительность всех главных диагональных миноров матрицы Гурвица

$$\begin{Vmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0\\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \ldots & 0\\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ldots & 0\\ a_7 & a_6 & a_5 & a_4 & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{Vmatrix}. \tag{2.69}$$

По главной диагонали этой матрицы стоят коэффициенты рассматриваемого многочлена в порядке их нумерации от $a_1$ до $a_n$. Столбцы состоят поочередно из коэффициентов только с нечетными или только с четными индексами, включая и коэффициент $a_0=1$. Все недостающие коэффициенты, т. е. коэффициенты с индексами больше $n$ или меньше нуля, заменяются нулями.

Заметим, что из условий Гурвица следует, что все $a_i>0$, однако положительность всех коэффициентов характеристического уравнения вида (2.68) еще недостаточна. Для уравнения, $z^2+a_1z+a_2=0$ условия Гурвица сводятся к $a_1>0$, $a_2>0$.

Для уравнения $z^3+a_1z^2+a_2z+a_3=0$ они будут $a_1>0$, $a_1a_2-a_3>0$, $a_3>0$. Для уравнения $z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4=0$ имеем $a_1>0$, $a_1a_2-a_3>0$, $(a_1a_2-a_3)\,a_3-a_1^2a_4>0$, $a_4>0$.

**4. Исследование устойчивости движения по первому приближению. Первый метод Ляпунова (метод сравнения).** Пусть нам нужно исследовать устойчивость тривиальных нулевых решений системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,x_1,x_2,\ldots,x_n),\ (i=1,2,\ldots,n),$$

где $f_i$ — дифференцируемые в начале координат функции.

Пользуясь дифференцируемостью $f_i$, представим систему в окрестности начала координат в виде

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_j+R_i(t,\,x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n), \tag{2.70}$$

где $R_i$ — совокупность членов высших порядков.

Положим, что $a_{ij}(t)$ не равны все тождественно нулю, т. е. система не относится к классу существенно нелинейных. В задаче устойчивости приходится рассматривать решения системы (2.70) при малых значениях $x_i$, поэтому естественно ожидать, что характер этих решений определится только линейными членами. Если это так, то достаточно исследовать на устойчивость лишь систему линейных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\,x_j, \tag{2.71}$$

которая называется системой первого приближения или, следуя Пуанкаре, системой уравнений в вариациях.

Последняя задача значительно легче, чем исходная, где в общем случае присутствуют нелинейные члены. Хотя, конечно, при переменных коэффициентах $a_{ij}(t)$ и она непроста.

Теперь остается изучить асимптотическое поведение решений системы (2.71), т. е. поведение при $t\to\infty$ всех $x_j$, доказать асимптотическую эквивалентность решений систем (2.70) и (2.71), т. е. приближение решений системы (2.70) к решениям системы (2.71) при $t\to\infty$. Нас интересует именно асимптотическое поведение, поскольку уже упоминавшаяся теорема о непрерывной зависимости интегральных кривых от начальных условий позволяет как бы отбросить любой конечный участок $t_0\leqslant t\leqslant T$.

Особенности изложенного метода изучали Ляпунов, Пуанкаре, Перрон, Петровский, Малкин, Персидский, Четаев и др. Подробное и современное его изложение вместе с соответствующей литературой содержится в [2]. Ниже мы приведем лишь основные теоремы, относящиеся к случаю постоянных коэффициентов $a_{ij}$.

*Теорема 2.6. Если система уравнений (2.70) автономна (стационарна) в первом приближении, величины $R_i$ в достаточно малой окрестности начала координат при $t>T$ удовлетворяют неравенствам $|R_i|\leqslant N\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2+\alpha}$, где $N$ и $\alpha$ — положительные постоянные, и все корни характеристического уравнения*

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-k & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-k \end{vmatrix}=0$$

*имеют отрицательные действительные части, то нулевые решения систем (2.70) и (2.71) асимптотически устойчивы.*



*Теорема 2.7. Если система уравнений (2.70) автономна (стационарна) в первом приближении, все функции $R_i$ удовлетворяют условиям предыдущей теоремы и хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную действительную часть, то нулевые решения систем (2.70) и (2.71) неустойчивы.*

В этих теоремах не охвачен так называемый критический случай: все действительные части корней характеристического уравнения неположительны, причем действительная часть хотя бы одного корня равна нулю. Как показал Ляпунов, в критическом случае на устойчивость нулевого решения начинают влиять нелинейные члены $R_i$ и исследование на устойчивость по первому приближению, вообще говоря, невозможно.

5. Второй метод Ляпунова. Идея второго метода Ляпунова состоит в следующем.

Для исследования устойчивости нулевых решений систем вида (2.48) вводится в рассмотрение вспомогательная функция $v\,(t,\,x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)$, *обычно называемая функцией Ляпунова.* Затем с помощью производной $dv/dt$, найденной с помощью системы (2.48), исследуется поведение решений этой системы по отношению к семейству поверхностей уровня $v\,(t,\,x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)$ в пространстве $(t,\,x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)$. При удачном выборе функции $v$ это позволяет сделать заключение об устойчивости либо неустойчивости изучаемого решения.

Подробное изложение метода содержится в [9, 17]. Мы же дадим лишь доказательства простейших вариантов важных теорем.

*Теорема 2.8 (теорема Ляпунова об устойчивости). Если существует дифференцируемая функция $v\,(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)$, удовлетворяющая в окрестности начала координат двум условиям:*

*$v\,(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)\geqslant 0$, причем $v=0$ лишь при $x_i=0$, и*

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,f_i\,(t,\,x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)\leqslant 0 \text{ при } t\geqslant t_0,$$

*то нулевое решение $x\equiv 0$ системы (2.48) устойчиво.*

Производная $dv/dt$ во втором условии взята вдоль интегральной кривой, т. е. вычислена в предположении, что аргументы $x_i$ являются решениями (2.48). Только тогда имеем

$$\frac{dv}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{dv}{dx_i}\,f_i\,(t,\,x_1,x_2,\,\ldots,\,x_n).$$

Схема доказательства может быть прослежена на модели системы второго порядка (рис. 2.21, *а*), хотя все рассуждения относятся к любому порядку.

В окрестности начала координат, как и в окрестности любой точки строгого минимума, поверхности уровня $v\,(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)=c$ являются замкнутыми поверхностями, внутри которых находится начало координат (на рис. 2.21, *а* поверхность уровня вырождается в кривую). Зададим $\varepsilon > 0$. При достаточно малом $c > 0$ поверхность уровня $v = c$ целиком лежит в $\varepsilon$-окрестности начала координат, но не проходит через начало координат. Следовательно, можно выбрать такое $\delta > 0$, при котором $\delta$-окрестность начала координат целиком будет лежать внутри поверхности $v = c$, причем в этой окрестности $v < c$.

Если начальная точка с координатами $x_i\ (t_0) = x_{i0}$ выбрана в $\delta$-окрестности начала координат (рис. 2.21, *б*) и, следовательно, $v\ (x_{10},\ x_{20},\ \ldots,\ x_{n0}) = c_1 < c$, то при $t > t_0$ точка траектории,

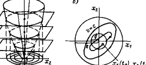



Рис. 2.21.

определяемая указанными начальными условиями, не может выйти *за пределы поверхности уровня $v = c_1$ и тем более за пределы $\varepsilon$-окрестности*, поскольку в силу второго условия теоремы функция $v$ вдоль траектории не возрастает.

Возьмем для примера систему $dx/dt = -xy^4$, $dy/dt = yx^4$. Функция $v\ (x,\ y) = x^4 + y^4$ удовлетворяет условиям приведенной теоремы, поскольку

$$v\,(x,\ y) = x^4 + y^4 \geqslant 0, \quad v\,(0,\ 0) = 0;$$

$$\frac{dv}{dt} = -4x^4y^4 + 4x^4y^4 \equiv 0.$$

Следовательно, нулевое решение этой системы устойчиво. Пусть

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2 - x_1^3, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1 - x_2^3.$$

Функция $v\ (x_1,\ x_2) = x_1^2 + x_2^2$ также удовлетворяет условиям

$$v\,(x_1,\ x_2) = x_1^2 + x_2^2 \geqslant 0, \quad v\,(0,\ 0) = 0;$$

$$\frac{dv}{dt} = 2x_1\,(-x_2 - x_1^3) + 2x_2\,(x_1 - x_2^3) = -2\,(x_1^4 + x_2^2) \leqslant 0.$$



Нулевое решение системы устойчиво.

*Теорема 2.9 (теорема Четаева о неустойчивости). Пусть существует дифференцируемая функция $v\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, удовлетворяющая в некоторой замкнутой $h$-окрестности начала координат двум условиям: в сколь угодно малой окрестности $\varepsilon$ начала координат существует область $(v > 0)$, в которой $v > 0$, причем $v = 0$ на лежащей в $\varepsilon$ части границы области $(v > 0)$; в области $(v > 0)$ производная*

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i\,(t,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) > 0,$$

*причем в области $(v \geqslant \alpha)$, где $\alpha > 0$, производная $dv/dt \geqslant \beta > 0$. Тогда нулевое решение $x_i \equiv 0$ системы (2.48) неустойчиво.*

Начальную точку $x_{10},\ x_{20},\ \ldots,\ x_{n0}$ возьмем в сколь угодно малой окрестности начала координат в области $(v > 0)$, чтобы, $v\ (x_{10},\ x_{20},\ \ldots,\ x_{n0}) = \alpha > 0$ (рис. 2.22). Поскольку вдоль траектории $dv/dt > 0$, функция $v$ вдоль траектории возрастает и не может бесконечно приблизиться к началу координат.

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = y^3 + x^5, \quad \frac{dy}{dt} = x^3 + y^5.$$

Функция $v = x^4 - y^4$ удовлетворяет условиям теоремы Четаева: $v > 0$ при $|x| > |y|$; $dv/dt = 4x^3\,(y^3 + x^5) - 4y^3\,(x^3 + y^5) = 4\,(x^8 - y^8) > 0$ при $|x| > |y|$, а если $v \geqslant \alpha > 0$, то $dv/dt \geqslant \beta > 0$.

Нулевое решение рассматриваемой системы неустойчиво.

Из выводов § 6 следует, что движение во времени — пример одностороннего процесса с потоком внутренних параметров или потоком возмущений, направленным в сторону возрастания независимой переменной. Таким образом, теория устойчивости движения является, в сущности, теорией устойчивости процессов данного более общего типа.

Элементарная замена переменных вида $z = -x$ приводит к указанному типу односторонние процессы с потоком параметров или возмущений, направленным в сторону убывания независимой переменной.

Что касается обширного и важного класса двусторонних процессов, то к ним рассмотренная теория устойчивости не применима.

6. Динамический критерий устойчивости положений равновесия механических систем. Положением равновесия механической системы под действием данной совокупности сил называется такое положение, которое сохраняется неограниченно долго, если в начальный момент времени система находилась в этом положении и скорости всех ее точек были равны нулю и если совокупность усилий, действующих на систему, и параметры системы (в частности, ее жесткости) остаются неизменными.

Общие критерии равновесия типа статического принципа виртуальных перемещений, условий геометрической статики и т. п. известны из курсов механики, потому мы не будем их излагать. Напомним, лишь, что равновесие консервативной системы возможно в тех и только тех ее положениях, в которых полная потенциальная энергия имеет стационарные значения (максимумы, минимумы, перегибы). В частности, маятник, качающийся в вертикальной плоскости (рис. 2.23, *а*), имеет два положения равновесия, показанные на рис. 2.23, *б*, *в*. Первое положение равновесия соответствует минимуму потенциальной энергии, второе — ее максимуму.

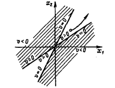


Рис. 2.22.

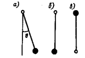


Рис. 2.23.

Положение равновесия устойчиво в малом, если бесконечно малые начальные отклонения от положения равновесия, бесконечно малые начальные скорости, бесконечно малые изменения усилий, действующих на систему, а также бесконечно малые изменения параметров системы приводят в любой последующий момент лишь к бесконечно малым результирующим отклонениям и бесконечно малым результирующим скоростям.

Положение равновесия устойчиво в большом, если допускаемые малые начальные отклонения от положения равновесия, допускаемые малые начальные скорости, допускаемые малые изменения усилий, действующих на систему, а также допускаемые малые изменения параметров системы приводят в течение заданного (а иногда и любого) периода времени лишь к достаточно малым отклонениям и скоростям, находящимся в наперед заданных пределах.

На практике часто ограничиваются исследованием влияния начальных отклонений и скоростей, поскольку именно они обычно наиболее существенны и в ряде случаев их можно заменить возмущения в усилиях и параметрах системы.

Динамический критерий устойчивости положений равновесия в строительной механике состоит в том, что проверяется движение системы (конструкции) около состояния ее равновесия.

Существует следующая важная теорема.

*Теорема 2.10 (теорема Дирихле). Если для механической системы с m степенями свободы, находящейся под действием стационарных консервативных (внешних и внутренних) сил и подчиненной голономным идеальным стационарным связям, полная потенциальная энергия в положении равновесия имеет точный минимум, то это положение является устойчивым в малом при возмущениях в начальном положении и начальных скоростях.*



Для доказательства теоремы примем, что в положении равновесия потенциальная энергия равна нулю. Это всегда можно сделать без нарушения общности, поскольку она определена с точностью до произвольной постоянной.

Положение механической системы, определяемое обобщенными координатами $q_1, \ldots, q_m$, представим положением изображающей точки в $m$-мерном фазовом пространстве. Согласно теореме Дирихле, *если взять достаточно малый $m$-мерный куб с центром в начале координат и сторонами $2\delta_1$ и задавать начальные отклонения в его пределах, а начальные скорости $\dot{q}_j(t_0)$ подчинить условию $|\dot{q}_j(t_0)| < \delta_2$, где $\delta_2$ — достаточно малое положительное число, то изображающая точка не выйдет за пределы любого наперед заданного куба с центром в начале координат и сторонами $2\varepsilon_1$, а производные $\dot{q}_j(t)$ всегда будут подчинены условию $|\dot{q}_j(t)| < \varepsilon_2$, каковы бы ни были наперед заданные положительные числа $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$.* В случае $m = 2$ оба куба выродятся в квадраты.

Поскольку в начале координат потенциальная энергия равна нулю и принимает минимальное значение, она положительна в некоторой окрестности начала координат. Следовательно, $\varepsilon_1$ можно полагать достаточно малым, чтобы на гранях предельного куба $q_j = \pm\varepsilon_1$, $(j = 1, \ldots, m)$ потенциальная энергия была не обращающейся в нуль положительной функцией.

Пусть минимум $E_p$ на гранях равен $s_\varepsilon$, т. е.

$$E_p(q_1, q_2, \ldots, q_m) \geqslant \frac{s_\varepsilon}{2}; \qquad q_i = \pm\varepsilon_1, \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.72}$$

Число $\delta_1$ будем выбирать таким, чтобы для любой точки внутри куба со сторонами $2\delta_1$ значение $E_p = E_{p0}$ не превышало $s_\varepsilon/2$, т. е.

$$E_{p0} = E_p(q_1, q_2, \ldots, q_m) \leqslant \frac{s_\varepsilon}{2}; \qquad |q_j| < \delta_1, \; (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{2.73}$$

Возможность указанного выбора обусловлена непрерывностью $E_p$ и тем, что при всех $q_j = 0$ энергия $E_p = 0$. Для выбора $\delta_2$ поставим всегда выполнимое условие

$$T_0 = T[\dot{q}_j(t_0)] < \frac{s_\varepsilon}{2}$$

при $|\dot{q}_j(t_0)| \leqslant \delta_2 \leqslant \varepsilon_2$, где $T$ — кинетическая энергия системы. При таком выборе $\delta_1$ и $\delta_2$ изображающая точка не может покинуть куб со сторонами $2\varepsilon_1$ и даже достичь его граней. Рассуждая от противного, *положим, что в какой-то момент точка достигнет граней* этого куба По закону сохранения энергии для $T$ и $E_р$ в этот момент

$$T+E_р=T_0+E_{р0}<s_\varepsilon. \qquad (2.74)$$

Поскольку, согласно (2.72), энергия $E_р$ на гранях больше или равна $s_\varepsilon$, то $T<0$, что противоречит физическому смыслу. Следовательно, первоначальное утверждение справедливо.

Ввиду положительности $E_р$ для всех точек внутри предельного куба со сторонами $2\varepsilon_1$, значение $T$ никогда не может превысить $s_\varepsilon$, т. е. $T<s_\varepsilon$ при $|q_j|<\varepsilon_1$, $(j=1, 2, \ldots, m)$. Отсюда следует, что выбор $\delta_1$ и $\delta_2$ указанным выше способом еще не гарантирует условия $|\dot{q}_j|<\varepsilon_2$. Его выполнение связано с удовлетворением дополнительного неравенства

$$T(0,\ 0,\ \ldots,\ \dot{q}_j,\ \ldots,\ 0)\geqslant s_\varepsilon, \qquad (2.75)$$

если $\dot{q}_k=0$ $(k\neq j)$, где $|\dot{q}_j|=\varepsilon_2$.

Но неравенство (2.75) также может быть удовлетворено, поскольку, уменьшая размеры предельного куба со сторонами $2\varepsilon_1$, можно сколь угодно уменьшить $s_\varepsilon$.

Итак, теорема Дирихле доказана.

Если положение равновесия не соответствует точному минимуму потенциальной энергии, то исследование его устойчивости усложняется. Ляпунов доказал следующее почти полное обращение теоремы Дирихле: если состояние равновесия соответствует некоторому стационарному значению потенциальной энергии и если, как это обычно бывает, отсутствие ее минимума обнаруживается уже по членам второго порядка в разложении функций $E_р(q_1, \ldots, q_m)$ в ряд Тейлора, то равновесие неустойчиво.

Показано (вторая теорема Ляпунова), что положение неустойчиво, если потенциальная энергия имеет максимум, причем этот максимум отвечает членам наинизшего (не обязательно второго) порядка в разложении $E_р$.

Следует особо подчеркнуть, что использование теоремы Дирихле (или обратной ей) означает применение именно динамического критерия устойчивости, хотя в ее формулировке фигурирует только статическая исходная величина — потенциальная энергия.

Приведенное доказательство относится к произвольному, но конечному числу степеней свободы. Однако, с другой стороны, ясно, что любую упругую систему можно сколь угодно точно представить дискретной моделью — хотя бы заменой дифференциальных соотношений соотношениями конечных разностей или разложением деформаций в сходящиеся ряды. Таким образом, данная формулировка распространяется и на упругие тела.



В качестве примера обратимся к следующей задаче (рис. 2.24). *Рассмотрим устойчивость прямолинейной формы равновесия упругой системы*, которая состоит из двух невесомых стержней, связанных шарниром в точке $C$ и свободно скользящих по вертикальной линии в точках $A$ и $B$. Шарнир имеет массу $m$. Реакция горизонтальных пружин при любом отклонении $x$ шарнира от вертикали $R(x)=\alpha x+\beta x^3$.

Уравнение свободных колебаний такой конструкции будет

$$m\ddot{x}-\frac{2P}{\sqrt{l^2-x^2}}x+(\alpha x+\beta x^3)=0.$$

Полагая $x$ достаточно малым по сравнению с $l$ (чтобы пренебречь степенями $x/l$ выше третьей), имеем

$$m\ddot{x}+\left(\alpha-\frac{2P}{l}\right)x+\left(\beta-\frac{P}{l^3}\right)x^3=0. \qquad (2.76)$$

Вместо того чтобы решать (2.76) при любых начальных $x_0$ и $\dot{x}_0$, применим теорему Дирихле. Заметим, что члены в (2.76), пропорциональные $x$ и $x^3$, представляют производную $\partial E_р/\partial x$. Отсюда

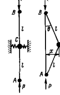



Рис. 2.24.

$$E_р=\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{2P}{l}\right)x^2+\frac{1}{4}\left(\beta-\frac{P}{l^3}\right)x^4. \qquad (2.77)$$

Если коэффициент при $x^2$ положителен, то значение $x=0$ соответствует минимуму $E_р$, т. е. равновесие устойчиво. Когда этот коэффициент меньше нуля, значение $x=0$ характеризует максимум $E_р$. По теореме Ляпунова равновесие неустойчиво. Если отмеченный коэффициент равен нулю, то нужно обратиться к коэффициенту при $x^4$; при положительном значении последнего опять имеем минимум, т. е. равновесие устойчиво, а при отрицательном *значении — максимум, т. е. устойчивость нарушается*.

Итак, критическое значение $P_{кр}$ силы $P$ определяется условием

$$\alpha-\frac{2P_{кр}}{l}=0;\quad P_{кр}=\frac{\alpha l}{2}. \qquad (2.78)$$

Попробуем теперь линеаризировать уравнение (2.76), т. е., по существу, перейти к уравнению в вариациях. Имеем

$$m\ddot{x}+\left(\alpha-\frac{2P}{l}\right)x=0. \qquad (2.79)$$

Анализируя (2.79) без сведения к нормальной системе уравнений, видим, что период свободных колебаний обращается в бесконечность, т. е. система теряет устойчивость, когда равен нулю член $\alpha-2P:l$. При этом любая сколь угодно малая начальная скорость

$x_0$ «уведет» систему. Отсюда $P_{\text{кр}} = \alpha l : 2$. Ответ оказывается совершенно правильным и совпадает с тем, что мы получили по теореме Дирихле без пренебрежения нелинейным членом. Разница состоит в оценке устойчивости при точном равенстве $P = P_{\text{кр}}$: из *линеаризованного* уравнения заключаем о неустойчивости в этом случае, тогда как учет положительного члена при $x^3$ дает обратный результат. Если упомянутый член отрицателен, то обе оценки совпадают и для данного конкретного значения $P$. В практическом

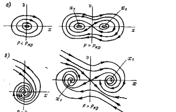



Рис. 2.25.

отношении подмеченное расхождение оценок не играет роли: все равно для любого $P - \Delta P$ система устойчива, а для любого $P + \Delta P$ неустойчива.

Вопрос о возможностях линеаризации уравнений движения конструкции около состояния равновесия очень важен. Ведь мы *часто с самого начала пользуемся линейными уравнениями*, теряя или отбрасывая нелинейные члены при их выводе.

К счастью, здесь дело обстоит достаточно благополучно. Сравнительно недавние исследования, выполненные методами функционального анализа, показывают, что интересующая нас линеаризация вполне допустима, когда критическим значениям нагрузки, найденным в линейной постановке, соответствует одна форма неограниченно нарастающего движения или, по крайней мере, нечетное число таких форм, т. е. когда одновременно обращается в нуль частота одного или нечетного числа тонов главных свободных колебаний. При четном числе форм линеаризация может оказаться недопустимой.

Попробуем теперь получить представление о всей картине движения системы, изображенной на рис. 2.24, после введения начальных возмущений. Коэффициент *при нелинейном члене считаем* положительным.



Построим фазовый портрет движения на фазовой плоскости $xOv$ (рис. 2.25, *а*), где $v$ — скорость $x$.

Выражение (2.77) для потенциальной энергии нам известно. Известен и закон сохранения энергии $T + \Pi = \text{const}$. Отсюда, задаваясь начальными $x_0$ и $v_0$, легко построить соответствующую фазовую траекторию.

Поскольку кривые замкнуты, это значит, что шарнир, отклоненный на расстояние $x_0$ с начальной скоростью $v_0$, будет совершать затем периодические движения. Легко определить максимальные отклонения и максимальные скорости, а также любые другие характеристики процесса. Когда $P \leqslant P_{\text{кр}}$, то колебания совершаются около первоначального прямолинейного положения; при $P > P_{\text{кр}}$ она имеют более сложный характер, но все же потерявшая устойчивость система не получает неограниченных отклонений, как это следует из линеаризованного уравнения движения. Если мы зададимся максимально возможными $x_0$ и $v_0$, а также допустимыми $x^{\text{д}}_{\max}$, $y^{\text{д}}_{\max}$, то система, неустойчивая в малом, вполне может оказаться устойчивой в большом.

Введем теперь в (2.76) диссипативный член, пропорциональный скорости при колебаниях. Траектории можно получить каким-либо из численных методов решения задачи Коши. Фазовый портрет приобретает вид, показанный на рис. 2.25, *б*. Движение перестает быть периодическим. При $P \leqslant P_{\text{кр}}$ оно затухает и стремится к нулю. В случае $P > P_{\text{кр}}$ затухание заканчивается в симметричных точках $x_1$ и $-x_1$. Найденные значения $x_1$ и $-x_1$ представляют собой корни алгебраического уравнения

$$\left(\alpha - \frac{2P}{l}\right)x + \left(\beta - \frac{P}{l^3}\right)x^3 = 0, \tag{2.80}$$

отличающегося от (2.76) отсутствием инерционного члена. Они определяют положения устойчивого статического равновесия системы под действием *силы* $P > P_{\text{кр}}$.

Если $P > P_{\text{кр}}$, но коэффициент $\beta$, определяющий кубическую жесткость пружин, очень велик, то $x_1$ и $-x_1$ практически совпадают с нулем. Система безусловно устойчива в большом, а потеря устойчивости в малом вырождается в пустую формальность. Наоборот, при малом, хотя и положительном коэффициенте перед $x^3$ в (2.80), абсолютное значение величин $x_1$ и $-x_1$ оказывается очень большим. Потеря устойчивости в малом означает одновременно и потерю устойчивости в большом.

Ясно, что и при наличии диссипативной силы устойчивые положения равновесия соответствуют минимумам П. Последнее, впрочем, вполне понятно. Доказательство теоремы Дирихле основано на постоянстве суммы кинетической и потенциальной энергий консервативной системы. Из самой общей идеи видно, что добавле*ние к внешним активным консервативных силам* некоторой системы диссипативных сил, вызывающих рассеивание энергии, не может снизить устойчивости системы или изменить устойчивых состояний (*одна из теорем Кельвина*). *Более того, система, устойчивая в малом*, становится тогда асимптотически устойчивой, так как малые колебания около положения статического равновесия затухают со временем.

Сказанное не относится к внешним активным неконсервативным силам — здесь добавление диссипативных сил может в некоторых случаях оказывать дестабилизирующее влияние.

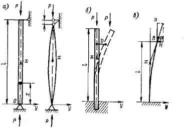



Рис. 2.26.

Принципиальная разница между внешними активными консервативными и неконсервативными силами состоит в следующем. Когда система совершает малые колебания от положения равновесия, консервативные силы не могут добавить системе никакой энергии за полный цикл колебаний, т. е. не могут раскачивать систему — *их работа по любому замкнутому пути всегда равна нулю*. Неконсервативные внешние силы, наоборот, часто добавляют энергию за цикл. Наличие диссипативных сил изменяет закон движения системы, что может увеличить приток энергии от неконсервативной нагрузки. Приращение притока иногда больше диссипации.

Обратимся к более сложному примеру — исследованию устойчивости прямолинейной формы равновесия центрально сжатого стержня постоянного сечения, свободно опертого обоими концами (рис. 2.26, *а*). В качестве начальных возмущений снова примем начальные отклонения и начальные скорости.

Линеаризированное уравнение свободных колебаний, обусловленных такими начальными возмущениями, можно записать в виде

$$EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+P\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0 \qquad (2.81)$$



или

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}+k^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{m}{EI}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=0, \qquad (2.81a)$$

где $v$ — прогиб; $k^2=P:EI$; $EI$ — изгибная жесткость стержня; $m$ — его погонная масса.

Будем искать решение (2.81а) как произведение

$$v(x,\ t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)\,T_n(t); \qquad (2.82)$$

тогда при любом $n$ получим

$$\frac{1}{X}\frac{d^4X}{dx^4}+k^2\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-\frac{m}{EI}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}. \qquad (2.83)$$

Поскольку левая часть уравнения (2.83) зависит только от $x$, а правая — только от $t$, уравнение может удовлетворяться лишь в том случае, когда обе его части порознь равны постоянной *величине* $\lambda$:

$$\frac{1}{X}\frac{d^4X}{dx^4}+k^2\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=\lambda,$$
$$-\frac{m}{EI}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}=\lambda. \qquad (2.83a)$$

Второе уравнение (2.83а) преобразуется к виду

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\frac{EI}{m}\lambda T=0, \qquad (2.84)$$

откуда общий интеграл записывается через две произвольные постоянные — амплитуду $A$ и фазовый угол $\varphi$:

$$T=A\cos(\omega t+\varphi), \qquad (2.85)$$

где

$$\omega^2=\frac{EI}{m}\lambda. \qquad (2.85a)$$

Первое уравнение (2.83а) перепишем в виде

$$\frac{d^4X}{dx^4}+k^2\frac{d^2X}{dx^2}-\lambda X=0. \qquad (2.86)$$

Его общий интеграл запишется так:

$$X(x)=A\operatorname{ch}S_1x+B\operatorname{sh}S_1x+C\cos S_2x+D\sin S_2x, \qquad (2.87)$$

где

$$S_1^2=\frac{\sqrt{k^4+4\lambda}-k^2}{2},$$

$$S_2^2=\frac{\sqrt{k^4+4\lambda}+k^2}{2} \qquad (2.87a)$$

Для определения произвольных постоянных имеем граничные условия: при $x = 0$

$$X = 0, \quad \frac{d^2X}{dx^2} = 0; \tag{2.88}$$

при $x = l$

$$X = 0, \quad \frac{d^2X}{dx^2} = 0. \tag{2.88a}$$

После всех преобразований получаем формы и частоты главных свободных колебаний

$$\begin{gathered} X_n(x) = D_n \sin\frac{n\pi x}{l}, \ (n = 1, 2, 3, \ldots); \\ \omega_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m}}\left(1 - \frac{Pl^2}{n^2\pi^2 EI}\right)^{1/2}. \end{gathered} \tag{2.89}$$

При $P < P_{кр} = \pi^2 EI : l^2$ все значения $\omega_n$ вещественны; произвольное начальное отклонение $v_н(x)$ с начальными скоростями $\dot{v}_н(x)$ нетрудно разложить в ряд по $X_n(x)$, причем стремление $|v_н(x)|$ и $|\dot{v}_н(x)|$ к нулю означает беспредельное уменьшение коэффициентов разложения. Таким образом, бесконечно малые возмущения вызывают бесконечно малые отклонения стержня от невозмущенного (прямолинейного) положения. Следовательно, стержень устойчив.

При $P = P_{кр}$ частота свободных колебаний $\omega_1$ обращается в нуль, т. е. период первого тона становится равным бесконечности. Отсюда следует, что составляющая $v_{н1}$, соответствующая первому тону, остается неизменной во времени, если начальная скорость $\dot{v}_{н1}$ по этому тону равна нулю (в противном случае она неограниченно растет). При произвольных возмущениях, содержащих $\dot{v}_{н1}$, равновесие неустойчиво.

Когда $P > P_{кр}$, то частота $\omega_1$ — мнимая величина. Движение по первому тону главных свободных колебаний оказывается апериодическим, и отклонения первоначально отклоненного стержня продолжают сколь угодно увеличиваться. Невозмущенное состояние стало неустойчивым относительно любых возмущений $v_{н1}$, *даже при* $\dot{v}_{н1} = 0$.

Свободные колебания любой реальной конструкции связаны *с рассеиванием энергии и возникновением сил сопротивления*. Пусть для простоты внешние сопротивления пропорциональны первой степени скорости $\dot{v}(x)$, а внутренние — первой степени скорости относительных деформаций. Тогда уравнение свободных колебаний рассматриваемого стержня (см. рис. 2.26, *а*) будет

$$\varepsilon EI\frac{\partial^5 v}{\partial x^4\,\partial t} + EI\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + P\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + m\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \varepsilon_1\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \tag{2.90}$$

где $\varepsilon$ и $\varepsilon_1$ — *коэффициенты сопротивлений.*



Решение (2.90) по-прежнему допустимо искать в соответствии с (2.82), *но все выкладки усложняются*. Их можно сильно сократить, если заметить, что в нашем случае наличие сопротивлений *не искажает постоянных* форм свободных колебаний, поскольку внешние сопротивления дают эпюру внешних сил, подобную эпюре *сил инерции, а внутренние сопротивления — эпюру* моментов, подобную эпюре моментов сил упругости. Следовательно, движение *по форме*

$$v(x, t) = T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l} \tag{2.91}$$

представляет перемещение системы с одной степенью свободы.

Подстановка (2.91) в (2.90) и сокращение на $\sin n\pi x/l$ дает

$$m\ddot{T}_n(t) + \left(\varepsilon EI\frac{n^4\pi^4}{l^4} + \varepsilon_1\right)\dot{T}_n(t) +$$

$$+\left(EI\frac{n^4\pi^4}{l^4} - P\frac{n^2\pi^2}{l^2}\right)T_n(t) = 0.$$

Обозначив

$$2h_n = \frac{1}{m}\left(\varepsilon EI\frac{n^4\pi^4}{l^4} + \varepsilon_1\right).$$

$$\omega_n^2 = \frac{1}{m}\left(EI\frac{n^4\pi^4}{l^4} - P\frac{n^2\pi^2}{l^2}\right),$$

приходим к хорошо известному уравнению

$$\ddot{T}_n + 2h_n\dot{T}_n + \omega_n^2 T_n = 0. \tag{2.92}$$

Допустим пока, что для всех $n$ величина $\omega_n^2 > 0$. Как показано в общей теории колебаний, при $\omega_n^2 - h_n^2 > 0$ имеют место затухающие колебания, а при $\omega_n^2 - h_n^2 \leqslant 0$ наблюдается апериодическое движение, *но в обоих случаях $T_n(t)$ стремится к нулю с течением* времени, т. е. стержень возвращается в первоначальное прямолинейное *положение (асимптотическая устойчивость, отсутствующая*, когда нет сопротивлений). С уменьшением начальных отклонений *и скоростей максимальные отклонения также уменьшаются и стремятся* к нулю, т. е. стержень устойчив в малом.

Если $P = \pi^2 EI : l^2$, то $\omega_1^2 = 0$ и уравнение движения по первому тону примет вид

$$\ddot{T} + 2h\dot{T} = 0. \tag{2.92a}$$

Восстанавливающая сила отсутствует — любое начальное отклонение этого тона без начальной скорости будет сохраняться.

При наличии начальной скорости стержень станет двигаться до тех пор, пока его начальная кинетическая энергия не погасится сопротивлениями; затем он остановится и сохранит свое положение.

Асимптотической устойчивости уже нет, но стержень еще устойчив в малом, и значение $P = \pi^2 EI : l^2$ нельзя рассматривать как приводящее к потере устойчивости.

Когда $P > \pi^2 EI : l^2$, то, интегрируя (2.92), легко убедиться, что всякое начальное отклонение по первому тону приведет к неограниченному росту прогибов. Устойчивость нарушается.

В практическом отношении введение сил сопротивления мало изменяет ответ, но теоретическая картина поведения стержня оказывается принципиально иной.

Аналогичным образом нетрудно рассмотреть другие случаи граничных условий стержней. Сопротивлением будем пренебрегать, т. е. используем уравнение (2.81). Например, для стержня с одним заделанным и другим свободным концами (рис. 2.26, *б*) получим: при $x = 0$

$$X = 0; \quad \frac{dX}{dx} = 0; \tag{2.93}$$

при $x = l$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = 0; \quad -\frac{d^3X}{dx^3} = k^2 \frac{dX}{dx}. \tag{2.93а}$$

Первые три условия очевидны, четвертое выводится из выражения перерезывающей силы через прогиб

$$EI\left(\frac{d^3X}{dx^3}\right)_{x=l} = P\left(\frac{dX}{dx}\right)_{x=l}.$$

После всех преобразований (2.85) и (2.87) найдем

$$X_1(x) = B(\cos kx - 1) \tag{2.94}$$

и условие обращения $\omega_1^2$ в нуль

$$P = P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI}{4l^2}. \tag{2.95}$$

Если $P > P_{\text{кр}}$, то величина $\omega_1$ становится мнимой, что свидетельствует о нарастании прогибов после любого сколь угодно малого отклонения по форме первого тона главных свободных колебаний $X_1(x)$.

Обозначим через $\omega_0^2$ — квадрат частоты первого тона стержня при отсутствии силы $P$. Тогда для случаев, показанных на рис. 2.26, *а*, *б*, нетрудно построить зависимость, представленную на рис. 2.27, *а*. Линейность ее обусловлена тем, что форма колебаний оказалась постоянной для любого $P$.

При многих других условиях, скажем при жесткой заделке обоих концов, сила $P$ влияет на форму колебаний, и тогда функция $\omega_1 = f(P : P_э)$ будет более сложной.

Весьма интересен случай «следящей силы» (см. рис. 2.26, *в*), которая меняет направление вместе с сечением стержня.



Постановка задачи и путь решения — прежние, но вместо (2.93) имеем: при $x = 0$

$$X = 0, \quad \frac{dX}{dx} = 0; \tag{2.96}$$

при $x = l$

$$\frac{d^2X}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3X}{dx^3} = 0. \tag{2.96а}$$

Подставив в общий интеграл (2.87) уравнения свободных колебаний (2.86), после необходимых выкладок найдем частное решение

$$k^4 + 2\lambda + 2\lambda \operatorname{ch} S_1 l \cos S_2 l + \sqrt{\lambda}\, k^2 \operatorname{sh} S_1 l \sin S_2 l = 0. \tag{2.97}$$

Если принять безразмерные параметры

$$K = (kl)^2 = \frac{Pl^2}{EI};$$

$$\Omega = \lambda l^4 = \frac{m\omega^2 l^4}{EI};$$

$$\overline{S}_1 = S_1 l, \quad \overline{S}_2 = S_2 l,$$

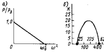



Рис. 2.27.

то

$$\Delta(K\Omega) = K^2 + 2\Omega + 2\Omega \operatorname{ch} \overline{S}_1 \cos S_2 + $$
$$+ \sqrt{\Omega}\, K \operatorname{sh} \overline{S}_1 \sin S_2 = 0. \tag{2.97а}$$

При отсутствии внешней силы $P$ параметр $K = 0$ и корни $\Omega$ уравнения (2.97а) определяют частоты свободных колебаний обычного консольного стержня: с возрастанием $K$ два наименьших корня сближаются (рис. 2.27, *б*); при некотором значении $K \approx 20$ они становятся кратными. Дальнейшее увеличение $K$ делает их комплексными, причем один из них имеет отрицательную мнимую часть. Следовательно, $K > 20$ соответствует неустойчивому состоянию стержня: когда стержень выводится из состояния равновесия, его прогибы неограниченно увеличиваются.

Сравнение с результатом расчета по формуле (2.95) свидетельствует о том, что при следящей нагрузке критическая сила возрастает в восемь раз.

## § 9. Моделирование односторонних процессов. Методы Эйлера, Рунге — Кутта и начальных параметров

1. Метод Эйлера. С использованием метода Эйлера для анализа и моделирования односторонних процессов и вообще для решения задачи Коши, т. е. для интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными

*условиями, мы бегло познакомились в главе 1-й.* Сейчас рассмотрим его более подробно.

Пусть дана система

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x,\ y_1,\ \ldots,\ y_n), \quad (i = 1,\ \ldots,\ n) \tag{2.98}$$

и начальные условия

$$y_i(x_0) = y_{i0}, \quad (i = 1,\ \ldots,\ n). \tag{2.98a}$$

Заменив с некоторым приближением дифференциалы $dx$ и $dy$ малыми приращениями $\Delta x$ и $\Delta y$, можно записать

$$\Delta y_i = f_i(x,\ y_1\ \ldots,\ y_n)\,\Delta x. \tag{2.99}$$

Подставив в (2.99) значение $x = x_0$ и начальные условия (2.98а), нетрудно найти все приращения $\Delta y_i$, т. е. значения

$$y_i(x_0 + \Delta x) = y_i(x_0) + \Delta y_i. \tag{2.100}$$

Теперь мы можем подставить в (2.99) значения $x = x_0 + \Delta x$, $y_i\,(x + \Delta x)$, а также найти новые приращения всех $y_i$ и значения $y_i\,(x + 2\Delta x)$.

Аналогичный процесс нетрудно продолжать далее, причем приращения $\Delta x$ на каждом шаге интегрирования системы (2.98) вовсе не обязательно брать одинаковыми.

Ясно, что последовательное построение интегральных кривых системы (2.98) при возрастающих значениях $x$ есть, по существу, моделирование одностороннего процесса с потоком параметров, направленным по возрастанию независимой переменной. Построение аналогичным путем интегральных кривых при убывающих $x$ есть моделирование одностороннего процесса с потоком параметров, направленным по убыванию независимой переменной.

Погрешности, возникающие из-за округления значащих цифр, а также из-за перехода от $dx$, $dy$ к $\Delta x$, $\Delta y$ есть моделирование неких возмущений $R_i\,(x)$ в правых частях (2.98), неизбежных в каждом реальном одностороннем процессе. Несколько меняя погрешности (незначительно меняя $\Delta x$ или число значащих цифр счета), мы можем «экспериментально» проверить устойчивость моделируемых процессов.

Большие погрешности счета, наличие которых проявляется в резком различии двух «экспериментальных» численных реализаций, свидетельствуют о неустойчивости моделируемого процесса; при малых погрешностях и счет, и сам процесс устойчивы.

Ясно, что применение метода Эйлера позволяет экспериментально анализировать (причем не в малом, а в большом) устойчивость односторонних процессов, в частности устойчивость движения, не прибегая к использованию теории Ляпунова и ее модификаций. Вносимые возмущения можно менять путем изменения числа значащих цифр и шага интегрирования. Если устройство данной ЭВМ не позволяет менять числа значащих цифр, то можно



обратиться к генератору случайных цифр и с его помощью варьировать последние значащие цифры.

Чтобы лучше представить себе различные ситуации при использовании метода Эйлера, рассмотрим его применение к линейному уравнению первого порядка, которое интегрируется и в квадратурах.

Дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = p\,(x)\,y. \tag{2.101}$$

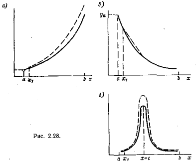



Рис. 2.28.

Если при $x = a$ имеем $y = y\,(a)$, то, как известно,

$$y\,(x) = y\,(a)\,e^{\int\limits_a^x p\,(\xi)\,d\xi}. \tag{2.102}$$

Варьируя функцию $p\,(\xi)$, можно получить самые разнообразные кривые (рис. 2.28).

Пусть точное решение имеет вид сплошной кривой (рис. 2.28, *а*). Допустив маленькую погрешность в определении $y\,(x_1)$ при $x = x_1$, а затем выполнив интегрирование даже абсолютно без погрешностей, мы получим возрастающую погрешность решения (пунктирная кривая). Решение методом Эйлера, как и сам моделируемый процесс, неустойчивы в районе $x = b$. Если точное решение имеет вид сплошной кривой, изображенной на рис. 2.28, *б*, то ошибка, наоборот, будет затухать. Решение устойчиво на всем протяжении

$a \leqslant x \leqslant b$ (аналогично моделируемому процессу). Наконец, если точное решение имеет вид сплошной кривой, показанной на рис. 2.28, *в*, то решение устойчиво в районе $x = a$ и $x = b$, но неустойчиво в районе $x = c$. Таким же образом дело обстоит и с устойчивостью процесса.

В действительности все несколько сложнее, так как погрешности допускаются не в одной точке, а на каждом шаге, что отвечает неточной идентификации $\varphi\,[y\,(x),\ x]$ на всем участке $a \leqslant x \leqslant b$, однако общий ход рассуждений остается в силе.

Несколько обобщая обычный вариант метода Эйлера, можно решать и уравнения с запаздывающими аргументами:

$$\Delta y_i = f_i \Big\{ x,\ y_1\,(x),\ y_1\,[x - a_1\,(x)],\ \ldots,[y_n\,[x - b_n\,(x)],\ \ldots$$

$$\ldots,\ \int\limits_0^{x-a} \varphi_i [y_1\,(x - \xi),\ \ldots,\ y_n\,(x - \xi)]\, d\xi \Big\}\,\Delta x. \qquad (2.103)$$

Использование зависимостей, подобных (2.103), не вызывает затруднений, поскольку в правой части мы имеем известные значения $y_i$ в предшествующих точках; при этом иногда вместо начальных условий появляются начальные функции.

Существенные осложнения вносят опережающие аргументы: в этом случае при использовании формул типа (2.103) в правую часть приходится подставлять еще не известные значения $y_i$ при последующих значениях аргумента $x$.

Чтобы представить себе обобщение метода Эйлера для такого случая, вспомним, что уравнения с опережающими аргументами или уравнения нейтрального типа являются вырожденными уравнениями в частных производных. Пользуясь той же воображаемой системой транспортеров с односторонним движением всех лент, т. е. с односторонним переносом всех параметров, получаем внутренние параметры $y_i = y_i\,(x,\ t)$, где $x$ — по-прежнему координата точки системы в неподвижной системе $Ox$, $t$ — время. Сами уравнения переноса примут вид

$$\frac{\partial y_i}{\partial x} + \frac{\partial y_i}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial y_i}{\partial x} + k\,\frac{\partial y_i}{\partial t} =$$

$$= f_i \Big\{ x,\ y_1\,(x,\ t),\ y_1\,[x - a_1\,(x),\ t],\ \ldots,\ y_n\,[x - b_n\,(x),\ t],$$

$$\int\limits_0^{x-a} \varphi_i\,[y_1\,(x - \xi,\ t),\ \ldots,\ y_n\,(x - \xi,\ t)]\,d\xi,$$

$$\int\limits_0^{L-x} \psi_i\,[y_1\,(x + \xi,\ t),\ \ldots,\ y_n\,(x + \xi,\ t)]\,d\xi \Big\}, \qquad (2.104)$$

где $a_k$ и $b_k$ — не только положительные, но и отрицательные функции; $k = dt/dx$ — некоторая постоянная величина, обратная скорости движения лент.



Уравнения (2.104) можно решать при произвольных начальных условиях во времени

$$y_i\,(x,\ t_0) = y_{i0}\,(x), \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (2.105)$$

Задав такие условия, мы получаем возможность следить с помощью формул типа

$$y_i\,(x + \Delta x,\ t + \Delta t) = y_i\,(x,\ t) + f_i \Big\{ x,\ y_1\,(x,\ t),\ \ldots,\ y_n\,[x - b_n\,(x),\ t],$$

$$\int\limits_0^{x-a} \varphi_i\,[y_1\,(x - \xi,\ t),\ \ldots,\ y_n\,(x - \xi,\ t)]\,d\xi,$$

$$\int\limits_0^{b-x} \psi_i\,[y_1\,(x + \xi,\ t),\ \ldots,\ y_n\,(x + \xi,\ t)]\,d\xi \Big\}\,\Delta x \qquad (2.106)$$

за движением каждой точки, которая *имела в момент* $t = t_0$ *произвольное положение* $x = x_1$.

Чтобы вводить в рассмотрение новые точки с левого конца системы, кроме начальных условий (2.105), нужно задавать начальные условия $y_i\,(a,\ t) = \bar{y}_i\,(a)$ или аналогичные начальные функции. Если через некоторое $t > t_0$ процесс установится *во времени*, то мы получим решение соответствующего обыкновенного дифференциального или интегродифференциального уравнения, которое имеет опережающие аргументы. В противном случае можно попытаться взять другие начальные условия. Но может случиться и так, что при любых условиях (2.105) решение не установится, т. е. задача Коши для обыкновенного дифференциального или интегродифференциального уравнения данного типа вообще не будет иметь решения.

Приведенный способ интересен и сам по себе, так как показывает, что методы, подобные методу Эйлера, в ряде случаев пригодны для решения уравнений с частными производными, а также для моделирования двухмерных процессов.

2. Метод Рунге — Кутта. Существует несколько вариантов метода Рунге—Кутта, называемых методами разных порядков; мы ограничимся кратким изложением так называемого метода четвертого порядка применительно к одному дифференциальному уравнению первого порядка.

Пусть дано уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f\,(x,\ y) \qquad (2.107)$$

и пусть нам известно значение $y_n = y\,(x_n)$, при котором $x = x_n$. (Неважно, является ли $y_n$ заданным начальным значением или полученно в процессе вычислений.)

Найдем последовательно ряд приращений $\Delta y_n$, обозначаемых как $k_i$. Приращение

$$k_1 = \Delta x_n f\,(x_n,\ y_n) \qquad (2.108\text{а})$$

представляет собой обычное приращение, определяемое по методу Эйлера.

Второе приращение

$$k_2 = \Delta x_n f(x_n + \Delta x_n/2,\ y_n + k_1/2) \qquad (2.108б)$$

опирается как бы на «среднее значение» производной в точке интегральной кривой, лежащей посредине шага интегрирования. Обычно приращение $k_2$ несколько точнее $k_1$.

Третье приращение исходит из уточненного среднего значения

$$k_3 = \Delta x_n f(x_n + \Delta x_n/2,\ y_n + k_2/2), \qquad (2.108в)$$

а четвертое

$$k_4 = \Delta x_n f(x_n + \Delta x_n,\ y_n + k_3) \qquad (2.108г)$$

представляет собой приращение, найденное из значения производной в точке $x_n + \Delta x_n$.

После этого расчетное приращение функции определяют по формулам

$$\Delta y_n = 1/6\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \qquad (2.109)$$

и

$$y_{n+1} = y_n + \Delta y_n. \qquad (2.109а)$$

В (2.109) полученные ранее варианты приращений усредняются с весами $^1/_6$, $^2/_6$, $^2/_6$ и $^1/_6$.

Обобщение изложенного метода для нормальной системы $n$-го порядка очевидно и особых пояснений не требует.

Схема метода Рунге—Кутта основана на приближении *представлении искомой функции $y$ в виде полинома, а не ломаной, как* в методе Эйлера. Ясно, что каждый шаг здесь требует больше вычислений, однако сам шаг можно несколько увеличить.

И метод Эйлера и метод Рунге—Кутта имеют многочисленные стандартные программы, записанные как на универсальных языках, так и в кодах машин.

Близость методов Рунге—Кутта и Эйлера свидетельствует, что метод Рунге—Кутта также моделирует односторонние процессы вместе с их устойчивостью.

3. Метод начальных параметров. Под единым названием «метод начальных параметров» понимается группа методов, основанных на прямой замене краевой задачи для одномерного процесса рядом задач Коши, т. е. задач с начальными условиями. Разные варианты метода начальных параметров часто носят самостоятельные названия — обобщенный метод начальных параметров, метод Коши, метод Клебша и т. д.

Суть обобщенного метода начальных параметров, применимого для нелинейных уравнений переноса, заключается в следующем.

Пусть дана произвольная система уравнений переноса при любых краевых, т. е. многоточечных условиях. Необходимо решить ее на участке от $x = a$ до $x = b$.



Зададимся при $x = a$ или другом значении $x = x_1$ из $a \leqslant x_1 \leqslant b$ некоторым набором начальных условий (начальных параметров), близких, по нашему мнению, и действительным значениям внутренних параметров процесса в указанной точке. Затем решим задачу Коши при выбранном множестве начальных условий и проверим удовлетворение краевых условий. Если последние удовлетворяются, то краевая задача решена. В противном случае нужно взять другое множество начальных условий и повторить расчет заново.

*Варьирование начальных условий (начальных параметров)* целесообразно вести упорядоченно, пользуясь для этого современными методами поиска экстремумов — минимум погрешности при удовлетворении заданных многоточечных условий.

Пусть имеется однопролетная балка переменного сечения, загруженная поперечной нагрузкой $q(x)$. Положим, что она изготовлена из нелинейно-упругого материала и заделана на нелинейно-деформируемых опорах. Тогда ее изгиб определяется уравнениями

$$\frac{dw}{dx} = -\vartheta;\ \frac{dQ}{dx} = -q(x);\ \frac{d\vartheta}{dx} = F(M,\ x);\ \frac{dM}{dx} = Q, \qquad (2.110)$$

которые близки уравнениям (2.31), записаны при тех же обозначениях, но имеют нелинейную функцию $F(M,\ x)$. Последняя может быть найдена из анализа деформаций элемента длиной $dx$.

Уравнения (2.110) должны быть проинтегрированы при граничных условиях

$$\begin{aligned} w(0) &= f_1[M(0),\ Q(0)], \quad \vartheta(0) = f_2[M(0),\ Q(0)]; \\ w(l) &= f_3[M(l),\ Q(l)]; \quad \vartheta(l) = f_4[M(l),\ Q(l)]. \end{aligned} \qquad (2.111)$$

Задавшись значениями $M(0)$ и $Q(0)$, из первых двух условий (2.111) находим $w(0)$ и $\vartheta(0)$. Затем, зная все начальные условия при $x = 0$, любым численным методом (Эйлера, Рунге—Кутта) решаем задачу Коши для системы (2.110). Дойдя до $x = l$, проверяем выполнение вторых условий (2.111). Если они выполняются, то расчет закончен. В противном случае выбираем новые значения $M(0)$ и $Q(0)$ и повторяем расчет.

Иными словами, производится варьирование двух начальных параметров. Если граничные условия связаны, то они имеют вид

$$\begin{aligned} &f_1[M(0),\ Q(0),\ M(l),\ Q(l)] = 0, \\ &f_2[M(0),\ Q(0),\ M(l),\ Q(l)] = 0; \\ &f_3[M(0),\ Q(0),\ M(l),\ Q(l)] = 0, \\ &f_4[M(0),\ Q(0),\ M(l),\ Q(l)] = 0. \end{aligned} \qquad (2.111а)$$

Здесь нужно варьировать уже четыре начальных параметра, т. е. задаваться сразу всеми четырьмя значениями $M(0)$, $Q(0)$,

$w(0)$, $\vartheta(0)$, решать задачу Коши и лишь затем проверять выполнение всех краевых условий.

Приведенный обобщенный вариант метода начальных параметров позволяет получить решение многих упругопластических задач.

В задачах с линейными уравнениями переноса вместо простого варьирования начальных параметров полезно использовать теоремы о записи общих решений через частные решения. Так, в случае линейных дифференциальных уравнений известно, что общий интеграл неоднородной системы может быть выражен через $n$ независимых частных интегралов соответствующей однородной системы и один частный интеграл неоднородной системы. Последний может быть найден непосредственно путем независимого решения еще одной задачи Коши или с помощью квадратур через $n$ первых частных интегралов (хотя бы методом вариации произвольных постоянных).

Известен метод Коши для упорядочения процедуры выбора частных интегралов.

Пусть мы имеем общую линейную систему, записанную в нормальной форме:

$$\frac{dy_i}{dx} = p_{1i}(x)\,y_1 + p_{2i}(x)\,y_2 + \ldots + p_{ni}(x)\,y_n + f_i(x),$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{2.112}$$

Тогда $k$-й частный интеграл соответствующей однородной системы разыскивается при условиях

$$y_q(x_0) = 0 \quad (\text{при } k \neq q),$$
$$y_k(x_0) = 1, \tag{2.113}$$

где $x_0$ — произвольная фиксированная точка из промежутка интегрирования; обычно в качестве нее берется левый конец участка существования процесса.

Что касается частного интеграла неоднородной системы, то он разыскивается при нулевых начальных условиях в точке $x_0$.

Общий интеграл системы (2.112) имеет вид

$$y_i^{\text{о. н}}(x) = C_1 y_{1i}(x) + C_2 y_{2i}(x) + \ldots + C_n y_{ni}(x) + y_i^{\text{ч. р}}(x), \tag{2.114}$$

где $C_j$ — произвольные постоянные, равные значениям $y_j(x)$; $y_{ji}(x)$ — функция $y_i(x)$, входящая в $j$-й частный интеграл, определяемый при начальных условиях $y_j(x_0) = 1$, $y_q(x_0) = 0$, когда $q \neq j$; $y_i^{\text{ч. р}}(x)$ — функция $y_i(x)$, входящая в частный интеграл неоднородной системы при нулевых начальных условиях в точке $x_0$.

Функция $y_{ji}(x)$ имеет ясный физический смысл. Она отражает параметр $y_i(x)$, возбуждаемый в системе заданием в точке $x = x_0$ параметра $y_j(x_0) = 1$ при отсутствии внешнего воздействия $f_i(x), \ldots, f_n(x)$. Функция $y_i^{\text{ч. р}}(x)$ отражает параметр $y_i(x)$, возбуждаемый только внешним воздействием $f_i(x), \ldots, f_n(x)$.



В качестве примера исследуем линейную систему (2.31), которая относится к изгибу балки. Приняв в качестве $x_0$ сечение $x = 0$, возьмем следующие группы начальных условий для соответствующей однородной системы:

$$\begin{aligned}
&w(0) = 1,\ \vartheta(0) = 0,\ Q(0) = 0,\ M(0) = 0;\\
&w(0) = 0,\ \vartheta(0) = 1,\ Q(0) = 0,\ M(0) = 0;\\
&w(0) = 0,\ \vartheta(0) = 0,\ Q(0) = 1,\ M(0) = 0;\\
&w(0) = 0,\ \vartheta(0) = 0,\ Q(0) = 0,\ M(0) = 1.
\end{aligned} \tag{2.115}$$

Значения внутренних параметров, отвечающих первой группе условий, будут $w_w(x)$, $\vartheta_w(x)$, $Q_w(x)$, $M_w(x)$, а параметров, отвечающих второй группе условий, $w_\vartheta(x)$, $\vartheta_\vartheta(x)$ и т. д. Тогда искомый общий интеграл системы (2.110) приобретает вид

$$\begin{aligned}
w(x) = w(0)\,w_w(x) + \vartheta(0)\,w_\vartheta(x) + Q(0)\,w_Q(x) +&\\
+ M(0)\,w_M(x) + w^{\text{ч. р}}(x);&\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
M(x) = w(0)\,M_w(x) + \vartheta(0)\,M_\vartheta(x) + Q(0)\,M_Q(x) +&\\
+ M(0)\,M_M(x) + M^{\text{ч. р}}(x).&
\end{aligned} \tag{2.116}$$

Частное решение неоднородной системы (2.31) выражено функциями $w^{\text{ч. р}}(x), \ldots, M^{\text{ч. р}}(x)$. Значения произвольных постоянных $w(0), \ldots, M(0)$ должны быть найдены путем подстановки общего интеграла (2.116) в заданные краевые условия.

Заметим, что метод Коши применим не только к линейным, но и к нелинейным граничным условиям. Требуется лишь линейность уравнений переноса. При наличии нелинейных многоточечных условий дело осложняется и метод может оказаться неприменимым.

При некоторых видах краевых условий не требуется определения общего интеграла системы (2.112); достаточно найти лишь часть его. Пусть система (2.110) решается при условиях

$$\begin{aligned}
&w(0) = k_1 Q(0); \quad \vartheta(0) = k_2 M(0);\\
&w(l) = k_3 Q(0); \quad \vartheta(l) = k_4 M(l).
\end{aligned} \tag{2.117}$$

Тогда достаточно найти решение всего трех задач Коши: а) для однородной системы при условиях $Q(0) = 1$, $w(0) = k_1$, $M(0) = 0$, $\vartheta(0) = 0$; б) для однородной системы при условиях $Q(0) = 0$, $w(0) = 0$, $M(0) = 1$, $\vartheta(0) = k_2$; в) для неоднородной системы при нулевых условиях.

Искомое решение имеет вид

$$\begin{aligned}
w(x) = Q(0)\,w_1(x) + M(0)\,w_2(x) + w^{\text{ч. р}}(x);&\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
M(x) = Q(0)\,M_1(x) + M(0)\,M_2(x) + M^{\text{ч. р}}(x),&
\end{aligned} \tag{2.118}$$

где индекс 1 присвоен решениям первой задачи Коши, индекс 2 — решениям второй задачи Коши. Значения $Q(0)$ и $M(0)$ должны быть найдены подстановкой (2.118) в граничные условия при $x = l$.

Именно на уменьшении числа задач Коши основан известный метод Клебша для расчета балок постоянного или ступенчато-переменного сечения.

При интегрировании методом начальных параметров линейных дифференциальных уравнений (в вариантах методов Коши, Клебша или в других модификациях) часто применяется аппарат матричной алгебры. В ряде случаев это весьма целесообразно, так как в современных вычислительных машинах обычно имеются стандартные подпрограммы действий над матрицами. Однако следует указать, что использование матриц не вносит никаких принципиальных изменений ни в одну из применяемых модификаций метода и не влияет на их устойчивость.

Изложенная схема метода начальных параметров во всех его модификациях отличается предельной логической простотой и наглядностью. Но она безупречна только тогда, когда нас интересует ход реального процесса с активными начальными условиями в некоторой точке, а поставленные краевые условия пассивны. Ведь при прямом решении задачи Коши мы моделируем процесс с односторонним переносом параметров.

В противном случае, т. е. при исследовании реального двустороннего процесса с активными краевыми условиями, нарушается соответствие между устойчивостью алгоритма и рассматриваемого процесса. Иными словами, процесс, моделируемый численным алгоритмом, может оказаться неустойчивым и, следовательно, мы не сумеем найти достоверного решения, в то время как реальный процесс вполне устойчив и обладает детерминированным течением.

Возможен и обратный вариант — моделируемый процесс устойчив, а реальный процесс неустойчив. Это может оказаться еще опаснее — ведь мы получим достоверное решение и будем верить ему, хотя на самом деле изучаемый процесс вообще не имеет детерминированного течения и наверняка пойдет как-то иначе. Здесь требуется специальная проверка устойчивости исследуемого процесса.

При наличии достаточно устойчивого численного алгоритма решения задачи такая проверка вполне возможна. Однако если устойчивость алгоритма в рассматриваемом случае находится «на пределе», то оценить степень устойчивости процесса весьма затруднительно.

В строительной механике характерен первый вариант — устойчивый реальный процесс и неустойчивый алгоритм метода начальных параметров.

*Теорема 2.11. Если в одномерном линейном процессе деформирования конструкции проявляется краевой эффект, т. е. смещения от сосредоточенных усилий, приложенных в любом сечении, затухают по мере удаления от этого сечения (монотонность затухания не обязательна), то расчет такой конструкции методом начальных параметров сопряжен с нарастанием погрешностей по мере увеличения ее длины и при достаточно большой длине окажется неустойчивым.*

В самом деле, пусть мы имеем произвольный $2m$-параметрический линейный процесс деформирования конструкции; $x$ — независимую переменную; $A_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ — внутренние параметры процесса, выражающие смещения; $P_k$ — внутренние параметры, которые выражают усилия, соответствующие $A_k$. Предположим, что в рассматриваемом процессе имеет место краевой эффект, т. е. затухание $A_k(x)$ от действия $P_k(x)$, приложенных

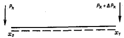



Рис. 2.29.

в точке $x_0$, по мере возрастания абсолютного значения разности $x - x_0$. Пусть, далее, в сечении $x = x_0$ допущена погрешность $\delta$ в значении $A_s$, а все остальные внутренние параметры найдены точно. Рассмотрим участок конструкции от $x_0$ до $x_1$ (рис. 2.29). Поскольку все смещения в пределах этого участка определяются действующими на участок внешними усилиями, а внешняя нагрузка и усилия $P_k(x_0)$ заданы точно, погрешность $\delta$ связана с некоторыми добавками $\Delta P_k(x_1)$ в усилиях на конце $x = x_1$. Эти добавки представляют собой погрешности в усилиях $P_k(x_1)$, вызывающие в сечении $x = x_0$ смещение $A_s + \delta$. Но в силу краевого эффекта все перемещения от сосредоточенных усилий затухают по длине конструкции. Следовательно, при значительной длине участка $(x_1, x_0)$ малую погрешность $\delta$ можно вызвать лишь большими добавками $\Delta P_k$; с увеличением длины $(x_1\ x_0)$ указанные $\Delta P_k$ сколь угодно возрастают и становятся неприемлемыми. Ясно, что большие $\Delta P_k$ вызовут большие добавочные смещения $\Delta A_k(x_1)$ — погрешности в $A_k(x_1)$.

Аналогичным образом рассматриваются нелинейные конструкции с краевым эффектом.

Следовательно, если конструкция обладает свойствами краевого эффекта (а это такие важные механические системы, как балки на упругом основании, оболочки и т. п.), то применять для ее расчета метод начальных параметров допустимо лишь тогда, когда длина участка, который «проходится» этим методом, сравнительно невелика.

В некоторых случаях устойчивость алгоритма можно несколько повысить искусственными приемами. Скажем, выбор исходной точки, где задаются начальные параметры, вблизи середины конструкции, а не у ее края позволяет сократить вдвое длину участка интегрирования и уменьшить погрешности. Однако нередко все возможные приемы оказываются безрезультатными.

Заметим, что сказанное выше о методе начальных параметров имеет прямое отношение к решению краевых задач на некоторых типах моделирующих электронных машин. Дело в том, что многие из них моделируют односторонние процессы, описываемые данными дифференциальными уравнениями. Таким образом, решение краевой задачи сводится к подбору начальных условий, соответствующих поставленным краевым условиям. Несоответствие устойчивости одностороннего процесса, воспроизводимого машиной, устойчивости изучаемого двустороннего процесса может при этом проявиться очень сильно. Примером могут служить попытки применения таких моделирующих машин для прямого решения уравнений задачи о постановке судна в док. Причина неудач ясна — поскольку судно представляет собой балку переменного сечения, лежащую на упругом основании переменной жесткости, то здесь налицо краевой эффект. Следовательно, односторонний процесс, определяемый теми же уравнениями, неустойчив.

Рассмотрим более подробно возможность построения устойчивого алгоритма для частного случая линейных уравнений переноса, имеющих вид дифференциальных уравнений $n$-го порядка с постоянными коэффициентами.

Пусть все корни $\alpha_i$ характеристического уравнения имеют отрицательную *вещественную часть, а интегрирование производится* в сторону возрастания независимой переменной. Тогда в соответствии с положениями теории устойчивости Ляпунова процесс вычислений любого частного решения при заданных начальных условиях отрезка интегрирования ($x = x_0$) является устойчивым.

Пусть начальные условия для $i$-го частного решения будут

$$y_i^{(m)}(x_0) = a_{im}, \quad m = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1, \tag{2.119}$$

где $y_i^m(x_0) = a_{im}$ — производная от функции $y_i(x)$; $a_{im}$ — известные конечные числа. Очевидно, что $i$-е решение может быть записано в виде

$$y_i(x) = \sum_{j=1}^{n} D_{ij} e^{\alpha_j (x - x_0)}. \tag{2.120а}$$

Величины $D_j$ находятся из (2.119).

Другим $k$-м начальным условиям типа (2.119) отвечает решение

$$y_k(x) = \sum_{j=1}^{n} D_{kj} e^{\alpha_j (x - x_0)}. \tag{2.120б}$$

Для удобства дальнейших рассуждений пронумеруем корни в порядке возрастания абсолютного значения действительной части. Предположим, что на $i$-е и $k$-е условия не наложено никаких ограничений, кроме линейной независимости. Ясно, что при достаточно большом $x$ в обоих частных решениях станет превалирующим член, зависящий от корня $\alpha_1$. Пусть при $x = x^1$ порядок малости остальных членов по сравнению с главным составляет



$$\delta_i \cong \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} D_{ij} e^{\alpha_j (x^1 - x_0)} - D_{i1} e^{\alpha_1 (x^1 - x_0)}}{D_{i1} e^{\alpha_1 (x - x_0)}}. \tag{2.121}$$

Обозначим $\delta$ порядок наименьшего из чисел, которое мы еще можем зафиксировать для конкретной ЭВМ. Тогда при $\delta_i \cong \delta$ в (2.120) сохранятся только главные члены, и при $x > x^1$ мы получим

$$y_i \cong D_{i1} e^{\alpha_1 (x - x_0)}; \ y_k = D_{k1} e^{\alpha_1 (x - x_0)}. \tag{2.122}$$

Решения $y_i$ и $y_k$ становятся линейно-зависимыми, и произвольные постоянные интегрирования не могут быть определены из граничных условий, если только длина участка интегрирования превышает $(x^1 - x_0)$. Если $\delta_i$ незначительно больше $\delta$ (примерно на порядок), то решения (2.120а) и (2.120б) линейно-независимы только за счет малых добавок. В силу этого произвольные постоянные в решении, подчиненном краевым условиям, определяются с большими погрешностями.

Рассмотрим возможность уменьшения ошибки в результате специального подбора начальных условий. Их можно задать, например, в виде

$$y_i^{(m)}(x_0) = \alpha_i^m, \quad m = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1,$$

где $y_i^m$ — $m$-я производная функции $y_i$; $\alpha_i^i$ — $i$-й корень характеристического уравнения. Тогда при абсолютно точном выполнении всех вычислений имеем

$$y_i(x) = e^{\alpha_i (x - x_0)}, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{2.123}$$

На первый взгляд, все частные решения линейно-независимы при любом $x$. Однако из-за неточности задания начальных условий, связанной хотя бы с погрешностью округления, получаемое на ЭВМ решение будет иметь вид

$$y_i(x) = e^{\alpha_i (x - x_0)} + \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} e^{\alpha_j (x - x_0)}, \tag{2.124}$$

где $\delta_{ij}$ — числа, имеющие, по крайней мере, порядок последней учитываемой в ЭВМ значащей цифры.

С увеличением $x$ в (2.124) непрерывно будет возрастать доля члена $\delta_{i1} e^{\alpha_1 (x - x_0)}$ и при определенных значениях $x$ этот член снова «забьет» основной. Вновь будет наблюдаться потеря точности решения.

Из выполненного анализа следует, что при наличии корней только с отрицательной вещественной частью возможность использования алгоритма метода начальных параметров определяется длиной участка интегрирования и порядком $\delta$ наименьшего из чисел, фиксируемого ЭВМ. Наибольшая длина участка $l$, когда еще может быть реализован алгоритм, определяется из соотношения

$$e^{(\alpha_n-\alpha_1)\, l} \simeq \delta, \tag{2.125а}$$

где $\alpha_1$ и $\alpha_n$ — корни с наименьшей и наибольшей по абсолютному значению вещественной частью.

Если все корни характеристического уравнения имеют положительную вещественную часть, то интегрирование уравнений переноса в сторону возрастания координаты $x$ неустойчиво. Однако начало участка можно перенести в точку $x = x_0 + l$ и выполнить интегрирование в сторону убывания независимой переменной. Тогда все приведенные рассуждения остаются в силе.

Полученная оценка (2.125а) превращается в оценку

$$e^{(\alpha_1-\alpha_n)\, l} \cong \delta. \tag{2.125б}$$

Оценки (2.125) имеют ясный физический смысл. Известно, что точность, с которой мы можем исследовать какой-либо процесс, не может превышать точности устройств и приборов, используемых для его изучения. ЭВМ можно рассматривать как устройство, с помощью которого изучается процесс, описываемый исходными уравнениями и условиями. Минимальная по порядку величина, улавливаемая ЭВМ, может рассматриваться как чувствительность устройства, которая, очевидно, должна быть больше определяемых величин. Условия (2.125) являются, по существу, условиями согласованности ЭВМ и требуемой точности расчета.

Возвращаясь к методу начальных параметров, необходимо рассмотреть еще один случай, когда действительные части корней имеют различные знаки. Здесь можно обобщить полученные результаты и получить оценку, аналогичную (2.125а), (2.125б):

$$e^{-|\alpha_i-\alpha_k|\, l} \cong \delta, \tag{2.125в}$$

где $|\alpha_i - \alpha_k|$ — наибольшая по абсолютному значению разность между действительными частями корней.

Эта оценка необходима, но недостаточна. Действительно, при выводе (2.125а) мы учитывали лишь погрешность в начальных условиях и не считались с текущей погрешностью, появляющейся на каждом шаге интегрирования. Это было в какой-то мере оправдано, поскольку из-за убывания решений однажды допущенная неточность с увеличением длины участка интегрирования затухала.

По-иному обстоит дело, когда действительные части корней имеют разные знаки. При любом направлении интегрирования здесь происходит накопление погрешностей, и потому оценка, (2.125в) слишком оптимистична. В силу сказанного алгоритм метода начальных параметров при таких корнях характеристических уравнений допустимо использовать лишь для очень коротких участков интегрирования.



Важно отметить, что для задач строительной механики вследствие «равноправия» ее концов характерно отсутствие корней только с положительной или только с отрицательной частью: корню с положительной частью всегда сопутствует корень с отрицательной частью. Таким образом, использование метода начальных параметров оказывается затруднительным.

## § 10. Моделирование двусторонних процессов. Метод парциальных откликов

1. Общая схема метода парциальных откликов. Весьма важная задача о численном моделировании и анализе устойчивости двусторонних процессов в значительной мере разрешается методом парциальных откликов, который уже нашел довольно широкое применение в строительной механике. Главнейшие положения этого метода таковы.

Используется известный прием, состоящий в предварительном определении некоторых свойств системы, где происходит изучаемый процесс. Искомое решение выражается затем через эти свойства. Именно так поступают, например, в методе главных координат (метод разложения решений по собственным функциям), где сначала определяют частоты и формы главных свободных колебаний системы, а затем рассматривают движение по каждой из этих форм в отдельности.

В методе парциальных откликов такими свойствами являются отклики частей системы на воздействия со стороны соседней части. Слово «парциальный» как раз и показывает, что изучению подвергаются отдельные части, составляющие систему (по аналогии с терминами типа «парциальная частота», «парциальное давление», и т. п.).

Важные особенности такого выбора предварительно определяемых свойств состоят в том, что:

— эти свойства находятся из решений задач с начальными условиями (задача Коши), которые весьма удобны для численного расчета и анализа устойчивости решений;

— метод парциальных откликов может быть использован без нарушения принципа соответствия устойчивости алгоритма и рассматриваемого физического процесса.

В конечном итоге происходит непрямое сведение исходной краевой задачи к ряду задач Коши. Мы говорим о непрямом сведении, поскольку задачи Коши относятся уже не к исходным дифференциальным уравнениям, а к некоторым другим уравнениям, правда, связанным с исходными уравнениями. Напомним, что в любом варианте метода начальных параметров имеет место прямое сведение.

При использовании метода парциальных откликов в результате сведения (хотя и непрямого) краевой задачи к задачам Коши, а также выполнения принципа соответствия открывается возможность для анализа устойчивости двусторонних процессов ляпуновскими и квазиляпуновскими методами.

Рассмотрение метода парциальных откликов начнем с простого случая двухпараметрического одномерного неособенного процесса, определяемого произвольной системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1[x,\ y_1(x),\ y_2(x)];$$
$$\frac{dy_2}{dx} = f_2[x,\ y_1(x),\ y_2(x)] \qquad (2.126)$$

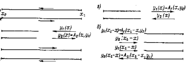



Рис. 2.30.

при активных граничных условиях в точках $x = x_0$, $x = x_l$:

$$y_2(x_0) = \varphi_0[x_0,\ y_1(x_0)],\quad y_1(x_l) = \varphi_l[x_l,\ y_2(x_l)]. \qquad (2.127)$$

Процесс имеет схему потоков параметров, показанную на рис. 2.30, *а*.

Введем понятие парциального отклика системы. С этой целью разделим систему сечением $x$ (рис. 2.30, *б*) и рассмотрим левую парциальную систему. Зададим на правом конце парциальной системы активное условие $y_1(x) = y_1$; вместе с первым условием (2.127) оно обеспечит определенность и двусторонность процесса в парциальной системе. Парциальным откликом системы $A_2(x, y_1)$ будем называть значение параметра $y_2(x) = y_2$ на правом конце парциальной системы, когда значение второго параметра $y_1(x)$ на этом конце равно заданной фиксированной величине $y_1(x)$ (рис. 2.30, *б*).

Нетрудно вывести дифференциальное уравнение для функции $A_2(x, y_1)$, отражающей некоторое свойство парциальной системы. Пусть известна функция $A_2(x, y_1)$ в сечении $x$. Из второго уравнения (2.126) найдем ее значение в сечении $x + dx$:

$$A_2(x + dx,\ y_1 + dy_1) = A_2(x,\ y_1) +$$
$$+ f_2[x,\ y_1(x),\ A_2[x,\ y_1(x)]]\,dx, \qquad (2.128а)$$

где, согласно первому уравнению (2.126),

$$dy_1 = f_1[x,\ y_1(x),\ A_2[x,\ y_1(x)]]\,dx.$$



С другой стороны,

$$A_2(x + dx,\ y_1 + dy_1) = A_2(x,\ y_1) + \frac{\partial A_2}{\partial x}dx +$$
$$+ \frac{\partial A_2}{\partial y_1}dy_1 = A_2(x,\ y_1) + \frac{\partial A_2}{\partial x}dx +$$
$$+ \frac{\partial A_2}{\partial y_1}f_1\{x,\ y_1(x),\ A_2[x,\ y_1(x)]\}\,dx. \qquad (2.128б)$$

Приравнивая (2.128а) и (2.128б), получаем

$$\frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y_1}f_1\{x,\ y_1(x);\ A_2[x,\ y_1(x)]\} =$$
$$= f_2\{x,\ y_1(x),\ A_2[x,\ y_1(x)]\}. \qquad (2.129)$$

Уравнение (2.129) интегрируется при начальных условиях, выражаемых первым равенством (2.127).

При схеме потоков параметров, показанной на рис. 2.30, *в*, активные граничные условия следует переписать в виде

$$y_1(x_0) = \psi_0[x_0,\ y_2(x_0)],\quad y_2(x_l) = \psi_l[x_l,\ y_1(x_l)], \qquad (2.127а)$$

рассматривать левую парциальную систему, изображенную на рис. 2.30, *г*, и пользоваться очевидным уравнением

$$\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial y_2}f_2(x,\ y_2,\ A_1) = f_1(x,\ y_2,\ A_1). \qquad (2.129а)$$

Уравнение (2.129а) получено из (2.129) путем очевидной замены переменных и индексов: оно интегрируется при начальных условиях, выражаемых первым равенством (2.127а).

Для интегрирования (2.129) и (2.129а) применяется обобщенный способ Эйлера. Поясним его на примере уравнения (2.129). Первое условие (2.127) непосредственно дает $A_2(x_0, y_1)$; построение этой функции позволяет прямо найти

$$\left.\frac{\partial A_2}{\partial y_1}\right|_{x=x_0}.$$

Из уравнения (2.129) имеем

$$A_2(x_0 + \Delta x,\ y_1) = A_2(x_0,\ y_1) + f_2[x_0,\ y_1,\ A_2(x_0,\ y_1)]\,\Delta x -$$
$$- \frac{\partial A_2(x_0,\ y_1)}{\partial y_1}f_1[x_0,\ y_1,\ A_2(x_0,\ y_1)]\,\Delta x. \qquad (2.130)$$

Дальнейшие шаги выполняются рекуррентно.

Аналогичным образом вводятся понятия парциальных откликов $A_1(x_l - x,\ y_2)$ и $A_2(x_l - x,\ y_1)$ для правых парциальных систем (рис. 2.30, *д*).

Вернемся к исходному процессу (см. рис. 2.30, *а*). Если в сечении $x$ известны значения $A_2(x, y_1)$ и $A_1(x_l - x, y_2)$, то действительные значения внутренних параметров исследуемого процесса в исходной полной системе определятся условием сопряжения

$$y_2(x) = A_2[x,\ A_1(x_l - x,\ y_2)]$$

или

$$y_1(x) = A_1[x_l - x,\ A_2(x,\ y_1)]. \tag{2.131}$$

При исходном процессе со схемой потоков параметров, показанной на рис. 2.30, *в*, условия сопряжения примут вид

$$y_1(x) = A_1[x,\ A_2(x_l - x,\ y_1)]$$

или

$$y_2(x) = A_2[x_l - x,\ A_1(x,\ y_2)]. \tag{2.131a}$$

Выбор ведущих, т. е. задаваемых, активных условий в парциальных системах в данном случае однозначно определяется потоком параметров в исходной системе.

Анализируя приведенный алгоритм, легко понять, что он является численным моделированием исходного процесса с учетом его устойчивости. Ведь мы сначала определили некоторые свойства парциальных систем, в которых происходит этот процесс, нигде не подменяя причин, условий и следствий. Затем мы выразили параметры процесса через найденные свойства, опять-таки не пользуясь подменой следствий, причин и условий.

Заметим, что с точки зрения классической математики активные условия (2.127) и (2.127а) совершенно эквивалентны. Однако процессы, показанные на рис. 2.30, *а*, *в*, имеют разную устойчивость, поскольку устойчивость решений задачи Коши для уравнений (2.129) и (2.129а), безусловно, различна. Отсюда следует доказательство важного положения о том, что для анализа устойчивости одномерных процессов требуются схемы потоков параметров. Более того, иногда причинно-следственные связи не определяются и потоком параметров. Допустим, что в рассмотренном случае каждый параметр имеет двусторонний перенос. Тогда для выбора ведущего параметра потребуется добавочный физический анализ.

Возьмем для примера растяжение стержня с площадью сечения $\Omega$, помещенного в нелинейно-упругое винклеровское основание (см. рис. 2.28). Материал стержня также нелинейно-упругий. *Применяя обозначения, введенные ранее для аналогичной линейной задачи*, имеем

$$\frac{dP}{dx} = k(y)\,y;\quad \frac{dy}{dx} = \frac{P}{E\left(\frac{P}{\Omega}\right)\Omega}. \tag{2.132}$$

К системе (2.132) вполне применим только что рассмотренный алгоритм, причем за ведущий параметр следует принять внутреннее усилие $P$, так как оно является причиной деформирования правой и левой парциальных систем. Отклик $A_y(x,\ P)$ есть податливость части системы.



Если принять за ведущий параметр значения смещений $y(x)$, то отклик $A_p(x,\ y)$ выразит жесткость части системы. Почему же нам не определять ее? Ведь она тоже свойство этой части.

Ответ состоит в том, что всякий объект имеет актуальные и потенциальные свойства. Первые — это те свойства, которые фактически проявляются в данном процессе; вторые свойства могут проявиться, если объект будет поставлен в другие условия. Если мы хотим исследовать данный процесс в данной системе и не нарушить принципа соответствия, нам следует пользоваться только актуальными свойствами системы. В данном случае податливость — актуальное свойство, а жесткость — потенциальное свойство. С жесткостью мы будем иметь дело, если прикрепим рассматриваемую часть к некому устройству, работающему на строго заданных смещениях.

Впрочем, в ряде случаев целесообразно применять не принцип соответствия устойчивости алгоритма и процесса, а принцип максимальной устойчивости алгоритма. Тогда ничто не мешает произвольно и даже попеременно использовать разные отклики с разными ведущими параметрами в зависимости от степени устойчивости определения соответствующих откликов.

Произвольный одномерный непрерывный процесс без внешних продольных связей описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dy_k}{dx} = f_k(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n),\quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{2.133}$$

Граничные активные условия для левого конца ($x = x_0$) запишем в виде

$$y_i(x_0) = \varphi_{0i}[x_0,\ y_1(x_0),\ y_2(x_0),\ \ldots,\ y_m(x_0)],$$
$$(i = m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n). \tag{2.134}$$

На правом конце $x = x_l$ вид граничных условий аналогичен; число их равно $m$.

Пусть ведущими параметрами являются величины $y_1,\ \ldots,\ y_m$ (движение от $x_0$ к $x_l$). Рассечем исходную систему в сечении $x$. Парциальным откликом $A_i[x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m]$ назовем значение параметра $y_i$ на правом конце парциальной системы, когда значения ведущих параметров равны $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m$. Число парциальных откликов, очевидно, равно $n-m$.

Выведем дифференциальные уравнения для парциальных откликов. Пусть в сечении $x$ известны все отклики. Из $i$-го уравнения системы (2.133) непосредственно получаем

$$A_i(x+dx,\ y_1+dy_1,\ y_2+dy_2,\ \ldots,\ y_m+dy_m) =$$
$$= A_i(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m) +$$
$$+ f_i(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m,\ A_{m+1},\ A_{m+2},\ \ldots,\ A_n)\,dx. \tag{2.135}$$

С другой стороны,

$$A_i(x+dx,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)=A_i(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)+$$
$$+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial A_i}{\partial y_s}dy_s+\frac{\partial A_i}{\partial x}dx. \tag{2.135a}$$

Приравнивая (2.135) и (2.135а), получаем

$$\frac{\partial A_i}{\partial x}+\sum_{s=1}^{m}\frac{\partial A_i}{\partial y_s}f_s(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m,\ A_{m+1},\ A_{m+2},\ \ldots,\ A_n)=$$
$$=f_i(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m,\ A_{m+1},\ A_{m+2},\ \ldots,\ A_n),$$
$$(i=m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n). \tag{2.136}$$

Равенства (2.134) являются начальными условиями для уравнений *(2.136).*

Для правой парциальной системы принимается $n-m$ ведущих параметров (в соответствии с числом правых активных граничных условий). Ведущие параметры для правой и левой парциальных систем, вообще говоря, различны. Действительные значения внутренних параметров исследуемого процесса в исходной системе находятся из условий сопряжения парциальных систем.

В случае линейного процесса парциальные отклики выражаются *линейными функциями* ведущих параметров $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m$

$$A_i=\sum_{s=1}^{m}A_{is}(x)\,y_s+A_{i0}(x). \tag{2.137}$$

Функции $A_{is}(x)$ и $A_{i0}(x)$ являются компонентами вектора парциального отклика $A_i$. В дальнейшем для сокращения записи мы также будем называть их парциальными откликами; индекс $s$ указывает, каким ведущим параметром они вызваны; индекс 0 присваивается внешней нагрузке, т. е. свободным членам дифференциальных уравнений.

В строительной механике отклики $A_{ij}$ представляют собой физические величины типа податливостей.

Правые части линейных уравнений (2.133) принимают вид

$$f_k(x,\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)=\sum_{q=1}^{n}P_{kq}(x)\,y_q+P_{k0}(x). \tag{2.138}$$

Если в качестве ведущих фигурируют параметры $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m$, то с учетом (2.137) уравнение (2.138) можно привести к виду

$$f_k=\sum_{q=1}^{m}P_{kq}y_q+\sum_{q=m+1}^{n}P_{kq}\left(A_{q0}+\sum_{p=1}^{m}A_{qp}y_p\right)+P_{k0}. \tag{2.139}$$



Дифференцируя (2.137) по $x$ и $y$, находим

$$\frac{\partial A_i}{\partial x}=\sum_{s=1}^{m}\frac{dA_{is}}{dx}y_s+\frac{dA_{i0}}{dx},\quad \frac{\partial A_i}{\partial y_s}=A_{is}. \tag{2.140}$$

Подставив (2.139), (2.140) в (2.136), получим

$$\sum_{s=1}^{m}\frac{dA_{is}}{dx}y_s+\frac{dA_{i0}}{dx}+\sum_{s=1}^{m}A_{is}\left[\sum_{q=1}^{m}P_{sq}y_q+\right.$$
$$\left.+\sum_{q=m+1}^{n}P_{sq}\left(A_{q0}+\sum_{p=1}^{m}A_{qp}y_p\right)+P_{s0}\right]=$$
$$=\sum_{s=1}^{m}P_{is}y_s+\sum_{q=m+1}^{n}P_{iq}\left(A_{q0}+\sum_{s=1}^{m}A_{qs}y_s\right)+P_{i0}. \tag{2.141}$$

Приравнивая члены при произвольном ведущем параметре $y_i$, окончательно имеем

$$\frac{dA_{ij}}{dx}=P_{ij}+\sum_{q=m+1}^{n}P_{iq}A_{qj}-\sum_{s=1}^{m}A_{is}\left(P_{sj}+\sum_{q=m+1}^{n}P_{sq}A_{qj}\right),$$
$$(i=m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n). \tag{2.142}$$

Рассматривая свободные члены, аналогичным путем получаем

$$\frac{dA_{i0}}{dx}=P_{i0}+\sum_{q=m+1}^{n}P_{iq}A_{q0}-\sum_{s=1}^{m}A_{is}\left(P_{s0}+\sum_{q=m+1}^{n}P_{sq}A_{q0}\right),$$
$$(i=m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n). \tag{2.143}$$

Сравнивая (2.142) и (2.143), легко понять, что (2.143) можно получить и непосредственно из (2.142), если положить в последнем $j=0$. Это объясняется тем, что нагрузка является одной из равноправных компонент вектора $A_i$.

Начальные условия для систем (2.142) и (2.143) выводятся из граничных условий исходной системы, преобразованных к виду (ведущие параметры по-прежнему $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m$)

$$y_i(x_0)=\sum_{j=1}^{m}A_{ij}^{0}y_j(x_0)+A_{i0}^{0}. \tag{2.144}$$

Числа $A_{ij}^{0}$ являются искомыми начальными условиями для $A_{ij}(x)$.

Пусть на левом конце двустороннего нелинейного $n$-параметрического процесса ($x=x_0$) задано $m_0$ основных условий; в сечениях

$x_1, x_2, \ldots, x_l$ задано соответственно $m_1, m_2, \ldots, m_l$ основных условий. Сумма $m_0 + m_1 + \ldots + m_l = n$.

В промежутке $(x_0, x_1)$ парциальные отклики определяются обычным образом; число ведущих параметров равно $n - m_0$. В сечении $x_1$ имеется $m_1$ соотношений вида

$$F_k(x_1, y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \tag{2.145}$$

разрешенных относительно параметров, являющихся следствиями. Подставив в них вместо ведомых параметров $m_0$ парциальных откликов, получим возможность увеличить число ведомых параметров до $m_0 + m_1$. После точки $x_1$ на краю левой парциальной системы независимо можно задавать лишь $n - m_0 - m_1$ параметров. Таким же способом рассматриваются остальные промежуточные точки. В результате к точке $x = x_l$ мы подходим с $m_l$ ведущими параметрами. В точке $x_l$ имеем возможность определить все внутренние параметры исследуемого процесса. Ход справа налево (вычисление откликов для правой парциальной системы) и сопряжение парциальных систем пояснений не требуют.

В линейном варианте метода весь расчет упрощается. Поясним его на частном примере, когда в $n$ точках, включая и крайние, задано по одному линейному основному дополнительному условию.

Пусть в промежутке $(x_0, x_1)$ в качестве ведомого параметра принят $y_n$. Тогда

$$A_n = \sum_{s=1}^{-1} A_{ns} y_s + A_{n0}. \tag{2.146}$$

Дополнительное условие в сечении $x = x_1$ приведем к виду

$$y_{n-1}(x_1) = \sum_{s=1}^{n-2} A^{(1)}_{n-1,s} y_s(x_1) + A^{(1)}_{n-1,n} y_n(x_1) + A^{(1)}_{n-1,0}. \tag{2.147}$$

Такой вид удобен, если мы хотим ввести в число ведомых параметров $y_{n-1}$.

Подставив (2.146) в (2.147), получим

$$y_{n-1}(x_1) = \sum_{s=1}^{n-2} A^{(1)}_{n-1,s} y_s(x_1) + A^{(1)}_{n-1,n}\left[\sum_{s=1}^{n-2} A_{ns}(x_1) y_s(x_1) + A_{n,n-1}(x_1) y_{n-1}(x_1) + A_{n,0}(x_1)\right] + A^{(1)}_{n-1,0} \tag{2.148}$$

или

$$y_{n-1}(x_1) = \frac{\sum_{s=1}^{n-2}\left[A^{(1)}_{n-1,s} + A^{(1)}_{n-1,n} A_{ns}(x_1)\right] y_s(x_1) + A^{(1)}_{n-1,n} A_{n,0}(x_1) + A^{(1)}_{n-1,0}}{1 - A^{(1)}_{n-1,n} A_{n,n-1}(x_1)}. \tag{2.148а}$$



Уравнение (2.148а) вместе с условием

$$y_n(x_1) = \sum_{s=1}^{n-2} A_{ns}(x_1) y_s(x_1) + A_{n,n-1}(x_1) y_{n-1}(x_1) + A_{n0}(x_1) \tag{2.148б}$$

дает начальные условия для интегрирования системы уравнений парциальных откликов в промежутке $(x_1, x_2)$. Дальнейший расчет очевиден.

При ряде значений независимой переменной $x$ некоторые парциальные отклики, особенно в случае линейных процессов, могут обращаться в бесконечность при конечных значениях ведущих параметров. Ничего удивительного здесь нет: соответствующие точки $x$ отвечают так называемым режимам парциальной потери устойчивости или парциальным резонансам.

Некоторые отклики равны бесконечности и в начале процесса; примером служат хотя бы податливости на свободном конце балки, оболочки и т. п. Отмеченное обстоятельство затрудняет интегрирование уравнений откликов на участках, примыкающих к упомянутым точкам. Для облегчения задачи используем ряд приемов. Первый из них состоит во временной и искусственной смене ведущих параметров: обычно можно подобрать ведущие параметры такими, чтобы измененные отклики не обращались в данной точке в бесконечность. После прохода этой точки следует снова вернуться к системе ведущих параметров, отвечающей принципу соответствия устойчивости алгоритма и рассматриваемого объекта.

Второй общий прием заключается в проходе указанной точки методом начальных параметров, поскольку здесь исходные уравнения процесса никаких особенностей обычно не имеют. Метод начальных параметров позволяет вычислить интересующие нас парциальные отклики за выделенной точкой, а затем снова интегрировать уравнения откликов.

Наконец, иногда отмеченные точки можно проходить разными искусственными приемами, основанными на различных физических соображениях.

2. Конкретный случай использования линейного варианта метода парциальных откликов. Пусть на стержень переменного сечения из линейно-упругого материала, помещенный в линейно-упругое пространство винклеровского типа (рис. 2.31, $a$), действует распределенная осевая нагрузка интенсивностью $q(x)$; положительное направление $q$ совпадает с положительным направлением $y$. Дифференциальные уравнения задачи в принятых ранее для аналогичной системы обозначениях приобретают вид (см. § 7, п. 1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P}{E\Omega(x)}, \qquad \frac{dP}{dx} = -q(x) + k(x)\,y \tag{2.149}$$

при граничных условиях

$$y(0) = P(0)\, A^{\text{п}}(0) + A_0^{\text{п}}(0),$$
$$y(l) = -P(l)\, A^{\text{п}}(l) + A_0^{\text{п}}(l), \tag{2.150}$$

где $A^{\text{п}}(0)$ и $A^{\text{п}}(l)$ — коэффициенты податливости заделок концов стержня; $A_0^{\text{п}}(0)$ и $A_0^{\text{п}}(l)$ — осевые смещения этих заделок при отсутствии стержня.

Введем (рис. 2.31, *б*) *понятие парциального отклика* $A^{\text{п}}(x)$ как осевого смещения сечения $x$ ненагруженной $q(x)$ левой части стержня под действием осевого усилия $P(x) = 1$. Дифференциальное уравнение для $A^{\text{п}}(x)$ нетрудно получить из (2.142). Однако для иллюстрации мы выведем его непосредственно из физических соображений.

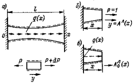



Рис. 2.31.

Допустим, что нам известно значение $A^{\text{п}}(x)$. Тогда в сечении $x + dx$ *парциальный отклик равен* $A^{\text{п}}(x) + dA^{\text{п}}(x)$. Если в сечении $x + dx$ действует усилие $P = 1$, то, согласно второму уравнению (2.149), в сечении $x$ это усилие будет

$$P(x) = 1 - [k(x) + dk(x)]\left[A^{\text{п}}(x) + dA^{\text{п}}(x)\right] dx =$$
$$= 1 - k(x) A^{\text{п}}(x)\, dx.$$

Следовательно, смещение сечения $x$ составит

$$y(x) = A^{\text{п}}(x) - k(x)\left[A^{\text{п}}(x)\right]^2 dx.$$

Из первого уравнения (2.149) имеем

$$y(x + dx) = A^{\text{п}}(x) + dA^{\text{п}}(x) = A^{\text{п}}(x) -$$
$$- k(x)\left[A^{\text{п}}(x)\right]^2 dx + \frac{1}{E\Omega(x)}\, dx,$$



откуда

$$\frac{dA^{\text{п}}(x)}{dx} = \frac{1}{E\Omega(x)} - k(x)\left[A^{\text{п}}(x)\right]^2, \tag{2.151}$$

причем из (2.150) нам известно начальное значение $A^{\text{п}}(0)$.

Парциальный отклик $A_0^{\text{п}}(x)$ определим как осевое смещение сечения $x$ левой части стержня под действием нагрузки $q(x)$ и начального смещения $A^{\text{п}}(x)$ левой заделки (рис. 2.31, *в*). Осевое усилие $P(x) = 0$.

Для вывода дифференциального уравнения, определяющего $A_0^{\text{п}}(x)$, положим, что нам известны оба парциальных отклика $A^{\text{п}}(x)$ и $A_0^{\text{п}}(x)$ в сечении $x$. Если теперь продлить левую часть до сечения $x + dx$, то в сечении $x$ будет действовать осевое усилие

$$P(x) = q(x)\, dx - \left[A_0^{\text{п}}(x) + dA_0^{\text{п}}(x)\right][k(x) + dk(x)]\, dx =$$
$$= q(x)\, dx - A_0^{\text{п}}(x)\, k(x)\, dx.$$

Тогда

$$y(x) = A_0^{\text{п}}(x) + A^{\text{п}}(x)\, q(x)\, dx - A_0^{\text{п}}(x)\, A^{\text{п}}(x)\, k(x)\, dx$$

и, согласно первому уравнению (2.149),

$$y(x + dx) = A_0^{\text{п}}(x) + dA_0^{\text{п}}(x) = A_0^{\text{п}}(x) + A^{\text{п}}(x)\, q(x)\, dx -$$
$$- A_0^{\text{п}}(x)\, A^{\text{п}}(x)\, k(x)\, dx.$$

Окончательно

$$\frac{dA_0^{\text{п}}(x)}{dx} = A^{\text{п}}(x)\, q(x) - A_0^{\text{п}}(x)\, A^{\text{п}}(x)\, k(x). \tag{2.152}$$

Из (2.150) мы знаем начальное значение $A_0^{\text{п}}(x)$. Способ определения парциальных откликов $A^{\text{п}}(x)$ и $A_0^{\text{п}}(x)$ стал очевидным.

Аналогичным образом вычисляются отклики для правой парциальной системы. Определение внутренних параметров процесса $P(x)$ и $y(x)$ из условий сопряжения пояснений не требует.

Заметим, что отклики типа $A_0^{\text{п}}(x)$, обусловленные действием внешней нагрузки и начальных смещений опор, часто называют также парциальными параметрами в отличие от откликов типа $A^{\text{п}}(x)$, которые обусловлены внутренними усилиями. Парциальные параметры отражают действие на линейную систему внешних сил, а остальные парциальные отклики — собственные свойства системы. Из общей теории линейных уравнений мы знаем, что, изучив собственные свойства — решения однородных систем, можно затем только через них выразить все решение, учитывающее внешнее воздействие (вспомним хотя бы метод вариации произвольных постоянных, предложенный Лагранжем). Аналогичным образом можно выполнять все расчеты, отбрасывая вычисление парциальных параметров [46]. Однако практически удобнее оперировать парциальными параметрами и вычислять их специально.

Постараемся теперь оценить поведение погрешностей счета в нашем алгоритме.

Пусть в сечении $x = x_1$ при определении отклика $A^n(x)$ допущена погрешность $\varepsilon_0$, а дальнейшие вычисления производятся точно. Тогда при $x > x_1$ вместо величин $A^n(x)$ будем вычислять значения $A^n(x) + \varepsilon(x)$, т. е. интегрировать уравнение

$$\frac{d\left[A^n(x)+\varepsilon(x)\right]}{dx} = \frac{1}{E\Omega(x)} - k(x)\left[A^n(x)+\varepsilon(x)\right]^2. \qquad (2.153)$$

Вычитая из (2.153) уравнение (2.151), получаем

$$\frac{d\varepsilon(x)}{dx} = -2A^n(x)\,\varepsilon(x)\,k(x) - \varepsilon^2(x)\,k(x). \qquad (2.154)$$

Мы пришли таким образом к анализу устойчивости нулевого решения уравнения (2.154) относительно возмущенного начального условия в точке $x = x_1$. Это можно сделать методами теории Ляпунова, однако для практических целей целесообразно *использовать другой путь.*

Ограничимся первым приближением, т. е. перейдем к уравнению

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = -2A^n(x)\,k(x)\,\varepsilon. \qquad (2.154a)$$

Из факта сходимости ломаных Эйлера к интегральной кривой при точных вычислениях и устремления шага к нулю следует, что на малых участках можно считать переменные коэффициенты уравнений квазипостоянными. Отсюда становится ясным затухание абсолютного значения функции $\varepsilon$, определяемой (2.154a), при любых положительных значениях отклика $A^n(x)$ и положительных $k(x)$, а также ее нарастание при отрицательных значениях $A^n(x)$ и положительных $k(x)$.

Проделав аналогичные операции для (2.152), нетрудно получить уравнение погрешности $\varepsilon$ в парциальном отклике $A_0^n(x)$

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = -A^n(x)\,k(x)\,\varepsilon. \qquad (2.155)$$

Функция $\varepsilon$ затухает по абсолютному значению при положительных $A^n(x)$ и $k(x)$ и нарастает при отрицательных $A^n(x)$, но положительных $k(x)$.

Устойчивость алгоритма метода парциальных откликов в случае, когда решение получено в податливостях, означает, что устойчив и сам рассматриваемый процесс. Неустойчивость алгоритма означает неустойчивость процесса.

Если получить решение в жесткостях, т. е. брать в качестве ведущего параметра смещение сечения $y(x) = 1$, то принцип соответствия будет нарушен. Однако иногда на это можно пойти



вполне сознательно, борясь за устойчивость алгоритма вопреки неустойчивости процесса (хотя бы локальной).

Будем считать парциальным откликом $B^n(x)$ внутреннее усилие в сечении $x$ левой части стержня под действием осевого смещения $y(x) = 1$. Пусть нам известно значение $B^n(x)$. Тогда в сечении $x + dx$ парциальный отклик равен $B^n(x) + dB^n(x)$. Если в сечении $x + dx$ задано смещение $y = 1$, то, согласно первому уравнению (2.149), в сечении $x$ это смещение будет

$$y(x) = 1 - \frac{B^n(x)}{E\Omega(x)}\,dx$$

(величины второго порядка малости отбрасываем сразу). Следовательно, *внутреннее усилие в сечении* $x$

$$P(x) = B^n(x) - \frac{1}{E\Omega(x)}\left[B^n(x)\right]^2 dx,$$

а усилие в сечении $x + dx$

$$P(x+dx) = B^n(x) - \frac{1}{E\Omega(x)}\left[B^n(x)\right]^2 dx + k(x)\,dx = B^n(x) + dB^n(x).$$

Отсюда

$$\frac{dB^n(x)}{dx} = k(x) - \frac{1}{E\Omega(x)}\,B_0^n(x)^2$$

и по аналогии

$$\frac{dB_0^n(x)}{dx} = -q(x) - \frac{1}{E\Omega(x)}\,B_0^n(x)\,B^n(x).$$

Здесь $B_0^n(x)$ — усилие в сечении $x$, когда к стержню приложена нагрузка $q(x)$, а смещение сечения $y(x) = 0$.

*Исследование поведения погрешностей $\varepsilon$ при вычислении* $B^n(x)$ дает

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = -\frac{2}{E\Omega(x)}\,B^n(x)\,\varepsilon.$$

Погрешность затухает при положительных $B^n(x)$ и возрастает при отрицательных $B^n(x)$ [величину $E\Omega(x)$ считаем существенно положительной в отличие от $k(x)$, которая может быть и отрицательной].

*Изменение погрешности $\varepsilon$ при вычислении $B_0^n(x)$ определяется* уравнением

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = -\frac{1}{E\Omega(x)}\,B^n(x)\,\varepsilon,$$

т. е. ее затухание или возрастание снова определяется знаком $B^n(x)$.

Заметим, что в нашем случае $A^{п}(x) = 1/B^{п}(x)$, следовательно, их знаки всегда совпадают. Таким образом, при положительном $k(x)$ нарастание погрешностей в $A^{п}(x)$ означает одновременно их нарастание в $B^{п}(x)$; смена ведущего параметра тут ничего не дает. При отрицательном $k(x)$ смена параметра может изменить поведение погрешности.

Этот пример позволяет сформулировать теорему.

*Теорема 2.12. Смена ведущих параметров в методе парциальных откликов меняет, вообще говоря, устойчивость алгоритма, однако алгоритм может оказаться неустойчивым и при любой их комбинации.*

3. Устойчивость метода парциальных откликов в задачах строительной механики. Будем, как и раньше, считать, что в данной конструкции проявляется краевой эффект, если смещение от сосредоточенных усилий, приложенных в любом сечении, затухает по мере удаления от этого сечения (монотонность затухания не обязательна).

Тогда можно сформулировать следующую общую теорему.

*Теорема 2.13. Если в данной конструкции и в любой парциальной системе, выделяемой методом парциальных откликов, имеется явление краевого эффекта, то расчет конструкции по методу парциальных откликов при ведущих параметрах — усилиях — всегда устойчив.*

Погрешность определения откликов-податливостей в какомлибо сечении при дальнейшем расчете может быть полностью компенсирована приложением в этом сечении неких фиктивных фиктивных внешних сосредоточенных усилий. Но в силу краевого эффекта влияние этих фиктивных усилий будет уменьшаться по мере удаления от сечения.

Аналогичные рассуждения справедливы и для нелинейного варианта метода.

Сопоставляя полученный результат с теоремой 2.11, видим, что факторы, не благоприятствующие применению метода начальных параметров, оказываются весьма благоприятствующими при использовании метода парциальных откликов.

Впрочем, затухание абсолютных погрешностей откликов-податливостей еще не полностью решает вопрос об устойчивости алгоритма в целом. Ведь параметры процесса определяются из условий сопряжения левой и правой парциальных систем, а в условиях сопряжения играют роль не столько абсолютные, сколько относительные погрешности. Кроме того, немаловажно и соотношение соответственных податливостей обеих парциальных систем. Поэтому лучшей гарантией «доброкачественности» вычислений в большинстве случаев может служить наиболее аккуратное выполнение принципа соответствия устойчивости алгоритма и процесса с последующим повторением всего расчета при искусственном внесении возмущений.



4. Уравнения с отклоняющимися аргументами. Схема метода парциальных откликов полностью пригодна и в том случае, когда исходная краевая задача формулируется для уравнений с отклоняющимся аргументами.

Рассмотрим следующую конкретную задачу. Имеется стержень переменной площади сечения $\Omega(x)$ из материалов с модулем нормальной упругости $E$ (см. рис. 2.31, *а*), но без упругого пространства, обозначенного пунктиром. Концы стержня упруго заделаны относительно осевых смещений с коэффициентами податливости $A^{п}(0)$ и $A^{п}(0)$; при отсутствии стержня смещения заделок равны нулю. Осевая нагрузка $q(x)$ переменна вдоль стержня. По оси $x$ на близком расстоянии друг от друга (а с некоторой идеализацией—непрерывно) расположены датчики, измеряющие осевые смещения $y(x)$ поперечных сечений стержня. Информация от датчиков передается в некую электромеханическую систему, которая прикладывает в сечении $x-a$ нагрузку, равную $-k(x-a)\,y(x)$, где $k$ — некий переменный вдоль оси абсцисс положительный коэффициент.

В этом случае процесс деформирования системы определяется уравнениями

$$\frac{dy(x)}{dx} = \frac{P(x)}{E\Omega(x)}; \quad \frac{dP(x)}{dx} = k(x)\,y(x+a) - q(x), \tag{2.156}$$

где $P(x)$ — внутреннее осевое усилие.

Дополнительные условия для системы (2.156) имеют вид

$$y(0) = P(0)\,A^{п}(0); \quad y(l) = -P(l)\,A^{п}(l). \tag{2.157}$$

За пределами участка $0 \leqslant x \leqslant l$ функции $y$ и $P$ равны нулю.

Определим парциальный отклик $A^{п}(x)$ левой парциальной системы как осевое смещение ее свободного конца, на котором приложено единичное осевое усилие $P$ (см. рис. 2.31, *б*). Парциальная система свободна от внешней распределенной нагрузки $q(x)$. Тогда для $A^{п}(x)$ справедливо уравнение

$$\frac{dA^{п}(x)}{dx} = \frac{1}{E\,\Omega\,x} - A^{п}(x)\,A^{п}(x-a)\,k(x-a), \tag{2.158}$$

решаемое при известном начальном условии $A^{п}(x)$.

Парциальный отклик $A_q^{п}(x)$, называемый также парциальным параметром, определяется как осевое смещение свободного конца парциальной системы, которая загружена распределенной осевой нагрузкой $q(x)$ (см. рис. 2.31, *в*). Осевое усилие на свободном конце равно нулю.

Дифференциальное уравнение для $A_q^{п}(x)$ записывается в виде

$$\frac{dA_q^{п}(x)}{dx} = A^{п}(x)\,q(x) - A_q^{п}(x)\,A^{п}(x-a)\,k(x-a) \tag{2.159}$$

при начальном условии $A_q^{п}(0) = 0$.

Рассматривая правую парциальную систему, введем, помимо откликов $A^{п}(x)$ и $A^{п}_{q}(x)$ (рис. 2.32), отклики $A^{п^*}(x, \xi)$ и $A^{п^*}_{q}(x, \xi)$. Отклик $A^{п^*}(x, \xi)$ — осевое смещение сечения $x + \xi$ правой системы (рис. 2.32, *а*), когда в сечении $x$ на свободном конце приложено единичное осевое усилие. Отклик $A^{п^*}_{q}(x, \xi)$ — осевое смещение сечения $x + \xi$ правой системы (рис. 2.32, *б*), когда на парциальную систему длиной $l - x$ действует осевая нагрузка $q$. Ясно, что

$$A^{п}(x) = A^{п^*}(x, 0), \quad A^{п}_{q}(x) = A^{п^*}_{q}(x, 0).$$

При начальном условии $A^{п}(l)$ имеем уравнение

$$\frac{dA^{п}(x)}{dx} = \frac{1}{E\Omega(x)} - A^{п^*}(x, a)\,A^{п}(x)\,k(x) \qquad (2.160)$$

и уравнение

$$\frac{dA^{п}_{q}(x)}{dx} = q(x)\,A^{п}(x) - A^{п^*}_{q}(x, a)\,A^{п}(x)\,k(x) \qquad (2.161)$$

при начальном условии $A^{п}_{q}(l) = 0$.

Уравнения для функций $A^{п^*}(x, \xi)$ и $A^{п^*}_{q}(x, \xi)$ имеют вид

$$\frac{\partial A^{п^*}(x, \xi)}{dx} = \frac{\partial A^{п^*}(x, \xi)}{\partial \xi} - k(x)\,A^{п^*}(x, a)\,A^{п^*}(x, \xi), \quad (2.162)$$

$$\frac{\partial A^{п^*}_{q}(x, \xi)}{\partial x} = \frac{\partial A^{п^*}_{q}(x, \xi)}{\partial \xi} + q(x)\,A^{п^*}(x, \xi) -$$

$$- k(x)\,A^{п^*}_{q}(x, a)\,A^{п^*}(x, \xi). \qquad (2.163)$$

При $\xi = 0$ они переходят в (2.160) и (2.161).

Интегрирование (2.162) и (2.163) производится любым, например квазиэйлеровым, способом решения задачи Коши при известных начальных условиях на правом крае парциальной системы.

Значения искомых величин $P(x_k)$ и $y(x_k)$ в любом фиксированном сечении $x_k$ нетрудно найти из условия сопряжения левой и правой парциальных систем:

$$A^{л}_{q}(x_k) + B(x_k) + P(x_k)\left[A^{л}(x_k) + C(x_k)\right] =$$

$$= A^{п}_{q}(x_k) + P(x_k)\,A^{п}(x_k), \qquad (2.164)$$

где

$$B(x_k) = A^{л}_{q_1}(x_k); \quad q_1 = q_1(x)\Big|_{x_k - a}^{x_k} = -k(x)\,A^{п^*}_{q}(x_k, x_k + a)\Big|_{x_k - a}^{x_k}; \quad (2.165)$$

$$C(x_k) = A^{л}_{q_2}(x_k); \quad q_2 = q_2(x)\Big|_{x_k - a}^{x_k} = -k(x)\,A^{п^*}(x_k, x_k + a)\Big|_{x_k - a}^{x_k}. \quad (2.166)$$



Аналогичным образом можно рассматривать другие линейные задачи, приводящие к уравнениям с отклоняющимися аргументами. Общего расчетного алгоритма, подобного алгоритму для уравнений без отклонений аргумента, здесь записать нельзя, поскольку схема отклонений аргумента может быть самой разнообразной. Однако путь составления необходимых алгоритмов ясен.

Используя прием, подобный приведенному выше для нелинейных уравнений без отклонений аргументов, можно рассматривать и нелинейные уравнения при *наличии отклонений аргумента*.

Следует, впрочем, оговорить, что прямое использование метода парциальных откликов для решения нелинейных уравнений существенно затрудняется с ростом порядка этих уравнений, т. е. с увеличением числа внутренних параметров процесса. Поэтому при анализе нелинейных задач целесообразнее комбинировать линейный вариант метода парциальных откликов с каким-либо вариантом метода последовательных приближений. Примеры подобного комбинирования *очевидны*.

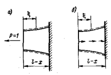



Рис. 2.32.

5. Более сложные дополнительные условия. Четкий физический смысл метода парциальных откликов позволяет без труда применять его в тех случаях, когда имеются вспомогательные активные дополнительные условия или когда рассматриваются системы одномерных процессов.

Пусть упруго заделанная по концам балка оперта в пролете на несколько упругих дополнительных опор. Тогда, двигаясь, например слева направо, определяем все парциальные отклики в сечении $x_1 - 0$ перед первой опорой, стоящей в точке $x = x_1$. Затем раскрываем статическую неопределимость взаимодействия рассмотренной парциальной системы и опоры, что позволяет определить все отклики в сечении $x_1 + 0$ за опорой и продолжить вычисление откликов далее.

*Соответствующие примеры подробно рассмотрены в главе 3-й.*

Отдельного, впрочем не сложного, рассмотрения требуют случаи связанных граничных условий и периодических процессов.

В заключение следует отметить, что изложенный метод парциальных откликов в ряде случаев оказывается изоморфным известному методу прогонки [2, 6]. *Не вдаваясь подробно в историю* этих методов, отметим лишь, что их формальные истоки можно найти еще в работах Эйлера [19] и много лет спустя — Айнса [1]. Разработка этих методов происходила практически одновременно, первые публикации по методу парциальных откликов относятся к 1956 г.

Метод парциальных откликов отличается от метода прогонки сознательным выбором ведущих параметров из условия соответствия алгоритма и рассматриваемого объекта и осмысливанием его с позиций причинно-следственных связей, что позволяет использовать метод парциальных откликов для анализа и моделирования устойчивости двусторонних процессов как с помощью ЭВМ, так и с помощью теорий, разработанных применительно к односторонним процессам (теория Ляпунова и т. п.).

Нам не встречались работы, в которых использовался бы метод прогонки для решения задач с отклоняющимися аргументами; да и вообще имеется довольно много случаев, когда легко оперировать с сопряжением парциальных систем, но трудно рассматривать «прогонку граничных условий».

Наконец, метод парциальных откликов пригоден и для непосредственного расчета физического процесса, а не только для решения соответствующих дифференциальных уравнений (уравнения откликов могут быть получены прямо из рассмотрения физической системы).

## § 11. Уравнения переноса в конечной форме. Дискретные одномерные процессы

1. Общие положения. Внутренние параметры всякого одномерного даже непрерывного процесса не обязательно переносятся только на бесконечно малых участках изменения независимой переменной. Если это удается сделать каким-то способом сразу на участках конечной длины, то мы получаем уравнения переноса в конечной форме (*конечные уравнения переноса*). Последние можно выводить не только теоретически, но и экспериментально.

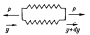



Рис. 2.33.

Пусть рассматривается одномерный процесс деформирования сильфона, введенного в состав прямолинейного участка трубопровода для компенсации осевых перемещений (рис. 2.33). Нас интересует перенос усилия $P$ и осевого смещения $y$ от одного края к другому. Они имеют вид

$$\Delta P = 0;\quad \Delta y = f(P). \tag{2.167}$$

Входящая в (2.167) функция может быть найдена либо в результате испытаний сильфона, либо расчетным путем. В последнем случае нужно составить соответствующие уравнения переноса в дифференциальной форме (для бесконечно короткого элемента сильфона) и проинтегрировать их.

Составление уравнений переноса для участков конечной длины бывает полезным и при аналитическом решении конкретных задач.



Исследуем поперечные линейные установившиеся колебания невесомой балки, несущей сосредоточенные массы $m_j$ с моментами инерции вращения $i_j$ (рис. 2.34, *а*). Выделим сечениями $x_j$ и $x_{j+1}$ пролет балки; оба сечения возьмем на бесконечно малое расстояние правее соответствующих масс (рис. 2.34, *б*). Составим уравнения переноса для указанного пролета (расчетного элемента). Учитывая стационарность режима колебаний, возьмем момент времени $t = \pi/2\omega$, где $\omega$ — частота колебаний.

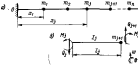



Рис. 2.34.

Если балка является призматической в пределах каждого пролета, то уравнения переноса параметров до сечения перед массой определяются общим интегралом уравнения статического изгиба

$$w = C_0 + C_1x + C_2x^2 + C_3x^3 \tag{2.168}$$

и начальными условиями в сечении $x_j$. Отсюда

$$w_{j+1} = w_j - \vartheta_j l_j - \frac{M_j l_j^2}{2EI_j} - \frac{Q_j l_j^3}{6EI_j};$$

$$\vartheta_{j+1} = \vartheta_j + \frac{M_j l_j}{EI_j} - \frac{Q_j l_j^2}{2EI_j}. \tag{2.169}$$

При переходе через массу перерезывающая сила и момент получают скачки за счет сил инерции и становятся равными

$$Q_{j+1} = Q_j - w_{j+1}\omega^2 m_{j+1};$$

$$M_{j+1} = M_j + Q_j l_j - \vartheta_{j+1}\omega^2 i_{j+1}. \tag{2.169a}$$

Выражения (2.169), (2.169а) представляют собой искомые уравнения. Дополнив их условиями на концах балки, получим все исходные зависимости для расчета деформаций и смещений конструкции.

Все сказанное относится не только к линейным, но и к нелинейным процессам.

Составим уравнения переноса для процесса деформирования механической системы из абсолютно жестких стержней и шарниров (шарнирная цепь Генки) в предположении, что перемещения могут быть большими (рис. 2.35). Зависимость между углом поворота $\alpha_j$ в шарнире $j$ и действующим на шарнир моментом $M_j$ дается произвольной, но известной функцией $\alpha_j = f_j(M_j)$.

В качестве внутренних параметров процесса выбираем продольное усилие $T$, изгибающий момент $M$, поперечную силу $Q$ (принимаем ее всегда вертикальной), осевое смещение $y$, вертикальное смещение $w$, угол поворота сечения $\vartheta$. Если значения парамет-

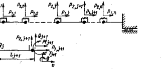


Рис. 2.35.

ров в сечении сразу за шарниром $j$ равны $T_j$, $M_j$, $Q_j$, $y_j$; $w_j$, $\vartheta_j$, то уравнения переноса записываются в виде

$$w_{j+1} = w_j - l_{j+1}\sin\vartheta_j;$$
$$y_{j+1} = y_j - l_{j+1}(1-\cos\vartheta_j);$$
$$\vartheta_{j+1} = \vartheta_j + f_j(M_{j+1});$$
$$T_{j+1} = T_j - P_{1,\,j+1}; \quad Q_{j+1} = Q_j - P_{2,\,j+1};$$
$$M_{j+1} = M_j + T_j l_{j+1}\sin\vartheta_j + Q_j l_{j+1}\cos\vartheta_j. \qquad (2.170)$$

*Заметим, что при малых $l_j$ деформирование цепи Генки можно рассматривать в качестве модели изгиба стержня с физической и геометрической нелинейностью. Достаточно лишь определить вид функции $f_j(M_j)$ как приращение угла поворота сечения на участке $l_j$. Но, с другой стороны, шарнирная цепь может быть задана и непосредственно физической системой.*

Нормальная форма конечных уравнений переноса имеет вид

$$\Delta y_i = f'(y_1,\ y_2,\ \ldots\ y_n) \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots\ n), \qquad (2.171)$$

где $y_i$ — $i$-й внутренний параметр $n$-параметрического процесса.

*Например, уравнения (2.170) в нормальной форме записываются* так:

$$\Delta w = -l_{j+1}\sin\vartheta,\ \ \Delta T = -P_{1,\,j+1};$$
$$\Delta y = -l_{j+1}(1-\cos\vartheta),\ \ \Delta Q = -P_{2,\,j+1};$$
$$\Delta\vartheta = f_j(M),\ \ \Delta M = Ml_{j+1}\sin\vartheta + Ql_{j+1}\cos\vartheta. \qquad (2.170а)$$

Ясно, что для конечных уравнений переноса остаются в силе все основные положения и терминология общей теории диффере-



циальных уравнений, а также положения и терминология, введенные выше. Например, необходимо указывать дополнительные условия, которые выделяют частное соответствующее данной конкретной задаче решение из общего. Последнее объединяет все множества частных решений исходной совокупности уравнений переноса.

Таким образом, по-прежнему следует говорить о задачах Коши и краевых задачах, о потоках параметров, об активных и пассивных дополнительных условиях и т. д. Не меняются и основные представления об устойчивости процессов.

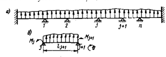


Рис. 2.36.

Выше мы рассматривали основной вид конечных уравнений переноса, который обусловливает связь между всеми внутренними параметрами процесса в некотором сечении и всеми внутренними параметрами в соседнем сечении. Но зачастую встречаются и другие виды этих уравнений.

Рассмотрим изгиб неразрезной балки постоянного сечения, лежащей на жестких опорах (рис. 2.36, *а*). В качестве элемента конструкции для исследования процесса переноса возьмем пролет (рис. 2.36, *б*), который мы умеем рассчитывать. Взаимодействие пролетов определяется всего двумя параметрами — изгибающим моментом $M_j$ и углом поворота опорного сечения $\vartheta_j$. Поскольку опоры жесткие, то прогиб на границах участков равен нулю; перерезывающая сила $Q_j$ в данном случае также известна — она выражается через моменты и пролетную нагрузку. Таким образом, мы выделили из четырехпараметрического одномерного процесса изгиба нейтральной оси балки два процесса — уже изученный четырехпараметрический процесс изгиба балки между опорами и двухпараметрический процесс деформирования опорных сечений.

Известны зависимости

$$\vartheta_j = -\frac{M_j l_{j+1}}{3EI} - \frac{M_{j+1} l_{j+1}}{6EI} - \alpha_{j,\,j+1};$$

$$\vartheta_{j+1} = \frac{M_j l_{j+1}}{6EI} + \frac{M_{j+1} l_{j+1}}{3EI} + \alpha_{j+1,\,j+1}, \qquad (2.172)$$

где $\alpha_{j,\,j+1}$ и $\alpha_{j+1,\,j+1}$ — углы поворота опорных сечений, вызванные внешней нагрузкой на пролете $j+1$.

Из (2.172) следуют уравнения переноса основного вида:

$$M_{j+1}=-2M_j-\frac{6EI}{l_{j+1}}\left(\vartheta_j+\alpha_{j,\,j+1}\right);$$

$$\vartheta_{j+1}=-2\vartheta_j-2\alpha_{j,\,j+1}+\alpha_{j+1,\,j+1}-\frac{M_j l_{j+1}}{2EI} \qquad (2.173)$$

или

$$\Delta M_j=-3M_j-\frac{6EI}{l_{j+1}}\left(\vartheta_j+\alpha_{j,\,j+1}\right);$$

$$\Delta\vartheta_j=-3\vartheta_j-2\alpha_{j,\,j+1}+\alpha_{j+1,\,j+1}-\frac{M_j l_{j+1}}{2EI}. \qquad (2.173а)$$

Но можно поступить несколько иначе. Из первого уравнения (2.173) следует

$$\vartheta_j=-\frac{2M_j+M_{j+1}}{6EI}\,l_{j+1}-\alpha_{j,\,j+1}.$$

Заменив индекс, получаем связь угла поворота $\vartheta_{j+1}$ с моментами $M_{j+1}$, $M_{j+2}$. Подставляя величины $\vartheta_j$ и $\vartheta_{j+1}$ во второе уравнение (2.173), при постоянном $l_j=l_{j+1}=\ldots=l$ имеем

$$M_j+4M_{j+1}+M_{j+2}+\frac{6EI}{l}\left(\alpha_{j+1,\,j+1}+\alpha_{j+1,\,j+2}\right)=0. \qquad (2.174)$$

Уравнение переноса (2.174) хорошо известно под названием теоремы трех моментов. Приведем его к нормальной форме:

$$\Delta M_j=-5M_j-M_{j-1}-\frac{6EI}{l}\left(\alpha_{j,\,j}+\alpha_{j,\,j+1}\right). \qquad (2.174а)$$

Зависимости (2.173а) и (2.174а) существенно отличаются друг от друга. Во-первых, в них использованы разные системы внутренних параметров процессов: $M_j$, $\vartheta_j$ и $M_{j-1}$, $M_j$. Во-вторых, в уравнениях (2.174а) *фигурируют внутренние параметры, определенные для различных сечений.*

Очевидно, что в смысле классической математики оба вида записи уравнений переноса эквивалентны. Целесообразность использования тех или других всецело определяется конкретными особенностями задачи, привычкой расчетчика и т. п.

Задача о балке, рассмотренная выше, касается точных конечных уравнений переноса. Аналогичным образом в разных видах можно представить и приближенные конечные уравнения. Если взять дифференциальные уравнения изгиба балки

$$\frac{dw}{dx}=\vartheta,\quad \frac{d\vartheta}{dx}=\frac{M}{EI(x)},$$

$$\frac{dQ}{dx}=-q(x),\quad \frac{dM}{dx}=Q \qquad (2.175)$$



*и применить для их интегрирования способ Эйлера, то такой подход будет равносилен последовательному использованию приближенных конечных уравнений*

$$\Delta w_i=-\vartheta_i\Delta x,\quad \Delta\vartheta_i=\frac{M_i}{EI(x_j)}\,\Delta x;$$

$$\Delta Q_i=-q(x_i)\,\Delta x,\quad \Delta M_i=Q_i\Delta x, \qquad (2.175а)$$

имеющих основной вид и нормальную форму. Здесь $\Delta x$ — шаг интегрирования; индексом $i$ обозначены величины, соответствующие $x=x_j=i\Delta x$.

Положим для простоты $EI(x)=EI=\text{const}$ и перепишем, (2.175а) в виде

$$w_{i+1}=w_i-\vartheta_i\Delta x,\quad \vartheta_{i+1}=\vartheta_i+\frac{M_i}{EI}\,\Delta x;$$

$$Q_{i+1}=Q_i-q_i\Delta x,\quad M_{i+1}=M_i+Q_i\Delta x. \qquad (2.176)$$

Из последних уравнений следует

$$Q_i=\frac{M_{i+1}-M_i}{\Delta x},\quad Q_{i+1}=\frac{M_{i+2}-M_{i+1}}{\Delta x}. \qquad (2.176а)$$

Подставив (2.176а) в третье уравнение (2.176), запишем

$$\frac{M_{i+2}-2M_{i+1}+M_i}{(\Delta x)^2}=-q_i. \qquad (2.176б)$$

С помощью первых двух уравнений (2.176) имеем следующее уравнение переноса прогиба из сечения $i+3$ в сечение $i+4$:

$$\frac{EI}{(\Delta x)^4}\left(w_{i+4}-4w_{i+3}+6w_{i+2}-4w_{i+1}+w_i\right)-q_i=0 \qquad (2.177)$$

или в нормальной форме

$$\Delta w_i=3w_i-6w_{i-1}+4w_{i-2}-w_{i-3}+\frac{(\Delta x)^4}{EI}\,q_{i-3}. \qquad (2.177а)$$

Иногда в уравнения переноса вводят избыточное число внутренних параметров. Если уравнения точные, то вводимые избыточные параметры могут упростить или, что чаще, усложнить промежуточные преобразования, но не повлияют на окончательный результат.

Иное дело в приближенных уравнениях — там избыточные параметры часто несут дополнительную информацию, позволяющую уточнить результаты расчета. Сказанное относится прежде всего к использованию интерполяционных формул исчисления конечных разностей [7]. При их выводе исследуемая функция аппроксимируется с помощью некоторой другой хорошо изученной функции *(как правило, полиномом). Аппроксимирующая функция имеет* неопределенные коэффициенты, конкретные значения которых выражаются через значения аппроксимируемой функции в определенном числе так называемых узловых точек. В конечном итоге появляется возможность выразить производные аппроксимируемой (исходной) функции через ряд ее узловых значений. Точность *выражения производных зависит от вида аппроксимирующей функции.*

Наиболее простые выражения для первой производной имеют вид

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y_i' = \frac{y_{i+1} - y_i}{h},$$

$$y_i' = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}, \tag{2.178}$$

где $y_i$ — значение функции в узле $i$; $h$ — постоянное расстояние между узловыми точками. Несмотря на одинаковое число узловых точек, входящих в эти зависимости, точность получаемых результатов различна. Как правило, самым точным оказывается первое выражение.

Более точные аппроксимации дают, естественно, более сложные выражения, например

$$y_i' = \frac{-y_{i+2} + 8y_{i+1} - 8y_{i-1} + y_{i+2}}{12h}. \tag{2.178a}$$

Возьмем произвольное дифференциальное уравнение, скажем уравнение изгиба нейтральной оси балки постоянного сечения, лежащей на упругом основании с коэффициентом жесткости $k(x)$

$$EIw^{IV} + k(x)\,w = q(x). \tag{2.179}$$

В табл. 15 монографии [28] приведено выражение для четвертой производной с избыточным числом параметров

$$w_i^{IV} = \frac{-w_{i+3} + 12w_{i+2} - 38w_{i+1} + 56w_i - 39w_{i-1} + 12w_{i-2} - w_{i-3}}{6h^4}.$$

*Подставив его в (2.179), получим систему уравнений вида*

$$EI\left(-w_{i+3} + 12w_{i+2} - 39w_{i+1} + 56w_i - 39w_{i-1} + 12w_{i-2} - w_{i-3}\right) + 6h^4\left(k_i w_i - q_i\right) = 0, \tag{2.179a}$$

из которой следует, что для осуществления переноса необходимо располагать уже не четырьмя, а шестью значениями внутренних параметров. Таким образом, задание начальных условий (четыре параметра) лишает нас возможности перейти к последовательному использованию уравнения (2.179а). Для нахождения избыточных параметров в начале счета необходимы дополнительные исследования. В частности, первые шаги интегрирования можно произвести, пользуясь уравнениями переноса second вида и нормальной формы без избыточных внутренних параметров.



Для конечных уравнений переноса применимы те же методы решения, что и для дифференциальных (метод начальных параметров, парциальных откликов и т. п.). Какой-либо непреодолимой *границы или принципиальной разницы между дискретными и* непрерывными уравнениями переноса не существует, как нет ее и в природе между дискретными и непрерывными процессами. В частности, для дискретных процессов нетрудно ввести понятия по-

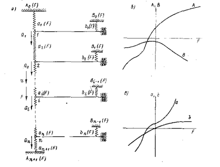


Рис. 2.37.

*токов параметров и смоделировать их на некой абстрактной машине.* Вместо лент транспортеров можно представить себе, скажем, ряды дискретно расположенных лампочек. При потоке параметров, направленном вдоль оси, нужно задать яркости горения крайних *левых ламп; фотоэлементы, стоящие у них, зафиксируют эту яркость,* передадут информацию в пост управления, где в зависимости от нее будут заданы яркости следующих ламп, и т. п. Аналогичным образом конструируются и другие схемы потоков.

2. Метод парциальных откликов. Поясним существо метода парциальных откликов для дискретных процессов на простом примере системы с дискретными параметрами (рис. 2.37, *а*). Система состоит из ряда пружин и загружена в узлах $i$ внешними силами $Q_i$. Известные функции $A_0(F)$, $A_{n+1}(F)$, $B_i(F)$ выражают вертикальные смещения $u$ точек закрепления

пружин в зависимости от силы $F$, действующей на закрепление (рис. 2.37, б). Известные функции $a_i(F)$ и $b_i(F)$ отражают (рис. 2.37, в) удлинения отдельных пружин под действием сил $F$ (при построении $a$ и $b$ силы $F$ считаются положительными, когда они растягивают пружину). Требуется найти смещения $u_i$ узлов $i$ и внутренние усилия во всех пружинах.

К такой системе приводится уже рассмотренный выше стержень, вставленный в упругое пространство; и стержень, и пространство нелинейны. Но указанная система может существовать и вполне самостоятельно в виде реального физического объекта.

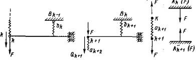



Рис. 2.38.

Рассечем пружину в узле $k$ (рис. 2.38, а) и назовем парциальным откликом $A_k^+(F)$ смещение $u$ узла $k$ верхней парциальной системы при действии силы $F$.

На верхнюю систему действуют, кроме того, все силы $Q_i$, $Q_2, \ldots, Q_k$. Аналогичным образом введем понятие парциального отклика $A_{k+1}^-(F)$ как смещения узла $k+1$ нижней парциальной системы (рис. 2.38, б).

Сила $F$ в пружине $a_{k+1}$ между любыми узлами $k$ и $k+1$ в полной системе (см. рис. 2.38, а) определяется уравнением (рис. 2.38, в)

$$A_k^+(F) = A_{k+1}^-(-F) - a_{k+1}(F). \tag{2.180}$$

Таким образом, остается определить парциальные отклики $A_i^+$ и $A_i^-$ при произвольных $F$.

Рассмотрим подробно определение $A^{i+}(F)$. Пусть $F_A(F)$ и $F_B(F)$ — усилия в пружинах $a_1$ и $b_1$ при действии на парциальную систему (рис. 2.39) силы $F$. При фиксированной $F$ усилия могут быть найдены из двух очевидных уравнений

$$F_A(F) + F_B(F) = F + Q_1; \tag{2.181}$$

$$A_0(F_A) + a_1(F_A) = B_0(F_B) + b_1(F_B).$$

Величина $A_1(F)$

$$A_1(F) = B_0[F_B(F)] + b_1[F_B(F)]. \tag{2.182}$$



Остальные $A_i^+(F)$ определяем по рекуррентным зависимостям. Вычисление $A_i^-(F)$ производим аналогичным способом.

При выводе (2.180) — (2.182) в качестве ведущего параметра, активно задаваемого на краю парциальной системы, принималась внутренняя сила $F$. Можно было бы поступить иначе: активно задавать смещение $u_i$ узла $i$ и определять иной отклик — внутреннее усилие, которое при этом заданном смещении действует на узел. Общая схема расчета осталась бы без изменений.

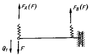



Рис. 2.39.

Рассмотрим пример. Пусть система (см. рис. 2.37, а) загружена в узле $k$ силой $Q_k = 1$; остальные $Q_i = 0$; общее число узлов равно $n$. Функции $A_i, \ldots, b_i$ имеют вид

$$A_0(F) = A_{n+1}(F) = B_i(F) = 0;$$

$$a_i(F) = aF^3; \; b_i(F) = 3aF^3. \tag{2.183}$$

Используя выведенные зависимости, получаем:
для узла $i = 1$

$$F_A = 0{,}59F; \; E_B = 0{,}41F; \; A_1^+(F) = 0{,}207aF^3;$$

для узла $i = 2$

$$F_A = 0{,}575F; \; F_B = 0{,}425F; \; A_2^+(F) = 0{,}231aF^3;$$

для узла $i = 3, \ldots, k-1$

$$F_A = 0{,}574F; \; F_B = 0{,}426F; \; A_i^+(F) = 0{,}233aF^3;$$

для узла $i = k$

$$F_A = 0{,}574F; \; F_B = 0{,}426F; \; A_k^+(F) = 0{,}233a(1+F)^3.$$

Значения реакций $F_B$ и парциальных откликов $A_i^+$ для последующих узлов приведены на рис. 2.40. По мере удаления от узла, к которому приложена сила ($i = k$), реакции и парциальные отклики стремятся к значениям $F_B = 0{,}426\ F$, $A_i = 0{,}233\ aF^3$, практически достигая последних уже в узле $i = k + 5$. Парциальные отклики $A_i^-$ в рассматриваемом случае можно специально не вычислять: их определяют по очевидным зависимостям $A_{k+1}^- = A_{k+1}^+$.

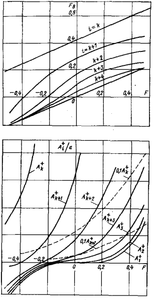



Рис. 2.40.



Значения внутреннего усилия $F$ и смещений узлов системы оказываются равными (расчеты выполнены на логарифмической линейке):

| $i$ | $k-4$ | $k-3$ | $k-2$ | $k-1$ | $k$ | $k+1$ | $k+2$ | $k+3$ | $k+4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F$ | 0,090 | 0,140 | 0,220 | 0,365 | −0,365 | −0,220 | −0,140 | −0,090 | −0,050 |
| $\frac{u}{a}\cdot 10^4$ | ~0 | 6 | 24 | 115 | 575 | 130 | 35 | 8 | ~0 |

Предлагаемый метод расчета — разделение исходной системы на парциальные системы, вычисление функций, называемых парциальными откликами, и сопряжение парциальных систем — можно применять и в более сложных случаях. Но объем вычислений при усложнении системы, естественно, сильно возрастает.

Примеры рассмотрения дискретных линейных систем методом парциальных откликов будут приведены в главе 3-й.

3. Метод начальных параметров. Логическая схема метода остается прежней. Так, для расчета системы (см. рис. 2.38, *а*) достаточно задать внутреннее усилие в первой пружине (обозначим ее $a_1$). Тогда можно сразу найти смещение ее заделки и удлинение самой пружины, т. е. смещение первого узла. Определив это смещение, мы без труда вычисляем усилие в пружине $b_1$. Далее, из условия равновесия первого узла, легко выразить усилие во второй пружине $a_2$ и т. д. Правильность задания усилия в пружине $a_1$ проверяется из условия сопряжения в нижней заделке системы.

К сожалению, здесь будут быстро накапливаться погрешности и практически расчет неосуществим при сколько-нибудь большом числе узлов (теоремы об устойчивости метода начальных параметров и парциальных откликов остаются в силе и в дискретном случае).

Глава 3.

## ЛИНЕЙНЫЕ СТАТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ. УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ КОРПУСНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Представления и методы, изложенные в предыдущих главах, дают возможность перейти к систематическому рассмотрению задач о линейных статических деформациях, установившихся колебаниях и устойчивости корпусных конструкций. Единство между этими тремя, на первый взгляд, существенно разными видами задач обеспечивается очень полезной квазистатической аналогией, методом комплексных параметров и динамическим критерием устойчивости. Первая путем замены всех масс некими фиктивными упругими основаниями и сосредоточенными упругими связями позволяет сделать конструкцию, совершающую установившиеся колебания, квазибезынерционной. Метод комплексных параметров дает возможность привести задачи, решаемые с учетом внешних и внутренних сопротивлений, к аналогичным задачам без учета сопротивлений. Роль динамического критерия очевидна.

Содержание данной главы составляют необходимые сведения об общей динамике, квазистатической аналогии, методе комплексных параметров, а также примеры решения ряда важных и характерных статических и динамических задач практического характера. Одновременно излагаются некоторые специфические методы решения линейных задач, не рассмотренные в главе 2-й. С помощью применённых в этой главе подходов указанные решения позволяют приступить к исследованию других случаев расчетов, возникающих в практике судостроения.

### § 12. Некоторые физические модели динамики. Неинерциальные системы отсчета и кинематическое возбуждение. Квазистатическая аналогия

1. Инерциальные системы отсчета. Силы инерции как реакции физического пространства (поля). Общая классическая динамика строится чисто математически на основе некоторых исходных аксиом и постулатов, установленных проведением и осмысливанием физических опытов и наблюдений. В качестве логико-математической конструкции она совершенно точна и не подлежит пересмотру. Все изменения, вносимые теорией относительности и квантовой механикой, проистекают из уточнения исходных аксиом и постулатов, которое необходимо в случаях больших скоростей, очень малых объектов, сильных полей тяготения и т. п. В современных технических вопросах базис классической динамики можно считать практически точным, и именно поэтому она столь широко применяется в настоящее время.

Сказанное о неизменности главных положений и основного математического аппарата динамики не относится, однако, к физическим моделям и представлениям, которые используются в то или иное время и претерпевают довольно сильные изменения. Скажем, Ньютон исходил из существования некого абсолютного пространства. Потом это пространство было отвергнуто большинством физиков ввиду невозможности его реального обнаружения. Ньютон связывал с абсолютным пространством некую исходную инерциальную систему отсчета, в которой справедливы основные законы механики, а затем применял теорему о том, что всякая система,



движущаяся равномерно и прямолинейно относительно исходной, также инерциальна.[1] Людвиг Ланге [15] после отказа от абсолютного пространства вводит независимые понятия инерциальной системы и инерциального времени путем двух определений:

инерциальной называется такая система координат, в которой сходящиеся в одной геометрической точке траектории трех материальных точек, выброшенных одновременно из этой геометрической точки и предоставленных затем самим себе, прямолинейны;

инерциальной называется такая шкала времени, когда предоставленная самой себе точка движется равномерно по своей инерциальной траектории.

Затем он доказывает теоремы.

*Теорема I. Относительно инерциальной системы траектория любой четвертой материальной точки, предоставленной самой себе, прямолинейна.*

*Теорема II. Относительно инерциальной шкалы времени любая другая предоставленная самой себе материальная точка движется по своей инерциальной траектории также равномерно.*

Многие ученые довольно резко критикуют такие абстрактные построения, отрицая возможность существования доказательства отсутствия влияния других материальных объектов на данную материальную точку (бессмысленность слов типа «предоставленная самой себе» и т. п.).

Ряд ученых обращает внимание на прямое несоответствие между результатами непосредственных наблюдений и выводом о том, что все инерциальные системы движутся друг относительно друга с постоянными скоростями. В самом деле, при изучении Солнечной системы в качестве инерциальной системы берут Солнце, и это оказывается справедливым. С другой стороны, Земля в высокой степени инерциальна, когда относительно нее рассматривается движение искусственных спутников, и т. д. Но Землю никак нельзя считать движущейся равномерно и прямолинейно по отношению к Солнцу, особенно, если брать большие отрезки времени: ее ускорения относительно Солнца достигают 6 мм/с². В то же время Землю ни в коем случае нельзя считать инерциальной системой при рассмотрении, допустим, движения Меркурия.

Словом, физические модели классической динамики еще не устоялись. Причем они вовсе не какой-то балласт по отношению к математическому аппарату, а представляют собой важный инструмент для всякого конкретного исследования, эвристических соображений и осмысливания результатов.

Обсуждению различных физических моделей классической механики посвящена довольно обширная литература [16, 42], поэ-

[1] Иногда вместо слов «инерциальная система отсчета» говорят и пишут «инерциальная система координат». Термин «система отсчета» представляется нам более точным, так как показывает, что эта система связана, хотя бы и опосредствованно, с некими материальными телами, а не является предметом соглашения, подобно обычной математической системе координат.

тому мы, не вдаваясь в излишние подробности, изложим одну из таких возможных моделей. С нашей точки зрения, она достаточно проста и наглядна, не противоречит известному экспериментальному материалу в области, охватываемой классической динамикой, а главное, позволяет построить аналогии, очень полезные в строительной механике.

Согласно рассматриваемой модели, материальные объекты нашего мира создают некое единое, вообще говоря нестационарное, поле инерции и тяготения, сами находясь в этом поле (физическом пространстве). Поле (обозначим его ИТ) действует на любую помещенную в него материальную точку пропорционально напряженности его в данной области и некоему коэффициенту, который характеризует эту точку и называется ее массой тяготения. Одновременно оно сопротивляется всякому ускоренному движению материальной точки в поле, причем сила сопротивления, приложенная к точке, не зависит от напряженности поля и пропорциональна как ускорению, так и некоторому другому коэффициенту, характеризующему материальную точку и называемому ее инертной массой. Согласно всем известным очень точным экспериментальным данным, инертная масса и масса тяготения строго пропорциональны друг другу; соответствующий выбор единиц измерения для напряженности ИТ, силы и обеих масс позволяет считать обе массы одинаковыми. Характерной и важной особенностью ИТ является его линейность; в частности, каждая сосредоточенная тяжелая масса вносит свой линейный вклад в ИТ, добавляя туда составляющую сферического типа, причем напряженность составляющей пропорциональна массе и обратно пропорциональна квадрату радиуса соответствующей сферы.

Представление о том, что ускоренному движению материальной точки сопротивляется поле, окружающее точку, кажется нам более наглядным, чем обычное предположение о сопротивлении самой точки. Ведь мы говорим, например, о сопротивлении воды движению в ней судна, а не о том, что судно само сопротивляется действующему на него упору гребного винта. Приписывание судну способности к сопротивлению несколько искусственно, хотя с математической точки зрения вполне возможно, если подходить к оценке сил сопротивления с чисто количественной стороны.

Кроме того, предлагаемое представление о сопротивляемости поля очень полезно методологически: оно позволяет непосредственно ввести силы инерции как силы отмеченного сопротивления, приложенного к движущейся с ускорением точке, и не пользоваться довольно сложными вспомогательными построениями типа принципа Деламбера.

Необычным может показаться характер сил сопротивления (их зависимость именно от ускорения). Но это просто обобщение известных нам полей, дающих реакции при движении тел. Скажем, хорошо известное в строительной механике корабля упругое основание винклеровского типа линейно сопротивляется смещению



точек. Вязкие среды дают сопротивления, пропорциональные первой степени скорости тела. Вода вызывает силы сопротивления, нелинейно зависящие от скорости судна, и, кроме того, сопротивления, пропорциональные ускорениям (последние учитываются обычно введением так называемых присоединенных масс жидкости).

Конечно, нам пока не известен «механизм» действия поля ИТ, но ведь и механизм сопротивления жидкостей стал известным сравнительно недавно; да и сейчас он выяснен не до конца. Второй закон Ньютона представляет собой не что иное, как экспериментально установленную феноменологическую зависимость для сопротивлений ИТ (реакция ИТ равна массе точки, умноженной на ускорение, и направлена против ускорения).

Если бы мы могли непосредственно физически фиксировать поле ИТ, то оно и служило бы нам универсальной системой отсчета, уподобляясь в каком-то смысле абсолютному пространству. Однако мы не в состоянии фиксировать его во всем многообразии, поэтому вводятся локально применимые инерциальные системы отсчета в виде тел, свободно движущихся в ИТ (т. е. при отсутствии других внешних сил помимо сил тяготения).

Рассмотрим любую материальную точку, которая имеет некоторый малый объем, движется в ИТ только под действием сил тяготения, когда-то была запущена с некоторыми начальными скоростями относительно других точек и тел и не вращается в ИТ. Эта точка, даже если она перемещается по сложной орбите, совершает как бы бесконечное свободное падение. В окружающей ее области пространства, где поле ИТ можно считать равномерным, она является инерциальной системой отсчета в том смысле, что там любая другая материальная точка, масса которой пренебрежимо мала по сравнению с массой первой точки (системой отсчета), будет подчиняться второму закону Ньютона, т. е. двигаться с ускорением, пропорциональным действующей на нее силе (некоторый объем системы отсчета нужен, чтобы ориентировать оси координат). В число сил, действующих на вторую (малую) материальную точку, не нужно включать силу тяготения, обусловленную ИТ (она вызывает совместное движение системы отсчета и малой точки), но необходимо включить силу тяготения, обусловленную самой инерциальной системой (поле тяготения, обусловленное системой отсчета, не было включено в ИТ).

Именно этот случай имеет особое значение для земной техники: при решении технических задач в околоземном пространстве можно считать Землю практически точной исходной инерциальной системой. Материальная точка не должна по предположению вращаться в ИТ, поэтому система инерциальна в предположении невращающейся Земли. Если за систему отсчета брать вращающуюся в ИТ земную поверхность, то она неинерциальна, так как вращение дает дополнительное ускорение. Указанную неинерциальность, как будет показано в п. 3, можно учесть введением дополнительных сил инерции, однако дополнительное ускорение мало, поэтому эти поправки обычно не вводят.

Теперь можно пользоваться теоремой о том, что любая другая (производная) система, движущаяся относительно первой (исходной) инерциальной системы равномерно и прямолинейно, также инерциальна. Однако требуется, чтобы обе системы находились в области равномерного ИТ.

Заметим, что в ряде случаев масса свободно падающей инерциальной системы может быть вполне соизмерима с массой сравнительно близко расположенной материальной точки или даже меньше ее. Однако тогда нужно, чтобы взаимное притяжение системы и этой точки было вообще мало и давало ускорения, пренебрежимо малые по сравнению с ускорениями материальной точки в рассматриваемой системе (еще более общий случай соизмеримых масс и непренебрежимой силы взаимного притяжения будет рассмотрен ниже).

Для лучшего уяснения смысла исходной инерциальной системы приведем аналогию. Пусть мы находимся на корабле в открытом море, где есть сильные, но невидимые течения. Ориентиров и средств навигации нет, но мы хотим узнать, сильно ли тянет движитель. Для этого нужно поместить невдалеке от корабля свободно плавающий предмет и проследить за относительным движением корабля и предмета. Предмет моделирует в некотором смысле исходную инерциальную систему. Правда, между кораблем и предметом практически нет сил взаимодействия, моделирующих притяжение малой массы инерциальной системой, но их практически нет, скажем, и между космической ракетой и космонавтом, вышедшим из нее в свободный космос или парящим внутри ракеты. Измерив ускорение ракеты относительно парящего космонавта, мы можем судить о тяге ее двигателей.

Если плавающий предмет расположен далеко от корабля, то мы не можем быть уверены, что поле скоростей течений равномерно во всей области, включающей и корабль, и предмет, т. е. что оба они увлекаются течениями одинаково. Точно так же, взяв далекую от нас исходную инерциальную систему, мы не можем быть уверены в ее инерциальности для нас — она может увлекаться ИТ не так, как мы, и тогда наше ускорение относительно нее будет вызвано не внешними силами, а просто разным действием ИТ.

Таким образом, каких-то абсолютных реальных инерциальных систем мы не знаем и вынуждены пользоваться в разных задачах, вообще говоря, разными исходными практически инерциальными системами. Все эти реальные исходные практически инерциальные системы, расположенные в разных областях пространства, движутся друг относительно друга вовсе не равномерно и прямолинейно, а со значительными относительными ускорениями и по весьма причудливым путям.

Неидеальность инерциальных свойств любой реальной системы отсчета вызвана тем, что ИТ не абсолютно равномерно даже в малых областях пространства. Следовательно, даже локально инерциальная система — такая же абстракция, как и абсолютно твердое тело, материальная точка и т. п.

Отсюда возникает потребность в оценке отклонений данной практически инерциальной системы от идеальной инерциальности.

Пример, что неравномерность ИТ обусловлена главным образом ближайшим к системе отсчета массивным телом, относительно которого масса самой системы мала (если за инерциальную систему принят искусственный спутник Земли, то такое тело — Солнце, и т. д.).

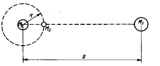



Рис. 3.1.

Пусть (рис. 3.1) $M_1$ — масса массивного тела; $M_2$ — масса инерциальной системы; $M_3$ — масса рассматриваемого тела, которое движется около $M_2$, не выходя из сферы радиуса $r$; $R$ — минимальное расстояние между $M_1$ и $M_2$. Тогда максимальная разность $\Delta w_{max}$ ускорений масс $M_2$ и $M_3$ в ИТ будет в тот момент, когда $M_3$ займет положение на отрезке, соединяющем $M_1$ и $M_2$, и расположится на границе сферы радиусом $r$. Искомая разность будет

$$\Delta w_{max} = \gamma \frac{M_1}{(R-r)^2} - \gamma \frac{M_1}{R^2} = \gamma \frac{M_1}{R^2}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{r}{R}\right)^2} - 1\right] =$$

$$= w_и \left[\frac{1}{\left(1-\frac{r}{R}\right)^2} - 1\right], \qquad (3.1)$$

где $\gamma$ — постоянная тяготения; $w_и$ — ускорение инерциальной системы отсчета относительно массивного тела $M_1$.

Если $r/R$ значительно меньше единицы, то

$$\Delta w_{max} \cong w_и \frac{2r}{R}. \qquad (3.1а)$$

Например, для лифта, свободно падающего на Землю (любимый пример Эйнштейна), имеем $R = 6{,}5 \cdot 10^6$ м, $w_п = 9{,}8$ м/с². Если принять $2r = 6{,}5$ м, то $\Delta w_{max} = 10^{-5}$ м/с². Такую же погрешность будет иметь предмет, удаленный от центра Земли не более чем на $125 \cdot 10^3$ км, если принять Землю за инерциальную систему, расположенную вблизи массивного Солнца, и т. д.

Пусть тем или иным способом мы определили практически инерциальную систему отсчета для некоторой механической системы и хотим найти движение этой механической системы относительно указанной системы отсчета. Для этого мы должны приложить к механической системе все активные внешние силы, кроме сил тяготения ИТ, общего для обеих рассматриваемых систем, а также силы реакций ИТ, вызванных относительным движением механической системы. Отмеченные реакции (называемые обычно силами инерции) пропорциональны массам механической системы и возникающим ускорениям (при соответствующем выборе единиц измерения они равны массам, умноженным на ускорения). Все активные и реактивные силы, фактически действующие на механическую систему, должны быть уравновешены; именно из этого условия определяются необходимые, а значит, действительно возникающие ускорения. Зная ускорения и начальные условия в виде исходных положений и скоростей, находим все текущие скорости и положения (т. е., в конечном итоге, смещения как функции времени).

Реакции ИТ (силы инерции) определяются движением, но и сами влияют на движение. Подобно этому, реакции упругого основания под балкой определяются ее прогибами (и, наоборот, влияют на прогиб). Можно сказать, что динамика конструкций с распределенными массами отличается от их статики введением под конструкции некого своеобразного упругого основания, связанного, однако, не со смещениями, а с ускорениями. В тех практически важных случаях, когда ускорения оказываются пропорциональными смещениям, оба вида оснований становятся настолько близкими по своему характеру, что «динамическое основание» можно заменять фиктивным эквивалентным дополнительным «статическим основанием». Более подробно такая квазистатическая аналогия будет рассмотрена (и использована) в дальнейшем.

Мы привыкли говорить об уравновешенности всех активных и реактивных сил только в случае статики, поэтому наше предыдущее утверждение о том, что «все активные и реактивные силы, фактически действующие на механическую систему, должны быть уравновешены», может показаться несколько необычным (хотя не более странным, чем уравновешенность внешних сил с фиктивными силами инерции в традиционном принципе Даламбера).

Рассмотрим в порядке аналогии такой пример. Пусть экспериментально установлена (сплошная кривая на рис. 3.2) зависимость сопротивления воды движению корабля ($R$) как функция относительной скорости последнего ($v$). В принципе она может оказаться и строго линейной (пунктирная прямая), что характерно для ма-



лых скоростей и очень вязких сред. Пусть, далее, упор проектируемого движителя равен $F$. В процессе движения скорость окажется такой, что $F$ будет равно $R$ по абсолютному значению, т. е. $F$ и $R$ уравновесят друг друга. В частном случае линейности сил трения получим линейный аналог уравнения второго закона Ньютона: $F = k\dot{x}$, где $k$ — коэффициент сопротивления, характеризующий данный корабль и являющийся неким аналогом массы; $\dot{x}$ — скорость корабля (некий аналог ускорения). Заявление об уравновешенности всех реальных сил здесь никаких возражений обычно не вызывает.

Что касается зависимости перемещений от времени, то, вообще говоря, она еще не свидетельствует о динамическом характере задачи. Вспомним хотя бы о известных статических задачах деформирования конструкций из материалов, обладающих свойствами ползучести (медленного деформирования во времени), когда деформации (а стало быть и перемещения точек) нестационарны.

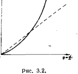


Рис. 3.2.

Можно привести и другой пример. Пусть линейно-деформируемая конструкция безынерционна (т. е. ее силы инерции малы по сравнению с внешними и внутренними силами) и пусть внешние силы имеют вид $q(x, y, z, t) = q_0(x, y, z)$. Тогда все деформации и смещения можно представить в виде $u(x, y, z, t) = u(x, y, z)\, f(t)$, где $u(x, y, z)$ — чисто статические деформации и смещения под действием сил $q_0(x, y, z)$. Никакой динамики снова нет.

Точно так же чисто статической остается и аналогичная задача о нелинейно-деформируемой конструкции под нагрузкой $q(x, y, z, t)$: ее деформации и смещения в любой фиксированный момент $t_1$ равны статическим деформациям и смещениям под статической нагрузкой $q(x, y, z, t_1)$.

Таким образом, добавочное независимое переменное — время $t$ — может входить и в процессы статического характера.

Заметим, что иногда как предельный идеальный случай рассматриваются мгновенные приращения скоростей материальных точек. Тогда ускорения и реакции ИТ в данный момент времени обращаются в бесконечность. На самом деле указанной мгновенности быть не может и это просто абстрактная модель. Но она полезна подобно модели сосредоточенной силы, приложенной к конструкции. Бесконечные по величине, но мгновенно снимаемые силы, необходимые для обеспечения скачков скоростей, моделируются в механике известным понятием мгновенного импульса [6]; правила оперирования с импульсами хорошо известны, а сами они —

пример того, что было названо обобщенными функциями и соответствующими производными. В установившихся колебаниях конструкций импульсы роли не играют, поэтому мы не будем их рассматривать подробно.

В заключение анализа вопроса об инерциальных системах отсчета рассмотрим свободное движение в ИТ нескольких массивных материальных точек, когда взаимными притяжениями последних пренебрегать нельзя. Путь действий ясен из теоремы о движении центра тяжести механических систем [44]. Если ИТ, не включающее в себя полей тяготения рассматриваемых точек, практически равномерно во всей области их расположения и движения, то инерциальная система отсчета может быть связана с общим центром тяжести (центром масс) этих точек. В число активных сил, действующих на каждую рассматриваемую точку, необходимо включить силы притяжения со стороны других точек рассматриваемой совокупности, но не нужно включать действие ИТ.

При неравномерном ИТ ничего определенного сказать нельзя.

2. К в а з и с т а т и ч е с к а я а н а л о г и я п р и у с т а н о в и в ш и х с я к о л е б а н и я х. П р и м е р ы е е и с п о л ь з о в а н и я. Рассмотрим сосредоточенную массу $M$, соединенную с упругой конструкцией, например с невесомой (точнее безынерционной) балкой (рис. 3.3, *а*). Пусть конструкция совершает в инерциальной системе отсчета свободные или вынужденные гармонические колебания с частотой $\omega$ и масса $M$ вследствие этого перемещается по закону $w = w_0 \sin(\omega t + \theta)$[1]. В этом случае на конструкцию со стороны массы будет передаваться сила инерции, равная $P_и = -M\ddot{w} = w_0 M\omega^2 \sin(\omega t + \theta)$. Следовательно, при изучении гармонических колебаний конструкции мы можем интерпретировать $M$ как некую безынерционную линейную упругую связь (пружину), направленную вдоль оси $y$ и обладающую отрицательной жесткостью $C = -M\omega^2$, значение которой зависит от частоты $\omega$.

В результате систему, изображенную на рис. 3.3, *а*, нетрудно представить в квазистатическом виде (рис. 3.3, *б*). При любых изгибах балки и отклонениях точки *1* от нулевого положения связь $C$ будет прикладывать силу, стремящуюся еще больше отклонить балку.

Аналогичным способом можно сконструировать квазистатические модели невесомых конструкций с несколькими сосредоточенными массами (рис. 3.3, *в*, *г*), а также модели весомых конструкций с распределенной массой и сосредоточенными массами (рис. 3.3, *д*, *е*). Распределенная масса интерпретируется как линейное упругое основание с отрицательным коэффициентом жесткости $K(x) = -m(x)\omega^2$, где $m(x)$ — переменная по координате $x$ распределенная масса.

Если сосредоточенная масса обладает инерцией вращения, то она заменяется не одной, а двумя связями (рис. 3.3, *ж*, *з*). Жесткость второй связи равна $K = -I_в\omega^2$, где $I_в$ — момент инерции массы относительно оси вращения. Инерция вращения распределенных масс моделируется распределенными линейными связями с коэффициентом жесткости $K_в(x) = -i_в(x)\omega^2$, где $i_в(x)$ — момент инерции этих масс, отнесенный к единице длины (рис. 3.3, *и*, *к*).

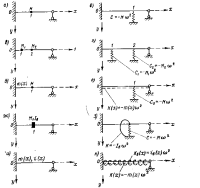



Рис. 3.3.

Если колебания негармонические, то ускорение непропорционально смещению и квазистатическая аналогия нарушается. Но в каких случаях они будут строго гармоническими? Прежде всего тогда, когда на статически линейно-деформируемую конструкцию длительное время действует активная внешняя гармоническая нагрузка, а силы неупругого сопротивления отсутствуют. (Известный из общей теории колебаний факт, что установившиеся вынужденные колебания линейных систем без неупругих сопротивлений происходят по гармоническому закону с частотой возмущающей силы

[1] В дальнейшем, если нет специальных оговорок, всегда полагаем, что движение отнесено к инерциальной системе.

и без сдвига фаз по отношению к этой силе.[1] Здесь все очень просто, по крайней мере в принципиальном отношении: зная частоту внешней нагрузки $\omega$, мы сразу заменяем массы распределенными упругими основаниями и сосредоточенными упругими опорами и получаем квазистатическую задачу. Для нахождения амплитуд смещений можно, в зависимости от внешней нагрузки, взять только ее амплитудное значение. (Синус или косинус оказывается общим множителем и у внешней нагрузки, и у сил упругости, и у реакций введенных нами упругих оснований и опор.)

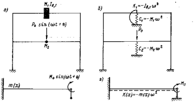



Рис. 3.4.

Если в данных условиях внешняя нагрузка, не меняясь по гармоническому закону, периодична, ее можно разложить по гармоникам и рассматривать действие каждой гармоники отдельно.

Рассмотрим для примера установившиеся вынужденные колебания конструкции (рис. 3.4, *а*) с сосредоточенными массами. Здесь

[1] Этому факту легко дать чисто физическое обоснование. Если на безынерционную линейно-деформируемую конструкцию действует суммарная внешняя нагрузка вида $q_0(x, y, z) f_t(t)$, то перемещения будут происходить также по закону $f_t(t)$, т. е. гармоническая нагрузка вызовет гармонические перемещения той же частоты и фазы. Реакции ИТ (силы инерции) после установления колебаний не будут нарушать этой гармоничности и синфазности. (В силу квазистатической аналогии после установления колебаний их можно отнести к самой конструкции и считать конструкцию по-прежнему безынерционной.) Следовательно, ничто не мешает протеканию установившихся колебаний указанного вида. Другое дело — начальный период, когда гармоническая нагрузка, еще имеющая нулевую интенсивность, т. е. $\sin(\omega t + \theta) = 0$, внезапно начинает действовать на неподвижную конструкцию. Колебания сразу установились бы только в случае, когда все точки конструкции мгновенно приобрели бы максимальные скорости, отвечающие будущим установившимся колебаниям (в гармонических установившихся колебаниях нулевому смещению отвечает максимальная скорость). Но этого не происходит. Стало быть, в начальный момент времени массы не будут колебаться по единому гармоническому закону с частотой и фазой возмущающей силы, и квазистатическая аналогия пока не применима. Нужно подождать установления колебаний.



необходимо раскрыть статическую неопределимость рамы, показанной на рис. 3.4, *б*. Никаких специфических приемов динамики в этом случае не требуется. Прогиб в любой момент времени $t$ равен статическому прогибу под действием силы $P_0$, умноженному на $\sin(\omega t + \theta)$. При расчете колебаний балки (рис. 3.4, *в*) мы заменяем ее балкой на упругом основании (рис. 3.4, *г*).

Заметим, что отрицательные жесткости связей, соединенных с конструкцией, не являются абстракциями, необходимыми только

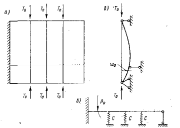



Рис. 3.5.

для обоснования квазистатической аналогии. Они возникают самым непосредственным образом в ряде чисто статических задач.

Рассмотрим плоское перекрытие с перекрестной связью (рис. 3.5, *а*). Балки главного направления сжаты силами $T_0$, а перекрестная связь загружена сосредоточенной силой $P_0$, нормальной к плоскости конструкции. Три кромки перекрытия свободно оперты, четвертая — жестко заделана. Если решать задачу о балке главного направления, опертой в пролете на жесткую опору, которая затем смещается на расстояние $w = w_0$ (рис. 3.5, *б*), то реакция балки, передаваемая опоре, будет

$$R = -Cw_0, \tag{3.2}$$

где $C$ — коэффициент, положительный при $T_0 < T_э < (\pi^2 EI)/l^2$, равный нулю при $T_0 = T_э$ и отрицательный при $T_0 > T_э$. Иными словами, когда $T_0 < T_э$, балка устойчива и требуется усилие со стороны опоры, чтобы сообщить ей перемещение $w_0$; в случае $T_0 > T_э$ балка неустойчива и при перемещении $w_0$ опора поддерживает балку, стремящуюся увеличить прогиб; при $T_0 = T_э$ балка находится в состоянии нейтрального равновесия и на опору силы не действуют.

Определив коэффициент $C$, нетрудно представить перекрестную связь в виде, показанном на рис. 3.5, *в*. Жесткости упругих опор могут быть положительными и отрицательными. При большом числе опор получаем упругое основание положительной или отрицательной жесткости.

Аналогичным путем нетрудно построить статические модели связей отрицательной жесткости, помогающих вращению соединенных с ними сечений конструкций.

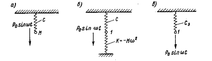



Рис. 3.6.

Выведем с помощью квазистатической аналогии общеизвестную формулу для амплитуд вынужденных колебаний простейшей системы с одной степенью свободы (рис. 3.6, *а*). Заменим массу жесткостью $K = -M\omega^2$ (рис. 3.6, *б*). Связи $K$ и $C$ расположены последовательно, но работают параллельно (имея одинаковые деформации). Следовательно, они эквивалентны (рис. 3.6, *в*) некоторой связи жесткостью $C_э = C + K = C - M\omega^2$. Отсюда амплитуда $w_0$ массы $M$ (точки *1*) будет

$$w_0 = \frac{P_0}{C_э} = \frac{P_0}{C - M\omega^2} = \frac{P_0}{C}\,\frac{1}{1-\dfrac{\omega^2}{\lambda^2}} = \frac{P_0}{C}k_д, \tag{3.3}$$

где $\lambda^2 = C/M$ — так называемая частота свободных колебаний массы; $k_д = 1/(1-\omega^2/\lambda^2)$ — коэффициент динамичности.

Если $C - M\omega^2 = 0$, т. е. $\lambda^2 = \omega^2$, то $w_0$ обращается в бесконечность (наступает явление резонанса).

Квазистатической интерпретации поддается и любая задача о свободных колебаниях линейной механической системы. В этом случае она сводится к задаче устойчивости формы равновесия.

Пусть системе (см. рис. 3.3, *г*) дано какое-то отклонение от начального положения, вызвавшее перемещение $w(x_1) = v_1$ и $w(x_2) = v_2$ точек *1* и *2* с координатами $x_1$ и $x_2$. Пружины $C_1$ и $C_2$ прикладывают силы, которые стремятся еще больше изогнуть балку. Если силы упругости балки больше сил этих пружин, то балка возвращается в начальное положение; если силы упругости меньше сил, передаваемых пружинами, то отклонения увеличиваются и происходит типичная потеря устойчивости первоначальной прямолинейной формы равновесия. Наконец, встречается случай безразличного равновесия, когда силы упругости равны силам пружин и возможны любые амплитуды прогиба по некоторой его форме. Иными словами, произошла типичная бифуркация (раздвоение) форм — появилась еще одна форма, кроме первоначальной прямолинейной. Видно, что потеря устойчивости положения равновесия конструкции не обязательно связана с действием сжимающих нагрузок. Последний вариант как раз и представляет аналог главных свободных колебаний, при которых реакция ИТ (силы инерции) всегда точно и независимо от амплитуд уравновешивают силы упругости, а система совершает гармонические колебания с некоторой частотой $\lambda$.

Уравнения безразличного равновесия системы (см. рис. 3.3, *г*) имеют вид

$$\begin{aligned} &-C_1v_1A_{11} - C_2v_2A_{12} = v_1;\\ &-C_1v_1A_{21} - C_2v_2A_{22} = v_2, \end{aligned} \tag{3.4}$$

где $A_{ij}$ — коэффициент податливости балки, равный прогибу в точке $i$ от действия единичной силы, приложенной в точке $j$. В силу известной теоремы взаимности $A_{ij} = A_{ji}$.

Подставив в (3.4) значения $C_1 = -M_1\lambda^2$ и $C_2 = -M_2\lambda^2$, где $\lambda$ — неизвестная пока частота свободных колебаний системы, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} &(1 - M_1A_{11}\lambda^2)v_1 - M_2A_{12}\lambda^2v_2 = 0,\\ &-M_1A_{12}\lambda^2v_1 + (1 - M_2A_{22}\lambda^2)v_2 = 0. \end{aligned} \tag{3.4а}$$

Это обычные уравнения свободных колебаний системы с двумя степенями свободы [44] и одновременно уравнения устойчивости квазистатической системы.

Отличные от нуля решения однородных уравнений (3.4а) возможны только при обращении в нуль определителя

$$\begin{vmatrix} (1 - M_1A_{11}\lambda^2) & -M_2A_{12}\lambda^2 \\ -M_1A_{12}\lambda^2 & (1 - M_2A_{22}\lambda^2) \end{vmatrix} = 0. \tag{3.5}$$

Раскрыв (3.5), получим квадратное уравнение относительно $\lambda^2$

$$M_1M_2(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)\lambda^4 - (M_1A_{11} + M_2A_{22})\lambda^2 + 1 = 0. \tag{3.6}$$

Значения $\lambda_1$ и $\lambda_2$, найденные из (3.6), можно подставить в любое из уравнений (3.4а) и определить два значения соотношения $n = v_1/v_2$, которые дают две формы главных свободных колебаний системы. Первую форму главных свободных колебаний конструкции, изображенной на рис. 3.3, *в*, следует трактовать как первую эйлерову форму потери устойчивости конструкции, представленной на рис. 3.3, *г*, а вторую форму свободных колебаний — как вторую эйлерову форму.

Проиллюстрированная на примере аналогия между главными свободными колебаниями и устойчивостью также весьма полезна для практики расчетов.

При использовании квазистатической аналогии в сочетании с методом парциальных откликов удобно оперировать понятиями типа динамических жесткостей и динамических податливостей.

Динамическая податливость, например, равна амплитуде перемещения в точке приложения усилия, когда амплитуда самого *усилия равна единице. Соотношение между динамической податливостью и динамической жесткостью аналогично такому же соотношению между соответствующими статическими величинами.*

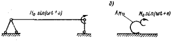



Рис. 3.7.

Если рассматривать (рис. 3.7, *а*) колебания шарнирно-опертой балки постоянной изгибной жесткости $EI$ и постоянной погонной массы $m_0$ под действием гармонического момента $M(t) = M_0 \sin(\omega t + \theta)$, то, решив аналитически соответствующую задачу, увидим, что угол поворота на опоре $x = l$ будет

$$\left.\frac{dw}{dx}\right|_{x=l} = M_0 A_{Mv} \sin(\omega t + \theta),$$

где $A_{Mv}$ — динамическая податливость:

$$A_{Mv} = \frac{1}{2EI}\,\frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\operatorname{th}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}\right);\quad \alpha = \sqrt[4]{\frac{m_0\omega^2}{EI}}\,.$$

Пользуясь этими понятиями, мы как бы заменяем всю рассматриваемую реальную систему некоторой условной безынерционной упругой связью: скажем, по отношению к моменту $M_0 \sin(\omega t + \theta)$ балка, изображенная на рис. 3.7, *а*, эквивалентна связи податливости $A_{Mv}$ (рис. 3.7, *б*).

Установившиеся вынужденные и свободные колебания нелинейных конструкций обычно не вполне гармонические (хотя довольно часто приближаются к ним), поэтому для них квазистатическую аналогию можно применять с некоторым приближением.

3. Неинерциальные системы отсчета. Приведение их к инерциальным системам. Кинематическое возбуждение. Начнем с исследования так называемого кинематического возбуждения, т. е. вынужденного движения произвольной конструкции в инерциальной системе координат, которое вызвано заданным принудительным движением хотя бы некоторых ее точек. При этом будем разделять



общее и местное кинематические возбуждения. (Под общим кинематическим возбуждением будем понимать возбуждение, связанное с заданным принудительным движением конструкции как твердого целого, под местным — любое другое.)

Задачи о кинематическом возбуждении чрезвычайно характерны для судостроения. К ним относятся и расчеты местной вибрации, вызванные общей вибрацией корпуса, и расчеты местных сотрясений от действующих на корпус нагрузок ударного характера, и многие другие задачи.

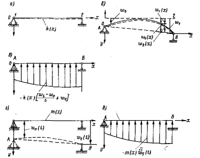



Рис. 3.8.

Рассмотрим сначала статическую задачу (рис. 3.8, *а*). Балка из нелинейно-деформируемого материала лежит на линейном упругом основании винклеровского типа (реакции основания пропорциональны коэффициенту жесткости $k(x)$ и прогибу $w(x)$ в данном сечении). Опорам балки сообщили заданные принудительные смещения $w(0) = w_0$ и $w(l) = w_l$, вследствие чего балка изогнулась (рис. 3.8, *б*). Найти прогибы балки.

Разложим прогибы на две составляющие: смещение $w_1(x)$, когда балка перемещается вместе с опорами как твердое тело, и дополнительный прогиб $w_2(x)$ относительно этого нового положения $w(x) = w_1(x) + w_2(x)$ (сложение выполняется *с учетом знаков* смещений). Реакции упругого основания строго линейны относительно смещений, поэтому на балку будет действовать нагрузка

$q(x) = -k(x)\,w_1(x) - k(x)\,w_2(x) = -k(x)\left(\frac{w_l - w_0}{l^2} + w_0\right) - k(x)\,w_2(x)$. Первый член в правой части следует рассматривать как известную внешнюю нагрузку, второй — как неизвестные пока реакции упругого основания при дополнительном прогибе $w_2(x)$ балки относительно нового положения $AB$ (рис. 3.8, *в*). Мы привели задачу о деформациях под действием смещения опор к задаче о деформациях под заданной внешней нагрузкой. Вывод базировался целиком на линейности упругого основания и не зависел от линейности или нелинейности деформирования самой балки (конечно, задачу, иллюстрируемую рис. 3.8, гораздо труднее решить для нелинейной балки, чем для линейной).

Поскольку мы нигде не рассматривали специфически балочных свойств конструкции и следили лишь за реакциями основания, мы получили бы аналогичный вывод для произвольной линейной или нелинейной конструкции (пластины, перекрытия и т. д.), лежащей на линейном упругом основании и соединенной, быть может, с некоторыми сосредоточенными упругими связями, когда основной опорный контур получает принудительные смещения и конструкция стремится изменить свое положение как твердое тело. Суммарное смещение во всех таких случаях состоит из смещений как твердого тела, так и дополнительных смещений. Дополнительные смещения можно найти, загрузив недеформированную конструкцию реакциями упругого основания и упругих связей, возникающими при перемещении конструкции вместе с контуром.

Пользуясь квазистатической аналогией, можно привести к этому случаю задачу об установившихся вынужденных колебаниях линейных конструкций под действием заданных гармонических колебаний их опорного контура относительно инерциальной системы координат (в данном случае линейность конструкции нужна, чтобы установившиеся колебания были непременно гармоническими и аналогия была справедливой). Для этого достаточно заменить все массы упругим основанием и сосредоточенными связями.

Однако перейдем к более общей задаче.

Уберем в нашей (может быть, и нелинейной) балке (см. рис. 3.8, *г*) упругое основание, но дадим опорам принудительные, произвольно заданные смещения $w(0, t) = w_0(t)$ и $w(l, t) = w_l(t)$ относительно инерциальной системы отсчета. Ясно, что каждый элемент балки длиной $dx$, с серединой в точке $x$ получит ускорения $\ddot{w}(x, t)$. Разложим их на ускорения $\ddot{w}(x, t)$, обусловленные движением балки как твердого тела, и на дополнительные ускорения $\ddot{w}_2(x, t)$, вызванные дополнительными к $w_1(x, t)$ движениями балки: $\ddot{w}(x, t) = \ddot{w}_1(x, t) + \ddot{w}_2(x, t)$. Тогда силы инерции элемента (реакции ИТ) будут равны $-[m(x)\,\ddot{w}_1(x, t)\,dx + m(x)\,\ddot{w}_2(x, t)\,dx]$. Величина $-m(x)\,\ddot{w}_1(x, t)$ известна: это — реальная внешняя нагрузка на балку, которая и вызовет ее относительное (по отношению к движению как твердое целое) неизвестное пока смещение балки $w_2(x, t)$ с ускорениями $\ddot{w}_2(x, t)$ (рис. 3.8, *д*).



Мы снова не использовали никаких специфических «балочных» свойств или линейности конструкций, а опирались исключительно на кинематический закон сложения ускорений и на линейность реакций ИТ, вызываемых разными видами движения. Поэтому сделанные выводы носят общий характер: перемещения произвольной механической конструкции, вызванные общим кинематическим возбуждением в виде заданного смещения ее опорного контура в инерциальной системе отсчета, складываются из смещения этой конструкции как твердого тела вместе с контуром и дополнительного смещения. Дополнительное смещение обусловлено известными си*лами инерции (реакциями ИТ), которые возникают при смещении* конструкции как твердого целого. Если опорный контур получает мгновенные приращения скоростей, указанные силы инерции приобретают в этот момент характер импульсов. В тех случаях, когда помимо смещений опорного контура к конструкции приложены еще активные внешние силы, дополнительное смещение следует находить с учетом как известных сил инерции переносного движения (вместе с контуром), так и этих активных сил.

Только что рассмотренный вопрос о кинематическом общем возбуждении теснейшим образом связан с переходом от инерциальных систем отсчета к неинерциальным. Всегда можно жестко связать с опорным контуром некую неинерциальную систему. Поскольку движение опорного контура в инерциальной системе произвольно (но точно известно), мы тем самым произвольно задаем движение неинерциальной системы относительно инерциальной. Движение относительно опорного контура есть искомое (так сказать абсолютное) движение в неинерциальной системе отсчета.

Итак, чтобы найти движение любой конструкции в неинерциальной системе отсчета, следует: а) проследить ее движение вместе с неинерциальной системой относительно какой-то инерциальной системы; б) найти силы инерции (реакции ИТ), которые возникают при таком движении (в частности, импульсы, если движение имеет скачки по скорости); в) определить дополнительное движение конструкции, приложив к конструкции найденные силы инерции. Рассчитывая дополнительное движение согласно пункту «в», нужно найти соответствующее ускорение $\bar{a}_и$ любой материальной точки конструкции относительно исходной инерциальной системы, так как именно оно определит добавочные реакции ИТ при дополнительном движении (ускорение в инерциальной системе не связано прямо с реакциями ИТ). Разумеется, само дополнительное движение желательно отнести к неинерциальной системе (раньше при исследовании кинематического возбуждения мы относили к инерциальной системе и дополнительное движение).

В наших рассуждениях связь конструкции с ее опорным контуром совершенно произвольна. Никаких реакций на опорный контур при разложении движения мы не вычисляем, поэтому в пределе можно рассматривать и нулевую связь, т. е. неинерциальные системы отсчета, не соединенные с конструкцией.

В общих случаях анализа движений, отнесенных к неинерциальным системам координат, нужно вести расчет по п. «в», т. е. находить ускорение $\ddot{a}_n$ любой точки конструкции при ее дополнительном движении, определяя его по отношению к исходной инерциальной системе. Это чисто кинематическая задача.

Пусть имеется некоторая инерциальная система отсчета. Перемещение материальной точки в этой системе определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}_1(t)$, скорость — вектором $\mathbf{v}_1(t) = \dot{\mathbf{r}}_1(t)$, ускорение — вектором $\mathbf{a}_1(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$. Пусть имеется другая (неинерциальная) система, в которой движение этой же материальной точки определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}(t)$, скорость — вектором $\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t)$, ускорение — вектором $\mathbf{a}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$. Известно, что начало неинерциальной системы движется относительно инерциальной системы, причем это движение определяется радиусом-вектором $\mathbf{r}_2(t)$. Неинерциальная система вращается по отношению к инерциальной системе около своего начала $O$ с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}(t)$. Требуется найти связь $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ и $\ddot{\mathbf{r}}_1(t)$.

Напомним, что в кинематике угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$ называют вектор, длина которого $\boldsymbol{\omega}$ является пределом отношения малого угла поворота $\Delta\alpha$ тела вокруг неподвижной оси к соответствующему малому интервалу времени:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right] = \frac{d\alpha}{dt}. \tag{3.7}$$

*Направление $\boldsymbol{\omega}$ совпадает с направлением оси вращения.* Если смотреть вдоль оси по стрелке $\boldsymbol{\omega}$, то поворот тела будет происходить по часовой стрелке.

Решение поставленной кинематической задачи довольно длинно и не представляет большого интереса для строительной механики, так как здесь мы имеем дело обычно лишь с частными случаями относительного движения координатных систем. Поэтому ограничимся окончательным ответом

$$\ddot{\mathbf{r}}_1(t) = \ddot{\mathbf{r}}_2 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \ddot{\mathbf{r}} + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}). \tag{3.8}$$

Первые три члена формулы (3.8) представляют собой ускорение переносного движения точки вместе со второй (неинерциальной) системой, т. е. такого движения, при котором вторая система рассматривается как некое твердое целое. Именно оно определит внешние силы согласно п. «б» нашей расчетной схемы. Четвертый член $\ddot{\mathbf{r}}$ — ускорение в неинерциальной системе, т. е. относительное ускорение.

Пятый член является так называемым кориолисовым или дополнительным ускорением $a_к$. Оно возникает при перемещении



точки во второй (неинерциальной) системе, когда последняя вращается относительно первой:

$$\mathbf{a}_к = \ddot{\mathbf{r}} + 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}). \tag{3.9}$$

Реакции ИТ (силы инерции) при дополнительном движении в *неинерциальной системе координат составят*

$$m\mathbf{a}_к = m\ddot{\mathbf{r}} + m \cdot 2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}). \tag{3.10}$$

Величина $m\,2(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})$ известна и может быть просуммирована с внешними силами переносного (вместе с неинерциальной системой) движения, а величина $m\ddot{\mathbf{r}}$ равна реакциям ИТ в случае, если

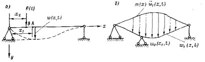



Рис. 3.9.

бы наша вторая система координат была инерциальной. Таким образом, дополнительное движение можно рассматривать в неинерциальной системе координат, трактуя последнюю как квазиинерциальную, но тогда в число внешних сил нужно включить реальные силы реакций ИТ (силы инерции), обусловленные переносным движением конструкции вместе с неинерциальной системой и дополнительным (кориолисовым) ускорением.

В заключение обратимся снова к кинематическому возбуждению, но теперь рассмотрим его как местное, т. е. не связанное с заданным движением конструкции в виде твердого целого.

Пусть (рис. 3.9, *а*) нелинейно-деформируемая балка соединена в точке $A$ с механизмом, который принудительно заставляет двигаться эту точку по закону $w_0(x_1, t)$. Нужно найти движение остальных точек балки, учитывая, что балка загружена в точке $B$ силой $P(t)$.

Разложим перемещения точек балки $w(x, t)$ на две составляющие:

$$w(x, t) = w_1(x, t) + w_2(x, t), \tag{3.11}$$

где $w_1(t)$ — статические перемещения безынерционной балки под действием смещений точки $A$ по закону $w_0(x, t)$ и силы $P(t)$; $w_2(t)$ — дополнительные динамические смещения инерционной балки (рис. 3.9, *б*) под действием реакций ИТ, вызванных движением $w_1(x, t)$.

Ясно, что задача в принципе решена, поскольку она сведена к статической задаче и к динамической задаче деформирования конструкции под действием известной внешней нагрузки.

Аналогичным образом рассматриваются и другие конструкции.

4. Эквивалентные массы и моменты инерции. Учет масс, присоединенных к конструкциям с помощью упругих связей. Пусть имеется масса $M$, присоединенная к конструкции $A$ некоторой упругой

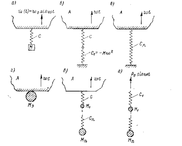


Рис. 3.10.

связью $C$ (рис. 3.10, *а*). Пользуясь квазистатической аналогией, нетрудно заменить $M$ эквивалентной упругой связью жесткости $M\omega^2$, т. е. получить статическую схему с динамической жесткостью (рис. 3.10, *б*, *в*):

$$C_д = \frac{1}{\frac{1}{C} + \frac{1}{-M\omega^2}}. \tag{3.12}$$

Но можно поступить и наоборот: заменить подвешенную массу $M$ эквивалентной массой $M_э$, присоединенной прямо к $A$ и сообщающей $A$ те же реакции (рис. 3.10, *г*), т. е.

$$M_э = -\frac{C_д}{\omega^2}. \tag{3.13}$$

Аналогичным образом можно рассмотреть и подвеску $n$ масс (рис. 3.10, *д*). Для этого достаточно рассмотреть систему, показанную на рис. 3.10, *е*, найти динамическую жесткость этой системы $C_д$, а затем перейти к системе, изображенной на рис. 3.10, *в*, или к системе, иллюстрируемой рис. 3.10, *г*. В последнем случае эквивалентная масса определится по-прежнему зависимостью (3.13), но с другим значением $C_д$.

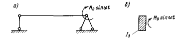


Рис. 3.11.

Широко используя изложенный прием в ряде своих работ, В. П. Терских назвал эквивалентную массу $M_э$ «упругой массой». (Значение $M_э$ он вычислял независимо от $C_д$ и квазистатической аналогией не пользовался.)

В случае балки (рис. 3.11, *а*) можно найти динамическую жесткость $K_д$ по отношению к углу поворота, а затем ввести эквивалентный («упругий») момент инерции $I_э$ (рис. 3.11, *б*):

$$I_э = -\frac{K_д}{\omega^2}. \tag{3.14}$$

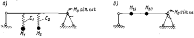


Рис. 3.12.

В задачах, рассмотренных В. П. Терских, прямое применение квазистатической аналогии, как нам представляется, предпочтительнее. Однако иногда следует использовать эквивалентные массы и моменты инерции. Если, скажем, балка (рис. 3.12, *а*) соединена с подвешенными к ней массами, то следует перейти к схеме рис. 3.12, *б*.

Особенно удобно введение эквивалентных масс при использовании различных приближенных методов (Релея, Ю. А. Шиманского) нахождения частот свободных колебаний конструкций с заданием форм этих колебаний. Здесь надо комбинировать эти методы с методом последовательных приближений: задавшись значением $\omega$, равным ожидаемой частоте свободных колебаний $\lambda$, находить эквивалентные массы и присоединять их к конструкции. Если фактическая $\lambda$ системы с эквивалентными массами оказывается равной заданной частоте $\omega$, то расчет закончен; в противном случае необходимо следующее приближение.

Если принять частоту $\lambda$ свободных колебаний массы $M$ на пружине с жесткостью $C$ равной $\omega$, т. е. обеспечить равенство $\lambda^2 = C/M = \omega^2$, то $M_э$ оказывается бесконечной. Поскольку сдвинуть бесконечную массу невозможно никакими конечными усилиями, предполагаемое колебание конструкции $A$ (см. рис. 3.10, *а*) невозможно и она непременно остановится (по крайней мере, не будет колебаться в точке подвеса жесткости $C$). Масса $M$ будет совершать установившиеся свободные колебания такой амплитуды, что указанная точка остановится.

### § 13. Принцип разложения реакций линейных силовых полей и его использование в расчетах судовых конструкций, соприкасающихся с жидкостью. Определение усилий, возбуждающих местную вибрацию конструкций при общих колебаниях корпуса. Характер местной вибрации

1. Сущность принципа. Пусть имеется произвольная линейная или нелинейная механическая система (конструкция), которая движется в некотором линейном силовом поле. Силы, передаваемые этим полем, линейно зависят от смещений точек системы и любых производных этих смещений по времени. Кроме того, поле может давать некоторую составляющую, не зависящую от координат и времени и не зависящую от смещений системы. К числу указанных полей относится и поле давлений жидкости в гидродинамически линейных задачах гидроупругости (например в задачах о колебаниях судовых конструкций, соприкасающихся с водой). Еще более простой пример такого поля — обычное физическое пространство в инерциальной системе отсчета, рассмотренное в предыдущем параграфе.

Наглядные представления, описывающие воздействие поля, могут быть любыми: давления, силы инерции, выражаемые через массы или «присоединенные массы», комбинации давлений и присоединенных масс и т. д. Допустима суперпозиция (наложение) рассматриваемых полей — ведь такой суперпозиции нет только в случае обычного физического пространства инерциальной системы, а в остальных случаях поле физического пространства (обычные силы инерции) налагается на любое другое линейное поле.

Сама линейность любого из рассматриваемых нами полей позволяет произвольно раскладывать движение конструкции на составляющие и вычислять воздействие (реакции) поля для каждого из составляющих в отдельности (обстоятельства, связанные с разложением на составляющие внутренних сил системы и внешних, не входящих в поле, должны рассматриваться особо). Никаких



специальных доказательств законности подобной операции (самого принципа разложения) не требуется.

Анализируемые линейные силовые поля целесообразно разделить на два типа. К первому типу следует отнести поля, где реакция, передаваемая каждой точке конструкции, зависит только от движения самой этой точки и не зависит от формы движения системы в целом; второй тип составляют поля, у которых указанная реакция зависит от формы движения системы. Таким образом, можно сказать, что к первому типу относится винклеровское, а ко второму — невинклеровское упругое основание. Ясно, что ИТ — пример поля первого типа, а давление жидкости в гидродинамически линейной задаче — пример поля второго типа. Иными словами, реакция винклеровского упругого основания на балку в точке $x$ равна $k(x)\,w(x)$, где $w(x)$ — смещение точки $x$; $k(x)$ — коэффициент жесткости упругого основания. Реакция невинклеровского упругого основания определяется как $k[x, f(x)]\,w(x)$, где $f(x)$ — форма смещения балки; $k[x, f(x)]$ — коэффициент жесткости упругого основания, зависящий уже не только от $x$, но и от $f(x)$. Аналогичным образом реакции ИТ на точку балки равны — $m(x)\,\ddot{w}$, а реакции окружающей балку жидкости равны — $k_1[x, f(x)]\,\ddot{w}$, где $k_1$ — определенная функция, характеризующая давление и трактуемая обычно как некая присоединенная масса жидкости.

Зависимость реакций поля от формы движения системы не нарушает его линейности и возможности разложения движений при вычислении этих реакций; нужно лишь раскладывать не движение каждой точки, а движение всей конструкции.

2. Удобство разложения движений конструкции при решении гидродинамически линейных задач. В течение долгого времени в задачах вибрации корпусных конструкций считалось обязательным вычисление единой присоединенной массы жидкости при порой очень сложном движении совокупности тех или иных конструктивных элементов, что вызывало серьезные, подчас практически непреодолимые затруднения. Ведь само вычисление присоединенной массы конструкции во время ее движения, даже по строго заданной форме, сопряжено с большими трудностями, не говоря уже о том, что нам заранее не известны соотношения амплитуд колебаний по каждой из степеней свободы, и, следовательно, необходимо использование метода последовательных приближений.

Еще в работе [43], посвященной анализу причин возникновения вибрации обшивки судов, была изложена суть принципа разложения реакций линейных силовых полей, а сам принцип использован для решения практических вопросов. В большинстве задач предлагалось ввести раздельные присоединенные массы для каждой составляющей движения, причем каждая масса должна была «работать» только на своей составляющей. Соответственно записывались и уравнения движения. Вместо присоединенной массы для корпуса в целом вводились давления: амплитуды вибраций полагались известными, поэтому прямое рассмотрение давлений оказывалось более удобным. Проведенный анализ показал, что гидродинамические давления, возникающие при общей вибрации, достаточно велики и являются основной возмущающей силой, обусловливающей колебания обшивки.

Однако предложенное решение ряд специалистов воспринял в лучшем случае как приближенное. По их мнению, прием разделения присоединенных масс неточен, поскольку линейность уравнений движения тела позволяет применить принцип суперпозиции только к правым их частям (внешним усилиям), в то время как массы входят в левую часть. Математическая ошибочность приема кроется, как им казалось, в замене квадрата суммы перемещений, входящего в интегральные выражения для присоединенной массы, суммой их квадратов. Результатом возражений было игнорирование удобств, даваемых рассматриваемым принципом, при решении большинства задач судовой вибрации.

*Между тем подобные возражения не имеют никаких оснований.* Согласно рассматриваемому принципу, суммарная присоединенная масса в сложном движении не просто делится на части, а раскладывается на составляющие, арифметическая сумма которых не равна суммарной массе; сами же составляющие «работают» только на соответствующих им перемещениях, но не на всем суммарном перемещении.

В соответствии со сказанным вовсе не предлагается применять *принцип наложения к левой части уравнений движения*, а рекомендуется записать несколько иных уравнений, в левые части которых входят составляющие массы. Это не преобразование уравнений с суммарной массой, а вывод иной системы уравнений, описывающей, однако, тот же процесс. Однозначность решения большинства задач теории колебаний не означает однозначности уравнений этих задач. Наоборот, последние могут выводиться из различных принципов, включать в себя различные параметры, но давать *одинаковые конечные решения*.

Таким образом, разложение движения тела, соприкасающегося с жидкостью, не вносит никаких погрешностей в решение любой гидродинамически линейной задачи, но позволяет значительно упростить расчеты. Это не что иное, как рациональное использование самого фактора гидродинамической линейности (или линейности любого другого окружающего систему поля). К сожалению, даже в настоящее время еще не всем ясна очевидность сказанного. Принцип разложения реакций уже используется в некоторых исследованиях, но их авторы нередко «доказывают» его заново путем конкретного и утомительного преобразования конкретных исходных уравнений задачи (например, уравнений движения несжимаемой жидкости вместе с уравнениями колебаний конструкции).



3. Общая картина местной вибрации корпусных конструкций и основной «механизм» ее возникновения. Проблема местной вибрации и вибрационной прочности корпусных конструкций с особой остротой возникла в начале 50-х годов после неожиданного появления трещин в кормовой оконечности первых цельносварных судов различных классов иностранной и отечественной постройки [48].

Обследование повреждений на нескольких судах позволило установить причину появления трещин — повышенную вибрацию конструкций, которая в районах днищевых перекрытий непосредственно над гребными винтами была вызвана пульсирующими гидродинамическими давлениями от работы винтов, а в остальных конструкциях, не подвергающихся действию давлений от винтов,— общей вибрацией корпуса, т. е. кинематическим возбуждением от колебаний исходного контура. Это заключение подтверждалось характером повреждений, результатами ориентировочных расчетов конструкций и данными металлофизического анализа листов, вырезанных в районе трещин. Расположение трещин свидетельствовало о том, что они были вызваны изгибными деформациями пластин. Количество трещин уменьшалось от кормы к носу, следуя за уменьшением амплитуд общей ходовой вибрации корпуса. Согласно результатам ориентировочных расчетов, частоты свободных колебаний элементов, получивших повреждения, находились в резонансе с частотами общей ходовой вибрации судна. Наконец, металлографический анализ показал, что повреждения были связаны
3 с усталостью металла.

Возникновение трещин в конструкциях, соприкасающихся с водой и жидким топливом, обусловливалось снижением частот свободных колебаний вследствие влияния присоединенных масс жидкости, что приводило к возникновению опасных резонансов. Появление трещин в узлах пересечения пластин и связей вызывалось концентрацией местных напряжений у края связи, где пластина как бы закреплена в точке. Увеличение количества трещин при длительной эксплуатации судна вполне закономерно.

*Согласно современным представлениям, работающий винт передает* обшивке корпуса давления, которые распространяются на 1,5—2,0 диаметра винта в нос от его диска и на 1,0—1,5 диаметра в корму, а по ширине — от скулы до скулы. Основные частоты этих давлений равны частоте вращения гребного винта, умноженной на число его лопастей (вибрация третьего порядка[1] при обычном трехлопастном винте), и частоте вращения гребного винта, умноженной на удвоенное число его лопастей (вибрация шестого порядка при трехлопастном винте). *На современных судах амплитуды давлений третьего порядка достигают обычно* 0,15—0,6 кгс/см², амплитуды давлений шестого порядка в пять—десять раз меньше.

[1] Порядком вибрации принято называть отношение ее частоты к частоте вращения вала (винта) за единицу времени.

Помимо сил третьего и шестого порядков, работающие винты создают силу первого порядка с частотой, равной частоте вращения гребных валов. Эта сила связана с усилиями, возникающими непосредственно на винте вследствие его механической и гидродинамической неуравновешенности (главным образом из-за различного шага лопастей), и передается корпусу через кронштейны валов и дейдвуды.

Перемещения опорного контура конструкции, которые обусловливают возникновение возмущающих сил вдали от винтов, могут происходить в трех взаимно перпендикулярных направлениях, так как корпус в целом совершает вертикальные и горизонтальные


Рис. 3.13.

колебания. Последние связаны с поворотом сечений корпуса и продольными перемещениями (рис. 3.13). На верхней палубе, а также на днище и бортах, продольные перемещения соизмеримы с вертикальными и горизонтальными колебаниями.

Общая ходовая вибрация современного судна с уравновешенными механизмами, например турбинами, вызывается преимущественно работой гребных винтов. Она имеет те же частоты, что и гидродинамические давления на обшивке (т. е. третий и шестой порядки при трехлопастном винте), и, кроме того, частоту, равную частоте вращения валов (вибрация первого порядка).

Наиболее сильная вибрация, третьего порядка, наблюдается в кормовой оконечности судна и остается заметной примерно на четверти его длины. Вибрация шестого порядка наблюдается также в корме и распространяется не более чем на одну восьмую длины корпуса. Вибрация первого порядка распространяется по всей длине судна.

Поскольку частоты свободных колебаний отдельных элементов конструкций обычно существенно превышают частоту первого порядка, основное значение для прочности корпуса имеет вибрация третьего и шестого порядков.

Необходимо отметить, что сделанное заключение о причинах *повреждений конструкций вне района, расположенного непосредственно* над винтами, встретило вначале серьезные возражения некоторых специалистов. Они указывали на сравнительную малость амплитуд общей ходовой вибрации судна, не превышающих обычно 0,2—0,5 мм, а в районе четверти длины корпуса — 0,1 мм. Выражалось сомнение в возможности столь незначительных возмущений



вызвать сильную вибрацию пластин и трещины в материале и в качестве доказательства приводились данные опыта эксплуатации клепаных судов, у которых трещины вне района винтов отсутствовали. Основную причину повреждений предлагалось искать не в вибрации, а в других, например технологических, факторах, в плохом качестве материала; вибрации же отводилась вспомогательная роль.

В связи с этими замечаниями были проведены испытания пластин, моделирующих обшивку корпусных перекрытий. В частности, была испытана пластина корпусной стали (рис. 3.14), пред-

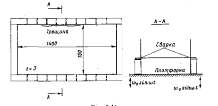



Рис. 3.14.

ставляющая собой днище сварного бака, заполненного водой и установленного на вибрационную платформу. Качество материала и сварки было тщательно проконтролировано. Платформа совершала 1000—2000 колебаний в минуту с амплитудой 0,2 мм, что соответствует общей вибрации судна в корме. Непосредственные измерения с помощью тензометров показали, что напряжения на контуре пластины при околорезонансных режимах достигали 1200—1400 кгс/см$^2$, причем через три часа резонансного режима в этом районе образовались трещины. Если учесть увеличение амплитуд колебаний контура реальных судовых пластин по сравнению с амплитудами общей ходовой вибрации за счет прогиба балок набора, то возможность возникновения трещин в пластинах вследствие действия вибрационных нагрузок станет вполне очевидной.

*На клепаных судах вероятность появления вибрационных трещин* меньше, чем на сварных, поскольку клепаные конструкции менее монолитны и демпфирование колебаний в их соединениях «сглаживает» резонансы. Но главное — предел выносливости материала в районе клепаных соединений на опорном контуре пластин выше, чем в районе сварных швов.

4. Усилия, вызывающие местную вибрацию корпуса. Некоторое представление об усилиях, действующих на обшивку днища вне района винтов, можно получить, если принять во внимание, что корпус вовлекает в колебания окружающую его жидкость. Это обстоятельство учитывается так называемой «присоединенной массой», которая условно добавляется к массе самого судна (присоединенная масса приблизительно равна массе судна).

Очевидно, воздействие жидкости на корпус осуществляется только через давления на обшивку, а наличие присоединенной массы эквивалентно наличию давлений, изменяющихся пропорционально ускорениям. Амплитудное значение этих суммарных давлений в любом сечении судна при вибрации с частотой $\omega$ составляет

$$p_{0в} = m_{0п} w_0 \omega^2, \qquad (3.15)$$

где $m_{0п}$ — присоединенная масса жидкости на единицу длины корпуса в рассматриваемом сечении; $w_0$ — амплитуда колебаний корпуса в рассматриваемом сечении.

Среднее значение амплитуд давлений

$$p_{0в}^{ср} = \frac{p_{0в}}{B} = \frac{m_{0п} w_0 \omega^2}{B}, \qquad (3.16)$$

а амплитуда максимального давления

$$p_{0в}^{\max} = k_1 \frac{p_{0в}}{B} = k_1 \frac{m_{0п} w_0 \omega^2}{B}, \qquad (3.17)$$

где $B$ — ширина корпуса (для горизонтальных колебаний — осадка), $k_1 > 1$, 0 — коэффициент, выражающий отношение максимального давления к среднему.

Подставляя в (3.16) обычные значения $m_{0п}$ и $B$ для судов длиной около 100—120 м и водоизмещением 2500—3000 т, получим

$$p_{0в}^{ср} = (0{,}20 \div 0{,}6)\, 10^{-3} w_0 \omega^2. \qquad (3.18)$$

Если задать ориентировочно параметры вибрации кормовой оконечности равными $w_0 = 0{,}03$ см и $\omega = 130$ 1/с, то $p_{0в}^{ср} = 0{,}10 \div 0{,}3$ кгс/см², что вполне соизмеримо с максимальными пульсирующими давлениями от работы гребных винтов, амплитудное значение которых не превышает, как правило, 0,3—0,6 кгс/см².

Чтобы исследовать более детально распределение давлений по обшивке и учесть влияние прогибов конструкций, рассмотрим произвольное тело (рис. 3.15), вибрирующее с частотой $\omega$ в идеальной несжимаемой безграничной жидкости; в процессе вибрации этого тела периодически изменяется форма его поверхности.

Давление в любой точке жидкости, в частности в точке на поверхности тела, после отбрасывания пренебрежимо малых членов определяется зависимостью

$$p = -\rho g y - \rho \frac{\partial \varphi_t}{\partial t} + p_0, \qquad (3.19)$$



где $\rho$ — плотность жидкости; $g$ — ускорение свободного падения; $\varphi_t = \varphi(x, y, z) \sin \omega t$ — потенциал скоростей; $p_0$ — атмосферное давление.

Потенциал $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \qquad (3.20)$$

условиям на бесконечности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \qquad (3.21)$$

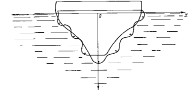



Рис. 3.15.

условиям на свободной поверхности

$$\varphi(x, y, z) = 0 \qquad (3.22)$$

и условиям на контуре

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_n. \qquad (3.23)$$

Здесь $\partial\varphi/\partial n$ — производная по нормали к поверхности тела; $v_n$ — амплитуда нормальной составляющей скорости элемента поверхности тела. Первый и третий члены (3.19) выражают суммарное гидростатическое и атмосферное давления, второй член — переменное давление $p_в$, обусловленное вибрацией. Величина $p_в$ пропорциональна ускорениям и изменяется по гармоническому закону с частотой $\omega$, принимая то положительное, то отрицательное значения; отсутствие разрывов в жидкости обеспечивается атмосферным и гидростатическим давлениями.

Вместо учета давления $p_в$ на поверхности тела можно рассматривать присоединенную массу $m_п(x, y, z)$, неравномерно распределенную по этой поверхности и выбранную из условия, что реакция присоединенной массы при колебаниях равна $p_в$.

В соответствии с изложенным для расчета местной вибрации днищевых конструкций, вызванной общими колебаниями корпуса, необходимо вычислить давления $p_в$, обусловленные этими колебаниями (предполагая, что изгиб пластин и набора отсутствует), а также найти силы инерции самих конструкций (без учета присоединенных масс забортной воды) при их перемещениях вместе с корпусом. После этого следует рассчитать местную вибрацию отдельных конструкций при действии вычисленных давлений $p_в$ и сил инерции переносного движения, учитывая в расчете присоединенную массу жидкости при местной вибрации, т. е. при изгибе (относительном движении) пластин и набора.

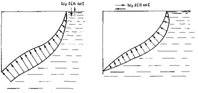



Рис. 3.16.

Для вычисления давлений в любой точке днища, возникающих вследствие общей вибрации судна, в частности для вычисления коэффициента $k_1$ в формуле (3.17), можно воспользоваться потенциалами плоского обтекания профилей типа судовых шпангоутов. Дифференцируя потенциалы, легко построить соответствующие эпюры (рис. 3.16), из рассмотрения которых видно, что среднее давление $p_{0в}^{ср}$ отличается от максимального $p_{0в}^{max}$ на 40—50%, т. е. $k = 1{,}4 \div 1{,}5$. Пространственность обтекания нетрудно учесть поправочными коэффициентами для вычисления присоединенных масс. Таким образом, формулы (3.16) и (2.17) остаются в силе и при более точном решении задачи.

В качестве простейшего примера использования предлагаемых зависимостей рассчитаем вибрацию стальной пластины днища судна при следующих исходных данных: ширина пластины $a = 50$ см, длина $l = 200$ см, толщина $h = 0{,}8$ см, масса единицы площади пластины $m_0 = 6{,}4 \cdot 10^{-6}$ кг·с²/см³, частота $\omega = 100$ 1/с, присоединенная погонная масса воды в рассматриваемом сечении судна $m_{0п} = 0{,}25$ кг·с²/см², ширина судна $B = 900$ см. Пластина вибрирует как жестко заделанная на жестком контуре.

Силы инерции при переносном движении пластины вместе с корпусом судна, отнесенные к единице площади пластины, будут

$$P_{ин} = m_0 w_0 \omega^2 \sin \omega t = 1{,}9 \cdot 10^{-3} \sin \omega t;$$



давление

$$p_в^{max} = 1{,}5 \frac{m_{0п} w_0 \omega^2}{B} \sin \omega t = 0{,}125 \sin \omega t;$$

суммарная расчетная нагрузка на пластину

$$P_р = (1{,}9 \cdot 10^{-3} + 0{,}125) \sin \omega t \approx 0{,}125 \sin \omega t.$$

Используя известные расчетные формулы, находим: частоту свободных колебаний пластины в воздухе

$$\lambda = \sqrt{\frac{16\pi^4}{9} \frac{Eh^3}{12m_0} \left[\frac{3}{a^4} + \frac{3}{l^4} + \frac{2}{a^2 l^2}\right]};$$

частоту свободных колебаний пластины с учетом присоединенных масс жидкости при *относительном движении* (*изгибе относительно набора*)

$$\lambda_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \mu \frac{a}{7{,}85h}}},$$

где $\mu$ — коэффициент, зависящий от $a/l$;

коэффициент динамичности расчетной нагрузки

$$k_д = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\lambda^2}} \approx 1{,}0$$

(т. е. давление действует, по существу, статически).

Отсюда, применяя обычные формулы строительной механики, найдем максимальные напряжения на опорном контуре пластины $\sigma_{max} = 250$ кгс/см².

При изменении частоты возмущающих усилий и других параметров вибрации напряжения легко могут возрасти до недопустимых пределов; например при $h = 0{,}6$ см, $w_0 = 0{,}04$ см, $\omega = 120$ 1/с $\sigma_{max} = 850$ кгс/см², что превышает предел усталости стали на опорном контуре пластин.

Из приведенного примера видно, что местная вибрация вдали от винтов может оказаться недопустимой даже при отсутствии резонансов. (Естественно, резонансы существенно увеличат местные колебания.)

## § 14. Обобщенные и «динамические обобщенные» координаты. Нетривиальные случаи применения метода главных координат в расчетах корпусных конструкций

1. Различие между обобщенными и «динамическими обобщенными» координатами. При рассмотрении сложных вопросов динамики упругих систем, в частности задач о колебаниях корпусных

судовых конструкций, необходимо уточнить обычные представления, связанные с понятием главных координат и методом главных координат.

Строгое определение обобщенных координат, принятое в аналитической механике, таково: обобщенными координатами механической системы называют произвольные независимые скалярные параметры, которые в своей совокупности однозначно определяют любое положение этой системы, допускаемое наложенными в какой-то момент времени на систему связями.

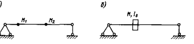



Рис. 3.17.

Числом степеней свободы механической системы называется число независимых скалярных параметров, однозначно определяющих ее любое возможное или любое виртуальное перемещение. У голономных систем (а в строительной механике рассматриваются почти исключительно голономные системы) число степеней свободы совпадает с числом обобщенных координат.

Кроме этих обычных формулировок, в динамику сооружений целесообразно ввести еще два понятия. Назовем динамическими обобщенными координатами системы любые независимые скалярные параметры, которые в своей совокупности однозначно определяют возможные положения точек, масса которых принимается во внимание. Число динамических обобщенных координат будем называть числом динамических степеней свободы системы (предполагается, что система голономна). Например, конструкции, показанные на рис. 3.17, имеют бесконечное число степеней свободы, но динамических только две. Динамическими обобщенными координатами являются: для системы, представленной на рис. 3.17, *а*, вертикальные смещения масс $M_1$ и $M_2$; для системы, изображенной на рис. 3.17, *б*, — вертикальное смещение и угол поворота сосредоточенной массы, обладающей моментом инерции $I_в$.

В большинстве курсов динамики число динамических степеней свободы обычно смешивают с их общим числом. Согласно традиции, рассматриваемые системы называются системами с двумя степенями свободы, т. е. при решении динамических задач мы в неявном виде пользуемся своим умением точно выполнять статические расчеты конструкций и как бы исключаем бесконечно много координат. На долю динамики остаются только две координаты, но остальные (статические) степени свободы, конечно, не исчезают.

Предлагаемые формулировки с четким выделением динамических степеней свободы могут показаться ненужным пуризмом. Од-



нако это не так, поскольку обычная терминология динамики сооружений отражает неточность физических представлений, что приводит иногда к недоразумениям и даже ошибкам. Последние особенно часты при использовании метода главных координат.

2. Физическая сущность метода главных координат и некоторые особые случаи его использования. Чтобы не быть голословными, проанализируем физическую сущность указанного метода на примере только

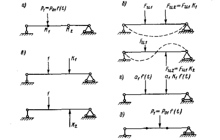



Рис. 3.18.

что рассмотренной системы (см. рис. 3.17, *а*). Этот, казалось бы, элементарный анализ приведет нас к довольно интересным выводам и следствиям.

Пусть к массе $M_1$ (рис. 3.18, *а*) приложена сила $P_1 = P_{01} f(t)$. Существуют главные свободные колебания этой системы, формы которых определяются числами $n_1$ и $n_2$, равными постоянному отношению прогибов $v_1$ и $v_2$ в точках закрепления масс. Изгиб по форме главных свободных колебаний происходит под действием сил инерции $F_{и1}$ и $F_{и2}$, между которыми существует постоянное соотношение $F_{и2} = F_{и1}K_1$ или $F_{и2} = F_{и1}K_2$ (рис. 3.18, *б*). Деформации каждой из форм происходят независимо друг от друга.

Представим себе, что можно разложить заданную внешнюю нагрузку по формам сил инерции главных свободных колебаний. В рассматриваемом случае нужно представить $P_{01}$ как сумму

$$P_{01} = a_1(1,\ K_1) + a_2(1,\ K_2), \qquad (3.24)$$

где $a_1$ и $a_2$ — неизвестные коэффициенты разложения; $(1, K_1)$ и $(1, K_2)$ — группы сил (рис. 3.18, *в*).

Для $a_1$ и $a_2$ имеем

$$a_1 + a_2 = P_{01},$$

$$a_1 K_1 + a_2 K_2 = 0, \tag{3.25}$$

откуда

$$a_1 = \frac{K_2 P_{01}}{K_2 - K_1}, \quad a_2 = \frac{K_1 P_{01}}{K_2 - K_1}. \tag{3.26}$$

Под действием группы сил $a_1\,(1, K_1)$ система (рис. 3.18, *г*) все время будет двигаться по форме первого главного свободного колебания. Тогда отношение сил инерции будет равно $K_i$. Внешние силы, согласно принятому разложению, относятся как $K_1$; следовательно, суммарные силы, действующие на балку, тоже относятся как $K_1$. Таким образом, балка действительно изгибается по форме свободных колебаний.

Приведенное рассуждение может показаться порочным кругом, но оно вполне строго и по логической структуре напоминает типичный прием решения дифференциальных уравнений: мы полагаем решение в определенном виде, затем подставляем его в дифференциальное уравнение и убеждаемся, что последнее выполняется.

Аналогичным способом легко доказать, что группа сил $a_2\,(1, K_2)$ вызывает движение по форме второго тона. Но любая система, движущаяся по определенной заранее известной форме, может рассматриваться как имеющая одну степень свободы. Иными словами, мы представили движение системы с двумя динамическими степенями свободы как сумму движений двух систем, каждая из которых имеет одну степень свободы.

Расчет вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы производится по общим правилам: выбирают обобщенную координату, составляют выражения для кинетической и потенциальной энергий системы через обобщенную координату, составляют уравнение Лагранжа второго рода и решают его.

При движении балки по первому тону и обобщенной координате $v_1$ кинетическая энергия $T$ будет

$$T = \frac{M_1 \dot v_1^2}{2} + \frac{M_2 \dot v_2^2}{2} = \frac{M_1 \dot v_1^2}{2} + \frac{M_2 \dot v_1^2}{2n_1^2} = \frac{a \dot v_1^2}{2},$$

$$a = \left(M_1 + \frac{M_2}{n_1^2}\right), \quad n_1 = \frac{v_1}{v_2}.$$

Потенциальная энергия может быть выражена через некоторые статические силы $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$, приложенные в точке закрепления масс и вызывающие прогиб по первой форме,

$$E_p = \frac{1}{2} v_1 Q^{(1)} + \frac{1}{2} v_2 Q^{(2)} = \frac{1}{2} v_1 Q^{(1)} + \frac{1}{2} \frac{v_1}{n_1} K_1 Q^{(1)}.$$



С другой стороны,

$$v_1 = Q^{(1)} A_{11} + K_1 Q^{(1)} A_{12} = Q^{(1)} (A_{11} + K_1 A_{12})$$

или

$$Q^{(1)} = \frac{v_1}{A_{11} + K_1 A_{12}} = v_1 b_1,$$

где $A_{ij}$ — коэффициенты податливости безынерционной балки под действием сосредоточенных сил.

Следовательно,

$$E_p = \frac{1}{2} K v_1^2, \; K = b_1 + \frac{K_1 b_1}{n_1}.$$

Обобщенная сила, соответствующая первой форме,

$$Q_1 = a_1 + \frac{a_1 K_1}{n_1} = \left[\frac{K_2}{K_2 - K_1} + \frac{K_1 K_2}{n_1 (K_2 - K_1)}\right] P_1(t).$$

Заметив, что $K_1 = \frac{M_2}{M_1 n_1}$, $K_2 = \frac{M_2}{M_1 n_2}$, и раскрыв значения $n_1$ и $n_2$, получим $Q_1 = P_1(t)$.

Таким образом, уравнение Лагранжа

$$a \ddot v_1 + K v_1 = P_1(t). \tag{3.27}$$

Проделав аналогичные преобразования для движения по второй форме, получим

$$a = \left(M_1 + \frac{M_2}{n_2^2}\right), \quad K = \left(b_2 + \frac{K_2 b_2}{n_2}\right),$$

$$b_2 = \frac{1}{A_{11} + K_2 A_{12}}, \quad Q_2 = P_1(t).$$

Подчеркнем, что при использовании метода главных координат важно установить саму возможность разложения нагрузки по формам сил инерции главных свободных колебаний. Однако фактически в таком разложении нет необходимости: составляя уравнение Лагранжа для движения по любой форме главного свободного колебания, можно находить обобщенную силу от всей внешней нагрузки. Именно поэтому в рассмотренном примере обобщенная сила для обоих уравнений оказалась равной $P_1(t)$. Главные свободные колебания, определяемые силами инерции, независимы друг от друга (независимость видна из анализа исходных уравнений вместе с решениями). Но это физически возможно лишь в том случае, когда силы инерции одного главного колебания (или любые пропорциональные силы) не производят работы на перемещениях, соответствующих другому главному колебанию. В противном случае указанные силы инерции давали бы добавочную обобщенную силу, соответствующую движению по второй форме, и влияли бы на него (известное условие ортогональности). Следовательно, при составлении работы внешней нагрузки на перемещениях, соответствующих любому главному свободному колебанию, мы автоматически исключаем работу тех ее составляющих, которые соответствуют силам инерции других тонов.

Если внешняя нагрузка не раскладывается по силам инерции, то описанная формальная процедура приводит к ошибке.

Допустим (рис. 3.18, *д*), что сила $P_1(t)$ приложена к точке с координатой $x = x_0$, где нет массы. Ясно, что здесь нельзя представить $P_1(t)$ в виде какой-то комбинации сил, приложенных в точках закрепления $M_1$ и $M_2$. Но с формальной стороны как будто бы все в порядке. Составляя уравнения Лагранжа для главных свободных колебаний, мы получим зависимости типа (3.27) с теми же коэффициентами $a$ и $K$; обобщенная сила окажется равной $Q_1 = P_1\xi_1$ и $Q_2 = P_1\xi_2$, где $\xi_1$ и $\xi_2$ — отношения прогиба в точке $x_0$ к прогибу точки закрепления $M_1$ при первой и второй формах. К сожалению, рассчитанное движение не совпадает с действительным. Это видно хотя бы из того, что в точке $x_0$ непременно должен быть скачок перерезывающей силы на величину $P_1$, но ни в одной из форм главных свободных колебаний, а следовательно и в их сумме, такого скачка нет.

Причина отмеченного явления очевидна: две динамические степени свободы не могут описать всего многообразия возможных движений системы, имеющей в действительности бесконечно много степеней свободы. Кстати, и сама система (см. рис. 3.18, *а* или 3.18, *д*) имеет не две, а бесконечно много форм главных свободных колебаний; частоты всех «дополнительных» форм равны бесконечности — их потенциальная энергия выражается только через квадраты обобщенных координат, а кинетическая энергия равна нулю. Дополнительные формы соответствуют статическим деформациям системы, не связанным с силами инерции масс $M_1$ и $M_2$ (обе массы неподвижны). Если составить полную совокупность уравнений Лагранжа с учетом дополнительных форм, то решение методом главных координат будет точным. Ясно, что дополнительные уравнения должны отличаться от основных — в них отсутствует член, пропорциональный ускорениям, т. е. все коэффициенты $a$ равны нулю.

Поскольку дополнительные формы главных свободных колебаний не затрагивают движений масс $M_1$ и $M_2$, указанные движения будут найдены правильно и при рассмотренном выше формальном расчете, не учитывающем статических добавок и неразложимости силы $P_1(t)$, приложенной между массами, по формам сил инерции. Ошибка обнаруживается только при расчете изгиба балки.

Для аккуратного расчета системы (см. рис. 3.18, *д*) можно использовать искусственный прием. Если мысленно поставить балку в точках закрепления масс $M_1$ и $M_2$ на жесткие опоры, то балка под действием силы $P_1(t)$ будет деформироваться статически, а на опорах возникнут реакции, закон изменения во времени которых будет одинаков с законом изменения $P_1(t)$. Но в действительности



опор нет. Следовательно, необходимо убрать опоры, приложить в соответствующих точках реакции этих опор с обратным знаком, разложить их по формам сил инерции и найти динамический прогиб балки.

Можно поступить иначе. Пусть массы $M_1$ и $M_2$ равны нулю. Тогда сила $P_1(t) = f(t)\,P_{01}$ будет изгибать балку согласно зависимости $w(x, t) = P_{10}\,f(t)\,\varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — форма статического изгиба балки под действием единичной силы, приложенной в точке $x_0$. Таким же образом будет деформироваться конструкция при наличии масс, если компенсировать силы инерции добавочными

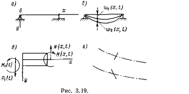



Рис. 3.19.

фиктивными силами в точках закрепления $x_1$ и $x_2$ масс $M_1$ и $M_2$. Значения фиктивных сил будут $M_1P_{01}\varphi(x_1)\ddot{f}(t)$ и $M_2P_{01}\varphi(x_2)\ddot{f}(t)$. Но на самом деле фиктивных сил нет. Следовательно, помимо движения $w(x, t) = P_{01}\varphi(x)\,f(t)$, нужно рассмотреть движение под действием обратных фиктивных сил (со знаком минус), приложенных к массам $M_1$ и $M_2$. Но это уже задача, решаемая методом главных координат.

Если $\dot{f}(0) \neq 0$, то, кроме фиктивных сил, в момент $t = 0$ должны прикладываться мгновенные фиктивные импульсы, которые сообщают точкам $x_1$ и $x_2$ начальные скорости $P_{01}\,\varphi(x_i)\,\dot{f}(0)$.

Несколько сложнее случай мгновенного приложения сил конечной величины, т. е. $f(0) \neq 0$, когда массы должны мгновенно получить конечные перемещения. Его удобнее всего исследовать с привлечением аппарата обобщенных функций. Однако здесь мы не будем заниматься этим (учтем, что способ постановки фиктивных жестких опор остается в силе). Учет статических прогибов в обоих приемах означает, что мы приняли во внимание все степени свободы конструкции, а не только динамические.

В качестве поучительного примера исследуем свободные колебания с учетом сдвига шарнирно-опертой призматической балки постоянной жесткости $EI$ с погонной массой $m_0$ (рис. 3.19, *а*). Обозначим: $w_1(x, t)$ — прогиб от изгиба; $w_2(x, t)$ — прогиб от сдвига; $G$ — модуль сдвига; $\Omega$ — эффективная площадь поперечного сечения; $N$ — *перерезывающая сила.*

Тогда, добавив силы инерции в обычные уравнения статических деформаций, получим

$$
\begin{aligned}
&EI\frac{\partial^4 w_1}{\partial x_4}+m_0\frac{\partial^2(w_1+w_2)}{\partial t^2}=0;\\
&G\Omega\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}-m_0\frac{\partial^2(w_1+w_2)}{\partial t^2}=0.
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

Граничные условия имеют вид: при $x=0$

$$
w_1=0;\quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}=0;\quad w_2=0; \tag{3.29}
$$

при $x=l$

$$
w_1=0;\quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}=0;\quad w_2=0. \tag{3.29a}
$$

Решение будем искать в виде

$$
\begin{aligned}
&w_1=w_{01}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin(\lambda_n t+\theta_n);\\
&w_2=w_{02}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin(\lambda_n t+\theta_n).
\end{aligned}
\tag{3.30}
$$

После подстановки (3.30) в (3.28) имеем

$$
\begin{aligned}
&EI\frac{n^4\pi^4}{l^4}w_{01}-m_0\lambda_n^2(w_{01}+w_{02})=0;\\
&-G\Omega\frac{n^2\pi^2}{l^2}w_{02}+m_0\lambda_n^2(w_{01}+w_{02})=0.
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

Отсюда

$$
\frac{w_{02}}{w_{01}}=\frac{EI}{G\Omega}\frac{n^2\pi^2}{l^2}=\gamma_n;
$$

$$
\lambda_n=\frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m_0(1+\gamma_n)}}. \tag{3.32}
$$

Деформации сдвига увеличили податливость конструкции и потому снизили ее собственные частоты.

Перейдем к разложению произвольного свободного колебания на главные свободные колебания. Представим, что балке дали первоначальный прогиб $w(x,0)$ за счет статической поперечной нагрузки, а затем внезапно сняли нагрузку; начальные скорости равны нулю. Тогда указанные свободные колебания можно разложить на сумму главных свободных колебаний $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{0,k}\sin\frac{k\pi x}{l}\cos\lambda_k t$, где $\lambda_k$ определяется по формуле (3.32). Первоначальный прогиб



$a_{0,k}\sin\frac{k\pi x}{l}$ обусловлен соответствующей составляющей нагрузки; он складывается из прогибов от изгиба и сдвига, отношение которых равно $\gamma_k$.

Пусть теперь первоначальный прогиб $w(x,0)$ создан только за счет изгиба от статических уравновешенных в своей совокупности внешних моментов, когда реакции и перерезывающие силы по всей длине конструкции равны нулю. Это вполне осуществимо, так как, зная прогиб $w(x,0)$, мы всегда можем построить нужную эпюру *изгибающих моментов*

$$
M(x)=EI\frac{\partial^2 w(x,0)}{\partial x^2},
$$

прикладывая к балке внешние сосредоточенные и распределенные моменты.

После внезапного удаления внешних моментов начальные скорости по-прежнему будут равны нулю и прогиб снова может быть разложен по тем же синусоидальным формам. Однако свободные колебания уже нельзя разложить на главные свободные колебания с частотами $\lambda_k$ [согласно (3.32)]. Теперь первоначальная деформация по форме $a_{0,k}\sin\frac{k\pi x}{l}$ обусловлена не только изгибом; сдвиговый прогиб отсутствует, поэтому уже в момент $t=0$ на каждую элементарную массу действуют другие, нежели в первом случае, силы упругости.

Здесь дело снова в различии между общим числом степеней свободы системы и числом ее динамических степеней. Силы инерции зависят от суммарного прогиба балки, поэтому каждая материальная точка в своем вертикальном перемещении имеет одну динамическую степень свободы. В то же время возможные перемещения конструкции, которые включают и все возможные деформации, определяются перемещением точки как за счет изгиба, так и за счет сдвига.

Чтобы рассчитать свободные колебания в приведенном нетривиальном случае, нужно снова воспользоваться искусственным приемом. *Приложим фиктивную динамическую нагрузку, которая* не давала бы изгибающих моментов, но полностью компенсировала бы перерезывающие силы, возникающие при главных свободных колебаниях. Она может быть сконструирована как комбинация поперечной нагрузки и внешних моментов; поперечная нагрузка дает изгибающие моменты и перерезывающие силы, внешние моменты компенсируют изгибающие моменты от поперечной нагрузки. Тогда движение будет происходить по формам главных свободных колебаний без учета сдвига с частотами $\lambda_n^{(1)}=(n^2\pi^2/l^2)\sqrt{EI/m_0}$.

Для компенсации действия фиктивной нагрузки следует рассчитать вынужденные колебания балки с частотами $\lambda_n^1$ под действием одних перерезывающих сил:

$$
N_n=-a_{0,n}(\lambda_n^{(1)})^2\left(\frac{n\pi}{l}\right)^3 EI\cos\frac{n\pi x}{l}\cos\lambda_n^{(1)}t.
$$

Эти перерезывающие силы вызовут только сдвиговые колебания, которые наложатся на свободные изгибные колебания; сумма колебаний даст действительные свободные колебания балки.

Пусть формы и частоты свободных колебаний балки (см. рис. 3.19, *а*, *б*) определены с учетом сдвига, а в состав внешней динамической нагрузки входят распределенные по длине моменты. Легко видеть, что наличие внешних распределенных моментов нарушает известное соотношение: производная от изгибающего момента равна перерезывающей силе (соотношение верно только для поперечной нагрузки и сосредоточенных моментов). В то же время изгибающие и перерезывающие силы от действия поперечных сил инерции строго следуют указанному соотношению. Следовательно, сделав идентичными формы эпюр изгибающих моментов от внешней нагрузки и сил инерции, мы не можем сделать идентичными эпюры перерезывающих сил.

Иными словами, нагрузка не может быть точно разложена в ряд по формам сил инерции, поэтому метод главных координат в его обычной форме не даст точного решения. Исправить положение могут только искусственные приемы.

Допустим, что к балке прикладывается фиктивная нагрузка, которая компенсирует все перерезывающие силы от внешней нагрузки и сил инерции. Тогда балка деформируется по формам свободных колебаний без учета сдвига и, следовательно, метод главных координат полностью пригоден. Рассчитав такое движение, мы находим перерезывающие силы, искусственно компенсируемые на первом этапе расчета, затем рассчитываем систему только на действие перерезывающих сил, для чего определяем частоты и формы чисто сдвиговых колебаний; алгоритм метода главных координат опять правомерен.

Идея этого приема идентична идее постановки жестких опор при расчете рассмотренной выше системы с двумя степенями свободы.

Можно действовать иначе. Пусть нагрузка равна $P(x)\,f(t)$, а $m_0 = 0$. Тогда балка изогнется согласно зависимости $\varphi(x)\,f(t)$, где $\varphi(x)$ — форма статического прогиба от действия нагрузки $P(x)$. Такой же изгиб будет при $m_0 \neq 0$, но для этого следует приложить дополнительно фиктивную нагрузку $m_0\varphi(x)\,\ddot{f}(t)$, которая компенсирует силы инерции. Поскольку фиктивной нагрузки на самом деле нет, к движению $\varphi(x)\,f(t)$ следует добавить движение под нагрузкой $-m_0\varphi(x)\,\ddot{f}(t)$. Последняя всегда раскладывается по формам сил инерции главных свободных колебаний.

Если $\dot{f}(0) \neq 0$, то при изгибе, согласно зависимости $\varphi(x)\,f(t)$, балка должна мгновенно получить некоторую скорость. Чтобы создать ее в инерционной конструкции, требуется в момент $t = 0$ приложить дополнительный импульс, обусловливающий свободные колебания с начальными скоростями $\varphi(x)\,\dot{f}(t)$. Разложение этого свободного колебания по формам главных свободных колебаний производится согласно общим правилам. Как и ранее, мы не рассматриваем более сложного случая мгновенного приложения сил конечной величины (где вполне применим первый прием).



Изложенный способ — аналог второго приема расчета системы с двумя динамическими степенями свободы.

Рассмотрим дополнительно влияние инерции вращения сечений на свободные и вынужденные колебания стержней.

Пусть имеется произвольный участок стержня (рис. 3.19, *в*); $M_1(t)$ и $M_2(t)$ — усилия на левом краю участка. Уравнения равновесия участка

$$P_1(t) - \int_0^x m_0 \frac{\partial^2 (w_1 + w_2)}{\partial t^2}\,dx = N(x,\ t);$$

$$M_1(t) - \int_0^x\!\!\int_0^x m_0 \frac{\partial^2 (w_1 + w_2)}{\partial t^2}\,dx^2 +$$

$$+ \int_0^x m_0\rho^2 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x \partial t^2}\,dx + \int_0^x P_1(t)\,dx = M(x,\ t),$$

где $\rho$ — радиус инерции погонной массы.

Подстановка сюда известных соотношений

$$M(x,\ t) = EI\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2};\quad N(x,\ t) = -G\Omega\frac{\partial w_2}{\partial x}$$

и последующее дифференцирование дают

$$EI\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + m_0\frac{\partial^2 (w_1 + w_2)}{\partial t^2} - m_0\rho\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial t^2} = 0;$$

$$G\Omega\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - m_0\frac{\partial^2 (w_1 + w_2)}{\partial t^2} = 0. \tag{3.33}$$

Для дальнейшего анализа удобно ввести новые переменные: полный прогиб $w = w_1 + w_2$ и угол поворота сечения $\vartheta = \partial w_1/\partial x$. Тогда система (3.33) сводится к виду

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} - \frac{m_0\rho^2}{EI}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2} = -\frac{G\Omega}{EI}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \vartheta\right);\\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{m_0}{G\Omega}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial\vartheta}{\partial x}.\end{gathered} \tag{3.34}$$

Если балка шарнирно оперта на две опоры, то удобно искать решение в виде

$$\begin{gathered} w = a_0 \sin\frac{n\pi x}{l}\sin(\lambda t + \theta);\\ \vartheta = b_0\cos\frac{n\pi x}{l}\sin(\lambda t + \theta).\end{gathered} \tag{3.35}$$

Подстановка (3.35) в (3.34) приводит к уравнениям

$$a_0\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\lambda^2\frac{m_0}{G\Omega}\right)+b_0\frac{n\pi}{l}=0;$$
$$a_0\frac{n\pi}{l}\frac{G\Omega}{EI}+b_0\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\lambda^2\frac{m_0\rho^2}{EI}-\frac{G\Omega}{EI}\right)=0. \qquad (3.36)$$

Приравняв нулю определитель системы (3.36), имеем

$$\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^4-\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2\frac{n^2\beta^2}{\pi^2}\left(1+\gamma^2+\frac{\gamma^2\beta^2}{n^2\pi^2}\right)+\frac{\gamma^2n^2\beta^2}{\pi^2}=0, \qquad (3.37)$$

где $\lambda_0=(\pi^2/l^2)\sqrt{EI/m_0}$ — частота первого тона, вычисленная без учета сдвига и инерции вращения сечений; $\beta=l/\sqrt{I/\Omega}$ — гибкость; $\gamma^2=G/E$.

Отсюда получаем два значения $\lambda_n^{(1)}$ и $\lambda_n^{(2)}$ для каждого числа полуволн $n$:

$$\lambda_n^{(1)}=\lambda_0\frac{n\beta}{\pi}\sqrt{\frac{1}{2}\left[1+\gamma^2+\frac{\gamma^2\beta^2}{n^2\pi^2}-\sqrt{\left(1+\gamma^2+\frac{\gamma^2\beta^2}{n^2\pi^2}\right)^2-4\gamma^2}\right]};$$
$$(3.38)$$
$$\lambda_n^{(2)}=\lambda_0\frac{n\beta}{\pi}\sqrt{\frac{1}{2}\left[1+\gamma^2+\frac{\gamma^2\beta^2}{n^2\pi^2}+\sqrt{\left(1+\gamma^2+\frac{\gamma^2\beta^2}{n^2\pi^2}\right)^2-4\gamma^2}\right]}.$$

Первая из этих частот отвечает форме колебания, при которой поперечные сечения поворачиваются в ту же сторону, что и касательные к линии суммарных прогибов $w(x)$. Вторая, более высокая, частота соответствует форме, при которой поперечные сечения и касательные к линии $w(x)$ поворачиваются в противоположные стороны (рис. 3.19, *г*).

Весьма интересное, на первый взгляд, раздваивание спектра частот вполне понятно. В рассматриваемом случае каждой координате $x$ соответствуют два параметра, полностью характеризующие положение сечения с данной координатой.

Уравнивание числа обобщенных координат и динамических обобщенных координат приводит к принципиально важному результату: мы получаем возможность разложить по главным свободным колебаниям любое свободное колебание системы, а также уверенно использовать обычный вариант метода главных координат.

Убедимся сначала в справедливости первого утверждения. Всякий суммарный начальный прогиб может быть разложен по формам $a_{0,k}\sin\frac{k\pi x}{l}$ (кроме, может быть, концов стержня), причем каждая форма имеет произвольные составляющие от изгиба и сдвига, суммарная амплитуда которых равна $a_{0,k}$. Одновременно для каждого $k$ имеются две формы свободных колебаний, у которых суммарное



перемещение подчиняется закону $a_{0,k}\sin\frac{k\pi x}{l}$, но существуют два различных соотношения между прогибами от изгиба и сдвига. Это всегда позволяет разложить любую начальную форму $a_{0,k}\sin\frac{k\pi x}{l}$ по указанным двум формам свободных колебаний.

С другой стороны, произвольный начальный прогиб отвечает произвольной внешней нагрузке (не имеющей особенностей на концах), а формы главных свободных колебаний — соответствующим силам инерции. Отсюда ясно, что возможность разложения прогибов равносильна возможности разложения внешней нагрузки.

Проанализированные конкретные примеры наталкивают на естественные обобщения. Становится ясным, что при постановке различных задач важно проверять соответствие числа обобщенных координат и динамических обобщенных координат. Если

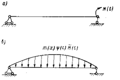



Рис. 3.20.

этого соответствия нет, то при изучении свободных колебаний, а также при использовании метода главных координат полезно применять искусственные приемы указанных выше типов.

Они могут быть полезными и в некоторых других случаях.

Пусть шарнирно-опертый стержень (рис. 3.20, *а*) находится под действием произвольного опорного момента $M(t)$ в сечении $x=l$. Инерция вращения сечений и сдвиги не учитываются.

Динамические деформации нетрудно разложить в сходящийся ряд по формам главных свободных колебаний $a_{0,k}\sin\frac{k\pi x}{l}$. Однако тогда нарушится сходимость по моментам для конца стержня $x=l$ (явление Гиббса в теории рядов Фурье): вторая производная от каждого члена ряда для $x=l$ равна нулю, поэтому никакая сумма членов не может аппроксимировать в этой точке сосредоточенного момента.

Выход можно найти, если рассмотреть движение безынерционного стержня, а затем накладывать на него движения под действием сил инерции и мгновенных импульсов, как это неоднократно делалось выше (рис. 3.20, *б*). «Плавные» силы инерции и «плавный» импульс легко и точно раскладываются в ряд по свободным колебаниям.

Вообще, прием выделения движений по формам статических прогибов часто дает большой эффект и увеличивает сходимость рядов, так как инерционные нагрузки при движении по статической форме обычно гораздо плавнее внешних нагрузок и их проще раскладывать в ряды. Правда, иногда $\bar{f}(t)$ гораздо быстрее изменяется во времени, чем $\bar{f}(t)$, вследствие чего силы инерции статического прогиба могут оказаться динамичнее основной нагрузки. Это может уменьшить или даже ликвидировать выигрыш от более равномерного распределения сил.

3. Некоторые сложности, возникающие при использовании метода главных координат для расчета судовых конструкций. Применение метода главных координат в расчетах установившихся динамических деформаций корпусных конструкций явно нецелесообразно, поскольку квазистатическая аналогия позволяет прямо

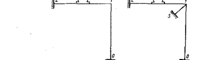


Рис. 3.21.

сводить их к статическим задачам, решаемым хорошо известными и удобными методами. Здесь метод главных координат используется лишь косвенно путем сравнения частот главных свободных колебаний с частотами возмущающих сил с целью избежания резонансов.

Однако определенный формальным образом спектр собственных частот содержит нередко избыточную информацию, поскольку далеко не все резонансы представляют практическую опасность. Особенно это касается достаточно сложных конструкций, например рам.

*Для иллюстрации* рассмотрим конкретный пример практического характера.[1]

Требуется проверить возможность установки механизма, дающего вертикальную возмущающую силу с частотой $N = 3{,}5$ 1/с, на фундаментную раму (рис. 3.21, *а*) со следующими параметрами:

| Стержень, $ij$ | $l_{ij}$, м | $m_{ij}\cdot 10^2$, т·с²/м² | $I_{ij}\cdot 10^7$, м⁴ | $(EI)_{ij}\cdot 10^{-7}$, т/м² |
|---|---|---|---|---|
| 01 | 4,6 | 2,8 | 6 | 2,1 |
| 12 | 4,6 | 2,8 | 6 | 2,1 |

[1] Пример предложен и рассчитан В. И. Поляковым.



Здесь $ij$ — начало и конец стержня (узлы 0—3); $l_{ij}$ — его длина; $m_{ij}$ — погонная масса; $I_{ij}$ — момент инерции площади поперечного сечения; $E_{ij}$ — модуль упругости.

Принято, что нормальная эксплуатация механизма будет обеспечена, *если*

$$\lambda_1 \geqslant 1{,}5 N_{\max}, \tag{3.39}$$

где $\lambda_1$ — основная частота фундаментной рамы, $N_{\max}$ — максимальное значение частоты возмущающей силы.

*Последовательность операций этого* проверочного расчета, казалось бы, очевидна: составляется частотное уравнение рамы, вычисляется основная частота, проверяется выполнение условия (3.39).

Частотное уравнение для такой рамы известно в литературе и имеет вид

$$D = \frac{E_{10} I_{10}}{l_{10}} a_{10} + \frac{E_{12} I_{12}}{l_{12}} a_{12} = 0, \tag{3.40}$$

где

$$a_{ij} = \frac{u_{ij} l_{ij} (\sin u_{ij} l_{ij} \operatorname{ch} u_{ij} l_{ij} - \cos u_{ij} l_{ij} \operatorname{sh} u_{ij} l_{ij})}{1 - \cos u_{ij} l_{ij} \operatorname{ch} u_{ij} l_{ij}},$$

$$u_{ij} = \sqrt[4]{\frac{m_{ij}}{E_{ij} I_{ij}} \lambda^2}.$$

Графическое решение этого уравнения (рис. 3.22, *а*) дало значение основной частоты $\lambda_1 = 15{,}5$ 1/с. Условие (3.39) оказывается выполненным, т. е. установка механизма на данную фундаментную раму вполне допустима.

Добавим к рассмотренной конструкции еще один стержень *1—3* (см. рис. 3.21, *б*). Его параметры следующие: $l = 1{,}1$ м, $m = 1\cdot 10^{-2}$ т·с²/м², $I = 0{,}5\cdot 10^{-9}$ м⁴, $E = 0{,}9\cdot 10^6$ т/м².

Частотное уравнение для этой рамы принимает вид

$$\frac{E_{10} I_{10}}{l_{10}} a_{10} + \frac{E_{12} I_{12}}{l_{12}} a_{12} + \frac{E_{13} I_{13}}{l_{13}} a_{13} = 0. \tag{3.41}$$

Графическое решение уравнения (3.41) (рис. 3.22, *б*) дало значение основной собственной частоты $\lambda_1 = 3{,}9$ 1/с. Условие (3.39) не выполнено. В то же время с физической точки зрения ясно, что *добавление к раме стержня 1—3* $(E_{1-3} I_{1-3} = 0{,}4\cdot 10^{-4} E_{1-2} I_{1-2})$ не может существенно сказаться на динамических характеристиках стержня *1—2* в районе установки механизма. Следовательно, применительно к сложным стержневым системам условие (3.39), оставаясь достаточным, перестает быть необходимым [отметим, что *в судостроении* проверочные расчеты частот строятся именно на условии типа (3.39)].

Это означает, что в расчетах, выполняемых при конкретном проектировании, следует или отказаться от критерия необходимо-

9*

сти и ограничиться проверкой по достаточности, или производить дифференциацию собственных частот, т. е. отсеивать избыточную информацию и оставлять лишь те частоты, резонансы которых *могут активно проявиться в рассматриваемом районе системы*. Но отказ от критерия необходимости практически невозможен, поэтому остается путь дифференциации, которую удобнее всего проводить путем перехода от расчета спектра частот свободных коле-

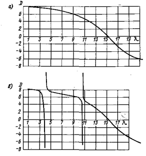


Рис. 3.22.

баний к непосредственному расчету вынужденных колебаний при разных частотах и построению зависимостей между частотами возмущающих сил и амплитудами вибрации в характерных точках конструкции. Резонансные пики на амплитудно-частотных кривых соответствуют опасным частотам свободных колебаний рассматриваемой системы. Все расчеты должны выполняться с учетом сил неупругого сопротивления (рассеивания энергии); при достоверном знании и линейности этих сил (что на практике встречается, к сожалению, не часто) мы получаем значения фактических амплитуд при любой частоте; при знании лишь порядка значения сил сопротивления или существенной их нелинейности (или того и другого вместе) расчет дает лишь фактические опасные зоны частот, на которые с необходимым запасом и надлежит ориентироваться. Если использовать метод парциальных откликов для расчета рам (см. рис. 3.21, *а*, *б*), то можно получить кривые амплитуд *а*, показанные соответственно на рис. 3.23, *а*, *б* (коэффициент сопротивления был принят равным 0,03). Как видно из последних рисунков, произошла автоматическая дифференциация спектров собственных частот рам и парадокс нашего примера *полностью разрешился*.

Рассмотрение физической сущности метода, проведенное в предыдущем пункте, показывает возможность обобщения метода главных координат на случай других линейных реактивных силовых полей первого типа.[1] Но в судостроении часто приходится иметь дело с конструкциями, которые соприкасаются с забортной водой или жидкостью внутри корпуса, т. е. находятся в реактивном силовом поле второго типа (реакции зависят от формы деформирования системы). Здесь метод главных координат, вообще говоря, не применим, поскольку формы колебаний оказываются связанными.

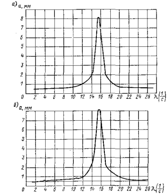


Рис. 3.23.

Рассмотрим общие колебания корпуса как непризматической балки. Интерпретируя реакции жидкости в виде присоединенной

[1] См. § 13, где показано, что реакция поля в данной точке не зависит от формы деформирования системы.

массы, видим, что каждый тон свободных колебаний имеет свою присоединенную массу. И, конечно, трудно предположить, что форма первого тона главных свободных колебаний балки с одним распределением масс будет ортогональна второй форме колебаний балки с другим распределением масс. В этом случае колебания любого $k$-го тона вызовут колебания остальных тонов. Говорить здесь о методе главных координат можно лишь весьма условно. Впрочем, явления резонансов с каким-либо из тонов свободных колебаний остаются в силе и в этом случае.

Иногда ортогональность тонов все же сохраняется. Например, для бесконечно длинной круговой цилиндрической оболочки характеры синусоидальные по периметру колебания. У каждого тона имеется своя присоединенная масса, однако изменения касаются лишь ее «интенсивности», но не закона распределения. В результате движение по каждому из тонов происходит раздельно.

### § 15. Комплексная форма уравнений теории колебаний. Линейные сопротивления

1. Сущность комплексной формы. В электротехнике и акустике, а за последнее время и в динамике сооружений все большее распространение получает весьма удобная комплексная форма уравнений колебательных процессов в линейных системах с линейными сопротивлениями. Имея в виду неоднократно использовать эту форму, изложим вкратце ее сущность, дополняя уже известные из литературы выводы новыми деталями и доказательствами.

Общеизвестны формулы

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t;$$

$$Ae^{i(\omega t+\theta)} = Ae^{i\theta}e^{i\omega t} = \overline{A}e^{i\omega t} = A\cos(\omega t+\theta) + iA\sin(\omega t+\theta);$$

$$\overline{A} = Ae^{i\theta} = a + ib; \quad A = \sqrt{a^2+b^2}; \quad \theta = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}. \tag{3.42}$$

Здесь и в дальнейшем буквы с чертой наверху обозначают комплексные числа.

Из формул (3.42) следует, что функцию $A\cos(\omega t+\theta)$ можно трактовать как вещественную часть выражения $\overline{A}e^{i\omega t} = Ae^{i\theta}e^{i\omega t}$, где $\overline{A}$ — комплексное число.

Поскольку оперировать с $\overline{A}e^{i\omega t}$ в общих буквенных зависимостях гораздо удобнее, чем с $A\cos(\omega t+\theta)$, возникает естественный вопрос: нельзя ли вместо всех $A_n\cos(\omega_n t+\theta_n)$, входящих в исходные уравнения какой-либо задачи теории колебаний, подставить $\overline{A}_n e^{i\omega t}$, затем получить решение уравнений, а в окончательном результате взять только вещественную часть. Это вполне возможно, если, удовлетворив исходные уравнения в комплексной



форме, мы одновременно удовлетворим их порознь для вещественных и мнимых частей содержащихся там величин.

Учитывая зависимости

$$(a+ib) \pm (c+id) = (a \pm c) + i(b \pm d);$$

$$a(c+id) = ac + iad;$$

$$\frac{\partial^m \overline{F}(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_j^p \partial x_k^{(m-p)}} =$$

$$= \frac{\partial^m [U(x_1, x_2, \ldots, x_n) + iV(x_1, x_2, \ldots, x_n)]}{\partial x_j^p \partial x_k^{(m-p)}} =$$

$$= \frac{\partial^m U}{\partial x_j^p \partial x_k^{(m-p)}} + i\frac{d^m V}{\partial x_j^p \partial x_k^{(m-p)}}, \tag{3.43}$$

легко усмотреть справедливость равенства

$$L[\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_q] = L[U_1+iV_1, U_2+iV_2, \ldots, U_q+iV_q] =$$
$$= L[U_1, U_2, \ldots, U_q] + iL[V_1, V_2, \ldots, V_q],$$

где $L$ — любой линейный дифференциально-алгебраический оператор с вещественными коэффициентами. Следовательно, указан-

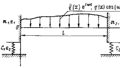



Рис. 3.24.

ный прием решения задач теории колебаний применим к любым задачам о гармонических колебаниях линейных механических систем, так как они описываются именно линейными операторами относительно функции $A_n\cos(\omega_n t+\theta_n)$.

Совершенно аналогично можно представить все выражения вида $A_n\sin(\omega_n t+\theta_n)$ как мнимую часть $\overline{A}_n e^{i\omega t}$. Заменяя в уравнениях теории колебаний все $A_n\sin(\omega_n t+\theta_n)$ через $\overline{A}_n e^{i\omega t}$, следует брать в окончательных результатах только мнимые части.

Особенно удобна комплексная форма уравнений для исследования колебаний линейных систем при наличии линейных сопротивлений.

Рассмотрим изгибные колебания однопролетной призматической балки, упруго заделанной и упруго опертой на концах (рис. 3.24). Силы внутреннего сопротивления пропорциональны первой степени скорости деформаций, а силы внешнего сопротивления — первой степени скорости перемещений.

Дифференциальное уравнение движения записывается в виде

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\varepsilon EI\frac{\partial^5 w}{\partial x^4\partial t}+m_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+$$
$$+\nu\frac{\partial w}{\partial t}-q(x)\cos(\omega t+\theta)=0, \qquad (3.44)$$

при граничных условиях: $x=0$

$$EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\varepsilon EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial t}=-\left(C_1 w+\varepsilon_2 C_1\frac{\partial w}{\partial t}\right);$$
$$EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\varepsilon EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}=\mathfrak{A}_1\frac{\partial w}{\partial x}+\varepsilon_1\mathfrak{A}_1\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}; \qquad (3.45)$$

$x=l$

$$EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\varepsilon EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial t}=C_2 w+\varepsilon_4 C_2\frac{\partial w}{\partial t};$$
$$EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\varepsilon EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}=-\left(\mathfrak{A}_2\frac{\partial w}{\partial x}+\varepsilon_3\mathfrak{A}_2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right), \qquad (3.45а)$$

где $EI$ — жесткость балки; $w=w(x,\ t)$ — динамический прогиб балки; $\varepsilon$ — коэффициент внутреннего сопротивления балки; $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_3$ — коэффициенты сопротивления упругих заделок; $\varepsilon_2$ и $\varepsilon_4$ — коэффициенты сопротивления упругих опор; $m_0$ — погонная масса балки; $\nu$ — коэффициент внешнего сопротивления балки; $C_1$ и $C_2$ — жесткость упругих опор; $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — коэффициенты жесткости упругих заделок.

Интегрируя уравнение (3.44) в вещественных переменных, необходимо искать установившиеся колебания как сумму

$$w(x,\ t)=F_1(x)\sin(\omega t+\theta)+F_2(x)\cos(\omega t+\theta), \qquad (3.46)$$

так как функция $w(x,\ t)=F_1(x)\sin(\omega t+\theta)$ или $w(x,\ t)=F_2(x)\cos(\omega t+\theta)$ не может дать искомого решения.[1] Выражение (3.46) после подстановки в (3.44) дает два уравнения четвертого порядка, решение которых представляет большие вычислительные трудности. Если перейти к комплексной форме, то уравнение (3.44) примет вид

$$EI\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial x^4}+\varepsilon EI\frac{\partial^5\overline{w}}{\partial x^4\partial t}+m_0\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial t^2}+\nu\frac{\partial\overline{w}}{\partial t}-\overline{q}(x)e^{i\omega t}=0 \qquad (3.47)$$

при $\overline{q}(x)=q(x)e^{i\theta}$.

[1] Это означает, что при наличии сопротивлений балка не имеет постоянной формы вынужденных установившихся колебаний.



Разыскивая $\overline{w}$ как $\overline{w}=\overline{\varphi}(x)e^{i\omega t}$, имеем

$$\varepsilon EI\frac{\partial^5\overline{w}}{\partial x^4\partial t}=i\omega\varepsilon EI\overline{\varphi}^{\mathrm{IV}}(x)e^{i\omega t}=i\omega\varepsilon EI\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial x^4};$$
$$\nu\frac{\partial\overline{w}}{\partial t}=i\nu\omega\overline{\varphi}(x)e^{i\omega t}=-i\frac{\nu}{\omega}\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial t^2},$$

откуда (3.44) можно представить в виде

$$\overline{E}I\frac{\partial^4\overline{w}}{\partial x^4}+\overline{m}_0\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial t^2}-\overline{q}(x)e^{i\omega t}=0;$$
$$\overline{E}=E(1+i\omega\varepsilon),\quad \overline{m}_0=m_0\left(1-i\frac{\nu}{\omega m_0}\right). \qquad (3.48)$$

Граничные условия (3.45) представляются выражениями: при $x=0$

$$\overline{E}I\frac{\partial^3\overline{w}}{\partial x^3}=-\overline{C}_1\overline{w};\quad \overline{E}I\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x^2}=\overline{\mathfrak{A}}_1\frac{\partial\overline{w}}{\partial x};$$
$$\overline{C}_1=C_1(1+i\omega\varepsilon_2);\quad \overline{\mathfrak{A}}_1=\mathfrak{A}_1(1+i\omega\varepsilon); \qquad (3.49)$$

при $x=l$

$$\overline{E}I\frac{\partial^3\overline{w}}{\partial x^3}=\overline{C}_2\overline{w};\quad \overline{E}I\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x^2}=-\mathfrak{A}_2\frac{\partial\overline{w}}{\partial x};$$
$$\overline{C}_2=C_2(1+i\omega\varepsilon_4);\quad \overline{\mathfrak{A}}_2=\mathfrak{A}_2(1+i\omega\varepsilon_3). \qquad (3.49а)$$

Уравнение (3.48) и его граничные условия (3.49) совпадают по своему виду с аналогичными уравнениями и условиями при отсутствии сопротивлений в конструкции. Формальные буквенные операции с комплексными величинами производятся по тем же правилам, что и с вещественными, поэтому решение задачи разделяется на два этапа: определение колебаний в случае отсутствия сопротивлений и подстановка в полученные зависимости комплексных значений жесткостей и масс с последующим разделением вещественной и мнимой частей результата. Использование комплексной формы решения позволяет чрезвычайно упростить все выкладки и отнести учет сопротивлений на второй этап.

Сделанные выводы об основных этапах расчета однопролетных балок при наличии сопротивлений, пропорциональных первой степени скоростей деформаций и перемещений, могут быть распространены на общий случай установившихся колебаний любой механической системы с такими сопротивлениями.

Пусть колебания системы определяются любыми линейными дифференциально-алгебраическими соотношениями (в частности, дифференциальными уравнениями и граничными условиями) между искомыми обобщенными координатами $y_1, y_2, \ldots, y_n$ и обобщенной внешней силой $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)\cos(\omega t+\theta)$, зависящей от неизменных во времени координат $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Координаты $y_1, y_2, \ldots, y_n$ являются не только функциями времени, но и любых других координат $z_1, z_2, \ldots, z_N$, не зависящих от времени. Силы внешних сопротивлений пока учитывать не будем.

Рассмотрим какое-либо из указанных соотношений, в которое входят силы упругости и силы внутреннего сопротивления. Первые будут выражаться некоторым линейным дифференциально-алгебраическим оператором $L_y\,[C_1y_1\,(t, z_1, \ldots, z_N), C_2y_2\,(t, z_1, \ldots, z_N), \ldots, C_ny_n\,(t, z_1, \ldots, z_N)]$, где $C_k$ — коэффициент жесткости, соответствующий $y_k$. Тогда вторые определятся аналогичным оператором $L_y\left(\varepsilon_1C_1\frac{\partial y_1}{\partial t}, \varepsilon_2C_2\frac{\partial y_2}{\partial t}, \ldots, \varepsilon_nC_n\frac{\partial y_n}{\partial t}\right)$, если через $\varepsilon_k$ обозначены коэффициенты внутреннего сопротивления. В другие члены соотношения, не содержащие сил упругости и сил сопротивления, коэффициенты $C_k$ и $\varepsilon_k$ не входят.

Представив обобщенную силу в комплексной форме $P\,(x_1, x_2, \ldots, x_m)\,e^{i\theta}e^{i\omega t}$, необходимо разыскивать колебания системы в виде $\overline{y}_k = \overline{A}_ke^{i\omega t}$. При этом сумма сил упругости и сил сопротивления выразится операторами

$$L_y\,(C_1\overline{A}_1e^{i\omega t},\; C_2\overline{A}_2e^{i\omega t}, \ldots, C_n\overline{A}_ne^{i\omega t}]+$$

$$+L_y\,[i\omega\varepsilon_1C_1\overline{A}_1e^{i\omega t},\; i\omega\varepsilon_2C_2\overline{A}_2e^{i\omega t}, \ldots, i\omega\varepsilon_nC_n\overline{A}_ne^{i\omega t}]=$$

$$=L_y\,[\overline{C}_1\overline{A}_1e^{i\omega t},\; \overline{C}_2\overline{A}_2e^{i\omega t}, \ldots, \overline{C}_n\overline{A}_ne^{i\omega t}]=$$

$$=L_y\,[\overline{C}_1\overline{y}_1,\; \overline{C}_2\overline{y}_2, \ldots, \overline{C}_n\overline{y}_n],$$

где $\overline{C}_k = C_k\,(1 + i\omega\varepsilon_k)$.

Следовательно, в конечном итоге рассматриваемое соотношение примет такую же аналитическую форму, какую оно имело бы при отсутствии внутренних сопротивлений.

Учет внешних сопротивлений, приложенных к распределенным $m_{0,j}$ и сосредоточенным $M_r$ массам системы, производится аналогичным образом. Пусть в рассматриваемое соотношение входит линейный оператор, выражающий силы инерции

$$L_n\Big[m_{01}\frac{\partial^2\xi_1}{\partial t^2},\; i_{01}\frac{\partial^2\chi_1}{\partial t^2},\; M_1\frac{\partial^2\eta_1}{\partial t^2},\; I_{01}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial t^2}, \ldots$$

$$\ldots, m_{0s}\frac{\partial^2\xi_s}{\partial t^2},\; i_{0s}\frac{\partial^2\chi_s}{\partial t^2},\; M_s\frac{\partial^2\eta_s}{\partial t^2}, \ldots$$

$$\ldots, M_q\frac{\partial^2\eta_q}{\partial t^2},\; I_{0q}\frac{\partial^2\psi_q}{\partial t^2}\Big],$$

где $\xi_j$ и $\eta_r$ — перемещения масс $m_{0j}$ и $M_r$; $i_{0j}$ и $I_{0r}$ — их моменты инерции; $\chi_j$ и $\psi_r$ — углы поворота масс.



Тогда силы внешних сопротивлений выразятся оператором

$$L_n\Big[\nu_1\frac{\partial\xi_1}{\partial t},\; \mu_1\frac{\partial\eta_1}{\partial t},\; \rho_1\frac{\partial\chi_1}{\partial t},\; \gamma_1\frac{\partial\psi_1}{\partial t}, \ldots$$

$$\ldots, \nu_s\frac{\partial\xi_s}{\partial t}, \ldots, \rho_s\frac{\partial\chi_s}{\partial t}, \ldots, \mu_q\frac{\partial\eta_q}{\partial t},\; \gamma_q\frac{\partial\psi_q}{\partial t}\Big],$$

где $\nu_j, \mu_r, \rho_j, \gamma_r$ — коэффициенты внешних сопротивлений.

При установившихся колебаниях сумма сил инерции и сил внешних сопротивлений равна

$$L_n\Big[\overline{m}_{01}\frac{\partial^2\overline{\xi}_1}{\partial t^2},\; \overline{i}_{01}\frac{\partial^2\overline{\chi}_1}{\partial t^2},\; \overline{M}_1\frac{\partial^2\overline{\eta}_1}{\partial t^2},\; \overline{I}_{01}\frac{\partial^2\overline{\psi}_1}{\partial t^2}, \ldots$$

$$\ldots, \overline{m}_{0s}\frac{\partial^2\overline{\xi}_s}{\partial t^2},\; \overline{i}_{0s}\frac{\partial^2\overline{\chi}_s}{\partial t^2}, \ldots, \overline{M}_q\frac{\partial^2\overline{\eta}_q}{\partial t^2},\; \overline{I}_{0q}\frac{\partial^2\overline{\psi}_q}{\partial t^2}\Big],$$

где

$$\overline{m}_{0j} = m_{0j}\left(1 - i\frac{\nu_j}{\omega m_{0j}}\right);\quad \overline{M}_r = M_r\left(1 - i\frac{\mu_r}{\omega M_r}\right);$$

$$\overline{i}_{0j} = i_{0j}\left(1 - i\frac{\rho_j}{\omega i_{0j}}\right);\quad \overline{I}_{0r} = I_{0r}\left(1 - i\frac{\gamma_r}{\omega I_{0r}}\right).$$

Иными словами, форма рассматриваемого выражения соответствует его форме при отсутствии сопротивлений.

При выполнении второго этапа расчета, т. е. разделении вещественной и мнимой частей результатов, нужно использовать формулы (3.42) и (3.43), а также элементарные зависимости типа

$$(a+ib)\,(c+id) = (ac-bd) + i\,(ad+bc);$$

$$[A_1\,(\cos\psi_1 + i\sin\psi_1)]\,[A_2\,(\cos\psi_2 + i\sin\psi_2)] =$$

$$= A_1A_2\,[\cos(\psi_1+\psi_2) + i\sin(\psi_1+\psi_2)];$$

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + i\,\frac{cb-ad}{c^2+d^2};$$

$$[A_1\,(\cos\psi_1 + i\sin\psi_1)] : [A_2\,(\cos\psi_2 + i\sin\psi_2)] =$$

$$= \frac{A_1}{A_2}\,[\cos(\psi_1-\psi_2) + i\sin(\psi_1-\psi_2)]; \qquad (3.50)$$

$$[A\,(\cos\psi + i\sin\psi)]^n = A^n\,[\cos n\psi + i\sin n\psi];$$

$$\sqrt[n]{A\,(\cos\psi + i\sin\psi)} = \sqrt[n]{A}\left(\cos\frac{\psi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\psi+2k\pi}{n}\right);$$

$$\sin i\psi = i\,\mathrm{sh}\,\psi;\quad \cos i\psi = \mathrm{ch}\,\psi;$$

$$\mathrm{sh}\,i\psi = i\sin\psi;\quad \mathrm{ch}\,i\psi = \cos\psi;$$

$$\sin(a \pm ib) = \sin a\,\mathrm{ch}\,b \pm i\cos a\,\mathrm{sh}\,b;$$

$$\cos(a \pm ib) = \cos a\,\mathrm{ch}\,b \pm i\sin a\,\mathrm{sh}\,b;$$

$$\mathrm{sh}\,(a \pm ib) = \mathrm{sh}\,a\cos b \pm i\,\mathrm{sh}\,a\sin b;$$

$$\mathrm{ch}\,(a \pm ib) = \mathrm{ch}\,a\cos b \pm i\,\mathrm{sh}\,a\sin b.$$

Примеры использования комплексной формы уравнений для решения конкретных задач неоднократно встретятся в дальнейшем.

Заметим, что первый этап расчета, т. е. построение решения без учета сопротивлений, можно выполнять, не заменяя тригонометрические функции показательными функциями от $e$. При отсутствии сопротивлений отсутствуют и сдвиги фаз между силами и перемещениями, поэтому, заменив $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)\cos\omega t$ через $P(x_1, x_2, \ldots, x_m)\, e^{i\omega t}$, мы можем искать все $\bar{y}_k$ в виде, $\bar{y}_k = A_k(z_1, z_2, \ldots, z_N)\, e^{i\omega t}$, где $A_k$ — вещественное число или вещественная функция. Вещественная часть $\bar{y}_k$ равна $y_k = A_k(z_1, z_2, \ldots, z_N)\cos\omega t$. Такой же результат мы получили бы, не заменяя выражения внешней силы и разыскивая $y_k$ согласно зависимости $y_k = A_k(z_1, z_2, \ldots, z_N)$ $\cos\omega t$.

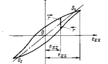



Рис. 3.25.

Следовательно, если имеется решение задачи без учета сопротивлений, найденное в вещественной форме $y_k = A_k(z_1, z_2, \ldots, z_N)\cos\omega t$, то достаточно учесть тот факт, что в комплексной форме оно имело бы вид $\bar{y}_k = A_k(z_1, z_2, \ldots, z_N)\, e^{i\omega t}$, затем подставить в $A_k$ комплексные жесткости и массы и отделить вещественную часть от мнимой.

2. **Гипотезы и зависимости для линейных сопротивлений.** Внутренние сопротивления, пропорциональные скорости деформаций (гипотеза Фохта), возникают тогда, когда зависимость между напряжениями и деформациями с учетом рассеяния энергии имеет вид

$$\sigma = Ee_{xx} + \varepsilon E \frac{\partial e_{xx}}{\partial x}, \tag{3.51}$$

где $e_{xx}$ — относительное удлинение; $\varepsilon$ — коэффициент сопротивления. Если упругое тело совершает гармонические колебания, то зависимость (3.51) даст эллиптическую петлю гистерезиса, вообще говоря, на более сложной диаграмме $\sigma - e_{xx}$ (рис. 3.25). Площадь, заключенная внутри этой петли, выражает рассеяние энергии за цикл колебаний.

Однако в ряде случаев оказывается, что силы неупругих сопротивлений не зависят от скорости деформаций. Е. С. Сорокин [35] рационально изменил гипотезу Фохта, предложив считать, что силы сопротивления пропорциональны первой степени самой деформации, а форма петли при изменении $e_{xx}$ по синусоидальному закону остается эллиптической

$$\sigma = Ee_{xx} + \varepsilon_1 Ee_{xx}\sqrt{1 - \frac{e_{xx}^2}{e_{0xx}^2}}, \tag{3.52}$$

где $\varepsilon_1$ — коэффициент сопротивления; $e_{xx}$ — амплитуда деформации.

Для гармонических колебаний гипотезы Сорокина и Фохта формально тождественны друг другу. Пусть $e_{xx} = e_{0\,xx}\sin(\omega t + \theta)$. Тогда

$$\frac{\partial e_{xx}}{\partial t} = \omega e_{0\,xx}\cos(\omega t + \theta) = \omega e_{0\,xx}\sqrt{1 - \sin^2(\omega t + \theta)} =$$

$$= \omega e_{0\,xx}\sqrt{1 - \frac{e_{xx}^2}{e_{0xx}^2}}.$$

Следовательно,

$$\sigma = Ee_{0\,xx} + E\varepsilon_1 \bar{e}_{0\,xx}\sqrt{1 - \frac{e_{xx}^2}{e_{0xx}^2}} = Ee_{xx} + \frac{\varepsilon_1}{\omega} E\frac{\partial e_{xx}}{\partial t} =$$

$$= Ee_{xx} + \varepsilon E\frac{\partial e_{xx}}{\partial t}, \tag{3.53}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_1/\omega$ — коэффициент сопротивления в гипотезе Фохта.

Из (3.53) ясно, что при гармоническом колебании силы сопротивления по гипотезе Сорокина равны силам упругости, умноженным на коэффициент $\varepsilon_1$ и сдвинутым по фазе на $\pi/2$.

Математическая тождественность гипотез Фохта и Сорокина при гармонических колебательных процессах дает возможность использовать в обоих случаях одни и те же решения. В частности, при учете сопротивления по гипотезе Сорокина можно использовать комплексную форму уравнений, полагая жесткости системы равными $\bar{C}_k = C_k(1 + i\varepsilon_{1k})$, где $C_k$ — вещественная жесткость; $\varepsilon_{1k}$ — коэффициент сопротивления, отвечающий этой жесткости. Если в системе имеются внутренние сопротивления, часть из которых подчиняется гипотезе Фохта, а часть — гипотезе Сорокина, то $\bar{C}_b = C_b(1 + i\omega\varepsilon_k + i\varepsilon_{1b})$.

В заключение заметим, что введение комплексных модулей и жесткостей при наличии сопротивлений по гипотезе Сорокина позволяет учитывать указанные сопротивления и в случае любых законов изменения $\varepsilon(t)$ (сложные циклические и неустановившиеся режимы). Это непосредственно вытекает из разложения произвольной деформации в ряд (или интеграл) Фурье.[1] Пусть $e_{xx}(t) = \sum_k e_{0\,xx,\,k} \sin(\omega_k t + \theta_k)$. Тогда, используя (3.52), имеем

$$\sigma(t) = Ee_{xx} + E\varepsilon_1 \sum_k e_{0\,xx,\,k} \sqrt{1 - \frac{e^2_{xx,\,k}}{e^2_{0\,xx,\,k}}} =$$

$$= E\sum_k e_{0\,xx,\,k} \sin(\omega_k t + \theta_k) + E\varepsilon_1 \sum_k e_{0\,xx,\,k} \cos(\omega_k t + \theta_k) =$$

$$= E\sum_k e_{0\,xx,\,k} \sin(\omega_k t + \theta_k) + E\varepsilon_1 \sum_k \frac{1}{\omega_k} \frac{\partial[\varepsilon_{0\,xx} \sin(\omega_k t + \theta_k)]}{\partial t}.$$

Если перейти к комплексной записи и заменить $e_{xx}$ рядом $\bar{e}_{xx} = \sum \bar{e}_{0\,xx,\,k} e^{i\omega_k t}$, то $\sigma = (1 + \varepsilon_1 i) E \sum \bar{e}_{0\,xx,\,k} e^{i\omega_k t} = (1 + i\varepsilon_1) E\bar{e}_{xx}$, что и доказывает наше утверждение.

Применяя комплексную форму уравнений для произвольного режима, необходимо представить в комплексной форме и возмущающую силу. Для этого следует разложить $f(t)$ в ряд (или интеграл) Фурье $f(t) = \sum f_{0k} \cos(\omega_k + \theta_k)$ и заменить ее комплексной формой.

При сопротивлениях, пропорциональных скоростям деформаций, не удается ввести единый комплексный модуль в случае произвольных режимов, так как каждая гармоника деформации имеет свою мнимую часть модуля $i\omega_k\varepsilon$. Однако можно применять различные комплексные модули, определяя движение под действием каждой составляющей внешней силы в отдельности.

Если система совершает свободные колебания, то при сопротивлениях, по гипотезе Сорокина учет последних может быть произведен введением комплексного модуля (вообще, комплексных жесткостей). При сопротивлениях по гипотезе Фохта этого, строго говоря, делать нельзя, так как свободное затухающее колебание не есть гармонический процесс. Но при не очень больших сопротивлениях каждый цикл колебания близок к гармоническому, поэтому с большой степенью точности можно вводить для учета сопротивлений комплексный модуль (жесткость) $\bar{E} = E(1 + i\lambda_k\varepsilon)$, где $\lambda_k$ — частота рассматриваемого тона.

### § 16. Распространение местной вибрации корпусных конструкций вдоль ребер жесткости или пластин обшивки

1. Постановка задачи. Сведение ее к анализу колебаний полубесконечной неразрезной балки. В § 13 основными причинами

[1] Предполагается, что закон изменения деформаций подчиняется условиям Дирихле.



возникновения местной вибрации вдали от винтов и других источников возмущающих сил были названы общая вибрация корпуса, инициирующая довольно большие гидродинамические давления от «присоединенных масс» воды для судна в целом, и силы инерции переносного движения отдельных конструктивных элементов. Однако там не была проанализирована возможность распространения вибрации в нос и корму от винта по ребрам жесткости (в случае продольной системы набора) или по обшивке (в случае поперечной системы). Продолжим теперь этот анализ с учетом указанной воз-

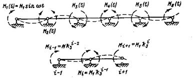



Рис. 3.26.

можности, причем используем принцип разложения реакций, который позволит нам рассмотреть новый вид вибрации ребер и пластин независимо от вибрации, исследованной в § 13.

Ребра жесткости или пластины можно представить как полубесконечные неразрезные балки (рис. 3.26), загруженные на свободном конце периодическим моментом частоты $\omega$; в массу балок должны быть засчитаны соответствующие присоединенные массы жидкости. Примем, что отношение момента на $i$-й опоре к моменту на $(i-1)$-й опоре — постоянная величина $k$, не зависящая от $i$. Пусть отношение $M_2/M_1 = k_3$. Отбрасывая первый пролет, мы снова приходим к полубесконечной балке, откуда, по-видимому, $M_3/M_2$ также равно $k$ и т. д.

Рассматривая уравнение колебаний шарнирно-опертой балки под действием концевого гармонического момента с частотой $\omega$ и применяя для учета сопротивлений комплексную форму, из условия сопряжения углов поворота на опоре $i$ получаем

$$-\frac{M_1 k_3^{i-2} l}{EI}\psi(\alpha) + \frac{M_1 k_3^{i-1} l}{EI}\varphi(\alpha) =$$

$$= -\frac{M_1 k_3^{i-1} l}{EI}\varphi(\alpha) + \frac{M_1 k_3^{i} l}{EI}\psi(\alpha),$$

где $EI$ — комплексная жесткость балки;

$$\varphi = \frac{-\operatorname{ctg}(\alpha) + \operatorname{cth}(\alpha)}{2\alpha}; \quad \psi = \frac{-\operatorname{cosec}(\alpha) + \operatorname{cosech}(\alpha)}{2\alpha};$$

$$\alpha = l \sqrt[4]{\frac{m_0 \omega^2}{EI}};$$

$m_0$ — погонная комплексная масса балки.

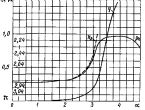



Рис. 3.27.

Отсюда

$$k_3^2 + 2k_3 \Phi(\alpha) + 1 = 0,$$

$$\Phi(\alpha) = \frac{\operatorname{ch} \alpha \sin \alpha - \operatorname{sh} \alpha \cos \alpha}{\operatorname{sh} \alpha - \sin \alpha}.$$

Допустим, что $\alpha = a - ib$. Тогда

$$\Phi(\alpha) = \frac{[B(a) \operatorname{ch} b \cos b - A(a) \operatorname{sh} b \sin b] + i [B(b) \operatorname{ch} a \cos a - A(a) \operatorname{sh} a \sin a]}{(\operatorname{sh} a \cos b - \sin a \operatorname{ch} b) - i (\operatorname{ch} a \sin b - \operatorname{sh} b \cos a)};$$

$$A(a) = \operatorname{ch} a \sin a + \operatorname{sh} a \cos a; \quad B(a) = \operatorname{ch} a \sin a - \operatorname{sh} a \cos a.$$

На рис. 3.27 сплошными линиями представлены графики аргумента $\varphi$ и модуля $\rho_k$ коэффициента $k_3$ в случае, когда коэффициент рассеивания энергии в конструкции $\psi = 0,25$ (под $\psi$ понимаем отношение потерь энергии за цикл колебаний к энергии цикла). Значение $\alpha = \pi$ соответствует совпадению частоты возмущающей силы $\omega$ с частотой $\lambda_1$ первого тона свободных колебаний любого пролета в предположении его шарнирного опирания (частота первого тона всей неразрезной балки). Легко убедиться, что если $\omega/\lambda_1 \leqslant 0,9$, то уменьшение опорных моментов (а следовательно, и амплитуд перемещений) по длине балки происходит весьма быстро. Например, в случае $\omega/\lambda_1 \leqslant 0,9$ момент на пятой опоре в десять раз меньше, чем на первой; при $\omega/\lambda_1 = 0,75$ десятикратное уменьшение будет уже на четвертой опоре; если $\omega/\lambda_1 = 0,5$, то уменьшение будет на третьей опоре. При зарезонансных частотах $\omega/\lambda_1 > 1,0$ затухание вибрации может происходить гораздо медленнее.



Отсюда следует важный практический вывод: частоты свободных колебаний ребер жесткости (при продольной системе набора) и пластин (при поперечной системе набора) не следует выводить в зарезонансную область.

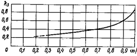



Рис. 3.28.

Пунктирной линией на рис. 3.27 показано абсолютное значение вещественного коэффициента $k_3$ при отсутствии сопротивлений. Более подробно характер изменения $k_3$ в этом последнем случае показан на рис. 3.28. В определенных областях изменения $\alpha$ значения $k_3$ становятся комплексными, что противоречит физике явления, поскольку при отсутствии сопротивлений нет и сдвига фаз между внутренними усилиями. Следовательно, при заданной частоте $\omega$ (данном $\alpha$) в балке без сопротивлений не происходит равномерного затухания моментов и принятая нами форма решения не может быть использована. Но тогда нельзя определить вынужденные установившиеся колебания.

Пусть при установившемся колебании $M_2/M_1 = k_{13}$, а $M_3/M_2 = k_{23}$, причем $k_{13} \neq k_{23} \neq 0$. Отсекая первый слева пролет, снова приходим к полубесконечной балке, загруженной на конце внешним гармоническим моментом с частотой $\omega$. Однако у новой балки отношение первого момента ко второму равно $k_{23}$. Следовательно, и у первой балки также должна существовать «сдвинутая на один пролет» форма, при которой $M_2/M_1 = k_{23} \neq k_{13}$. Но наличие хотя бы двух равноправных форм означает существование бесконечно большого их множества. Разделим момент $M_1$ на два момента: $M_1^{(1)}$ и $M_1^{(2)}$. Согласно принципу наложения, момент $M_1^{(1)}$ может вызвать установившиеся колебания по первой форме, момент $M_1^{(2)}$ — по второй. Результирующая форма представляет сумму обеих форм. Соотношение между $M_1^{(1)}$ и $M_1^{(2)}$ совершенно произвольно, поэтому может быть бесконечно много результирующих равноправных форм.

Появление неопределенных решений и бесчисленного множества форм вынужденных колебаний полубесконечной балки без сопротивлений при некоторых высоких частотах объясняется математически неопределенностью ее граничных условий на бесконечно далеком конце. Физически это обстоятельство связано с наличием у неразрезных балок обертонов, форма которых разделяется на чередующиеся участки, охватывающие несколько пролетов. Если частота ω близка или даже совпадает с собственной частотой какого-либо из этих обертонов, то решение будет неопределенным.

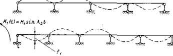



*Рис. 3.29.*

Рассмотрим вибрацию балки со сколь угодно большим, но четным числом пролетов при частоте момента $M_1$, равной $\omega = \lambda_2 = \frac{3,92}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{m_0}}$. Эта частота представляет собой собственную частоту пролета, как жестко закрепленного на одном конце и свободно опертого на другом. Очевидно, что неразрезная балка имеет обертон, форма которого изображена на рис. 3.29, *а*, и, следовательно, амплитуды ее вынужденных колебаний при отсутствии сопротивлений будут бесконечно большими.

Добавим к этой балке один пролет. Она будет вибрировать с конечными амплитудами по форме, представленной на рис. 3.29, *б*. Угол поворота сечения на левом конце равен нулю. Каждый пролет изгибается, как жестко заделанный одним концом и свободно опертый другим; стрелка $f_1$ определяется из условия, что максимальный изгибающий момент на конце пролета равен $M_1$. Увеличивая до бесконечности число пролетов, будем получать попеременно то конечные, то бесконечные амплитуды; определенного предела амплитуд здесь нет.

При наличии сколь угодно малых сопротивлений указанный парадокс как будто бы исчезает, так как граничные условия на бесконечно далеком конце становятся вполне определенными (нулевыми). Мы имеем определенное комплексное значение $k_3$. Тем не менее и здесь нельзя гарантировать однозначность решения, так как кроме нашего решения в принципе всегда возможно еще хотя бы одно решение, где периодичность затухания имеет период $n \neq 1$ пролетов (а значит, имеется и бесконечно много решений).



Мы встретили пример линейной краевой задачи со многими решениями. Для ее достаточной обусловленности нужно рассмотреть дополнительные физические условия устойчивости и установления процесса колебаний. Впрочем, поскольку мы рекомендуем оставлять ребра и пластины в дорезонансной области, отмеченная неединственность *представляет только теоретический интерес*.

2. Случай балки конечной длины. Оценка распространения вибрации в корму от винта может быть произведена на основе исследования вибрации балки с конечным числом пролетов. Чтобы рассчитать эту балку, продолжим ее мысленно вправо до бесконечности. Тогда, согласно предыдущему, момент, действующий на $j$-й опоре, будет равен $M_1 k_3^{j-1}$ и, в частности, на $n$-й опоре составит $M_1 k_3^{n-1}$. В действительности последний момент равен нулю.

Чтобы уточнить решение, приложим на $n$-й опоре противоположный момент $- M_1 k_3^{n-1}$ и, мысленно продолжив балку до бесконечности влево, найдем дополнительные изгибающие моменты в этом случае. Дополнительный момент на $j$-й опоре будет $- M_1 k_3^{n-1} k_3^{n-j} = - M_1 k_3^{2n-j-1}$, а на первой опоре $- M_1 k^{2n-2}$. Продолжая уточнение, *можно приложить на первой опоре противоположно* направленный момент и снова рассмотреть полубесконечную балку.

Точное значение опорного момента на $j$-й опоре будет равно сумме прогрессии

$$M_j = M_1 \left(k_3^{j-1} - k_3^{2n-j-1}\right) \frac{1}{1 - k_3^{2n-2}}.$$

Общие выводы о характере затухания вибрации остаются теми же, что и в случае полубесконечной балки.

### § 17. Свободные колебания и главные координаты упругих систем с линейными сопротивлениями

1. Отсутствие (в общем случае) постоянных форм колебаний. Еще Релей показал, что внешние линейные сопротивления, пропорциональные скорости перемещений, изменяют в общем случае формы свободных колебаний линейных упругих систем и нарушают независимость этих колебаний друг от друга, т. е. линейная упругая система с такими сопротивлениями не может быть, вообще говоря, рассчитана обычным методом главных координат. Он же сформулировал специальное условие, при котором изменения форм и связывания свободных колебаний не происходит, а следовательно, метод главных координат остается в силе.

В ряде современных работ утверждается, что внутренние линейные сопротивления, пропорциональные скоростям деформаций или самим деформациям, не изменяют форм свободных колебаний и что расчет линейной упругой системы (например, стержня) всегда можно производить путем разложения деформаций по этим независимым формам, найденным без учета сопротивлений. Однако указанное утверждение, как и в случае внешних сопротивлений, справедливо лишь при специальных условиях.

В качестве простейшего примера, который показывает связывание свободных колебаний вследствие наличия внутренних сопротивлений, рассмотрим деформации призматической балки, упруго заделанной и упруго опертой на концах (рис. 3.30). Уравнение движения имеет вид

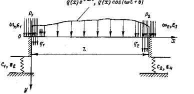



Рис. 3.30.

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\varepsilon EI\frac{\partial^5 w}{\partial x^4\partial t}+m_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q(x)\cos\omega t, \tag{3.54}$$

где $EI$ — жесткость балки; $m_0$ — ее погонная масса; $\varepsilon$ — коэффициент сопротивления; $w = w(x, t)$ — прогиб. В случае сопротивлений, пропорциональных деформациям, необходимо ввести коэффициент сопротивления $\varepsilon_0 = \varepsilon/\omega$.

Прогиб балки можно задать выражением

$$w=\sum_{1}^{\infty}\varphi_n(x)F_n(t), \tag{3.55}$$

где $\varphi_n(x)$ — форма главных свободных колебаний без учета сопротивлений, отвечающая уравнению

$$\varphi_n^{\mathrm{IV}}-\frac{m_0\lambda_n^2}{EI}\varphi_n=0, \tag{3.56}$$

$\lambda_n$ — частота свободных колебаний.

Непосредственной подстановкой нетрудно показать, что (3.55) разделяет переменные в (3.54). Однако уравнения (3.54) и (3.56) имеют различные краевые условия, поэтому такая подстановка, вообще говоря, незаконна. В самом деле, для (3.54) имеем: при $x = 0$

$$EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\varepsilon EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}=A_1\frac{\partial w}{\partial x}+\varepsilon_1 A_1\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}; \tag{3.57}$$

$$EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\varepsilon EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial t}=-\left(C_1 w+\varepsilon_2 C_1\frac{\partial w}{\partial t}\right),$$

при $x = l$

$$EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\varepsilon EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}=-\left(A_2\frac{\partial w}{\partial x}+\varepsilon_3 A_2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}\right); \tag{3.57a}$$

$$EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+\varepsilon EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial t}=C_2 w+\varepsilon_4 C_2\frac{\partial w}{\partial t},$$

где $A_i$, $C_i$ — жесткости упругих заделок и опор; $\varepsilon_i$ — коэффициенты сопротивлений в заделках и опорах.

Соответственно для (3.56) при $x = 0$

$$EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-C_1 w;\quad EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=A_1\frac{\partial w}{\partial x}; \tag{3.58}$$

при $x = l$

$$EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=C_2 w;\quad EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=-A_2\frac{\partial w}{\partial x}. \tag{3.58a}$$

Чтобы сделать подстановку (3.55) законной, нужно преобразовать (3.57) к виду: при $x = 0$

$$EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=A_1\frac{\partial w}{\partial x}+\left(\varepsilon_1 A_1\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}-\varepsilon EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}\right)=A_1\frac{\partial w}{\partial x}+M_1(w);$$

$$EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=-C_1 w+\left(-\varepsilon_2 C_1\frac{\partial w}{\partial t}-\varepsilon EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial t}\right)=-C_1 w+P_1(w); \tag{3.59}$$

при $x = l$

$$EI\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-A_2\frac{\partial w}{\partial x}+\left(-\varepsilon_3 A_2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial t}-\varepsilon EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}\right)=$$

$$=-A_2\frac{\partial w}{\partial x}+M_2(w);$$

$$EI\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}=C_2 w+\left(\varepsilon_4 C_2\frac{\partial w}{\partial t}-\varepsilon EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\partial t}\right)=C_2 w+P_2(w). \tag{3.59a}$$

Усилия $P_i$ и $M_i$ можно рассматривать как внешние нагрузки.

Заменим эти усилия распределенными нагрузками (см. рис. 3.30) и запишем

$$EI\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\varepsilon EI\,\frac{\partial^5 w}{\partial x^4\partial t}+m_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q(x)\cos\omega t+$$

$$+\int\limits_{-\frac{\Delta l}{2}}^{\frac{\Delta l}{2}}P_1(w)-\int\limits_{0}^{\Delta l}q_1(w)+\int\limits_{l-\frac{\Delta l}{2}}^{l+\frac{\Delta l}{2}}P_2(y)-\int\limits_{l-\Delta l}^{l+\Delta l}q_2(y). \qquad (3.60)$$

Подставив (3.55) в (3.60), умножив (3.60) на нормированную функцию $\varphi_n(x)$, проинтегрировав его почленно и устремив $\Delta l$ к нулю, получим

$$m_0\ddot F_n(t)+\varepsilon m_0\lambda_n^2\dot F_n(t)+m_0\lambda_n^2F_n(t)=\int\limits_0^l q(x)\cos\omega t\,\varphi_n(x)\,dx+$$

$$+P_1\varphi_n(0)+P_2\varphi_n(l)-M_1\varphi_n^{\mathrm{I}}(0)+M_2\varphi_n^{\mathrm{I}}(l), \qquad (3.61)$$

где

$$P_1=-\varepsilon EI\sum_1^\infty\varphi_n^{\mathrm{III}}(0)\,\dot F_n-\varepsilon_2C_1\sum_1^\infty\varphi_n(0)\,\dot F_n;$$

$$P_2=-\varepsilon EI\sum_1^\infty\varphi_n^{\mathrm{III}}(l)\,\dot F_n+\varepsilon_4C_2\sum_1^\infty\varphi_n(l)\,\dot F_n;$$

$$M_1=\varepsilon_1A_1\sum_1^\infty\varphi_n^{\mathrm{I}}(0)\,\dot F_n-\varepsilon EI\sum_1^\infty\varphi_n^{\mathrm{III}}(0)\,\dot F_n;$$

$$M_2=-\varepsilon_3A_2\sum_1^\infty\varphi_n^{\mathrm{I}}(l)\,\dot F_n-\varepsilon EI\sum_1^\infty\varphi_n^{\mathrm{III}}(l)\,\dot F_n.$$

Как видно из (3.61), переменные уже не разделяются. Разделение переменных произойдет лишь в случае равенства коэффициентов сопротивления $\varepsilon=\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\varepsilon_4$, а также тогда, когда концы балки будут шарнирно оперты ($C=\infty$, $A=0$), жестко заделаны ($C=\infty$, $A=\infty$), свободны ($C=0$, $A=0$), жестко защемлены ($C=0$, $A=\infty$).

При невыполнении указанных выше условий балка вообще не будет иметь постоянных форм главных свободных колебаний. Рассмотрим консольную балку, упруго заделанную на правом конце. Уравнение свободных колебаний имеет вид

$$EI\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\varepsilon EI\,\frac{\partial^5 w}{\partial x^4\partial t}+m_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0 \qquad (3.62)$$

Решение (3.62) будем искать как произведение

$$y(x,\ t)=\varphi_n(x)\,F_n(t), \qquad (3.63)$$

где $\varphi_n$ и $F_n$ — любые вещественные функции.



Чтобы подстановка (3.63) разделила переменные в (3.62), необходимо удовлетворить уравнение

$$\varphi_n^{\mathrm{IV}}=\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^4\varphi_n \qquad (3.64)$$

при граничных условиях: $x=0$

$$\varphi_n=0,\quad \varphi_n^{\mathrm{II}}=0, \qquad (3.65)$$

$x=l$

$$\varphi_n=0,\quad EI\varphi_n^{\mathrm{II}}F_n(t)+\varepsilon EI\varphi_n^{\mathrm{II}}\dot F_n(t)=$$

$$=-A\varphi_n^{\mathrm{I}}F_n(t)-\varepsilon_1A\varphi_n^{\mathrm{I}}\dot F_n(t), \qquad (3.65а)$$

где $A$ и $\varepsilon_1$ — соответственно жесткость и коэффициент сопротивления упругой заделки.

Тогда $F_n(t)$ определится уравнением

$$m_0\ddot F_n(t)+\varepsilon EI\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^4\dot F_n(t)+EI\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^4F_n(t)=0. \qquad (3.66)$$

Подчинив общий интеграл уравнения (3.64) условиям (3.65), получим

$$\varphi_n(x)=\sin\mu_n\,\mathrm{sh}\,\mu_n\frac{x}{l}-\mathrm{sh}\,\mu_n\sin\mu_n\frac{x}{l},$$

где $\mu_n$ — корень уравнения частот

$$\frac{EI}{l}\,\mu_n\,\frac{2\,\mathrm{sh}\,\mu_n\sin\mu_n}{\mathrm{sh}\,\mu_n\cos\mu_n-\mathrm{ch}\,\mu_n\sin\mu_n}=\frac{F_n(t)+\varepsilon_1\dot F_n(t)}{F_n(t)+\varepsilon\dot F_n(t)}. \qquad (3.67)$$

Все вещественные решения (3.66) объединяются общим интегралом

$$F_n(t)=F_{0n}e^{-\delta_n t}\cos(\lambda_n t+\theta_n), \qquad (3.68)$$

где $F_{0n}$ и $\theta_n$ — начальная амплитуда и фаза, $\lambda_n$ — частота свободных колебаний, $\delta_n$ — параметр:

$$\delta_n=\frac{\varepsilon EI\left(\frac{\mu_n}{l}\right)^4}{2m_0}.$$

Подставив (3.68) в (3.67), получим

$$\frac{F_n(t)+\varepsilon_1\dot F_n(t)}{F_n(t)+\varepsilon\dot F_n(t)}=$$

$$=\frac{\sqrt{(\varepsilon_1\lambda_n)^2+(1-\varepsilon_1\delta_n)^2}\,\sin(\lambda_n t+\theta_n)-\mathrm{arctg}\,\frac{1-\varepsilon_1\delta_n}{\varepsilon_1\lambda_n}}{\sqrt{(\varepsilon\lambda_n)^2+(1-\varepsilon\delta_n)^2}\,\sin(\lambda_n t+\theta_n)-\mathrm{arctg}\,\frac{1-\varepsilon\delta_n}{\varepsilon\lambda_n}}.$$

Отсюда ясно, что (3.67) неразрешимо, т. е. ни одна вещественная функция вида (3.63) не может быть решением (3.62). Исключение представляют случаи, когда $\varepsilon = \varepsilon_1$, $A = \infty$, $A = 0$.

Выпишем уравнения колебаний призматической балки с учетом сдвига и внутренних сопротивлений:

$$EI \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \varepsilon_1 EI \frac{\partial^5 w_1}{\partial x^4 \partial t} + m_0 \frac{\partial^2 (w_1 + w_2)}{\partial t^2} = q(x) \cos \omega t;$$

$$G\Omega \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \varepsilon_2 G\Omega \frac{\partial^3 w_2}{\partial x^2 \partial t} - m_0 \frac{\partial^2 (w_1 + w_2)}{\partial t^2} = -q(x) \cos \omega t, \quad (3.69)$$

где $G\Omega$ — жесткость балки на сдвиг; $w_1$ и $w_2$ — прогибы балки от изгиба и сдвига; $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ — коэффициенты сопротивлений при изгибе и сдвиге.

Непосредственной подстановкой легко установить, что функции вида $w_1 = \varphi_{n1}(x) F(t)$ и $w_2 = \varphi_{n2}(x) F(t)$, где $\varphi_{n1}$ и $\varphi_{n2}$ — изгибные и сдвиговые составляющие форм свободных колебаний балки без учета сопротивлений, разделяют переменные в (3.69) только при условии $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ [независимо от различия в граничных условиях для (3.69) и уравнений свободных колебаний].

2. Обобщение теоремы Релея. Чтобы разобраться с вопросом о влиянии произвольных линейных сопротивлений на динамические деформации линейных упругих систем, рассмотрим физическую сущность разложения этих деформаций по формам свободных колебаний.

Пусть определены главные свободные колебания произвольной упругой системы без учета сопротивлений. Как показано ранее, это означает, что:

найдены такие формы $\varphi_n(x, y, z)$, при которых внешняя статическая нагрузка вида $P_n m(x, y, z) \varphi_n(x, y, z)$ вызывает деформации вида $a_n \varphi_n(x, y, z)$. Здесь $m(x, y, z)$ — масса системы; соотношения $P_n/a_n = k_n$ определяют, по существу, частоты свободных колебаний;

формы $\varphi_n$ и $\varphi_m$ ортогональны с весом, т. е.

$$\int_v m \varphi_n \varphi_m dv = 0 \quad \text{при } m \neq n, \quad (3.70)$$

где $v$ — объем упругой системы;

должно выполняться равенство

$$\int_v \Phi_n(\varphi_n) \varphi_m dv = 0, \quad (3.71)$$

где $\Phi_n(\varphi_n)$ — силы упругости, возникающие при деформации системы по форме $\varphi_n$. Равенства (3.70) и (3.71) выражают условия независимости колебаний по формам $\varphi_n$.

Пусть на систему действует произвольная нагрузка $p(x, y, z) f(t) = \sum P_n m \varphi_n(t)$, причем движение системы вызывает произвольные внешние и внутренние линейные сопротивления. Под произвольным внешним (внутренним) линейным сопротивлением будем понимать такое сопротивление, которое выражается произвольной линейной функцией относительно перемещений (деформаций) системы и любых производных от них по времени. Предположим, что под действием силы $P_n m \varphi_n f(t)$ система движется согласно зависимости $\varphi_n(x, y, z) \psi(t)$. В этом случае на элементы системы действуют следующие усилия:

внешняя нагрузка

$$p_n m(x, y, z) \varphi_n(x, y, z) f(t);$$

сила инерции

$$m(x, y, z) \varphi_n(x, y, z) \ddot{\psi}(t);$$

сила упругости

$$\Phi_n(\varphi_n) \psi(t);$$

сила внешних сопротивлений

$$\nu(x, y, z) \varphi_n(x, y, z) R\left(\psi, \dot{\psi}, \ldots, \psi^{(k)}\right),$$

где $\nu$ — коэффициент внешних сопротивлений, $R$ — какая-то функция от $t$;

силы внутренних сопротивлений

$$\varepsilon(x, y, z) \Phi_n(\varphi_n) r\left(\psi, \dot{\psi}, \ldots, \psi^{(j)}\right),$$

где $\varepsilon$ — коэффициент внутренних сопротивлений, $r$ — функция от $t$.

Первые три силы всегда соответствуют деформациям системы по форме $\varphi_n$, поэтому они не могут исказить ее. Силы сопротивлений в общем случае не соответствуют деформациям по этой форме, следовательно, они будут искажать форму $\varphi_n$. Для того чтобы и они соответствовали деформациям по форме $\varphi_n$, необходимо иметь $\nu(x, y, z) = km(x, y, z)$, где $k$ — некоторый постоянный коэффициент, а $\varepsilon(x, y, z) = \text{const}$.

Таким образом, доказана теорема: *деформации линейной упругой системы с произвольными внешними и внутренними линейными сопротивлениями могут быть разложены по независимым формам главных свободных колебаний, найденным без учета сопротивлений, в том и только в том случае, когда коэффициенты внешних сопротивлений пропорциональны в каждой точке массе этой системы, а коэффициенты внутренних сопротивлений в каждом элементе системы равны одному и тому же постоянному значению.* Указанные выше примеры хорошо иллюстрируют сформулированное условие.

Если это условие не выполняется, а система имеет сопротивления, пропорциональные перемещениям и деформациям (гипотеза Сорокина) или скоростям перемещений и деформаций (гипотеза Фохта), то можно использовать метод главных координат в несколько обобщенной форме. Уравнениям свободных и вынужденных колебаний таких систем можно придать тот же вид, который имеют уравнения без учета сопротивлений, если ввести комплексные модули упругости, массы и возмущающие силы. После этого уравнения можно решать общими приемами, и лишь в окончательном результате необходимо произвести разделение вещественной и комплексной частей.

Отсюда ясно, что можно рассматривать комплексные формы уравнений свободных колебаний, которые являются чисто аналитическими обобщениями обычных форм и могут быть получены как решения соответствующих однородных дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами. Свободные колебания системы будут происходить при постоянно меняющейся реальной форме, но через период колебания реальная форма начнет повторяться. Зависимости метода главных координат будут иметь не только комплексные функции времени, но и комплексные формы деформаций.

## § 18. Взаимность динамических деформаций

1. Произвольная нагрузка. Ниже будет неоднократно использоваться начало взаимности динамических деформаций, которое может быть сформулировано следующим образом.[1]

Пусть мы имеем линейную механическую систему с линейными сопротивлениями, для которой справедлив метод главных координат (хотя бы в комплексной форме), и пусть на нее в точке $A_1$ действует произвольная обобщенная возмущающая сила $P_1f(t)$, а в *в точке $A_2$ — другая обобщенная возмущающая сила $P_2f(t)$*, причем $P_1$ и $P_2$ могут иметь различный характер. Если обобщенная сила $P_1f(t)$, приложенная в точке $A_1$, вызывает обобщенное перемещение в точке $A_2$, соответствующее обобщенной силе $P_2f(t)$ и равное $P_1\delta^{A_1P_1}_{A_2P_2}(t)$, то обобщенная сила $P_2f(t)$, приложенная в точке $A_2$, вызовет в точке $A_1$ обобщенное перемещение, соответствующее обобщенной силе $P_1f(t)$ и равное $P_2\delta^{A_2P_2}_{A_1P_1}(t) = P_2\delta^{A_1P_1}_{A_2P_2}(t)$.

Иными словами, если обозначить через $\delta^{A_1P_1}_{A_2P_2}(t)$ коэффициент податливости системы в точке $A_2$ по отношению к обобщенному перемещению [соответствующему силе $P_2f(t)$] от действия силы $P_1f(t)$, а через $\delta^{A_2P_2}_{A_1P_1}(t)$ коэффициент податливости системы в точке $A_1$ по отношению к обобщенному перемещению [соответствующему силе $P_1f(t)$] от действия силы $P_2f(t)$, то $\delta^{A_1P_1}_{A_2P_2}(t) = \delta^{A_2P_2}_{A_1P_1}(t)$.

Докажем сначала указанное положение для случая отсутствия сопротивлений. Будем искать динамические деформации методом главных координат, предварительно определив формы главных свободных колебаний системы $\varphi_n(x, y, z)$, приведенные к точке $A_1$ с координатами $(x_1, y_1, z_1)$, т. е. положив $\varphi_n(x_1, y_1, z_1) = 1{,}0$. Пусть приведенная масса, соответствующая $\varphi_n$, равна $m^n_{\text{пр}}$, а приведенная жесткость равна $C^n_{\text{пр}}$. Легко видеть, что сформулированное начало справедливо для движения по любой форме, а следовательно справедливо вообще.

Пусть перемещение в точке $A_1$, соответствующее силе $P_1f(t)$, при деформации системы по форме $1\cdot\varphi_n(x, y, z)$ равно $\delta_{1,n}$, а перемещение в точке $A_2$, соответствующее силе $P_2f(t)$, при той же деформации системы равно $\delta_{2,n}$. При действии силы $P_2f(t)$ обобщенная сила составляет $P_1\delta_{1,n}f(t)$ и уравнение движения точки приведения имеет вид

$$m^n_{\text{пр}}\ddot{w} + C^n_{\text{пр}}w - P_1\delta_{1,n}f(t) = 0, \tag{3.72}$$

где $w$ — перемещение точки приведения.

Решение уравнения (3.72) всегда можно представить в виде

$$w(t) = P_1\delta_{1,n}F(t), \tag{3.73}$$

определив функцию $F(t)$. Следовательно, перемещение точки $A_1$, соответствующее силе $P_1f(t)$, определяется как

$$w(t) = P_1\delta^2_{1,n}F(t), \tag{3.74}$$

а перемещение точки $A_2$, соответствующее силе $P_2f(t)$, как

$$\omega(t) = P_1\delta_{1,n}\delta_{2,n}F(t). \tag{3.75}$$

Приложим теперь силу $P_2f(t)$ в точке $A_2$. Согласно сказанному выше, очевидно, что обобщенная сила равна $P_2f(t)\,\delta_{2,n}$ и уравнение движения системы можно записать в виде

$$m^n_{\text{пр}}\ddot{w} + C^n_{\text{пр}}w - P_2\delta_{2,n}f(t) = 0. \tag{3.76}$$

Решение уравнения (3.76) с учетом (3.72) и (3.73) будет

$$w(t) = P_2\delta_{2,n}F(t). \tag{3.77}$$

Отсюда перемещение точки $A_2$ составит

$$w(t) = P_2\delta^2_{2,n}F(t), \tag{3.78}$$

а перемещение точки $A_1$

$$w(t) = P_2\delta_{2,n}\delta_{1,n}F(t). \tag{3.79}$$

Сравнив (3.79) и (3.75), видим, что положение доказано.

Доказательство для случая линейных сопротивлений можно получить непосредственно, если использовать метод главных координат в комплексной форме. Вводя комплексные жесткости, мы сведем уравнение движения к виду (3.72) и (3.76), т. е. получим решения, ничем не отличающиеся по форме от (3.75) и (3.79). Тождественность их означает равенство их вещественных и мнимых *частей, т. е. конечных результатов*.

[1] Для случая статических деформаций формулировка и доказательство начала взаимности содержатся во многих курсах строительной механики. Его обобщение на область динамики используется главным образом в электротехнике и акустике. Ниже приведены измененные формулировка и доказательство начала взаимности применительно к упругим механическим системам.

2. Гармоническая нагрузка. В частном случае гармонической возмущающей силы удобно использовать следующие формулировки начала взаимности.

Пусть имеется произвольная линейная механическая система с линейными сопротивлениями и пусть на нее в точке $A_1$ действует возмущающая сила $P_1 \cos(\omega t + \theta_1)$, а в точке $A_2$ — другая обобщенная возмущающая сила $P_2 \cos(\omega t + \theta_2)$, причем $P_1$ и $P_2$ могут иметь различный характер. Если обобщенная сила $P_1 \cos(\omega t + \theta_1)$ вызывает обобщенное перемещение в точке $A_2$, соответствующее обобщенной силе $P_2 \cos(\omega t + \theta_2)$ и равное $P_1 \delta_{1,2} (\cos \omega t + \theta_2 + \xi_{1,2})$, то обобщенная сила $P_2 \cos(\omega t + \theta_2)$ вызовет обобщенное перемещение в точке $A_1$, соответствующее обобщенной силе $P_1 \cos(\omega t + \theta_1)$ и равное $P_2 \delta_{2,1} \cos(\omega t + \theta_2 + \xi_{2,1})$, причем $\delta_{2,1} = \delta_{1,2}$, $\xi_{2,1} = \xi_{1,2}$.

Иными словами, если сила $\overline{P}_1 e^{i\omega t}$, приложенная в точке 1, вызывает в точке 2 перемещение $\overline{P}_1 \overline{\delta}_{A_2 P_2}^{A_1 P_1} e^{i\omega t}$, соответствующее силе $\overline{P}_2 e^{i\omega t}$, то сила $\overline{P}_2 e^{i\omega t}$, приложенная в точке 2, вызовет в точке 1 перемещение $\overline{P}_2 \overline{\delta}_{A_1 P_1}^{A_2 P_2} e^{i\omega t}$, соответствующее силе $\overline{P}_1 e^{i\omega t}$, причем $\overline{\delta}_{A_1 P_1}^{A_2 P_2} = \overline{\delta}_{A_2 P_2}^{A_1 P_1}$.

Изложенные выше доказательства получены на основе метода главных координат, поэтому, строго говоря, применимы лишь к тем линейным системам, которые можно рассчитывать этим методом (хотя бы вместе с приемом выделения статических членов). Ниже будут приведены примеры линейных систем, где нельзя применять ни метод главных координат, ни теорему взаимности.

## § 19. Взаимодействие общей и местной вибрации судового корпуса

Увеличение частоты вращения гребных винтов, повышение мощности главных механизмов, снижение жесткости конструкций, как результат использования высокопрочных материалов, и другие факторы нередко вызывают значительную вибрацию корпуса современных судов. При этом зачастую наблюдается взаимовлияние общих колебаний корпуса и местных колебаний отдельных корпусных конструкций (особенно днищевых перекрытий). Отсюда очевидна необходимость разработки соответствующих методов расчета.

1. Расчетная схема. Корпус судна вместе с днищевыми перекрытиями можно привести к системе, представленной на рис. 3.31. Верхняя балка имитирует корпус, нижняя — продольные балки днищевых перекрытий, соединенные с корпусом переборками. Упругое основание образуется флорами.

Введем обозначения: $N_n$, $M_n$ — перерезывающая сила и изгибающий момент; $v_n$, $\varphi_n$ — *прогиб и угол поворота*; $I_n = I_n(x)$, $\Omega_n = \Omega_n(x)$ — момент инерции и приведенная площадь сечения;



$k$ — жесткость упругого основания; $\omega$ — частота возмущающей силы; $m_1$ — *погонная масса корпуса без учета присоединенных* масс воды и масс перекрытий; $\rho_1$ — ее радиус инерции; $m_2$ — погонная масса перекрытий с учетом присоединенной массы воды при общих колебаниях корпуса; $\overline{m}_2$ — приведенная погонная масса

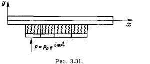



Рис. 3.31.

перекрытия при его изгибе относительно корпуса вместе с присоединенной массой воды для этого движения; $m_0\rho^2$ — момент инерции масс продольных балок перекрытий; *индекс* $n = 1$ *присваивается* верхней балке, индекс $n = 2$ — нижней.

Все массы и жесткости в дальнейшем считаются комплексными, что позволяет учесть внешние и внутренние сопротивления.

Возможность раздельного учета взаимодействия между конструкцией и жидкостью для общей и местной вибраций судна обусловливается линейностью соответствующих соотношений гидродинамики.

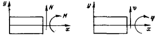



Рис. 3.32.

Составим исходные уравнения задачи, используя *квазистатическую аналогию, и будем рассматривать лишь амплитудные значения* всех искомых величин.

Примем положительные направления внутренних усилий и перемещений в соответствии с рис. 3.32. Тогда уравнения равновесия и геометрические соотношения (с учетом соотношений упругости) примут вид

$$\frac{dN_1}{dx} = -m_1\omega^2 v_1 + k(v_1 - v_2); \quad \frac{dM_1}{dx} = N_1 - m_1\rho_1^2\omega^2\varphi_1;$$

$$\frac{dN_2}{dx} = -m_2\omega^2 v_1 - (\overline{m}_2\omega^2 - k)(v_2 - v_1); \qquad (3.80a)$$

$$\frac{dM_2}{dx} = N_2 - m_0\rho_2^2\omega^2\varphi_2;$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dx} &= -\frac{N_1}{G\Omega} - \varphi_1; \quad \frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{M_1}{EI_1}; \\ \frac{dv_2}{dx} &= -\frac{N_2}{G\Omega_2} - \varphi_2; \quad \frac{d\varphi_2}{dx} = \frac{M_2}{EI_2}. \end{aligned} \tag{3.80б}$$

Общий алгоритм вывода уравнений парциальных откликов изложен выше. Окончательный вид уравнений откликов удобно записать в матричной форме

$$\frac{dA_{ij}}{dx} = (U_{ij}) + (A_{ij})\,(q_{ij}), \tag{3.81}$$

где $(A_{ij})$ — матрица парциальных откликов; матрицы $(q_{ij})$, $(U_{ij})$ имеют вид

$$(q_{ij}) = \left\| \begin{matrix} m_1\omega^2A_{11} - k(A_{11} - A_{31}) & m_1\omega^2A_{12} - k(A_{12} - A_{32}) & m_1\omega^2A_{13} - k(A_{13} - A_{33}) & m_1\omega^2A_{14} - k(A_{14} - A_{34}) \\ -1 + m_1\rho_1^2\omega^2A_{21} & m_1\rho_1^2\omega^2A_{22} & m_1\rho_1^2\omega^2A_{23} & m_1\rho_1^2\omega^2A_{24} \\ m_2\omega^2A_{11} + (\bar{m}_2\omega^2 - k)(A_{31} - A_{11}) & m_2\omega^2A_{12} + (\bar{m}_2\omega^2 - k)(A_{32} - A_{12}) & m_2\omega^2A_{13} + (\bar{m}_2\omega^2 - k)(A_{33} - A_{13}) & m_2\omega^2A_{14} + (\bar{m}_2\omega^2 - k)(A_{34} - A_{14}) \\ m_0\rho_2^2\omega^2A_{41} & m_0\rho_2^2\omega^2A_{42} & -1 + m_0\rho^2\omega^2A_{43} & m_0\rho_2^2\omega^2A_{44} \end{matrix} \right\|;$$



$$(U_{ij}) = \left\| \begin{matrix} -\frac{1}{G\Omega_1} - A_{21} & -A_{22} & -A_{23} & -A_{24} \\ 0 & \frac{1}{EI_1} & 0 & 0 \\ -A_{31} & -A_{31} & -\frac{1}{G\Omega_2} - A_{33} & -A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_2} \end{matrix} \right\|.$$

Дальнейший расчет системы можно производить в нескольких вариантах, например воспользоваться методами, изложенными в главе 2-й.

Выполненные примеры расчета подтвердили практическую приемлемость и устойчивость предлагаемого алгоритма, что, впрочем, естественно, так как использование метода парциальных откликов обеспечивает соответствие устойчивости алгоритма рассматриваемому процессу.

Расчеты показали, что колебания днищевых перекрытий могут существенно (иногда в несколько раз) изменить амплитуды колебаний корпуса. Это легко объяснить: амплитуды возмущающих сил от винтов измеряются тоннами или десятками тонн; такого же порядка динамические реакции возникают при весьма умеренных амплитудах перекрытия относительно его опорного контура. Нередко и общая вибрация судна может вызвать существенные колебания перекрытий.

Таким образом, расчет совместных колебаний корпуса и перекрытий представляет несомненный практический интерес.

Используя основные понятия метода парциальных откликов и квазистатические аналогии, нетрудно усложнить расчетную схему, учтя колебания палубных перекрытий, мачт и т. п.

2. Редуцирование пластин. Рассчитав колебания корпуса и его днищевых перекрытий, можно перейти к расчету колебаний пластин. Возмущающими силами для них будут: силы инерции пластины и присоединенных масс жидкости при общей вибрации судна на перемещениях $v_1$ и силы инерции пластины и присоединенных масс жидкости при колебаниях перекрытия на перемещениях, обусловленных прогибами перекрытия. При вычислении амплитуд вибрации пластины под действием заданных возмущающих сил нужно учесть не только массу самой пластины, но и присоединенную массу жидкости при колебаниях пластины. Сам расчет достаточно очевиден и особых пояснений не требует.

Колебания пластины вызывают два явления: а) некоторую редукцию массы пластины, которая будет теперь включаться в массу перекрытия с некоторым редукционным коэффициентом (за счет добавочных сил инерции пластины при ее изгибе и сил инерции присоединенных масс жидкости, обусловленных колебаниями пластины); б) стремление к сближению опорных кромок, особенно заметное при поперечной системе набора, и, как следствие, редукцию площади пластины при ее работе в составе эквивалентного бруса.

Расчеты свидетельствуют, что влияние первого фактора обычно не столь уж существенно, если только пластины не попадают в резонанс. Второй фактор может оказаться ощутимым и вне резонансной области: напряжения от общего изгиба, вызванного общей вибрацией, весьма невелики, поэтому даже малые цепные напряжения от изгибных колебаний обычно вполне соизмеримы с напряжениями от общего изгиба.

Определение редукционного коэффициента площади пластины по известной форме ее изгиба, стрелке прогиба и напряжениям в жестких связях корпуса производится стандартными методами строительной механики корабля. Поскольку все эти параметры переменны во времени, переменным оказывается и сам редукционный коэффициент. Более того, в одни моменты времени он может быть меньше единицы (и даже отрицательным), в другие — больше нее. В результате корпус судна оказывается балкой с моментом инерции, переменным во времени, причем указанная переменность «управляется» колебаниями балки.

Расчет таких колебаний удобно производить последовательными приближениями с использованием приема введения фиктивных внешних нагрузок, компенсирующих изменение жесткости (по аналогии с известным методом упругих решений в теории пластичности). Сначала производят расчет в первом приближении без редукции пластин. Затем выполняют расчет вибрации пластин по заданным колебаниям их опорных контуров и находят редукционные коэффициенты площадей пластин как периодические функции времени.

Для выполнения расчета во втором приближении полагаем, что момент инерции эквивалентного бруса постоянен во времени, а для компенсации фактических изменений момента инерции, найденных в первом приближении, вводим фиктивные внешние периодические изгибающие моменты. Раскладывая последние в ряд Фурье, находим спектр добавочных гармонических нагрузок основной и кратной частот. С его учетом и должен быть произведен расчет второго и последующих приближений.

Поправки, обусловленные редукцией площади пластин при высокочастотной вибрации корпуса, могут оказаться существенными и потому должны оцениваться. Такая оценка нужна и в том случае, когда вибрацией перекрытий можно пренебречь.

При заметных колебаниях перекрытий следует производить редукцию присоединенных поясков продольных балок набора.



## § 20. Методы сил, деформаций, конечных элементов и суперэлементов. Комбинирование метода конечных элементов с методом парциальных откликов

1. Метод сил. Не излагая существа метода сил, широко известного в строительной механике, рассмотрим некоторые его особенности, которые нередко проявляются при решении достаточно сложных задач, но, к сожалению, почти не освещены в технической литературе.

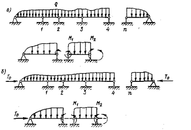



Рис. 3.33.

Обратимся снова к простейшей задаче, уже рассмотренной в главе 1-й при анализе способа Навье,— изгибу неразрезной балки на жестких опорах. Используем обычный вариант метода сил — теорему трех моментов (рис. 3.33, *а*). Мысленно рассечем балку над опорами и превратим ее в систему однопролетных балок, загруженных на опорах неизвестными моментами $M_i$. Значения $M_i$ найдем из условия равенства углов поворота смежных пролетов на любой опоре $j$. Имеем

$$M_{j-1}A^{(j)}_{j-1,\,j}+M_jA^{(j)}_{j,\,j}+A^{(j)}_{q,\,j}=M_jA^{(j+1)}_{j,\,j}+M^{(j+1)}_{j+1,\,j}+A^{(j+1)}_{q,\,j},$$

где $A^{(p)}_{k,\,s}$ — коэффициент податливости, выражающий угол поворота пролета $p$ над опорой $s$, вызванного единичным моментом, действующим над опорой $k$; $A^{(p)}_{q,\,s}$ — то же, но от действия внешней нагрузки. В случае призматических пролетов $\left|A^{(p)}_{j-1,\,j}\right|=\left|A^{(p)}_{j,\,j-1}\right|$.

Мы снова (как и в способе Навье) изменили причинно-следственные связи: опорные моменты оказались внешними задаваемыми моментами, т. е. мы снова моделировали некий «моментный» домкратный стенд, хотя на самом деле опорные моменты возникали в результате изгиба большой неразрезной балки в целом.

Однако последствия такого нарушения менее серьезны, чем при способе Навье: выделив пролет, мы поставили его в неестественные для него условия шарнирного опирания по краям, но граничные условия однопролетной балки не так уж сильно сказываются на величине ее деформаций. Именно поэтому использование теоремы трех моментов обычно оказывается приемлемым.

Иное дело, если балка сжата осевыми силами $T_0$ (рис. 3.33, б). Тогда при $T_0$, равной эйлеровой нагрузке самого длинного и наименее жесткого шарнирно-опертого пролета, коэффициенты податливости этого пролета обратятся в бесконечности и уравнения выродятся, хотя на самом деле ни сама неразрезная балка, ни указанный пролет устойчивости не теряют благодаря заделке, созда-

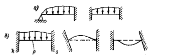



Рис. 3.34.

ваемой соседними связями. Здесь способ теоремы трех моментов не применим в принципе по причине искажения причинно-следственных связей в реальной конструкции.

Аналогичным образом неестественность граничных условий будет сказываться в расчетах вибрации (здесь даже резче, поскольку нас интересует проявление многих тонов, тогда как устойчивость окончательно нарушается уже при первой форме).

Теорема трех моментов — простейшее проявление метода сил. Следовательно, метод сил небезупречен в расчетном отношении и безусловно может приводить к ошибкам и неприятностям даже при использовании ЭВМ.

2. М е т о д  д е ф о р м а ц и й. Перейдем к анализу теоремы трех углов поворота — простейшему случаю использования метода деформаций.

Рассечем балку на отдельные пролеты и мысленно заделаем каждый пролет по концам (рис. 3.34, а). Для каждого заделанного пролета $p$ решим три задачи (рис. 3.34, б): 1) найдем изгибающие моменты $M_{q,k}^{(p)}$ и $M_{q,s}^{(p)}$ в заделках $k$ и $s$ под действием нагрузки $q$; 2) определим изгибающие моменты $M_{k,k}^{(p)}$ и $M_{k,s}^{(p)}$, возникающие при заданном повороте опоры $k$ на единичный угол; 3) вычислим изгибающие моменты $M_{s,s}^{(p)}$ и $M_{s,k}^{(p)}$, возникающие при заданном



повороте опоры $s$ на единичный угол. Тогда для определения истинных углов поворота концевых сечений $\alpha_k$ ($k$ — номер опоры) нетрудно воспользоваться условием равенств моментов на всех опорах

$$\alpha_{j-1}A_{j-1,\,j}^{(j)} + \alpha_j A_{j,\,j}^{(j)} + M_{q,\,j}^{(j)} = \alpha_j A_{j,\,j}^{(j+1)} + \alpha_{j+1} A_{j+1,\,j}^{(j+1)} + M_{q,\,j}^{(j+1)}.$$

Каждый пролет опять поставлен в неестественные для него условия, но уже не свободного опирания, а жесткой заделки. В случае обычной поперечной нагрузки эта разница особой роли не играет и теорема трех углов поворота примерно эквивалентна теореме трех моментов. При наличии осевой силы $T_0$ теорема трех углов поворота предпочтительнее, так как уравнения не выродятся вплоть до первой эйлеровой нагрузки для балки в целом. Что касается расчетов колебаний, то здесь разница снова теряется — в обоих случаях возможны ложные резонансы пролетов, не соответствующие каким-либо тонам колебаний балки.

Таким образом, небезупречен и метод деформаций, причем и здесь причина кроется в искажении свойственной конструкции связи причин и следствий (снова домкратный стенд, но «настраиваемый» по углам поворота). Вблизи «опасных» зон расчета неприятностей можно избежать только значительным увеличением числа значащих цифр всех вычислений, а в непосредственной близости от точек вырождения уравнений не поможет и эта мера.

Проиллюстрируем сказанное на примере расчета форм свободных колебаний второго тона ригеля несложной П-образной рамы, составленной из одинаковых призматических стержней, длина которых $l = 1$ м, погонная масса $m = 2{,}8 \cdot 10^2$ т·с²/м², момент инерции сечения $I = 13{,}3 \cdot 10^{-6}$ м и модуль нормальной упругости $E = 2{,}1 \cdot 10^7$ т/м².

Расчеты выполнялись на ЭВМ по известным готовым зависимостям метода деформации [1] при различном числе значащих цифр ($m = 5 \div 9$). Частота второго тона оказалась равной 55,13 1/с и от числа значащих цифр практически не зависела. Однако ординаты формы колебаний ригеля при этой частоте, существенным образом зависят от принятого числа значащих цифр. Как видно из рис. 3.35, избежать накопления ошибки свыше допустимого предела удалось только при сохранении девяти значащих цифр.

3. М е т о д  к о н е ч н ы х  э л е м е н т о в. Основная идея метода конечных элементов (МКЭ) состоит в том, что рассчитываемая конструкция (одномерная и многомерная) подразделяется на ряд простейших по форме элементов конечных размеров (стержни постоянного сечения, треугольные или прямоугольные пластины постоянной толщины, параллелепипеды, тетраэдры и т. п.). Напряжения, действующие на грани элементов, и внешние нагрузки заменяются статически эквивалентными им сосредоточенными обоб-

[1] Ч у д н о в с к и й В. Г. Методы расчета колебаний и устойчивости стержневых систем. Киев, изд-во АН УССР, 1952.

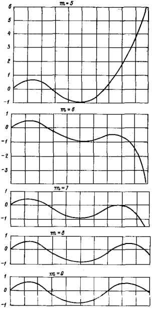



Рис. 3.35.



щенными силами, приложенными к вершинам элементов. Затем определяется связь между усилиями, приложенными к вершинам, и перемещениями этих вершин (матрицы жесткостей или податливостей); составляются условия уравновешенности узлов, т. е. точек, где сходятся вершины, и условия совместности деформаций отдельных элементов в узлах. В результате получается система линейных алгебраических уравнений с общим числом неизвестных, равным числу узлов $n$, умноженному на мерность $m$ вектора перемещений (или усилий). В каждое уравнение основной системы входит число неизвестных, равное произведению мерности вектора перемещений на количество узлов, соседних с рассматриваемым, плюс один узел. Неизвестными являются смещения узлов либо внутренние усилия в узлах. Система линейных алгебраических уравнений решается общематематическими методами.

Из сказанного становится ясным, что чисто физические принципы, используемые в МКЭ, резко упрощают процесс записи исходной информации — отпадает необходимость выписывать полную систему дифференциальных уравнений, условий сопряжения отдельных частей и граничных условий для всей конструкции в целом. Достаточно проанализировать и описать поведение типовых конечных элементов, на которые разбита конструкция, а эта работа может быть выполнена независимо от расчета конструкции.

Исследование деформаций отдельного конечного элемента иногда может быть выполнено точно, если известен общий интеграл соответствующей задачи. Однако это удается сделать лишь для простейших элементов — стержней постоянного сечения. Чаще всего элемент рассматривается приближенно.

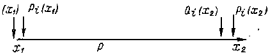
Как правило, используется следующий прием. Задаются законы изменения перемещений, содержащие независимые параметры, общее число которых равно числу вершин элемента, умноженному на мерность вектора перемещений. Эти законы подбираются таким образом, чтобы в пределах элемента удовлетворялись условия равновесия и неразрывности деформаций. Если законы изменения перемещений известны, то можно без принципиальных затруднений найти законы изменения напряжений в пределах элемента с точностью до выбранных независимых параметров. Затем независимые параметры выражаются через перемещения вершин элемента. Тем самым перемещения произвольной точки и напряжения в ней выражаются через указанные перемещения вершин. Заменив напряжения, действующие на гранях, статически эквивалентными им сосредоточенными усилиями, приложенными к вершинам, можно выразить последние через перемещения вершин

$$\mathbf{Q} = C\mathbf{u}, \tag{3.82}$$

где $\mathbf{Q}$ — вектор, имеющий компонентами обобщенные усилия, приложенные к вершинам (мерность $km$); $\mathbf{u}$ — вектор с компонентами — обобщенными перемещениями вершин (мерность $km$); $C$ — квадратная матрица жесткостей элемента (размером $km \times km$).

Получить зависимость (3.82) можно другим путем, рассчитав, например, с помощью любого численного метода конечный элемент на ЭВМ либо проведя очень точное экспериментальное исследование поведения элемента под воздействием внешних сил в его вершинах. Заметим, что в настоящее время матрицы жесткостей $C$ получены для конечных элементов различной формы.

Проиллюстрируем особенности МКЭ простейшим примером (рис. 3.36). Квадратная пластина размером $l \times l$ единичной толщины загружена усилиями, лежащими в ее плоскости. Кромки



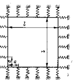




Рис. 3.36.

пластины соединены с равноотстоящими линейными пружинами жесткостью $C$ каждая. Пластину целесообразно разбить на конечные элементы в виде квадратов размером $a \times a$. Для конечного элемента примем аппроксимацию перемещений в виде

$$u = A_1 + B_1 x + C_1 y + D_1 xy + E_1 x^2 + F_1 y^2;$$
$$v = A_2 + B_2 y + C_2 x + D_2 xy + E_2 y^2 + F_2 x^2, \qquad (3.83)$$

где $A_1, \ldots, F_2$ — неизвестные параметры.

В рассматриваемом случае можно принять восемь произвольных параметров, поскольку число вершин равно 4, а мерность вектора перемещений $k = 2$. Лишние параметры можно исключить, если потребовать выполнения уравнений равновесия в пределах элемента.

Входящие в (3.83) независимые параметры выразим через смещения вершин элемента

$$u(0,\ 0) = u_0;\quad u(0,\ a) = u_1;\quad u(a,\ 0) = u_2;\quad u(a,\ a) = u_3;$$
$$v(0,\ 0) = v_0;\quad v(0,\ a) = v_1;\quad v(a,\ 0) = v_2;\quad v(a,\ a) = v_3, \qquad (3.84)$$



откуда находим

$$u = u_0\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{a} + \frac{xy}{a^2}\right) + u_1\left(\frac{y}{a} - \frac{xy}{a^2}\right) + u_2\left(\frac{x}{a} - \frac{xy}{a^2}\right) + u_3\frac{xy}{a^2} + \frac{v_0 - v_1 - v_2 + v_3}{2}\left(\mu\frac{x}{a} + \frac{y}{a} - \mu\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2}\right);$$

$$v = v_0\left(1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{a} + \frac{xy}{a^2}\right) + v_1\left(\frac{y}{a} - \frac{xy}{a^2}\right) + v_2\left(\frac{x}{a} - \frac{xy}{a^2}\right) + v_3\frac{xy}{a^2} + \frac{u_0 - u_1 - u_2 + u_3}{2}\left(\mu\frac{y}{a} + \frac{x}{a} - \mu\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2}\right). \qquad (3.85)$$

Напряжения в пределах элемента изменяются по закону

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}\left\{-\frac{u_0}{a} - \mu\frac{v_0}{a} + \frac{\mu}{2}\,\frac{v_0 - v_1 - v_2 + v_3}{a} + \frac{u_0 - u_1 - u_2 + u_3}{a}\left[(1-\mu^2)\frac{y}{a} + \frac{\mu^2}{2}\right]\right\};$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu^2}\left\{-\frac{v_0}{a} - \mu\frac{u_0}{a} + \frac{\mu}{2}\,\frac{u_0 - u_1 - u_2 + u_3}{a} + \frac{v_0 - v_1 - v_2 + v_3}{a}\left[(1-\mu^2)\frac{x}{a} + \frac{\mu^2}{2}\right]\right\};\qquad (3.86)$$

$$\tau = \frac{E}{4(1+\mu)a}(u_3 - u_2 + u_1 - u_0 + v_3 + v_2 - v_1 + v_0).$$

Теперь необходимо заменить напряжения статически эквивалентными им усилиями, приложенными к узлам. Вдоль грани имеем

$$\int_0^a \sigma_x(0,\ y)\,dy = -T_0^* - T_2^*;$$
$$\int_0^a \sigma_x(0,\ y)\,y\,dy = -T_2^* a, \qquad (3.87)$$

где $T_0^*$, $T_2^*$ — усилия вдоль оси $Ox$ в точках (0, 0) и (0, $a$), вызванные нормальными напряжениями $\sigma_x$.

Распределяя усилия от касательных напряжений $\tau$ между вершинами (0, 0) и (0, $a$) поровну, можно записать

$$T_0 = T_0^* - \tau\frac{a}{2}; \qquad (3.88)$$

$$T_2 = T_2^* + \tau\frac{a}{2}. \qquad (3.89)$$

Подставив в (3.87) — (3.89) значения напряжений, получим искомую зависимость между усилиями и перемещениями.

После того, как матрица $C$ найдена, можно приступить к составлению уравнений для всей пластины. Здесь нужно рассмотреть три типа узлов: угловой, где пластина соединена с двумя пружинами; на кромке пластины, где имеется одна пружина; показывающий отстояние узла от начала координат в произвольной внутренней точке пластины.

Присвоим узлам индексы: $i$, показывающий отстояние узла от начала координат вдоль оси $Ox$ $(x = ia)$, и $j$, показывающий отстояние узла от начала координат вдоль оси $Oy$ $(y = ja)$. Тогда для угловой точки $i = 0$, $j = 0$ имеем

$$C_{11}u_{00} + C_{12}v_{00} + C_{13}u_{01} + C_{14}v_{01} + C_{15}u_{10} - C_{14}v_{10} + C_{17}u_{11} - C_{12}v_{11} - \\ - Cu_{00} + T_{00} = 0; \qquad (3.90)$$

$$C_{12}u_{00} + C_{11}v_{00} - C_{14}u_{01} + C_{15}v_{01} + C_{14}u_{10} + C_{13}v_{10} - \\ - C_{12}u_{11} + C_{17}v_{11} - Cv_{00} + R_{00} = 0,$$

где $T_{00}$ и $R_{00}$ — внешние силы, приложенные в точке $i = 0$, $j = 0$.

Для произвольного узла на кромке $j = 0$, нетрудно найти

$$C_{15}u_{i-1,0} + C_{14}v_{i-1,0} + C_{17}u_{i-1,1} + C_{12}v_{i-1,1} + C_{11}u_{i,0} - C_{12}v_{i,0} + \\ + C_{13}u_{i,1} - C_{14}v_{i,1} + C_{11}u_{i,0} + C_{12}v_{i,0} + C_{13}v_{i,0} + C_{13}u_{i,1} + \\ + C_{14}v_{i,1} + C_{15}u_{i+1,0} - C_{14}v_{i+1,0} + C_{17}u_{i+1,1} - \\ - C_{12}v_{i+1,1} + T_{i,0} = 0; \qquad (3.91)$$

$$- C_{14}u_{i-1,0} + C_{13}v_{i-1,0} + \ldots - Cv_{i,0} + R_{i,0} = 0.$$

Наконец, в произвольной точке $i$, $j$ имеем

$$C_{17}u_{i-1,j-1} - C_{12}v_{i-1,j-1} + C_{15}u_{i-1,j} - C_{14}v_{i-1,j} + C_{15}u_{i,j-1} + \\ + C_{14}u_{i,j-1} + C_{11}u_{i,j} + C_{12}v_{i,j} + C_{15}u_{i-1,j} + C_{14}v_{i-1,j} + C_{17}u_{i-1,j+1} + \\ + C_{12}v_{i-1,j+1} + C_{11}u_{ij} - C_{12}v_{ij} + C_{13}u_{i,j+1} - C_{14}v_{i,j+1} + C_{13}u_{i,j-1} - \\ - C_{14}v_{i+1,j} + C_{11}u_{ij} + C_{12}v_{ij} + C_{17}u_{i+1,j-1} + C_{12}v_{i+1,j-1} + \\ + C_{15}u_{i+1,j} + C_{14}v_{i+1,j} + C_{11}u_{i,j} + C_{12}v_{i,j} + C_{13}u_{i,j+1} + C_{14}v_{i,j+1} + \\ + C_{15}u_{i+1,j-1} - C_{14}v_{i+1,j+1} + C_{17}u_{i+1,j+1} - C_{12}v_{i+1,j+1} + T_{ij} = 0, \qquad (3.92)$$

$$- C_{12}u_{i-1,j-1} + C_{17}v_{i-1,j-1} + \ldots + C_{17}v_{i+1,j+1} + R_{ij} = 0.$$

Совокупность уравнений типа (3.90) — (3.92) дает линейную систему, содержащую $2n$ уравнений с числом неизвестных в каждом из них до 18.

Последовательное использование физических представлений на первом этапе расчета — записи исходной информации — дает весьма ощутимые преимущества: становится единообразным процесс составления исходных уравнений для конструкций любых очертаний, появляется возможность автоматизировать этот процесс. Отмеченные достоинства и привлекли к МКЭ внимание широких кругов специалистов в области строительной механики.



Однако отсутствие физических представлений на втором этапе расчета — при решении полученной системы алгебраических уравнений — несколько обесценивает основные преимущества метода. Остается открытым вопрос о том, каким образом решить указанную систему довольно высокого порядка? Известно, что решению систем линейных алгебраических уравнений посвящена обширная литература, где излагается очень много математических методов. Но какой из них выбрать? Какие идеи можно использовать при выборе метода? К сожалению, ответа на эти вопросы МКЭ не дает, а от правильного ответа на них зависит успех расчета.

Выбором надлежащего метода можно очень сильно влиять на объем вычислений, который далеко не мал. Так, применение метода Гаусса для решения системы из $p$ уравнений по $q$ неизвестных в каждом требует порядка $p^2q$ арифметических операций. Даже для простейшей задачи, рассмотренной выше, требуется операций порядка $72\ n^2$.

Но не это главное. При применении любого метода, необходимо убедиться в том, что его алгоритм устойчив, т. е., что малые погрешности округления не исказят до недопустимых пределов искомый результат. Произвести же практически математическую оценку устойчивости алгоритма для произвольной системы высокого порядка, как правило, не удается. Реализация общих оценок требует столь больших затрат труда, что получение их соизмеримо с построением решения.

Отсюда становится ясным, что не доведенные до конца физические представления сужают реальные возможности использования МКЭ.

4. Накопление вычислительных погрешностей при увеличении числа выделенных элементов. Увеличение числа конечных элементов, на которые разделяется исходная конструкция, казалось бы, повышает точность расчета, так как при этом исходная расчетная модель приближается к этой конструкции. Достаточно вспомнить обычный расчет корпуса судна, когда реальная непризматическая балка (эквивалентный брус) корпуса заменяется балкой ступенчато-переменной жесткости,— здесь, по существу, реализуется именно вариант метода конечных элементов (роль элементов играет каждая призматическая ступенька). Трудно сомневаться в том, что ступенчато-переменная балка с тридцатью участками лучше моделирует действительный эквивалентный брус, чем аналогичная балка, скажем, с пятнадцатью участками.

Однако, записав сразу условия сопряжения всех элементов, т. е. нарушив истинные причинно-следственные связи и перейдя с помощью метода сил или метода деформаций к некому домкратному стенду, мы приходим к такой системе уравнений, где требуемая точность вычислений при нахождении корней растет с числом неизвестных. А так как достижимая точность при использовании любой конкретной ЭВМ всегда ограничена, чрезмерное дробление конструкции, т. е. увеличение числа неизвестных, оказывается нецелесообразным и ведет к потере точности результата (несмотря на увеличивающуюся точность исходной физической конструктивной модели). Иными словами, для каждой данной ЭВМ существует некое оптимальное число конечных элементов, при котором суммарная погрешность от неточного физического моделирования и от неточного решения уравнений достигает минимума.

Поясним сказанное конкретным примером. Рассмотрим изгиб призматической балки длиной $L$ равномерной поперечной нагрузкой $q$. Такую балку легко рассчитать и прямым образом, но мы обратимся к методу конечных элементов.

В соответствии с основной идеей метода балка разбивается на отдельные элементы (балки длиной $l$), для каждого из них вычисляется матрица жесткостей — усилия, которые надо приложить к концам элемента, чтобы эти концы получили единичные смещения. Затем указываются условия уравновешенности элемента и совместности смещений концов. Матрицу жесткостей можно найти из решения задачи об изгибе призматической балки концевыми усилиями. Известный общий интеграл подчиняется кинематическим граничным условиям (одно смещение — единица, остальные равны нулю). Кроме того, добавляется решение неоднородного уравнения при нулевых условиях.

Воспользовавшись матрицей жесткости призматического участка, можно записать уравнения совместности смещений и уравновешенности в узле $i$ в виде

$$-12\left(w_{i+1}-2w_i+w_{i-1}\right)+6l\left(\vartheta_{i+1}-\vartheta_{i-1}\right)=\frac{ql^4}{EI}; \qquad (3.93)$$

$$-6\left(w_{i+1}-w_{i-1}\right)=2l\left(\vartheta_{i+1}+4\vartheta_i+\vartheta_{i-1}\right)=0,$$

где $w_j$ и $\vartheta_j$ — прогибы и углы поворота сечения в узле $j$.

Полученная система (3.93) в принципе совершенно точна, так как исходная балка является призматической и переход к конечным призматическим элементам не вносит никаких погрешностей. При неограниченном числе значащих цифр расчета (т. е. при использовании абстракции абсолютной точности) ею можно пользоваться для случая любого конечного количества элементов.

Но у нас всегда есть ограниченное число значащих цифр. Чтобы оценить намечающиеся при этом неприятности, перейдем к пределу. Разделив первое уравнение системы (3.93) на 12 $l^2$, а второе на $12l$, получим

$$-\frac{w_{i+1}-2w_i+w_{i-1}}{l^2}+\frac{\vartheta_{i+1}-\vartheta_{i-1}}{2l}=\frac{ql^2}{12EI}; \qquad (3.94)$$

$$-\frac{w_{i+1}-w_{i-1}}{2l}+\frac{\vartheta_{i+1}+4\vartheta_i+\vartheta_{i-1}}{6}=0.$$



Перейдя к пределу, имеем

$$\lim_{l\to 0}\frac{w_{i+1}-2w_i+w_{i-1}}{l^2}=w_i''; \quad \lim_{l\to 0}\frac{\vartheta_{i+1}-\vartheta_{i-1}}{2l}=\vartheta_i';$$

$$\lim_{l\to 0}\frac{ql^2}{12EI}=0; \ \lim_{l\to 0}\frac{w_{i+1}-w_{i-1}}{2l}=w_i'; \quad \lim_{l\to 0}\frac{\vartheta_{i+1}+4\vartheta_i+\vartheta_{i-1}}{6}=\vartheta_i.$$

Отсюда система (3.94) преобразуется к виду

$$w_i''=\vartheta_i',$$

$$w_i'=\vartheta_i, \qquad (3.95)$$

где одно уравнение есть следствие второго; найти из (3.95) значения $w$ и $\vartheta$ невозможно. Следовательно, при достаточно малой длине конечного элемента математическая модель в виде системы (3.93) не сходится к исследуемому процессу при любом заранее заданном, но конечном числе значащих цифр выполняемых вычислений.

Используемый прием перехода к пределу вполне аналогичен по идее описанному выше приему перехода к бесконечному времени в теории устойчивости А. М. Ляпунова.

Интересно рассмотреть причины, по которым отсутствует сходимость решения. Если рассматривать чисто математическую сторону вопроса, то необходимо учесть, что общий интеграл, используемый при вычислении матрицы жесткости, имеет вид

$$w=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3, \quad 0\leqslant x\leqslant l. \qquad (3.96)$$

При очень малых $l$ последние два члена выражения (3.96) содержат в виде множителей малые высшего порядка, которые автоматически исключаются из решения с увеличением числа участков $n$. Четыре граничных условия не могут быть удовлетворены, поскольку мы имеем лишь две произвольные постоянные.

С точки зрения физических соображений вопрос тоже ясен: малый элемент изогнут большими концевыми моментами и перерезывающими силами (они не зависят практически от длины элемента), а влияние его изгиба малой суммарной внешней нагрузкой становится ничтожным. В то же время именно внешняя нагрузка является причиной изгиба и определяет прогибы реальной системы.

Чтобы получить простую численную иллюстрацию сказанного, обратимся к шарнирно-опертой призматической балке, которая загружена нагрузкой $q_0 \sin\frac{\pi x}{L}$. В этом случае точное решение будет иметь вид

$$w=A\sin\frac{\pi x}{L}; \quad \vartheta=B\frac{\pi}{L}\cos\frac{\pi x}{L}.$$

После подстановки заранее известного вида точного решения в (3.93) получаем

$$\left[48\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)-12B\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}-\frac{qL^4}{n^4EI}\right]\sin\frac{\pi x}{n}=0;$$

$$\left[-12A\sin\frac{\pi}{n}+4B\frac{\pi}{n}\left(2+\cos\frac{\pi}{n}\right)\right]\cos\frac{\pi x}{n}=0,$$

откуда

$$A=\frac{qL^4}{EI}\,\frac{1}{n^4\left[48\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)-\frac{36}{2+\cos\frac{\pi}{n}}\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)\right]}=\frac{qL^4}{EI}\alpha. \quad (3.97)$$

Точное вычисление зависимости (3.97) дает при любом $n$ известное решение

$$A=\frac{qL^4}{\pi^4EI}=0{,}010\,266\;\frac{qL^4}{EI}.$$

Однако численный эксперимент, заключающийся в расчете на ЭВМ по формуле (3.97) с разным числом значащих цифр показал, что:

— увеличение числа $n$ конечных элементов свыше определенного предела приводит к неустойчивости счета;

— значение предельного количества элементов зависит от числа значащих цифр $m$, сохраняемых при расчете (т. е. от размера разрядной сетки ЭВМ);

— предельное число элементов $n$ оказывается при семи десятичных разрядах равным 40, при восьми десятичных разрядах — 70, при девяти разрядах — 200.

Результаты расчета на ЭВМ, сопоставленные с точным аналитическим решением, приведены на рис. 3.37. Видно, что, начиная с некоторого значения $n$, коэффициент $\alpha$, вычисляемый по формуле (3.97), нарастающе осциллирует около точного значения. Начало этого процесса и характеризует вступление в зону неустойчивости вычислений.

Таким образом, высказанные выше общие теоретические положения подтверждаются конкретными примерами. Ясно, что метод конечных элементов хорош для приближенной оценки результатов при сравнительно малом числе элементов, но иногда становится ограниченно пригодным при слишком большом их числе.

Впрочем, если используемая ЭВМ имеет достаточно большое число значащих цифр, максимально допустимое число элементов в рассматриваемой задаче нередко бывает значительным и обеспечивает хорошие по точности результаты (как это и наблюдается в нашем примере). Важно лишь (и это самое трудное) взять именно оптимальное число элементов.

Для оптимизации последнего числа полезно провести ряд расчетов при разном количестве взятых элементов $n$; признаком удовлетворительности расчета явится попадание в зону, где изменение количества элементов не приведет к значительному изменению результатов счета.



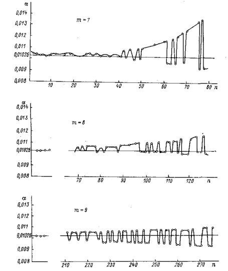



Рис. 3.37.

Подробное описание в целом очень хорошего и широко применяемого метода конечных элементов дано в монографии [29].

5. Метод суперэлементов. Хорошей модификацией метода конечных элементов является так называемый метод суперэлементов.

Согласно этому методу, конструкция разделяется сначала на сравнительно небольшое число больших конечных элементов, или суперэлементами. Ограничиться таким небольшим числом разделений нельзя, так как при этом точность расчета будет неудовлетворительной, не говоря уже о том, что каждый слишком большой суперэлемент нередко не может быть рассчитан с помощью известных аналитических решений. Вследствие этого все суперэлементы, в свою очередь, делятся на малые конечные элементы и рассматриваются отдельно как самостоятельные конструкции. Указанные частные расчеты дают исходные данные для последующего сопряжения суперэлементов.

В конечном итоге метод суперэлементов разделяет очень большую и сложную систему алгебраических уравнений, выражающих условия сопряжения всех малых элементов исходной конструкции, на ряд более простых подсистем.

6. Комбинирование метода конечных элементов с методом парциальных откликов. Метод парциальных откликов появился не в качестве средства решения уравнений переноса, а как способ непосредственного расчета конкретных линейных физических систем, хотя дальнейшие исследования показали возможность соотнести его и с уравнениями переноса. Основная физическая идея метода выражена в его первоначальном названии: «Метод последовательного приведения (последовательного присоединения) элементов». В его физической трактовке (применительно к задачам строительной механики) рассматриваются жесткости, податливости и другие аналогичные характеристики части конструкции (парциальной системы), причем к этой части последовательно присоединяются конструктивные элементы, пока система не будет охвачена в целом, вплоть до любого интересующего нас сечения, где требуется определить внутренние параметры процесса деформирования. Последние могут быть найдены путем сопряжения двух парциальных систем. Конструктивный элемент может быть как бесконечно малым, так и конечным; в последнем случае допустимо говорить о комбинировании метода парциальных откликов с МКЭ.

Указанный путь имеет два принципиальных преимущества.

Во-первых, расчет оказывается достаточно простым, так как не требует совместного рассмотрения систем уравнений, сразу описывающих деформации всей конструкции, а обусловливает необходимость простых расчетов, связанных на каждом этапе с присоединением лишь одного элемента. Более того, идея последовательного присоединения может быть использована и для внутренних характеристик элемента, что дает возможность перейти к решению лишь одного уравнения с одним неизвестным.

Во-вторых, полное совпадение причинно-следственных связей в рассматриваемой конструкции и в алгоритме расчета, а также ясный физический смысл всех расчетных данных позволяет обеспечить устойчивость алгоритма во всех случаях, когда сама конструкция является устойчивой, или найти критическую нагрузку при потере устойчивости.



До настоящего времени метод парциальных откликов применялся в основном для решения одномерных задач. Однако общая идея метода парциальных откликов — выделение парциальной системы, последовательное присоединение к ней элементов и вычисление парциальных откликов на внешние возмущения — сохраняется и в многомерных задачах. Некоторые особенности, характерные для многомерных процессов, проиллюстрируем на сравнительно простом примере плоской задачи теории упругости, уже рассмотренной выше.

Представим матрицу жесткостей для произвольного $i$-го конечного элемента в виде

$$T_0^{(i)} = C_{11}u_0^{(i)} + C_{12}v_0^{(i)} + C_{13}u_1^{(i)} + C_{14}v_1^{(i)} + C_{15}u_2^{(i)} + + C_{16}v_2^{(i)} + C_{17}u_3^{(i)} + C_{18}v_3^{(i)};$$
$$R_3^{(i)} = C_{81}u_0^{(i)} + C_{82}v_0^{(i)} + C_{83}u_1^{(i)} + \ldots + C_{83}v_3^{(i)}. \tag{3.98}$$

Будем образовывать парциальную систему последовательным присоединением одного конечного элемента. Начнем построение решения с элемента, содержащего узел $i = 0$, $j = 0$ (0, 0). Предположим, что в точке (0,1) к нему приложены неизвестные усилия $T_{01}$, $R_{01}$, и составим условия уравновешенности узлов (0,0) и (0,1):

$$\begin{aligned} &T^{(1)} - Cu_{00} + \overline{T}_{00} = 0; \quad R^{(1)} - Cv_{00} + \overline{R}_{00} = 0; \\ &T_1^{(1)} + T_{01} + \overline{T}_{01} = 0; \quad R_1^{(1)} + R_{01} + \overline{R}_{01} = 0, \end{aligned} \tag{3.99}$$

где $\overline{T}_{00}, \ldots, \overline{R}_{01}$ — известные внешние силы, приложенные к узлам (0,0) и (0,1).

После подстановки (3.99) в (3.98) можно разрешить полученную систему относительно перемещений в точках (0,0) и (0,1), т. е. выразить последние линейно через перемещения $u_{01}$, $v_{01}$, $u_{11}$ и $v_{11}$, заданную внешнюю нагрузку и неизвестные силы $T_{01}$, $R_{01}$. С учетом найденных соотношений из (3.99) нетрудно вывести

$$\begin{aligned} T_2^{(1)} &= A_{11}u_{10} + A_{21}v_{10} + A_{31}u_{11} + A_{41}v_{11}H_{00}T_{01} + K_{00}R_{01} + \overline{T}_2^{(1)}; \\ R_2^{(1)} &= B_{11}u_{10} + B_{21}v_{10} + B_{31}u_{11} + B_{41}v_{11} + L_{00}T_{01} + \\ &\quad + M_{00}R_{01} + \overline{R}_2^{(1)}; \\ T_3^{(1)} &= D_{11}u_{10} + D_{21}v_{10} + D_{31}u_{11} + D_{41}v_{11} + N_{00}T_{01} + \\ &\quad + P_{00}R_{01} + \overline{T}_3^{(1)}; \\ R_3^{(1)} &= F_{11}u_{10} + F_{21}v_{10} + F_{31}u_{11} + F_{41}v_{11} + Q_{00}T_{01} + \\ &\quad + S_{00}R_{01} + \overline{R}_3^{(1)}. \end{aligned} \tag{3.100}$$

Присоединим к рассмотренному элементу соседний и приложим в узле (1,1) неизвестные силы $T_{11}$, $R_{11}$. Условия уравновешенности узлов (1,0) и (1,1) будут

$$
\begin{aligned}
&T_2^{(1)}+T_0^{(2)}+\overline{T}_{01}=0, \quad R_2^{(1)}+R_0^{(2)}-Cu_{10}+R_{01}=0;\\
&T_3^{(1)}+T_1^{(2)}+\overline{T}_{11}=0, \quad R_3^{(1)}+R_1^{(2)}+R_{11}+\overline{R}_{11}=0.
\end{aligned}
\tag{3.101}
$$

Подставив сюда (3.98) и (3.100), получим систему, из которой через $u_{20}$, $v_{20}$, $u_{21}$, $v_{21}$ выразятся известные внешние силы и задаваемые усилия $T_{01}, \ldots, R_{11}$, перемещения узлов (1,0) и (1,1). По аналогии с (3.100), найдем

$$
T_2^{(2)}=A_{12}u_{20}+A_{22}v_{20}+A_{32}u_{21}+A_{42}v_{21}+H_{01}T_{01}+
$$

$$
+K_{01}R_{01}+H_{11}T_{11}+K_{11}R_{11}+\overline{T}_2^{(2)};
$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$
R_3^{(2)}=F_{12}u_{20}+F_{22}v_{20}+F_{32}u_{21}+F_{42}v_{21}+Q_{01}T_{01}+
$$

$$
+S_{01}R_{01}+Q_{11}T_{11}+S_{11}R_{11}+\overline{R}_3^{(2)}.
$$

Присоединив последовательно элементы 2, 3, . . . , $k=\frac{l}{a}$, для элемента, содержащего точку $(k, 0)$, получим

$$
T_2^{(k)}=A_{1k}u_{k0}+A_{2k}v_{k0}+A_{3k}u_{k1}+A_{4k}v_{k1}+\sum_{m=0}^{k-1}H_{m,\,k-1}T_{m1}+
$$

$$
+\sum_{m=1}^{k-1}K_{m,\,k-1}R_{m1}+\overline{T}_2^{(k)};
$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$
R_3^{(k)}=F_{1k}u_{k0}+F_{2k}v_{k0}+\ldots+\sum_{m=0}^{k-1}Q_{m,\,k-1}T_{m1}+
$$

$$
+\sum_{m=0}^{k-1}S_{m,\,k-1}R_{m1}+\overline{R}_3^{(k)}.
$$

Теперь можно уравновесить узлы $(k, 0)$ и $(k, 1)$, предположив, что в последнем, помимо внешней нагрузки, действуют неизвестные силы $T_{k1}$, $R_{k1}$:

$$
\begin{aligned}
&T_2^{(k)}+\overline{T}_{k0}-Cu_{k0}=0; \quad T_3^{(k)}+\overline{T}_{k1}+T_{k1}=0;\\
&R_2^{(k)}+\overline{R}_{k0}-Cv_{k0}=0; \quad R_3^{(k)}+\overline{R}_{k1}+R_{k1}=0.
\end{aligned}
$$

Отсюда перемещения $u_{k0}$, $v_{k0}$, $u_{k1}$, $v_{k1}$ могут быть выражены как линейные функции неизвестных усилий $T_{01}$, $R_{01}$, $T_{11}, \ldots$, приложенных в верхних узлах парциальных систем. Далее можно воспользоваться полученными ранее соотношениями, связывающими перемещения в соседних вдоль оси $x$ точках, и выразить все перемещения через указанные выше неизвестные усилия:

$$
\begin{aligned}
u_{i0}&=\sum_{m=0}^{k}(a_{im}T_{i1}+b_{im}R_{i1})+\bar{u}_{i0};\\
v_{i0}&=\sum_{m=0}^{k}(d_{im}T_{i1}+f_{im}R_{i1})+\bar{v}_{i0};\\
u_{i1}&=\sum_{m=0}^{k}(h_{im}T_{i1}+l_{im}R_{i1})+\bar{u}_{i1};\\
v_{i1}&=\sum_{m=0}^{k}(p_{im}T_{i1}+q_{im}R_{i1})+\bar{v}_{i1},\\
&(i=0,\,1,\,2,\,\ldots,\,k).
\end{aligned}
\tag{3.102}
$$

Входящие сюда величины $a_{im}$, $b_{im}, \ldots, v_{i1}$ и являются откликами парциальной системы на воздействие внешних усилий.

Перейдем теперь к следующему слою и присоединим к парциальной системе $(k+1)$-й элемент, содержащий точки (0,1) и (0,2). В точке (0,2) приложим к парциальной системе неизвестные силы $T_{02}$ и $R_{02}$. Условия уравновешенности узлов (0,1) и (0,2) будут

$$
\begin{aligned}
&T_{01}+T_0^{(k+1)}-Cu_{01}=0; \quad T_1^{(k+1)}+T_{02}+\overline{T}_{02}=0;\\
&R_{01}+R_0^{(k+1)}=0; \quad R_1^{(k+1)}+R_{02}+\overline{R}_{02}=0.
\end{aligned}
\tag{3.103}
$$

Поскольку перемещения $u_{01}$, $v_{01}$, $u_{11}$, $v_{11}$ выражены через усилия $T_{i1}$, $R_{i1}$, система будет содержать в качестве неизвестных указанные усилия, силы $T_{02}$, $R_{02}$, и перемещения точки (1,2). Из нее можно исключить $T_{01}$, $R_{01}$ и $u_{02}$, $v_{02}$, выразив их через оставшиеся неизвестные усилия $T_{02}$, $R_{02}$, $T_{11}$, $R_{11}$, $T_{21}$, $R_{21}, \ldots, T_{k1}$, $R_{k1}$ и $u_{12}$, $v_{12}$.

Последовательно присоединяя элементы второго слоя и уравновешивая по два узла, можно постепенно исключить по два усилия и по два перемещения (усилия, приложенные к предыдущему слою, и перемещения свободного конца рассматриваемого слоя). В сечении, содержащем узлы $(k, 1)$ и $(k, 2)$, с помощью граничного условия и введенных усилий $T_{k2}$, $R_{k2}$ будут исключены все перемещения слоя $j=0$ и усилия $T_{i1}$, $R_{i2}$. После этого можно получить для перемещений $u_{i1}$, $v_{i1}$, $u_{i2}$, $v_{i2}$ линейные зависимости вида (3.102), куда будут входить только неизвестные усилия $T_{i2}$, $R_{i2}$ и свободные члены. Последующие слои проходятся аналогичным способом.

Рассмотрим теперь присоединение последнего слоя. В точке $(0, k-1)$ и $(0, k)$ должны выполняться условия уравновешенности

$$
\begin{aligned}
&T_{0,\,k-1}+T_0^{(k^2)}-Cu_{0,\,k-1}=0; \quad T_1^{(k^2)}-Cu_{0k}+\overline{T}_1^{(k^2)}=0;\\
&R_{0,\,k-1}+R_0^{(k^2)}=0; \quad R_1^{(k^2)}-Cv_{0k}+\overline{R}_1^{(k^2)}=0.
\end{aligned}
$$

Эти четыре уравнения позволяют исключить из рассмотрения величины $T_{0,\,k-1}$, $R_{0.\,k-1}$, $u_{0k}$, $v_{0k}$, выразив их через оставшиеся неизвестные силы $T_{i,\,k-1}$; $R_{i,\,k-1}$ и перемещения $u_{1k}$, $v_{ik}$. Присоединив следующий элемент с помощью условий уравновешенности узлов (1, $k$—1) (1, $k$), исключаем $T_{1,\,k-1}$, $R_{1,\,k-1}$ и т. д. Присоединив последний элемент, получим четыре уравнения уравновешенности узлов ($k$, $k$—1) и ($k$, $k$), в которые входят четыре неизвестных: $T_{k,\,k-1}$, $R_{k,\,k-1}$, $u_{k,\,k}$, $v_{k,\,k}$.

После их определения можно вычислить обратным ходом усилия $T_{i,\,k-1}$ и перемещения $u_{ik}$, $v_{ik}$, поскольку они ранее были выражены через найденные неизвестные. Это, в свою очередь, дает возможность определить $u_{i,\,k-1}$, $v_{i,\,k-1}$. Остальные величины находятся аналогичным способом.

Таким образом, и при исследовании многомерных процессов методом парциальных откликов физические представления используются на всех этапах расчета. Здесь, как и в одномерном случае, процесс составления исходных уравнений органически связан с самим их решением. Физические представления позволяют довольно определенно высказаться относительно устойчивости вычислений. Ведь последовательно наращивая элементы, мы непрерывно уменьшаем абсолютные значения жесткости системы и парциальных откликов. А поскольку искомые функции являются убывающими, однажды допущенная ошибка должна затухать с ростом числа присоединенных элементов. Более того, здесь выполняется принцип соответствия алгоритма вычислений исследуемому процессу и неустойчивость вычислений свидетельствует о неустойчивости равновесия исследуемой системы, если, конечно, наложены определенные ограничения на значение возмущений в процессе счета.

Помимо преимуществ, связанных с устойчивостью, алгоритм метода парциальных откликов позволяет заметно уменьшить объем вычислительных операций по сравнению с требуемым для решения исходных уравнений методом конечных элементов, например методом Гаусса. Присоединение одного конечного элемента связано с необходимостью решать систему четырех уравнений, т. е. требует $4^3k = 64\ k$ арифметических операций. Значит, на прохождение одного слоя в одном направлении будет использовано $64\ k^2$ операций сложения и умножения. Прохождение слоя в обратном направлении требует не более $6\ k^2$ операций. Следовательно, на прохождение всех слоев в одном направлении будет затрачено $70\ k^2$ операций. На заключительном этапе расчета (обратный ход) для нахождения каждого перемещения и усилия нужно $3\ k$ операций. Поскольку число таких усилий и перемещений равно $4\ k^2$, всего на обратный ход будет затрачено $12\ k^2$. Общее число $N$ операций составляет: $N \approx 82\ k^3$.

При решении методом Гаусса системы $n$ линейных алгебраических уравнений по $m > 1$ неизвестных в каждой требуется $N_1 \sim mn^3$



арифметических операций. В рассматриваемой задаче $m = 18$, $n = k^2$, следовательно, $N_1 \sim 18\ k^4$.

Метод парциальных откликов уже при $k > 5$ дает экономию машинного времени. Она заметно возрастает с увеличением числа узлов. Важно отметить, что уменьшение объема вычислений будет тем заметнее, чем выше мерность решаемой задачи и больше число независимых перемещений вершины элемента. Конечно, выше описана лишь основная идея реализации метода парциальных откликов в многомерных задачах. Вопросы наиболее компактной записи уравнений, некоторой рационализации счета и тому подобное требуют существенного расширения объема параграфа и потому не рассмотрены.

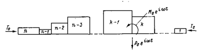



Рис. 3.38.

7. Расчет непризматической балки переменного сечения (корпуса судна) путем комбинирования метода конечных элементов с методом парциальных откликов. В качестве конкретного примера рассмотрим непризматическую балку ступенчато-переменной массы и жесткости, загруженную в произвольном сечении силой $P_0e^{i\omega t}$ и моментом $M_0e^{i\omega t}$. Кроме того, балка загружена постоянной сжимающей силой $T_0$ (рис. 3.38).

Решив эту задачу и полагая $T_0 = 0$, нетрудно получить формулы для расчета корпуса судна. В общем случае, при $T_0 \neq 0$ мы получаем зависимости для уточненного расчета элементов рамных конструкций, валопроводов и т. п.

Рассекая балку на левом конце $j$-го участка ($j < k$), легко усмотреть, что к этому концу будут приложены со стороны ($j+1$)-го участка некоторая неизвестная пока сила $P_{1,\,j}e^{i\omega t}$ и некоторый тоже неизвестный момент $M_{1,\,j}e^{i\omega t}$. Пусть динамическая податливость правой части системы, включающей участки 1 — ($j$—1), характеризуется следующими коэффициентами (рис. 3.39): $\delta_{p,\,0-(j-1)}$, равным прогибу левого конца ($j$—1)-го участка под действием силы частотой $\omega$ и единичной амплитудой, приложенной на этом конце; $\delta_{m,\,-0-(j-1)}$, равным углу поворота левого конца ($j$—1)-го участка, вызванного действием силы с частотой $\omega$ и единичной амплитудой, приложенной на этом конце; $\varphi_{p,\,0-(j-1)}$, равным углу поворота левого конца ($j$—1)-го участка, вызванного действием силы с частотой $\omega$ и единичной амплитудой, приложенной на этом конце; $\varphi_{m,0-(j-1)}$, равным углу поворота левого конца $(j-1)$-го участка, вызванного действием изгибающего момента с частотой $\omega$ и единичной амплитудой, приложенного на этом конце.

Если положительные направления силы и момента на левом конце участка соответствуют направлениям стрелок на рис. 3.39, а поворот любого сечения положителен, когда он происходит по часовой стрелке, то в силу известной теоремы взаимности $\delta_m = -\varphi_p$.

Расчет балки сводится, по существу, к определению коэффициентов $\delta_{p,0-j}$; $\delta_{m,0-j}$; $\varphi_{p,0-j}$ и $\varphi_{m,0-}$ при известных значениях $\delta_{p,0-(j-1)}$; $\delta_{m,0-(j-1)}$; $\varphi_{p,0-(j-1)}$; $\varphi_{m,0-(j-1)}$. Граничные условия для правого конца первого участка известны. Следовательно, переходя ко второму, третьему и последующим участкам, можно определить граничные условия для левого конца $k$-го участка. Подобным же образом, двигаясь от участка $n$, можно найти граничные условия для правого конца участка $(k+1)$. Определение перемещений сечения между $k$-м и $(k+1)$-м участками, а также перемещений в других сечениях балки трудностей не вызывает и будет показано в дальнейшем.

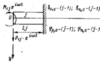



Рис. 3.39.

Рассмотрим более подробно деформации участка (см. рис. 3.39). Рассекая балку в любом сечении $x$ и обозначая через $y$ суммарный прогиб балки, через $y_1$ — прогиб от изгиба и $y_2$ — прогиб от сдвига, запишем уравнения равновесия

$$P_1 e^{i\omega t} - \int_0^x m_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\, dx = N(x, t);$$

$$M_1 e^{i\omega t} - \int_0^x \int_0^x m_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\, dx + \int_0^x m_0 \rho^2 \frac{\partial^3 y_1}{\partial x\, \partial t^2}\, dx +$$

$$+ P_1 e^{i\omega t} x - T_0 [y(x) - y(0)] = M(x, t), \tag{3.104}$$

где $m_0$ — комплексная погонная масса балки, $\rho$ — радиус инерции погонной массы, $N(x, t)$ и $M(x, t)$ — перерезывающая сила и изгибающий момент.

Подставим в (3.104) известные соотношения

$$M(x, t) = EI \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}; \quad N(x, t) = -G\Omega \frac{\partial y_2}{\partial x}, \tag{3.105}$$

где $I$ — момент инерции сечения; $\Omega$ — эффективная площадь сечения.



Продифференцировав (3.104), будем иметь систему уравнений

$$EI \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^4} + m_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - m_0 \rho^2 \frac{\partial^4 y_1}{\partial x^2 \partial t^2} + T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0;$$

$$G\Omega \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} - m_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \tag{3.106}$$

Чтобы получить удобное выражение перерезывающей силы, заменим второй член первого уравнения (3.106) членом $G\Omega \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}$ и проинтегрируем все члены. Получим

$$N(x, t) = -G\Omega \frac{\partial y_2}{\partial x} = EI \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} - m_0 \rho^2 \frac{\partial^3 y_1}{\partial x\, \partial t^2} + T_0 \frac{\partial y}{\partial x}. \tag{3.107}$$

Прогибы балки будем разыскивать в виде $y = w(x)\, e^{i\omega t}$; $y_1 = w_1(x)\, e^{i\omega t}$; $y_2 = w_2(x)\, e^{i\omega t}$. Тогда решение задачи определится системой уравнений

$$EI \frac{d^4 w_1}{dx^4} - m_0 \omega^2 w + m_0 \rho^2 \omega^2 \frac{d^2 w_1}{dx^2} + T_0 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0;$$

$$G\Omega \frac{d^2 w_2}{dx^2} + m_0 \omega^2 w = 0 \tag{3.108}$$

при граничных условиях: $x = 0$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{M_1}{EI}; \quad \frac{d^3 w}{dx^3} + \frac{m_0 \rho^2 \omega^2}{EI} \frac{dw_1}{dx} + \frac{T_0}{EI} \frac{dw}{dx} = \frac{P_1}{EI};$$

$x = l$

$$w - \left(EI \frac{d^3 w_1}{dx^3} + m_0 \rho^2 \omega^2 \frac{dw_1}{dx} + T_0 \frac{dw}{dx}\right) \delta_{p,0-(j-1)} -$$

$$- EI \frac{d^2 w_1}{dx^2} \delta_{m,0-(j-1)} = 0; \tag{3.109}$$

$$\frac{dw_1}{dx} - \left(EI \frac{d^3 w_1}{dx^3} + m_0 \rho^2 \omega^2 \frac{dw_1}{dx} + T_0 \frac{dw}{dx}\right) \varphi_{p,0-(j-1)} -$$

$$- EI \frac{d^2 w_1}{dx^2} \varphi_{m,0-(j-1)} = 0.$$

При выводе последнего граничного условия учитывалось, что угол поворота сечения балки равен $\frac{dw_1}{dx}$, а не $\frac{dw}{dx}$, так как сдвиг вызывает скольжение слоев балки и изменение суммарной стрелки прогиба, но не изменение поворотов сечений.

Складывая уравнения (3.108) и интегрируя результат два раза, получим

$$w_2 = -\frac{EI}{G\Omega} \frac{d^2 w_1}{dx^2} - \frac{m \rho^2 \omega^2}{G\Omega} w_1 - \frac{T_0}{G\Omega} w + Ax + B, \tag{3.110}$$

причем из граничных условий при $x = 0$ ясно, что $A = 0$.

Исключая из уравнений (3.109) $w_1$, имеем

$$EI\frac{d^4w}{dx^4}+\left(T_0+\frac{m_0\omega^2}{G\Omega}EI+m_0\rho^2\omega^2\right)\frac{d^2w}{dx^2}-$$
$$-m_0\omega^2\left(1-\frac{m_0\rho^2\omega^2}{G\Omega}\right)w=0$$

или в безразмерном виде

$$\frac{d^4w}{dx_1^4}+\left[k^2+\mu_c^2(1+\gamma_1)\right]\frac{d^2w}{dx_1^2}-\mu_n^4(1-\gamma_2)w=0, \qquad (3.111)$$

где

$$x_1=\frac{x}{l};\quad k=\sqrt{\frac{T_0l^2}{EI}};\quad \mu_c=\sqrt{\frac{m_0\omega^2l^2}{G\Omega}};$$
$$\mu_n=\sqrt[4]{\frac{m_0\omega^2l^4}{EI}};\quad \gamma_1=\frac{\rho^2G\Omega}{EI};\quad \gamma_2=\frac{m_0\rho^2\omega^2}{G\Omega}.$$

Общий интеграл (3.111) имеет вид

$$w=A_1\operatorname{ch}\alpha x_1+A_2\operatorname{sh}\alpha x_1+A_3\cos\beta x_1+A_4\sin\beta x_1, \qquad (3.112)$$

где

$$\alpha=\sqrt{\sqrt{\left(\frac{k^2+\mu_c^2(1+\gamma_1)^2}{2}\right)^2+\mu_n^4(1-\gamma_2)}-\frac{k^2+\mu_c^2(1+\gamma_1)}{2}};$$

$$\beta=\sqrt{\sqrt{\left(\frac{k^2+\mu_c^2(1-\gamma_1)^2}{2}\right)^2+\mu_n^4(1-\gamma_2)}+\frac{k^2+\mu_c^2(1+\gamma_1)}{2}}.$$

Граничные условия преобразуются к виду: при $x_1=0$

$$\frac{d^2w_1}{dx_1^2}+\mu_c^2w=\frac{M_1l^2}{EI},$$

$$\frac{d^3w}{dx_1^3}+\left[k^2+\mu_c^2(1+\gamma_1)\right]\frac{dw}{dx_1}+\mu_n^4\gamma_2\int_0^{x_1}w\,dx_1=\frac{P_1l^3}{EI};$$

при $x_1=1$

$$w-\frac{EI}{l^3}\left\{\frac{d^3w}{dx_1^3}+\left[k_2+\mu_c^2(1+\gamma_1)\right]\frac{dw}{dx_1}+\mu_n^4\gamma_2\int_0^{x_1}w\,dx_1\right\}\delta_{p,0-(j-1)}-$$
$$-\frac{EI}{l^2}\left(\frac{d^2w}{dx_1^2}+\mu_c^2w\right)\delta_{m,0-(j-1)}=0; \qquad (3.113)$$

$$\frac{dw}{dx_1}-\frac{EI}{l^3}\left\{\frac{d^3w}{dx_1^3}+\left[k^2+\mu_c^2(1+\gamma_1)\right]\frac{dw}{dx_1}+\mu_n^4\gamma_2\int_0^{x_1}w\,dx_1\right\}\varphi_{p,0-(j-1)}-$$
$$-\frac{EI}{l^2}\left(\frac{d^2w}{dx_1^2}+\mu_c^2w\right)\varphi_{m,0-(j-1)}=0.$$



Коэффициенты податливости участка $j$ равны

$$\delta_{p,j}=w(0),\quad \varphi_{p,j}=w_1'(0)\ \text{при}\ M_\cdot=0,\ P_1=1; \qquad (3.114)$$
$$\delta_{m,j}=w(0),\quad \varphi_{m,j}=w_1'(0)\ \text{при}\ M_1=1,\ P_1=0,\ .$$

где

$$w_1'(0)=\frac{1}{l}\left(\frac{dw}{dx_1}-\frac{dw_2}{dx_1}\right)+\frac{1}{l}\left(\frac{dw}{dx_1}+\frac{P_1l}{G\Omega}\right).$$

Формулы (3.112) — (3.114) дают полное решение задачи.

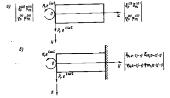



Рис. 3.40.

Для практических целей удобно применять следующий искусственный прием:

на первом этапе рассчитать деформации свободной балки (рис. 3.40, *а*) и найти коэффициенты податливости ее обоих концов;

сопрячь свободную балку с отброшенной частью системы (рис. 3.40, *б*) и найти усилия в заделке $M_з$ и $P_з$ из уравнений

$$\delta_p^{(\text{п})}-P_з^{(p)}\delta_p^{(\text{л})}+M_з^{(p)}\delta_m^{(\text{л})}=P_з^{(p)}\delta_{p,0-(j-1)}+M_з^{(p)}\delta_{m,0-(j-1)}; \qquad (3.115)$$
$$\varphi_p^{(\text{п})}+P_з^{(p)}\varphi_p^{(\text{л})}-M_з^{(p)}\varphi_m^{(\text{л})}=P_з^{(p)}\varphi_{p,0-(j-1)}+M_з^{(p)}\varphi_{m,0-(j-1)};$$
$$\delta_m^{(\text{п})}-P_з^{(m)}\delta_p^{(\text{л})}+M_з^{(m)}\delta_m^{(\text{л})}=P_з^{(m)}\delta_{p,0-(j-1)}+M_з^{(m)}\delta_{m,0-(j-1)}; \qquad (3.116)$$
$$\varphi_m^{(\text{п})}+P_з^{(m)}\varphi_p^{(\text{л})}-M_з^{(m)}\varphi_m^{(\text{л})}=P_з^{(m)}\varphi_{p,0-(j-1)}+M_з^{(m)}\varphi_{m,0-(j-1)};$$

найти коэффициенты податливости

$$\delta_{p,j}=\delta_p^{(\text{л})}-P_з^{(p)}\delta_p^{(\text{п})}+M_з^{(p)}\delta_m^{(\text{п})},\ \varphi_{p,j}=\varphi_p^{(\text{л})}+P_з^{(p)}\varphi_p^{(\text{п})}-M_з^{(p)}\varphi_m^{(\text{п})}; \qquad (3.117)$$
$$\delta_{m,j}=\delta_m^{(\text{л})}-P_з^{(m)}\delta_p^{(\text{п})}+M_з^{(m)}\delta_m^{(\text{п})},\ \varphi_{m,j}=$$
$$=\varphi_m^{(\text{л})}+P_з^{(m)}\varphi_p^{(\text{п})}-M_з^{(m)}\varphi_m^{(\text{п})}.$$

Коэффициенты податливости для свободной балки

$$\delta_p^{(л)} = -A_{1,p}\operatorname{ch}\alpha - A_{2,p}\operatorname{sh}\alpha - A_{3,p}\cos\beta - A_{4,p}\sin\beta;$$

$$\delta_p^{(п)} = -A_{1,p} - A_{3,p};$$

$$\varphi_p^{(л)} = \frac{\alpha}{l}\left(A_{1,p}\operatorname{sh}\alpha + A_{2,p}\operatorname{ch}\alpha\right) + \frac{\beta}{l}\left(-A_{3,p}\sin\beta + {}\right.$$
$$\left. + A_{4,p}\cos\beta\right) + \frac{1}{G\Omega};$$

$$\varphi_p^{(п)} = \frac{\alpha}{l}A_{2,p} + \frac{\beta}{l}A_{4,p};$$

$$\delta_m^{(л)} = A_{1,m}\operatorname{ch}\alpha + A_{2,m}\operatorname{sh}\alpha + A_{3,m}\cos\beta + A_{4,m}\sin\beta;$$

$$\delta_m^{(п)} = A_{1,m} + A_{3,m}; \tag{3.118}$$

$$\varphi_m^{(л)} = -\frac{\alpha}{l}\left(A_{1,m}\operatorname{sh}\alpha + A_{2,m}\operatorname{ch}\alpha\right) - \frac{\beta}{l}\left(-A_{3,m}\sin\beta + A_{4,m}\cos\beta\right);$$

$$\varphi_m^{(п)} = -\frac{\alpha}{l}A_{2,m} - \frac{\beta}{l}A_{4,m};$$

$$A_{1,p} = -\frac{l^3}{EI}\,\frac{\dfrac{\beta^2-\mu_c^2}{\alpha^2+\mu_c^2}\left[\dfrac{\beta^3-\beta\gamma^2}{\alpha^3+\alpha\gamma^2}\left(\alpha^2+\mu_c^2\right)\operatorname{sh}\alpha - \left(\beta^2-\mu_c^2\right)\sin\beta\right]}{\Delta};$$

$$A_{1,m} = \frac{l^2}{EI}\,\frac{\dfrac{\beta^2-\mu_c^2}{\alpha^2+\mu_c^2}\left[(\beta^3-\beta\gamma^2)(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta) + \dfrac{\beta^3-\beta\gamma^2}{\alpha^3+\alpha\gamma^2}\,\dfrac{\mu_n^4\gamma^2}{\alpha}(\operatorname{ch}\alpha-1) + \dfrac{\mu_n^4\gamma^2}{\beta}(1-\cos\beta)\right]}{\Delta};$$

$$A_{2,p} = \frac{l^3}{EI}\,\frac{\dfrac{\beta^3-\beta\gamma^2}{\alpha^3-\alpha\gamma^2}\left(\beta^2-\mu_c^2\right)(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)}{\Delta};$$

$$A_{2,m} = -\frac{l^2}{EI}\,\frac{\dfrac{\beta^3-\beta\gamma^2}{\alpha^3+\alpha\gamma^2}\left[\dfrac{\beta^2-\mu_c^2}{\alpha^2+\mu_c^2}\left(\alpha^3+\alpha\gamma^2+\dfrac{\mu_n^4\gamma_2}{\alpha}\right)\operatorname{sh}\alpha + \left(\beta^3-\beta\gamma^2+\dfrac{\mu_n^4\gamma_2}{\beta}\right)\sin\beta\right]}{\Delta};$$

$$A_{3,p} = -\frac{l^3}{EI}\,\frac{\dfrac{\beta^3-\beta\gamma^2}{\alpha^3+\alpha\gamma^2}\left(\alpha^2+\mu_c^2\right)\operatorname{sh}\alpha - \left(\beta^2-\mu_c^2\right)\sin\beta}{\Delta};$$



$$A_{3,m} = \frac{l^2}{EI}\times$$
$$\times\frac{(\beta^3-\beta\gamma^2)(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta) - \dfrac{\beta^3-\beta\gamma^2}{\alpha^3+\alpha\gamma^2}\,\dfrac{\mu_n^4\gamma^2}{\alpha}(\operatorname{ch}\alpha-1) + \dfrac{\mu_n^4\gamma_2}{\beta}(1-\cos\beta)}{\Delta};$$

$$A_{4,p} = \frac{l^3}{EI}\,\frac{\left(\beta^2-\mu_c^2\right)(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)}{\Delta};$$

$$A_{4,m} = -\frac{l^2}{EI}\,\frac{\dfrac{\beta^2-\mu_c^2}{\alpha^2+\mu_c^2}\left(\alpha^3+\alpha\gamma^2+\dfrac{\mu_n^4\gamma_2}{\alpha}\right)\operatorname{sh}\alpha + \left(\beta^3-\beta\gamma^3+\dfrac{\mu_n^4\gamma_2}{\beta}\right)\sin\beta}{\Delta};$$

$$\gamma = k^2 + \mu_c^2\left(1+\gamma_1\right);$$

$$\Delta = \left(\beta^2-\mu_c^2\right)(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta)\,[(\beta^3-\beta\gamma^2)(\operatorname{ch}\alpha-\cos\beta) + {}$$
$$+\frac{\beta^3-\beta\gamma^2}{\alpha^3+\alpha\gamma^2}\,\frac{\mu_n^4\gamma_2}{\alpha}(\operatorname{ch}\alpha-1) + \frac{\mu_n^4\gamma_2}{\beta}(1-\cos\beta)\Big] -$$
$$-\left[\frac{\beta^2-\mu_c^2}{\alpha^2+\mu_c^2}\left(\alpha^3+\alpha\gamma^2+\frac{\mu_n^4\gamma_2}{\alpha}\right)\operatorname{sh}\alpha + \left(\beta^3-\beta\gamma^2+\frac{\mu_n^4\gamma_2}{\beta}\right)\sin\beta\right]\times$$
$$\times\left[\frac{\beta^3-\beta\gamma^2}{\alpha^3+\alpha\gamma^2}\left(\alpha^2+\mu_c^2\right)\operatorname{sh}\alpha - \left(\beta^2-\mu_c^2\right)\sin\beta\right].$$

При последовательном исключении участков слева направо (от участка $n$) общие выражения для коэффициентов податливости можно оставлять прежними.

Однако ввиду принятого правила знаков для внутренних усилий, прогибов и углов поворота будем полагать, что положительный момент $M_{1,s}$, умноженный на положительный коэффициент $\varphi_{m,n-s}$, дает отрицательный угол поворота, а положительная сила, умноженная на положительный коэффициент $\delta_{p,n-s}$, дает отрицательный прогиб.

Условия сопряжения в сечении, где приложены внешние усилия (рис. 3.38), можно записать в виде

$$\left(M_0+M_{1,k}\right)\delta_{m,0-k} + \left(P_0+P_{1,k}\right)\delta_{p,0-k} = M_{1,k}\delta_{m,n-k} - P_{1,k}\delta_{p,n-k};$$

$$\left(M_0+M_{1,k}\right)\varphi_{m,0-k} + \left(P_0+P_{1,k}\right)\varphi_{p,0-k} =$$
$$= -M_{1,k}\varphi_{m,n-k} + P_{1,k}\varphi_{p,n-k}.$$

Определив внутренние усилия $M_{1,k}$ и $P_{1,k}$, нетрудно найти внутренние усилия и перемещения в любом сечении рассматриваемой балки.

## § 21. Метод динамических возмущений [1]

1. Общая идея метода. Пусть исследуются деформации произвольной линейной упругой системы, находящейся в положении статического равновесия. Последнее задается граничными условиями на поверхностях и уравнениями равновесия, которые полагаем записанными в перемещениях

$$L_i(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)=q_i(x,\ y,\ z),\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{3.119}$$

где $u_k$ — перемещения системы; $L_i$ — линейный оператор; $q_i(x, y, z)$ — компоненты внешней нагрузки; $x$, $y$, $z$ — координаты.

Предположим, что в момент времени $t=t_0$ система выведена из положения статического равновесия в положение $u_1^0(x, y, z)$, $u_2^0(x, y, z), \ldots, u_n^0(x, y, z)$ и затем отпущена с нулевой скоростью. Если система имеет сопротивления, пропорциональные скоростям, то движение ее при $t>t_0$ описывается системой уравнений

$$m_i\ddot{u}_i+2n_i\dot{u}_i+L_i(u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n)=q_i(x,\ y,\ z), \tag{3.120}$$

граничными условиями на поверхностях и начальными условиями

$$u_i(t_0)=u_i^0,\quad \dot{u}_i(t_0)=0, \tag{3.121}$$

где $m_i$ — массы, участвующие в движении по направлению смещения $u_i$; $n_i$ — коэффициенты сопротивлений при движении по направлению $u_i$ (точкой помечено дифференцирование по времени).

Движение системы имеет затухающий характер. Независимо от $u_i^0$ ее смещения с течением времени приближаются к смещениям, характерным для положения статического равновесия системы.

Эти общеизвестные положения дают возможность построить довольно удобный для реализации на ЭВМ метод численного решения статических задач.

Вместо исходной системы (3.119) будем интегрировать систему (3.120) при тех же граничных условиях. Пример для системы (3.120) при $t=0$ нулевые скорости $v_i=\dot{u}_i=0$ и произвольные, но удовлетворяющие граничным условиям выражения для смещений, $u_i(0)=u_{i0}(x,\ y,\ z)$.

Применим для интегрирования (3.120) по времени метод Эйлера. Очевидно, что при $t=t_1=\Delta t$

$$u_i(t_1)=u_{i1}=u_{i0}+v_{i0}\Delta t;$$

$$v_i(t_1)=v_{i1}=v_{i0}+[q_i-L_i(u_{10},\ u_{20},\ \ldots,\ u_{n0})-2n_iv_{i0}]\,\Delta t. \tag{3.122}$$

Для произвольного $t_k=k\Delta t$ имеем рекуррентные зависимости

$$u_i(t_k)=u_{ik}=u_{i,\,k-1}+v_{i,\,k-1}\Delta t;$$

$$v_i(t_k)=v_{ik}=v_{i,\,k-1}+\big[q_i-L_i(u_{1,\,k-1},\ u_{2,\,k-1},\ \ldots,\ u_{n,\,k-1})-$$
$$-2n_iv_{i,\,k-1}\big]\,\Delta t. \tag{3.123}$$

[1] Параграф написан О. М. Палием.



Согласно сказанному выше, при $k\to\infty$ скорости $v_{ik}$ затухают, а $u_{ik}$ стремятся к решениям системы (3.119). Задаваясь допустимой погрешностью $\varepsilon=u_i-u_{ik}$, можно остановить итерационный процесс при каком-то конечном $k$ и принять полученные $u_{ik}$ за искомые.

Отметим, что при реализации на ЭВМ дифференциальные операторы $L_i(\ \ )$ заменяются разностными $\overline{L}_i(\ \ )$. Тогда в любой узловой точке внутри области интегрирования (3.119) должны соблюдаться равенства (3.123). Смещения точек вне области интегрирования выражаются через смещения внутренних точек с помощью граничных условий, которые также записываются в конечно-разностной форме.

Таким образом, метод динамических возмущений сводится к следующему:

— исходные уравнения статики записываются в конечно-разностной форме и дополняются членами, учитывающими динамику процесса, в число последних вводятся силы сопротивления, пропорциональные скоростям;

— задается произвольное, но удовлетворяющее граничным условиям задачи отклоненное от статического положения равновесия состояние системы (смещения);

— рассчитывается методом Эйлера движение системы, которое с течением времени локализуется возле положения статического равновесия;

— найденные при достаточно большом времени значения смещений принимаются за смещения, отвечающие положению статического равновесия.

2. Выбор коэффициентов сопротивлений. Объем вычислений при использовании метода динамических возмущений зависит от выбора возмущенного состояния системы $u_{i0}$ и коэффициента сопротивления. Относительно $u_{i0}$ можно рекомендовать использовать значения $u_i$, найденные любым приближенным методом, пусть даже весьма грубые. Что касается значений $n_i$, то этот вопрос требует специального рассмотрения. Приняв малые $n_i$, получим весьма медленно затухающие колебания возле положения статического равновесия. При больших $n_i$ будет наблюдаться апериодическое движение с быстро затухающими скоростями, и, как следствие, прогиб будет также медленно стремиться к статическому равновесию.

Для выбора оптимальных значений $n_i$ произведем аналитический анализ движения системы. С этой целью разложим перемещения $u_i$ в ряд по формам $\Phi_{ij}(x,\ y,\ z)$ главных свободных колебаний:

$$u_i=\sum_j u_{ij}(t)\,\Phi_{ij}(x,\ y,\ z). \tag{3.124}$$

Тогда для $j$-й гармоники при единичных массах (их значения роли не играют) получим

$$\ddot{u}_{ij}+2n_i\dot{u}_{ij}+\lambda_j^2u_{ij}=P_{ij}, \tag{3.125}$$

где $\lambda_j$ — частота главных свободных колебаний по форме $\Phi_j$ при $n_i = 0$; $P_{ij}$ — обобщенная сила.

Решением системы уравнений (3.120) при $m_i = 1$ и начальных условиях (3.121) будет

$$u_i = u_i^* + \varepsilon_i; \tag{3.126а}$$

$$\varepsilon_i = \sum_j \frac{P_{ij}}{\lambda_j^2} l^{-n_i t} \left( \cos \lambda_j^* t + \frac{n_i}{\lambda_j^*} \sin \lambda_j^* t \right) \times$$

$$\times \left( 1 - \frac{u_{i0} \lambda_j^*}{P_{ij}} \right) \Phi_{ij}, \tag{3.126б}$$

где $u_i^*$ — искомый статический прогиб; $\varepsilon_i$ — динамическая добавка к нему, определяющая при заданном $t$ погрешность расчета;

$$\lambda_j^* = \sqrt{\lambda_j^2 - n_i^2}.$$

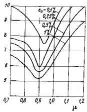


Рис. 3.41.

Для выбора оптимального $n_i$ при заданной погрешности $\varepsilon_i \leqslant \overset{*}{\varepsilon_0}$ требуется решить (3.126б) относительно $t$ и найти $n_i$, обращающее $t$ в минимум. В общем виде точно решить такую задачу невозможно. Однако не представляет труда дать приближенную оценку оптимального $n_i$.

Ограничимся в (3.126б) главным членом разложения (частота $\lambda_j = \lambda_{гл}$) и, кроме того, примем $u_{i0} = 0$, что соответствует одному из наихудших начальных приближений для итерационного процесса (3.123). Тогда имеем относительную погрешность в смещениях

$$\varepsilon_0 = \frac{\overset{*}{e_0}}{u_i^*} \approx \frac{e^{-\mu T} \sin \left( \sqrt{1 - \mu^2}\, T + \varphi \right)}{\sqrt{1 - \mu^2}}, \tag{3.127}$$

где $\mu = n_i / \lambda_{гл}$; $\varphi = \arcsin \sqrt{1 - \mu^2}$, $T = \lambda_{гл} t^*$; $t$ — время, при котором разница между динамическим и статическим (искомым) смещением не превышает $\overset{*}{\varepsilon_0}$.

Решение уравнения (3.127) относительно $T$ при различных $\mu$ и $\varepsilon_0$ показано на рис. 3.41. Видно, что минимальное $t$ получается при $n_i \approx 0{,}9\ \lambda_{гл}$.

Важно подчеркнуть, что процесс вычислений сходится при любом положительном $\mu$, а изменение $\mu$ в довольно широких пределах (0,6—1,2) не приводит к резкому увеличению $T$.

Оценим теперь максимально допустимое значение $\Delta T$. Пусть расстояние между узлами сетки в направлениях $x$, $y$, $z$ составляют



$h_x$, $h_y$, $h_z$; число узловых точек внутри области интегрирования — $k_x$, $k_y$, $k_z$. Ясно, что разностная схема может учесть формы колебаний с числом узлов не больше $k_x$, $k_y$, $k_z$. Обозначим через $\lambda_{max}$ наивысшую из частот главных свободных колебаний системы, отвечающих таким формам. Для правильного описания какой-либо формы колебаний нужно располагать в пределах периода колебаний не менее чем пятью-шестью расчетными точками. Отсюда

$$\Delta t \leqslant \frac{2\pi}{5\lambda_{max}}; \quad \Delta T \leqslant \frac{2\pi}{5} \frac{\lambda_{гл}}{\lambda_{max}}. \tag{3.128}$$

Имея неравенства (3.128) и воспользовавшись данными рис. 3.41, нетрудно оценить требуемое число шагов по времени (число итераций), обеспечивающее погрешность не более $\varepsilon_0$:

$$k_t(\varepsilon_0) = \frac{T(\varepsilon_0)}{\Delta T} = \frac{5T(\varepsilon_0)}{2\pi} \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{гл}}. \tag{3.129}$$

Выражение (3.129) дает, как отмечалось, оценку требуемого числа шагов сверху.

Частоты главных свободных колебаний для многих упругих систем изменяются пропорционально квадрату наибольшего числа узлов в рассматриваемой форме. Отсюда следует $k_t \sim k_i^2$, $N_{тр} \sim k_i^2 k_x k_y k_z$, где $k_i$ — наибольшая из величин $k_x$, $k_y$, $k_z$.

При использовании обычного конечно-разностного метода и схемы Гаусса требуемое число операций $N_{тр}$ составляет не менее $N_{тр} \sim (k_x k_y k_z)^{2-3}$. Отсюда становятся ясными преимущества метода динамических возмущений при решении многомерных задач. Мы не говорим уже здесь о таком важном свойстве, как устойчивость процесса вычислений.

3. Пример расчета. *Проиллюстрируем особенности* применения метода на примере квадратной пластины (стороны $2a \times 2a$) постоянной толщины $h$, загруженной равномерно распределенной поперечной нагрузкой $q$; пластина шарнирно оперта по всем кромкам.

Система исходных уравнений и граничные условия для такой пластины (начало координат в центре) имеют вид

$$L(\bar{w}) = \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \xi^4} + 2 \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \frac{\partial^4 \bar{w}}{\partial \eta^4} = 1; \tag{3.130}$$

при

$$\xi = \frac{x}{a} = 1 \quad \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \xi^2} = \bar{w} = 0;$$

$$\eta = \frac{y}{a} = 1 \quad \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \eta^2} = \bar{w} = 0, \tag{3.130а}$$

где $\bar{w} = w\, D/(qa^4)$; $w$ — нормальный прогиб; $D$ — цилиндрическая жесткость.

Частоты колебаний $\lambda_{гл}$ и $\lambda_{max}$ пластины определяются по известным формулам

$$\lambda_{гл}=\frac{\pi^2}{2a^2}\sqrt{D},\quad \lambda_{max}=k_x^2\frac{\pi^2}{2a^2}\sqrt{D}. \tag{3.131}$$

Запишем (3.130) и (3.130а) в конечно-разностной форме (квадратная сетка с ячейкой $b \times b$):

$$\begin{gathered}\bar{L}(i,\ j)=\bar{L}(\bar{w})=s^4\{20\bar{w}(i,\ j)-8[\bar{w}(i+1,\ j)+\bar{w}(i-1,\ j)+\\ +\bar{w}(i,\ j+1)+\bar{w}(i,\ j-1)]+2[\bar{w}(i+1,\ j+1)+\bar{w}(i+1,\ j-1)+\\ +\bar{w}(i-1,\ j+1)+\bar{w}(i-1,\ j-1)]+\bar{w}(i+2,\ j)+\\ +\bar{w}(i-2,\ j)+\bar{w}(i,\ j+2)+\bar{w}(i,\ j-2)\}=1; \qquad (3.132)\\ \bar{w}(-i,\ j)=\bar{w}(i,\ j);\ \bar{w}(i,\ -j)=\bar{w}(i,\ j);\\ \bar{w}(-i,\ -j)=\bar{w}(i,\ j);\ \bar{w}(i,\ s)=\bar{w}(s,\ j)=0;\\ \bar{w}(i,\ s+1)+\bar{w}(i,\ s-1)=0;\ \bar{w}(s+1,\ j)+\bar{w}(s-1,\ j)=0,\end{gathered}$$

где $a=bs$; $\bar{w}(i,j)$ — прогиб в узловой точке с координатами $\varepsilon=ib$ $\eta=jb$, $k_x=2s$.

Согласно данным п. 2, примем

$$n=0{,}9\lambda_{гл}=0{,}9\frac{\pi^2}{2a^2}\sqrt{D}; \tag{3.133}$$

$$\Delta t=\frac{2\pi}{5\lambda_{max}}=\frac{0{,}0625a^2}{s^2\sqrt{D}}.$$

Подстановка (3.132) и (3.133) в (3.123) дает

$$\bar{w}_k(i,\ j)=\bar{w}_{k-1}(i,\ j)+\frac{0{,}0625}{s^2}\bar{v}_{k-1}(i,\ j);$$

$$v_k(i,\ j)=\bar{v}_{k-1}(i,\ j)\left(1-\frac{0{,}5625}{s^2}\right)+\frac{0{,}0625}{s^2}-0{,}0625s^2\bar{L}_{k-1}(i,\ j), \tag{3.134}$$

$$\bar{v}=v\frac{\sqrt{D}}{qa^2}.$$

*Требуемое число итераций, обеспечивающее* погрешность вычислений по (3.134) не более 1%, составляет

$$k\cong\frac{5T(\varepsilon_0)}{2\pi}\frac{\lambda_{max}}{\lambda_{гл}}\cong 16\,s^2.$$

На рис. 3.42 представлены результаты расчета пластины при $s=2$. Видно, что расхождение численного решения с точным, даже при таком малом $s$, не превышает 5%; требуемое фактическое число итераций (около 70) совпало с расчетным.



Изложенный выше алгоритм может быть использован и для исследования нелинейных процессов статического деформирования конструкций. *Общая схема и ее обоснования остаются неизменными*, кроме вида операторов $L_i(\ )$, которые могут трансформироваться при переходе от итерации к итерации.

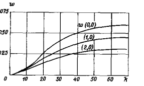



Рис. 3.42.

*Данные выше оценки значений $n_i$ шага $\Delta t$ и требуемого числа* итераций, по-видимому, можно сохранить и в нелинейном случае, хотя, безусловно, они станут более грубыми.

## § 22. Некоторые особенности применения метода конечных разностей

*Существо метода конечных разностей* изложено в § 11, а его подробному рассмотрению посвящена обширная литература [7, 14], поэтому остановимся лишь на некоторых особенностях этого метода, относительно мало изложенных в литературе.

При аппроксимации производных конечными разностями получаемые в итоге алгебраические уравнения автоматически превращаются в исходные дифференциальные, если полагать шаг разности $h=0$. Однако это еще не гарантирует точности при любом конечном, даже очень малом, значении $h$.

Пусть исходная математическая модель имеет вид

$$u'+Au=0; \tag{3.135}$$

$$u(0)=1,\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ A>0. \tag{3.136}$$

Для решения системы (3.135) на ЭВМ она заменяется разностными уравнениями. Взяв простейшие аппроксимации производной, можно, например, записать

$$\mu\frac{u_{k+1}-u_{k-1}}{2h}+(1-\mu)\frac{u_{k+1}-u_k}{h}+Au_k=0; \tag{3.137}$$

$$u_0=u_1=1, \tag{3.138}$$

где $h = \frac{1}{n}$ — шаг; $n$ — число участков; $u_i$ — значения функции в точке $x_i = ih$.

Все казалось бы ясно. Однако сходимость модели обеспечивается не при любом $\mu$.

Решение уравнения (3.137) в явном виде [1] записывается как

$$u_k = \frac{q_1^k (q_2 - 1) - q_2^k (q_1 - 1)}{q_2 - q_1},$$

где $q_1$ и $q_2$ — корни характеристического уравнения, получаемые *при* $u_k = \mu q^k$, т. е. *при*

$$-\frac{\mu}{2} - (1 - \mu - Ah) q + \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) q^2 = 0.$$

С точностью до членов порядка $h$ находим

$$u_k = (1 - Ah)^k - \left(\frac{\mu}{2 - \mu}\right)^k Ah (1 + Ah)^k.$$

Существуют разложения

$$(1 - Ah)^k \approx e^{-Ax_k} + 0(h^2);$$

$$(1 + Ah)^k \approx e^{Ax_k} + 0(h^2).$$

Учитывая, что точное решение для $u_k$ будет $e^{-Ax_k}$, находим *погрешность решения*

$$|\varepsilon_k| = \left(\frac{\mu}{2 - \mu}\right)^{\frac{x_k}{h}} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) Ahe^{Ax_k} + 0(h).$$

Как видно, с уменьшением шага погрешность стремится к нулю только в случае $\frac{\mu}{2 - \mu} < 1$. Отсюда при $\mu \leqslant 1$ модель сходится, а при $\mu > 1$ нет.

Чтобы понять причины расходимости, разложим величины $u_{k+1}$, $u_{k-1}$ в ряд Тейлора:

$$u_{k+1} = u_k + u_k' h + u_k'' \frac{h^2}{2} + 0(h^3);$$

$$u_{k-1} = u_k - u_k' h + u_k'' \frac{h^2}{2} + 0(h^3).$$

Подставив эти выражения в уравнение (3.137), получим

$$u' + \frac{1 - \mu}{2} hu'' + Au + 0(h^2) = 0.$$

Член $0(h^2)$ должен быть отброшен как малая высокого порядка.



Таким образом, приняв указанные выше разностные аппроксимации, мы вместо исходного уравнения (3.135) интегрируем уравнение

$$\frac{1 - \mu}{2} hu'' + u' + Au = 0. \tag{3.139}$$

Теперь можно дать полученным зависимостям механическую интерпретацию. Если $A > 0$, то исходное уравнение нетрудно трактовать как описывающее лимитационное движение, затухающее с течением времени. При наличии первого члена в уравнении (3.139) *и положительном значении множителя этого члена приходим к затухающему движению инерционной системы с сопротивлением.* При отрицательном множителе имеем движение системы с отрицательной массой, возрастающее с течением времени. Следовательно, *переходя к конечным разностям, мы, в сущности, всегда изменяем* исходные уравнения, а появление там дополнительных членов может качественно менять характер искомого решения.

Отмеченное обстоятельство требует специального анализа применительно к каждой модели метода конечных разностей.

## § 23. Расчет осесимметричных деформаций произвольных оболочек вращения

Для более подробной иллюстрации использования метода парциальных откликов при расчете напряженного и деформированного состояний конструкций рассмотрим произвольные оболочки вращения. Соответствующие дифференциальные уравнения и другие исходные зависимости были уже получены (см. § 7).

1. Анализ исходных зависимостей. Общая схема решения задачи. Начнем с анализа исходной системы (2.40), (2.41). Она нелинейна, так как второе уравнение (2.41) содержит члены $H\vartheta \cos\theta(s)$ и $T\vartheta \sin\theta(s)$, включающие произведения неизвестных внутренних параметров $H$, $T$, $\vartheta$. Этими членами учитывается сложный изгиб, т. е. дополнительные изгибающие моменты, которые появляются вследствие учета конечной жесткости оболочки. Если относить уравнения равновесия к исходному недеформированному состоянию, нелинейные члены исчезают, а все остальные не претерпевают никаких изменений.

Граничные условия (2.41а), а также условия сопряжения участков (2.42) — (2.45) линейны.

Возникает естественная мысль решать задачу методом последовательных приближений. Иными словами, нужно в первом приближении отбросить нелинейные члены, решить линейную задачу о деформациях жесткой оболочки и найти приближенные значения $T$, $H$ и $D$. После этого рассматривается второе приближение с учетом подчеркнутых членов, заранее вычисленных по результатам первого приближения; иначе говоря, подчеркнутые члены начинают играть роль внешней нагрузки (распределенных моментов второго рода). Второе приближение дает уточненные значения и т. д.

Таков путь решения задачи в самом общем случае. Однако учет характерных особенностей рассчитываемых оболочек позволяет в ряде случаев упростить его.

Заметим, что в первое уравнение (2.40) не входят параметры процесса, кроме $T$. Это значит, что интегрирование этого уравнения можно выполнять независимо от интегрирования остальных уравнений. Если, как это часто бывает, начальное $T$ (0) известно, нетрудно перед выполнением основного расчета заранее найти функцию $T$ (s). Кроме того, внутренний параметр процесса $u$, определяемый вторым уравнением (2.40), не входит ни в одно уравнение системы (2.41). Следовательно, теперь четыре уравнения (2.41) можно интегрировать независимо.

Таким образом, если $T$ (s) — известная функция и смещение само по себе интереса не представляет, то уравнение (2.40) можно исключить из рассмотрения.

Учитывая, что усилие $T_1$, направленное по касательной к меридиану оболочки,

$$T_1 = T\sin\theta + H\cos\theta, \tag{3.140}$$

систему (2.41) можно переписать так:

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{ds} &= -(1-\mu)\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}H + \frac{Eh(s)}{r^2(s)}w + \mu\frac{\sin\theta(s)}{r(s)}T - q_1(s);\\
\frac{dM}{ds} &= -(1-\mu)\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}M + \lambda(s)\vartheta + H\sin\theta(s) +\\
&\quad + T_1\vartheta - T\cos\theta(s);\\
\frac{dw}{ds} &= \frac{1-\mu^2}{Eh(s)}[T\sin\theta(s)\cos\theta(s) + H\cos^2\theta(s)] -\\
&\quad - \mu\frac{w}{r(s)}\cos\theta(s) - \vartheta\sin\theta(s);\\
\frac{d\vartheta}{ds} &= \frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3(s)}M - \mu\frac{\vartheta\cos\theta(s)}{r(s)}.
\end{aligned} \tag{3.141}$$

Для оболочек, у которых угол $\theta$ близок к $\pi/2$, неизвестное пока усилие $T_1 \approx T$.

Как следует из рис. 3.43, если принять, что усилие $T_1$ формируется из проекций усилий $T$ и $H$, и пренебречь влиянием $H$, то $T_1 \approx T\sin\theta$; если принять, что усилие $T$ формируется из проекций усилий $T_1$ и $N$, и пренебречь влиянием $N$, то

$$T_1 \approx \frac{T}{\sin\theta}. \tag{3.142}$$



Обычно более точным бывает второе выражение.

Таким образом, в случае статически определимого $T$ напрашивается следующий путь решения.

В первом приближении значение $T_1$ вычисляется согласно (3.142). Тогда система (3.141) при известном $T$ становится квазилинейной и может быть решена общими методами, пригодными для решения соответствующих линейных систем. Зная в первом приближении значение $H$ (s), нетрудно найти, согласно (3.140), уточненное значение $T_1$ (s), подставить его в систему (3.141) и найти второе приближение. В случае необходимости легко сделать третье приближение и т. д.

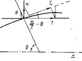



Рис. 3.43.

2. **Уравнения для парциальных откликов и парциальных параметров.** Учет конечной жесткости превращает произвольную оболочку вращения, строго говоря, в нелинейную систему, для которой не выполняется принцип наложения относительно внешних нагрузок. Например, гидростатическое давление $p$ обусловливает одновременное появление нагрузок $q_3$ и $q_1$. Но нагрузка $q_3$ формирует силу $T$ и силу $T_1$, входящую в правую часть одного из уравнений (3.141) как сомножитель к $\vartheta$. Следовательно, мы не можем рассчитывать деформации от давления $p = p_1 + p_2$ как сумму деформаций от давлений $p_1$ и $p_2$. Однако отмеченная нелинейность не касается нагрузок $q_1$ и внутренних усилий $M$ и $H$.

Рассмотрим оболочки с незакрепленными в направлении оси торцами, у которых усилие $T$ статически определимо. Эти обстоятельства позволяют представить поставленную задачу как квазилинейную, если несколько обобщить само понятие парциального отклика (в частности, парциального параметра).

Обозначив цифрой 1 перемещение $w$ и поперечную силу $H$; цифрой 2 — угол поворота $\vartheta$ и момент $M$; цифрой 3 — перемещение $u$ и осевую силу $T$, рассмотрим парциальные отклики (рис. 3.44):

$A_{11}$ (s) — вертикальное перемещение $w$ в сечении $s$ (на искусственно созданном свободном крае) от единичной силы $H = 1$, приложенной в этом же сечении;

$A_{12}$ (s) — вертикальное перемещение $w$ в сечении $s$ (на свободном крае) от единичного момента $M = 1$, приложенного в том же сечении;

$A_{13}$ (s) — вертикальное перемещение $w$ в сечении $s$ (на свободном крае) от единичной силы $T = 1$, приложенной в том же сечении;

$A_{21}$ (s) — угол поворота $\vartheta$ в сечении $s$ (на свободном крае) от единичной силы $H = 1$, приложенной в том же сечении;

$A_{22}(s)$ — угол поворота $\vartheta$ в сечении $s$ (на свободном крае) от единичного момента $M = 1$, приложенного в том же сечении;

$A_{23}(s)$ — угол поворота $\vartheta$ в сечении $s$ (на свободном крае) от единичной силы $T = 1$, приложенной в том же сечении.

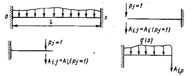



Рис. 3.44.

Здесь необходимо сразу же сделать два замечания: все отмеченные $A_{ij}$ определяются с учетом сложного изгиба; откликами $A_{31}$, $A_{32}$, $A_{33}$ мы не интересуемся, так как перемещения $u$ для нас интереса не представляют (торцы оболочки не закреплены).

Кроме парциальных откликов, нужно определить парциальные параметры $A_{1p}(s)$ и $A_{2p}(s)$ (см. рис. 3.44), т. е. вертикальное перемещение $w$ и угол поворота $\vartheta$ в сечении $s$ (на свободном крае) от всей внешней нагрузки, приложенной ко всей парциальной конструкции.

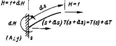



Рис. 3.45.

Для вывода дифференциальных уравнений, определяющих парциальные отклики, воспользуемся исходной системой (3.141). Пусть нам известны все отклики в сечении $s$; необходимо выразить их в сечении $s + ds$. Приложим в сечении $s + ds$ единичную силу $H = 1$ и найдем смещение этого сечения под действием указанной силы (рис. 3.45). Кроме непосредственного воздействия $H = 1$, мы должны учесть влияние сложного изгиба от усилия $T_1$. После приложения в сечении $s + ds$ силы $H = 1$ оболочка получит деформации и в сечении $s$ возникнут усилия $H + dH = 1 + dH$ и момент $dM$. Значения $dH$ и $dM$ нетрудно найти из соответствующих уравнений равновесия в (3.141), если учесть, что в данном случае дифференциал $ds$ имеет отрицательный знак (сечение $s$ отстоит влево от $s + ds$). После отбрасывания величин второго порядка малости имеем

$$dH = (1-\mu)\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}\,ds - \frac{Eh(s)}{r^2(s)}A_{11}(s)\,ds;$$

$$dM = -\lambda(s)A_{21}(s)\,ds - \sin\theta(s)\,ds - T_1(s)A_{21}(s)\,ds.$$



В сечении $s$ возникнут смещения

$$w(s) = A_{11} + dHA_{11} + dMA_{12} = A_{11} + (1-\mu)\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}A_{11}ds -$$

$$-\frac{Eh(s)}{r^2(s)}A_{11}^2 ds - \lambda(s)A_{21}A_{12}ds - A_{12}\sin\theta(s)\,ds -$$

$$-T_1(s)A_{21}A_{12}ds;$$

$$\vartheta(s) = A_{21} + dHA_{21} + dMA_{22} = A_{21} + (1-\mu)\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}A_{21}ds -$$

$$-\frac{Eh(s)}{r^2(s)}A_{11}A_{21}ds - \lambda(s)A_{21}A_{22}ds - A_{22}\sin\theta(s)\,ds - T_1(s)A_{21}A_{22}ds.$$

Чтобы найти смещения в сечении $s + ds$, нужно к $w(s)$ и $\vartheta(s)$ добавить $dw(s)$ и $d\vartheta(s)$ из (3.141):

$$w(s+ds) = A_{11}(s+ds) = A_{11} + (1-\mu)\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}A_{11}ds -$$

$$-\frac{Eh(s)}{r^2(s)}A_{11}^2 ds - \lambda(s)A_{21}A_{12}ds - T_1(s)A_{21}A_{12}ds - A_{12}\sin\theta(s)\,ds +$$

$$+\frac{1-\mu^2}{Eh(s)}\cos^2\theta(s)\,ds - \mu\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}A_{11}ds - A_{21}\sin\theta(s)\,ds;$$

$$\vartheta(s+ds) = A_{21} + A_{21}(1-\mu)\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}ds - \frac{Eh(s)}{r^2(s)}A_{11}A_{21}ds -$$

$$-\lambda(s)A_{21}A_{22}ds - \sin\theta(s)A_{22}ds - T_1(s)A_{21}A_{22}ds - \mu\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}A_{21}ds.$$

Отсюда

$$dA_{11} = A_{11}(s+ds) - A_{11}(s) = A_{11} + (1-\mu)\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}A_{11}ds -$$

$$-\frac{Eh(s)}{r^2(s)}A_{11}^2 ds - \lambda(s)A_{21}A_{12}ds - A_{12}\sin\theta(s)\,ds - T_1(s)A_{12}A_{21}ds +$$

$$+\frac{1-\mu^2}{Eh(s)}\cos^2\theta(s)\,ds - \mu\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}A_{11}ds - A_{21}\sin\theta(s)\,ds - A_{11};$$

$$dA_{21} = A_{21}(s+ds) - A_{21}(s) = A_{21} + (1-\mu)\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}A_{21}ds -$$

$$-\frac{Eh(s)}{r^2(s)}A_{11}A_{21}ds - \lambda(s)A_{21}A_{22}ds - \sin\theta(s)A_{22}ds -$$

$$-T_1(s)A_{21}A_{22}ds - \mu\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}A_{21}ds - A_{21}.$$

После приведения подобных членов и деления на $ds$ будем иметь

$$\frac{dA_{11}}{ds}=(1-2\mu)\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}A_{11}+\frac{1-\mu^2}{Eh(s)}\cos^2\theta(s)-$$

$$-\frac{Eh(s)}{r^2(s)}A_{11}^2-\lambda(s)A_{12}A_{21}-A_{12}\sin\theta(s)-A_{21}\sin\theta(s)-T_1(s)A_{21}A_{12};$$

$$\frac{dA_{21}}{ds}=(1-2\mu)\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}A_{21}-\frac{Eh(s)}{r^2(s)}A_{11}A_{21}-A_{22}\sin\theta(s)-$$

$$-\lambda(s)A_{21}A_{22}-T_1(s)A_{21}A_{22}.$$

Аналогичным образом можно получить и все остальные уравнения. Остановимся лишь на некоторых особенностях, которые имеются в выводе уравнений для $dA_{13}/ds$ и $dA_{22}/ds$.

Значения $A_{13}$ и $A_{23}$ надо находить с учетом сложного изгиба. Поскольку рассматриваемая система квазилинейная и в ней не выполняется принцип суперпозиции (наложения) относительно силы $T$, указанные парциальные отклики имеют несколько формальный характер. При их вычислении, как и при определении других $A_{ij}$, нелинейный член системы уравнений, содержащий силу $T$, рассматривается как выражающий раз и навсегда заданное свойство конструкции. К остальным линейным членам, содержащим $T$, принцип суперпозиции с чисто формальных позиций вполне применим.

Учитывая изложенное, имеем

$$dH=-\frac{Eh(s)}{r^2(s)}A_{13}ds-\mu\frac{\sin\theta(s)}{r(s)}ds;$$

$$dM=-\lambda(s)A_{23}ds+\cos\theta(s)\,ds-T_1(s)A_{23}ds;$$

$$dT=\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}ds.$$

Дальнейшие выводы аналогичны выводу $A_{11}$ и $A_{12}$.

Таким образом, получаем систему уравнений для парциальных откликов и парциальных параметров:

$$\frac{dA_{11}}{ds}=(1-2\mu)\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}A_{11}+\frac{1-\mu^2}{Eh(s)}\cos^2\theta(s)-\frac{Eh(s)}{r^2(s)}A_{11}^2-$$

$$-\lambda(s)A_{12}A_{21}-A_{12}\sin\theta(s)-A_{21}\sin\theta(s)-T_1(s)A_{12}A_{21}; \quad (3.143)$$

$$\frac{dA_{12}}{ds}=(1-2\mu)\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}A_{12}-\frac{Eh(s)}{r^2(s)}A_{11}A_{12}-$$

$$-A_{22}\sin\theta(s)-\lambda(s)A_{12}A_{22}-T_1(s)A_{12}A_{22};$$

$$\frac{dA_{21}}{ds}=(1-2\mu)\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}A_{21}-\frac{Eh(s)}{r^2(s)}A_{11}A_{21}-A_{22}\sin\theta(s)-$$

$$-\lambda(s)A_{21}A_{22}-T_1(s)A_{21}A_{22};$$



$$\frac{dA_{22}}{ds}=\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3(s)}+(1-2\mu)\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}A_{22}-$$

$$-\frac{Eh(s)}{r^2(s)}A_{21}A_{12}-\lambda(s)A_{22}^2-T_1(s)A_{22}^2;$$

$$\frac{dA_{13}}{ds}=\frac{1-\mu^2}{Eh(s)}\sin\theta(s)\cos\theta(s)+(1-\mu)\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}A_{13}-A_{23}\sin\theta(s)-$$

$$-A_{11}\left[\frac{Eh(s)}{r^2(s)}A_{13}+\mu\frac{\sin\theta(s)}{r(s)}\right]+$$

$$+A_{12}[\cos\theta(s)-\lambda(s)A_{23}]-T_1(s)A_{12}A_{23};$$

$$\frac{dA_{23}}{ds}=\frac{1-\mu}{r(s)}\cos\theta(s)A_{23}-\left[\frac{Eh(s)}{r^2(s)}A_{13}+\mu\frac{\sin\theta(s)}{r(s)}\right]A_{21}+$$

$$+[\cos\theta(s)-\lambda(s)A_{23}]A_{22}-T_1(s)A_{23}A_{22};$$

$$\frac{dA_{1p}}{ds}=-A_{11}\left[\frac{Eh(s)}{r^2(s)}A_{1p}-q_1(s)\right]-\lambda(s)A_{12}A_{2p}+q_3(s)A_{13}-$$

$$-A_{2p}\sin\theta(s)-\mu\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}A_{1p}-T_1(s)A_{12}A_{2p};$$

$$\frac{dA_{2p}}{ds}=-A_{21}\left[\frac{Eh(s)}{r^2(s)}A_{1p}-q_1(s)\right]-\lambda(s)A_{2p}A_{22}+$$

$$+q_3(s)A_{23}-\mu\frac{\cos\theta(s)}{r(s)}A_{2p}-T_1(s)A_{2p}A_{22}.$$

Выше предполагалось, что оболочка загружена лишь распределенными нагрузками $q_i=q_i(s)$. Однако иногда необходимо учесть действие внешних осесимметричных сосредоточенных сил $P$, приложенных в некотором сечении $(s=s_k)$ или действие внешних моментов $\mathfrak{M}$, приложенных в сечении $(s=s_m)$ (рис. 3.46). Сосредоточенная нагрузка не повлияет на парциальные отклики, являющиеся свойствами конструкции, но в парциальных параметрах $A_{ip}(s)$ появятся скачки.

Рассмотрим действие силы $P=P(s_k)$. Пусть в сечении $(s_k-0)$, т. е. непосредственно перед сосредоточенной силой, значения парциальных параметров равны $A_{ip}(s_k)$. Сосредоточенная сила дает дополнительные смещения, которые легко выражаются через парциальные отклики $A_{i1}(s)$. Отсюда сразу получаем значения парциальных параметров в сечении $(s_k+0)$, т. е. непосредственно за сосредоточенной силой,

$$A_{ip}(s_k+0)=\overset{*}{A}_{ip}(s_k)=A_{ip}(s_k)+P(s_k)A_{i1}(s_k). \quad (3.144)$$

Аналогичным образом нетрудно выразить парциальные параметры $\overset{*}{A}_{ip}(s_m)$ в сечении непосредственно за внешним сосредоточенным моментом

$$\overset{*}{A}_{ip}(s_m)=A_{ip}(s_m)+\mathfrak{M}(s_m)A_{i2}(s_m). \quad (3.144a)$$

Уравнения (3.144а) являются уравнениями переноса для парциальных откликов и парциальных параметров вдоль координаты $s$.

Зная коэффициенты податливости опорных конструкций оболочки, мы знаем значения откликов $A_{ij}^{п}(0)$ и $A_{ij}^{п}(e)$. Следовательно, уравнения для $A_{ij}(s)$ можно интегрировать при заданных начальных условиях.

Аналогичным образом расчет опорных конструкций должен дать значения $A_{ip}^{п}(0)$ и $A_{ip}^{п}(l)$. Если действие нагрузки на опорные конструкции не рассматривается, то $A_{ip}^{п}(0) = 0$ и $A_{ip}^{п}(l) = 0$. Если деформации опорных конструкций подчиняются теореме вза-

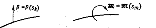



Рис. 3.46.

имности, то начальные значения парциальных откликов также отражают эту теорему, т. е. $A_{ij}(0) = A_{ji}(0)$. Анализируя зависимости (3.144), видим, что $A_{12}(s) = A_{21}(s)$. Этого следовало ожидать, так как оболочка представляет собой линейно-деформируемую систему относительно усилий $H$, $M$ и теорема взаимности для нее не должна нарушаться.

3. Парциальные отклики и парциальные параметры оболочек, подкрепленных шпангоутами. До сих пор мы рассматривали гладкие оболочки. Перейдем теперь к оболочкам, подкрепленным шпангоутами. Исследуем сначала случай, когда профиль шпангоута симметричен, т. е. когда единичная сила и единичный момент, приложенные к шпангоуту, вызывают смещения $A_{11}^{(ш)}$ — вертикальное смещение $w$ верхней кромки шпангоута от единичной силы $R = 1$ и $A_{22}^{(ш)}$ — угол поворота сечения стенки шпангоута от единичного момента $M_R = 1$. Вертикальное смещение от момента $M_R$ и угол поворота от силы $R$ равны нулю. Положительные направления $R$ и $M_R$ показаны на рис. 2.10. Ясно, что $A_{ij}^{(ш)}$ представляют собой не что иное как парциальные отклики шпангоута. Продольным смещениям $u$ и силам $T$ шпангоут не сопротивляется, а движется как твердое тело. В сечении $x = x_k$, где стоит $k$-й шпангоут, будут происходить скачки во всех парциальных откликах $A_{ij}$ и парциальных параметрах $A_{ip}$, обусловленные поддерживающим влиянием шпангоута.

Итак, задача ставится следующим образом: известны значения $A_{ij}(x_k)$ и $A_{ip}(x_k)$ в сечении $(x-0)$ непосредственно перед шпангоутом; требуется найти значения $A_{ij}^{+}(x_k)$ и $A_{ip}^{+}(x_k)$ в сечении $x + 0$ непосредственно после шпангоута. Остальной расчет оболочки остается без всяких изменений.



Для определения $A_{ij}^{+}$ и $A_{ip}^{+}$ следует раскрывать статическую неопределимость узла обшивка—шпангоут и находить значения $R$ и $M_R$, что требует решения системы всего из двух линейных алгебраических уравнений с двумя неизвестными.

Расчет проведем в несколько этапов. Предположим, что шпангоут обладает жесткостью по отношению к обжатию, но не сопротивляется поворотам. Тогда $A_{11}^{(ш)} \neq 0$ (но конечен); $A_{22}^{(ш)} = \infty$.

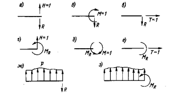



Рис. 3.47.

Приложим в сечении $(x_k + 0)$ силу $H = 1$ (рис. 3.47,$a$). Прогиб угол поворота этого сечения

$$w(x_k+0)=\overline{A}_{11}^{+}=A_{11}-RA_{11}=A_{11}-\frac{\overline{A}_{11}^{+}}{A_{11}^{(ш)}}A_{11};$$

$$\vartheta(s_k+0)=\overline{A}_{12}^{+}=A_{21}-RA_{21}=A_{21}-\frac{\overline{A}_{11}^{+}}{A_{11}^{(ш)}}A_{21}=A_{21}\left(1-\frac{\overline{A}_{11}^{+}}{A_{11}^{(ш)}}\right);$$

$$\overline{A}_{11}^{+}=\frac{A_{11}}{1+\dfrac{A_{11}}{A_{11}^{(ш)}}}=\frac{A_{11}}{A_{11}+A_{11}^{(ш)}}A_{11}^{(ш)};$$

$$\overline{A}_{21}^{+}=A_{21}\left(1-\frac{A_{11}}{A_{11}+A_{11}^{(ш)}}\right).$$

Прикладывая в сечении $(x_k + 0)$ момент $M = 1$ (рис. 3.47, $б$), аналогичным образом получаем

$$w(x_k+0)=\overline{A}_{12}^{+}=A_{12}-RA_{11}=A_{12}-A_{11}\frac{\overline{A}_{12}^{+}}{A_{11}^{(ш)}}=\frac{A_{12}}{1+\dfrac{A_{11}}{A_{11}^{(ш)}}};$$

$$\vartheta(x_k+0)=\overline{A}_{22}^{+}=A_{22}-RA_{21}=A_{22}-A_{21}\frac{\overline{A}_{12}^{+}}{A_{11}^{(ш)}}=A_{22}-\frac{A_{21}A_{12}}{A_{11}+A_{11}^{(ш)}}.$$

Теорема взаимности не нарушается, так как $\overline{A}_{12}^{+} = \overline{A}_{21}^{+}$:

$$\overline{A}_{12}^{+} = A_{12} \frac{1}{1 + \frac{A_{11}}{A_{11}^{(\text{ш})}}} = A_{12} \frac{A_{11}^{(\text{ш})}}{A_{11} + A_{11}^{(\text{ш})}};$$

$$\overline{A}_{21}^{+} = A_{21} \left(1 - \frac{A_{11}}{A_{11} + A_{11}^{(\text{ш})}}\right) = A_{21} \frac{A_{11}^{(\text{ш})}}{A_{11} + A_{11}^{(\text{ш})}} = \overline{A}_{12}^{+}.$$

Сила $T = 1$ в сечении $(x_k + 0)$ дает (рис. 3.47, *в*):

$$w(x_k + 0) = \overline{A}_{13}^{+} = A_{13} - RA_{11} = A_{13} - \frac{\overline{A}_{13}^{+}}{A_{11}^{(\text{ш})}} A_{11} = \frac{A_{13}}{1 + \frac{A_{11}}{A_{11}^{(\text{ш})}}};$$

$$\vartheta(x_k + 0) = \overline{A}_{23}^{+} = A_{23} - RA_{21} = A_{23} - \frac{\overline{A}_{13}^{+}}{A_{11}^{(\text{ш})}} A_{21} =$$

$$= A_{23} - A_{21} \frac{A_{13}}{A_{11}^{(\text{ш})} + A_{11}}.$$

Величины $\overline{A}_{11}^{+}$, $\overline{A}_{12}^{+} = \overline{A}_{21}^{+}$, $\overline{A}_{22}^{+}$, $\overline{A}_{13}^{+}$ и $\overline{A}_{23}^{+}$ представляют собой парциальные отклики оболочки после шпангоута, если шпангоут обладает жесткостью на обжатие и не обладает жесткостью на кручение.

Снабдим шпангоут жесткостью на кручение, т. е. положим $A_{22}^{(\text{ш})} \neq \infty$, учтем вычисленные $A_{ij}^{+}$. Прикладывая в сечении $(x_k + 0)$ силу $H = 1$ (рис. 3.47, *г*), записываем

$$\vartheta_H(x_k + 0) = A_{21}^{+} = \overline{A}_{21}^{+} - M_R \overline{A}_{22}^{+} = \overline{A}_{21}^{+} - \frac{A_{21}^{+}}{A_{22}^{(\text{ш})}} \overline{A}_{22}^{+} = \frac{\overline{A}_{21}^{+}}{1 + \frac{\overline{A}_{22}^{+}}{A_{22}^{(\text{ш})}}};$$

$$w_H(x_k + 0) = A_{11}^{+} = \overline{A}_{11}^{+} - M_R \overline{A}_{12}^{+} = \overline{A}_{11}^{+} -$$

$$- \frac{A_{21}^{+}}{A_{22}^{(\text{ш})}} \overline{A}_{12}^{+} = \overline{A}_{11}^{+} - \frac{(\overline{A}_{21}^{+})^2}{A_{22}^{(\text{ш})} + A_{22}^{(\text{ш})}}.$$

Аналогичным приемом после приложения $M = 1$ (рис. 3.47, *д*) и $T = 1$ (рис. 3.47, *е*) получаем

$$\vartheta_M(x_k + 0) = A_{22}^{+} = \overline{A}_{22}^{+} - M_R \overline{A}_{22}^{+} = \overline{A}_{22}^{+} - \frac{\overline{A}_{22}^{+}}{A_{22}^{(\text{ш})}} A_{22}^{+} = \frac{\overline{A}_{22}^{+}}{1 + \frac{\overline{A}_{22}^{+}}{A_{22}^{(\text{ш})}}};$$

$$w_M(x_k + 0) = A_{12}^{+} = \overline{A}_{12}^{+} - M_R \overline{A}_{12}^{+} =$$

$$= \overline{A}_{12}^{+} \left(1 - \frac{A_{22}^{+}}{A_{22}^{(\text{ш})}}\right) = \overline{A}_{12}^{+} \left(1 - \frac{\overline{A}_{22}^{+}}{A_{22}^{(\text{ш})} + \overline{A}_{22}^{+}}\right) = A_{21}^{+};$$



$$\vartheta_T(x_k + 0) = A_{23}^{+} = \overline{A}_{23}^{+} - M_R \overline{A}_{22}^{+} = \overline{A}_{23}^{+} - \frac{A_{23}^{+}}{A_{22}^{(\text{ш})}} \overline{A}_{22}^{+} = \frac{\overline{A}_{23}^{+}}{1 + \frac{\overline{A}_{22}^{+}}{A_{22}^{(\text{ш})}}};$$

$$w_T(x_k + 0) = A_{13}^{+} = \overline{A}_{13}^{+} - M_R \overline{A}_{13}^{+} = \overline{A}_{13}^{+} - \frac{A_{23}^{+}}{A_{22}^{(\text{ш})}} \overline{A}_{12}^{+} =$$

$$= \overline{A}_{13}^{+} - \overline{A}_{12}^{+} \frac{\overline{A}_{23}^{+}}{\overline{A}_{22}^{+} + A_{22}^{(\text{ш})}}.$$

Таким образом, все скачки в парциальных откликах определены.

Перейдем к нахождению парциальных параметров и снова рассмотрим шпангоут, сопротивляющийся только обжатию, а затем учтем его сопротивление скручиванию.

Имеем (рис. 3.47, *ж*)

$$\overline{A}_{1p}^{+} = A_{1p} - RA_{11} = A_{1p} - \frac{\overline{A}_{1p}^{+}}{A_{11}^{(\text{ш})}} A_{11} = \frac{A_{1p}}{1 + \frac{A_{11}}{A_{11}^{(\text{ш})}}};$$

$$\overline{A}_{2p}^{+} = A_{2p} - RA_{21} = A_{2p} - \frac{\overline{A}_{1p}^{+}}{A_{11}^{(\text{ш})}} A_{21} = A_{2p} - A_{21} \frac{A_{1p}}{A_{11}^{(\text{ш})} + A_{11}}.$$

Сообщив шпангоутам жесткость на кручение, получим (рис. 3.47, *з*)

$$A_{2p}^{+} = \overline{A}_{2p}^{+} - M_R \overline{A}_{22}^{+} = \overline{A}_{2p}^{+} - \frac{A_{2p}^{+}}{A_{22}^{(\text{ш})}} \overline{A}_{22}^{+} = \frac{\overline{A}_{2p}^{+}}{1 + \frac{\overline{A}_{22}^{+}}{A_{22}^{(\text{ш})}}};$$

$$A_{1p}^{+} = \overline{A}_{1p}^{+} - M_R \overline{A}_{12}^{+} = \overline{A}_{1p}^{+} - \frac{A_{2p}^{+}}{A_{22}^{(\text{ш})}} \overline{A}_{12}^{+} = \overline{A}_{1p}^{+} - \overline{A}_{12}^{+} \frac{\overline{A}_{2p}^{+}}{A_{22}^{(\text{ш})} + \overline{A}_{22}^{+}}.$$

Обратимся к более редкому, но все же возможному случаю, когда оболочка подкреплена в ряде сечений сосредоточенными жесткостями, которые характеризуются матрицей из четырех коэффициентов податливости $A_{11}^{(\text{ш})}$, $A_{12}^{(\text{ш})} = A_{21}^{(\text{ш})}$, $A_{22}^{(\text{ш})}$. Такой жесткостью может быть, например, шпангоут несимметричного профиля. Прикладывая в сечении $A$ единичную силу $H = 1$, записываем

$$A_{11}(1 - R) - M_R A_{12} = RA_{11}^{(\text{ш})} + M_R A_{12}^{(\text{ш})};$$

$$A_{21}(1 - R) - M_R A_{22} = RA_{21}^{(\text{ш})} + M_R A_{22}^{(\text{ш})}. \tag{3.145}$$

Решение этой системы позволит найти значения $R$ и $M_R$, после чего имеем

$$A_{12}^{+} = A_{11}(1 - R) - M_R A_{12};$$

$$A_{21}^{+} = A_{21}(1 - R) - M_R A_{22} = A_{12}^{+}, \tag{3.146}$$

По аналогии приложение единичного момента $M = 1$ дает

$$-A_{11}R + A_{12}(1-M_R) = RA_{11}^{(\text{ш})} + M_R A_{12}^{(\text{ш})};$$

$$-A_{21}R + A_{22}(1-M_R) = RA_{21}^{(\text{ш})} + M_R A_{22}^{(\text{ш})}, \qquad (3.147)$$

причем

$$A_{22}^{+} = -A_{21}R + A_{22}(1-M_R). \qquad (3.148)$$

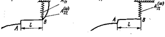



Рис. 3.48.

Прикладывая единичную силу $T = 1$, находим

$$-A_{11}R - A_{12}M_R + A_{13} = RA_{11}^{(\text{ш})} + M_R A_{12}^{(\text{ш})};$$

$$-A_{21}R - A_{22}M_R + A_{23} = RA_{21}^{(\text{ш})} + M_R A_{22}^{(\text{ш})};$$

$$A_{13}^{+} = -A_{11}R - A_{12}M_R + A_{13};$$

$$A_{23}^{+} = -A_{21}R - A_{22}M_R + A_{23}.$$

Для определения $A_{1p}^{+}$ и $A_{2p}^{+}$ имеем

$$-A_{11}R - A_{12}M_R + A_{1p} = RA_{11}^{(\text{ш})} + M_R A_{12}^{(\text{ш})};$$

$$-A_{21}R - A_{22}M_R + A_{2p} = RA_{21}^{(\text{ш})} + M_R A_{22}^{(\text{ш})};$$

$$A_{1p}^{+} = -A_{11}R - A_{12}M_R + A_{1p};$$

$$A_{2p}^{+} = -A_{21}R - A_{22}M_R + A_{2p}.$$

При решении систем (3.145) — (3.147) обычным способом иногда появляются малые разности близких величин и резкая потеря точности результатов. Учитывая это, здесь целесообразно применить способ ортогонализации матриц, которому легко дать механическую интерпретацию.

Будем моделировать шпангоут условной механической системой (рис. 3.48, *а*), которая представляет собой абсолютно жесткий рычаг длиной $l$. Последний соединен с пружиной податливости $A_{11}^{(\text{ш})}$, препятствующей смещению $w$, и с пружиной податливости $A_{22}^{(\text{ш})}$, которая препятствует повороту $\vartheta$. Длина $l$ выбирается из условия моделирования коэффициентов податливости $A_{12}^{(\text{ш})} = A_{21}^{(\text{ш})}$: $l = A_{12}^{(\text{ш})}/A_{22}^{(\text{ш})}$.

Определение $A_{ij}^{+}$ и $A_{ip}^{+}$ производится в два этапа.

*Первый этап*. Рассматривается присоединение к оболочке системы с одной пружиной податливости $A_{11}^{(\text{ш})}$ (рис. 3.48, *б*).



В точке $A$ прикладываем силу $H = 1$. Исходя из геометрических соотношений записываем зависимость между смещениями $w_A$ и $\vartheta_A$ в точке $A$ и смещениями $w_B$ и $\vartheta_B$ в точке $B$: $w_A = w_B + \vartheta_A l$; $\vartheta_A = \vartheta_B$.

Отсюда имеем уравнение для определения реакции $R$ пружины $A_{11}^{(\text{ш})}$

$$A_{11} - A_{11}R + A_{12}lR = RA_{11}^{(\text{ш})} + A_{12}l\cdot 1 - A_{21}Rl + A_{22}l^2R;$$

$$R = \frac{A_{11} - lA_{21}}{A_{11} - 2A_{12}l + A_{11}^{(\text{ш})} + A_{22}l^2}.$$

Следовательно, коэффициенты податливости $\overline{A}_{11}^{+}$ и $\overline{A}_{12}^{+} + \overline{A}_{21}^{+}$ оболочки после присоединения связи с одной пружиной $A_{11}^{(\text{ш})}$ будут

$$\overline{A}_{11}^{+} = A_{11}(1-R) + A_{12}lR;$$

$$\overline{A}_{12}^{+} = \overline{A}_{21}^{+} = A_{21}(1-R) + A_{22}lR.$$

Приложим в точке $A$ момент $M = 1$. Реакция $R$ пружины $A_{11}^{(\text{ш})}$ определится уравнением

$$-A_{11}R + A_{12} + A_{12}lR = RA_{11}^{(\text{ш})} + A_{22}l + A_{22}lRl - A_{21}lR;$$

$$R = \frac{A_{12} - lA_{22}}{A_{11} - 2lA_{12} + A_{11}^{(\text{ш})} + A_{22}l^2}.$$

Следовательно,

$$\overline{A}_{22}^{+} = A_{22}(1 + Rl) - A_{21}R.$$

Прикладывая в точке $A$ силу $T = 1$, имеем

$$A_{13} - RA_{11} + RlA_{12} = RA_{11}^{(\text{ш})} + lA_{23} - A_{21}Rl + Rl^2A_{22};$$

$$R = \frac{A_{13} - lA_{23}}{A_{11} - 2lA_{12} + A_{11}^{(\text{ш})} + A_{22}l^2};$$

$$\overline{A}_{13}^{+} = A_{13} - RA_{11} + RlA_{12};$$

$$\overline{A}_{23}^{+} = A_{23} - RA_{21} + RlA_{22}.$$

Аналогичным образом получаем

$$\overline{A}_{1p}^{+} = A_{1p} - RA_{11} + RlA_{12};$$

$$\overline{A}_{2p}^{+} = A_{2p} - RA_{21} + RlA_{22},$$

где

$$R = \frac{A_{1p} - lA_{2p}}{A_{11} - 2lA_{12} + A_{11}^{(\text{ш})} + A_{22}l^2}.$$

*Второй этап.* Присоединяем пружину с коэффициентом податливости $A_{22}$. Прикладываем в точке $A$ силу $H = 1$. Углы поворота $\vartheta_A = \vartheta_B = \bar{A}_{21} - M_R \bar{A}_{22}$. Отсюда

$$\bar{A}_{21} - M_R \bar{A}_{22} = M_R A_{22}^{(\text{ш})};$$

$$M_R = \frac{\bar{A}_{21}}{\bar{A}_{22} + A_{22}^{(\text{ш})}},$$

следовательно,

$$A_{11}^{+} = \bar{A}_{11} - M_R \bar{A}_{12};$$

$$A_{21}^{+} = \bar{A}_{12} - M_R \bar{A}_{22}.$$

Прикладываем в точке $A$ момент $M = 1$. Уравнение для $M_R$ имеет вид

$$\bar{A}_{22} - M_R \bar{A}_{22} = M_R A_{22}^{(\text{ш})}$$

$$M_R = \frac{\bar{A}_{22}}{\bar{A}_{22} + A_{22}^{(\text{ш})}},$$

откуда

$$A_{22}^{+} = \bar{A}_{22} (1 - M_R).$$

Прикладывая в точке $A$ силу $T = 1$, имеем

$$\bar{A}_{23} - M_R \bar{A}_{22} = M_R A_{22}^{(\text{ш})};$$

$$M_R = \frac{\bar{A}_{23}}{\bar{A}_{22} + A_{22}^{(\text{ш})}}.$$

Отсюда

$$A_{13}^{+} = \bar{A}_{13} - M_R \bar{A}_{12},$$

$$A_{23}^{+} = \bar{A}_{23} - M_R \bar{A}_{22}.$$

Совершенно аналогично получаем

$$A_{1p}^{+} = \bar{A}_{1p} - M_R \bar{A}_{12};$$

$$A_{2p}^{+} = \bar{A}_{2p} - M_R \bar{A}_{22},$$

где

$$M_R = \frac{\bar{A}_{2p}}{\bar{A}_{22} + A_{22}^{(\text{ш})}}.$$

Иногда нас могут заинтересовать значения реакции $R$ и момента $M_R$, воспринимаемых шпангоутом после приложения к части системы внешней нагрузки, т. е. значения $R$ и $M_R$, соответствующие $A_{1p}^{+}$ и $A_{2p}^{+}$. Поворот в точке $B$ равен $\vartheta_A = A_{2p}^{+}$, отсюда, $M_R = A_{2p}^{+}/A_{2p}^{(\text{ш})}$. Приращение $w_B = w_A - \vartheta_A l = A_{1p}^{+} - A_{2p}^{+} l$, следовательно,

$$R = \frac{A_{1p}^{+} - A_{2p}^{+} l}{A_{11}^{(\text{ш})}}.$$



4. Общая схема расчета оболочек. Согласно основной схеме метода парциальных откликов, расчет деформаций оболочки должен производиться следующим образом.

Сначала определяются значения парциальных откликов $A_{ij}^{л}(s)$ и парциальных параметров $A_{ip}^{л}(s)$ при движении слева направо, т. е. для частей конструкции между сечениями $s = 0$ и данным $s$. Для этого интегрируются уравнения (3.143). При прохождении сечений, где приложены сосредоточенные усилия, учитываются скачки в парциальных параметрах по формулам (3.144), а при прохождении сечений, где расположены шпангоуты,— скачки в парциальных откликах и парциальных параметрах.

Затем определяются значения парциальных откликов $A_{ij}^{п}(s)$ и парциальных параметров $A_{ip}^{п}(s)$ при движении справа налево,

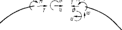



Рис. 3.49.

т. е. для частей конструкции между крайним правым сечением $s = l$ и данным сечением $s$. При этом используются те же зависимости, что и при определении $A_{ij}^{л}(s)$ и $A_{ip}^{л}(s)$.

Для определения параметров процесса деформирования оболочки в произвольном сечении $s$, т. е. определения $w(s)$, $\vartheta(s)$, $M(s)$, $H(s)$, производится сопряжение деформаций левой и правой частей оболочки, что позволяет найти $H(s)$ и $M(s)$. Тогда

$$w(s) = A_{1p}^{л}(s) + H(s) A_{11}^{л}(s) + M(s) A_{12}^{л}(s) + T(s) A_{13}^{л}(s);$$

$$\vartheta(s) = A_{2p}^{л}(s) + H(s) A_{21}^{л}(s) + M(s) A_{22}^{л}(s) + T(s) A_{23}^{л}(s). \quad (3.149)$$

Прежде чем записать условия сопряжения деформаций, напомним, что $A_{ij}^{п}$ и $A_{ip}^{п}$ вычислялись по тем же зависимостям, что и $A_{ij}^{л}$ и $A_{ip}^{л}$ (координата $s$ отсчитывалась от правого концевого сечения). Это равносильно тому, что мы перевернули правую часть конструкции и мысленно стали считать ее левой (рис. 3.49).

Учитывая принятое правило знаков для усилий и перемещений, имеем

$$A_{11}^{л}(s) H(s) + A_{12}^{л}(s) M(s) + A_{13}^{л}(s) T(s) + A_{1p}^{л}(s) =$$

$$= -A_{11}^{п}(s) H(s) + A_{12}^{п}(s) M(s) + A_{13}^{п}(s) T(s) + A_{1p}^{п}(s); \quad (3.150)$$

$$A_{21}^{л}(s) H(s) + A_{22}^{л}(s) M(s) + A_{23}^{л}(s) T(s) + A_{2p}^{л}(s) =$$

$$= -\left[-A_{21}^{п}(s) H(s) + A_{22}^{п}(s) M(s) + A_{23}^{п}(s) T(s) + A_{2p}^{п}(s)\right].$$

Приведенные выше расчетная схема и основные зависимости касаются общего случая оболочки вращения с заданными на левом и на правом опорных сечениях граничными условиями. Однако некоторые типы граничных условий требуют специального анализа.

Рассмотрим, например, совершенно свободный край оболочки, загруженный сосредоточенными усилиями $H$ (0) и $M$ (0). Здесь значения парциальных откликов $A_{ij}$ (0) равны бесконечности, т. е. в окрестности точки $s = 0$ не выполняются условия Коши-Липшица для уравнений (3.143) и их прямое численное интегрирование оказывается невозможным.

Выход можно найти, обратившись к исходным уравнениям переноса (3.141). *Для них точка $s = 0$ не является особой, и они могут быть проинтегрированы методом начальных параметров.* Хотя указанный метод дает расходящийся алгоритм, в данном случае *с этим можно примириться, поскольку с его помощью нам нужно пройти лишь короткий участок в районе края, где погрешности не успевают накопиться.* Расчет для короткого участка нетрудно выполнить и вручную.

Аналогичные трудности при шарнирно-опертом крае, когда $A_{11}(0) = A_{21}(0) = A_{12}(0)$, $A_{22}(0) = \infty$. Выход тот же — нужно интегрировать на коротком участке уравнения переноса (3.141).

Следует подчеркнуть, что трудности при интегрировании уравнений для $A_{ij}$ и $A_{ip}$ могут встретиться не только на границах, но и в середине участка интегрирования, так как осевая сила $T$ может вызвать парциальную потерю устойчивости части конструкции по некоторой осесимметричной форме, хотя вся конструкция еще не теряет устойчивости.

Таким образом, общим приемом расчета точек оболочки, где $A_{ij}$ и $A_{ip}$ неопределенны или обращаются в бесконечность, является интегрирование методом начальных параметров уравнений (3.141) на выделенном в окрестности этих точек малом участке.

Принятие гипотез Лява—Кирхгофа позволяет выделить одномерный шестипараметрический процесс осесимметричного деформирования *срединной поверхности оболочки вращения.* Его параметрами являются $T$, $H$, $M$, $u$, $w$, $\vartheta$, которые связаны системой уравнений переноса. Принятая выше расчетная схема исходит из *этих шести параметров. Но построенный нами расчетный алгоритм* базируется на статической определимости усилия $T$ ($s$) или (в случае осевого закрепления оболочки) на его квазиопределимости: *задаваясь усилием $T$ (0), мы делаем $T$ ($s$) снова статически определимым.* Перемещения $u$ ($s$) нас не интересуют. Вследствие этого появляется возможность трактовать процесс как квазичетырехпараметрический, т. е. рассматривать лишь параметры $H$, $M$, $w$, $\vartheta$ и только четыре уравнения (3.141). Известное усилие $T$ ($s$) рассматривается при этом в качестве внешней нагрузки, а также, как известный коэффициент в члене $T$ ($s$) $\sin\theta$ ($s$) $\vartheta$.



Вид расчетной схемы несколько изменится: вместо шести парциальных откликов будем вычислять четыре (вернее, три, так как два из них равны по теореме взаимности); условия сопряжения примут другой вид.

Дифференциальные уравнения для парциальных откликов $A_{11}$, $A_{12} = A_{21}$ и $A_{22}$ при новой схеме расчета не меняются, а дифференциальные уравнения для парциальных параметров примут вид

$$\frac{dA_{1p}}{ds} = \left[-\frac{Eh(s)}{r^2(s)} A_{1p} - \mu \frac{\sin\theta(s)}{r(s)} T(s) + q_1(s)\right] A_{11} +$$
$$+ A_{12}\left[-\lambda(s) A_{2p} + T(s)\cos\theta(s) - T_1(s) A_{2p}\right] +$$
$$+ \frac{1-\mu^2}{Eh(s)} T(s)\sin\theta(s)\cos\theta(s) - \mu\frac{\cos\theta(s)}{r(s)} A_{1p} - \sin\theta(s) A_{2p};$$
$$\frac{dA_{2p}}{ds} = \left[-\frac{Eh(s)}{r^2(s)} A_{1p} - \mu\frac{\sin\theta(s)}{r(s)} T(s) + q_1(s)\right] A_{12} +$$
$$+ \left[-\lambda(s) A_{2p} + T(s)\cos\theta(s) - T_1(s) A_{2p}\right] A_{22} - \mu\frac{\cos\theta(s)}{r(s)} A_{2p}.$$

Условия сопряжения записываются в виде

$$A^{\text{л}}_{11} H + A^{\text{л}}_{12} M + \left(A^{\text{л}}_{1p} - A^{\text{п}}_{1p}\right) = -A^{\text{п}}_{11} H + A^{\text{п}}_{12} M;$$
$$A^{\text{л}}_{12} H + A^{\text{л}}_{22} M + \left(A^{\text{л}}_{2p} + A^{\text{п}}_{2p}\right) = A^{\text{п}}_{12} H - A^{\text{п}}_{22} M.$$

Следует отметить, что обе расчетные схемы равноправны.

*Пример. Устойчивость алгоритма.* В качестве примера рассмотрим деформации в районе сопряжения двух оболочек — конуса и цилиндра (рис. 3.50)—под действием внешнего гидростатического давления. *Ясный физический смысл и компактность общей расчетной схемы метода парциальных откликов позволяют выполнить работу на малой ЭВМ,* для которой и была составлена программа.

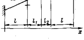



Рис. 3.50.

Рассматриваемая оболочка постоянной толщины жестко закреплена по концам и подкреплена одинаковыми шпангоутами симметричного профиля. Шпация постоянна. Для расчета удобно ввести безразмерные параметры процесса, которые связаны с размерными следующими соотношениями:

$$q_1 = -p\sin\theta(x);\; q_3 = p\cos\theta(x);\; T = -\frac{pr_0}{2}\rho;$$

$$M = \overline{M} p r_0 h_0;\quad H = \overline{H} p \sqrt{r_0 h_0};\quad x = \overline{x}\sqrt{r_0 h_0};$$

$$h(x) = h_0 \overline{h}(x);\; r(x) = \rho r_0;\quad w = \overline{w}\frac{pr_0^2}{Eh_0};\; \vartheta = \overline{\vartheta}\frac{p(r_0 h_0)^{3/2}}{Eh_0^3},$$

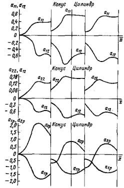



Рис. 3.51.

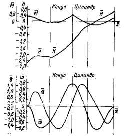



Рис. 3.52.

где $p$ — внешнее давление; $E$ — модуль нормальной упругости; черточкой отмечены безразмерные величины; $r_0$, $h_0$ — радиус и толщина цилиндра.

Расчет производился по первой расчетной схеме (см. п. 4). Интегрирование уравнений для парциальных откликов и парциальных параметров велось методом Эйлера. Шаг переменный. Парциальные отклики и парциальные параметры вычислялись в безразмерном виде:

$$a_{11} = A_{11}\frac{Eh_0^3}{(r_0h_0)^{3/2}};$$

$$a_{13} = A_{13}\frac{Eh_0^3}{(r_0h_0)^{3/2}};$$

$$a_{12} = A_{12}\frac{Eh_0^3}{r_0h_0};$$

$$a_{23} = A_{23}\frac{Eh_0^3}{(r_0h_0)^1};$$

$$a_{21} = a_{12};\ a_{1p} = A_{1p}\frac{Eh_0}{pr_0^2};$$

$$a_{22} = A_{22}\frac{Eh_0^3}{(r_0h_0)^{3/2}};$$

$$a_{2p} = A_{2p}\frac{Eh_0^3}{p\,(r_0h_0)^{3/2}}.$$

Граничные условия в точках $x = 0$ (жестко заделанный край цилиндра) и $x=l$ (жестко заделанный край конуса) при интегрировании уравнений для $A_{ij}$ и $A_{ip}$ брались нулевыми. Основные характеристики оболочек были следующие:



$\alpha = 22°12'$ — угол конусности ($\theta = 90° - \alpha$); $p = 42$ кг/см²; $r_0/h_0 = 126$; $F = 44{,}8$ см² — площадь шпангоута; $l = 1{,}98$ ($l$—безразмерная шпация); $l_1 = 1{,}155$.

Вид кривых парциальных откликов $a_{11}$, $a_{12}$, $a_{22}$ и парциальных параметров $a_{1p}$, $a_{2p}$ представлен на рис. 3.51. Конечные результаты расчета приведены на рис. 3.52.

Предлагаемый алгоритм построен в полном согласии с принципом соответствия устойчивости алгоритма и рассматриваемого физического процесса, поэтому во всех случаях, когда рассматриваемый процесс деформирования устойчив, т. е. когда действующая нагрузка достаточно далека от критической (относительно осесимметричного выпучивания), устойчивость расчета обеспечивается автоматически.

При неустойчивости процесса осесимметричного деформирования расчет также становится неустойчивым. Однако тогда всякая попытка детерминированной оценки деформированного и напряженного состояний является эфемерной.

## § 24. Общие замечания о потере устойчивости конструкций

Проанализируем с изложенных выше общих позиций проблему устойчивости произвольных деформируемых систем и, в первую очередь, конструкций судового корпуса.

1. Устойчивость процесса деформирования и устойчивость состояния равновесия. В литературе по строительной механике обычно не делается должного различия между двумя понятиями — устойчивостью процесса деформирования конструкции и устойчивостью ее состояния равновесия.

О втором понятии мы уже говорили в главе 2-й. Что касается первого понятия, то поясним его сущность конкретным примером.

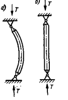



Рис. 3.53.

Рассмотрим (рис. 3.53, *а*) устойчивость процесса упругого статического деформирования шарнирно-опертой сжатой балки (колонны). В качестве параметров генетической идентификации возьмем следующие величины: силу $T_0$ ($\pm\,\Delta T$), длину балки $l$ ($\pm\,\Delta l$), площадь ее поперечного сечения $\Omega$ ($\pm\,\Delta\Omega$), момент инерции сечения $I$ ($\pm\,\Delta I$), момент сопротивления сечения $W$ ($\pm\,\Delta W$), возможный эксцентриситет приложения нагрузки (от 0 до $e_{max}$), возможную начальную стрелку прогиба (от 0 до $f_{max}$). Допустимый разброс максимальных напряжений $\sigma_{max}$ примем равным $\Delta\sigma = \pm\,20\%\ \sigma_{max}$.

Величины $\Delta T_0$, $\Delta l$, $e_{max}$, $f_{max}$, $\Delta\Omega$, $\Delta I$, $\Delta W$ принимаются на основе анализа исходных данных расчета конструкции в целом, условий на поставку балок, условий контроля качества всех работ и т. п.

В случае идеально изготовленной прямой балки имеем

$$\sigma_{max} = \frac{T}{\Omega}. \tag{3.151}$$

Но исходя из принятых параметров и условий генетической идентификации, мы должны учитывать возможность появления и других напряжений:

$$\sigma_{max} = \frac{T_0 + \Delta T_0}{\Omega - \Delta\Omega} + \frac{M}{W - \Delta W}. \tag{3.152}$$

Величина $M$ определяется выражением

$$M = (T_0 + \Delta T_0)(y_{max} + f_{max} + e_{max}), \tag{3.153}$$

где $y_{max}$ должно быть найдено из уравнения

$$E(I - \Delta I)\, y'' = (T_0 + \Delta T_0)\, y + (T_0 + \Delta T_0) \times \left(f_{max} \sin \frac{\pi x}{l + \Delta l} + e_{max}\right) \tag{3.154}$$

при граничных условиях: $y = 0$

$$E(I - \Delta I)\, y'' = (T_0 + \Delta T_0)\, e_{max};$$

$y = l + \Delta l$

$$E(I - \Delta I)\, y'' = (T_0 + \Delta T_0)\, e_{max}. \tag{3.155}$$

При выводе уравнения (3.154) предполагалось, что наиболее «невыгодная» погибь имеет форму синусоиды.

Процесс деформирования следует считать неустойчивым при таком значении $T_0 = T_{0,\,кр}$, когда $\sigma_{max}$ будет определяться, согласно (3.151) и (3.152), с разницей не менее чем в 20%. Можно, конечно, изменить указанную величину, задать не допустимый разброс напряжений, а допустимый максимальный разброс стрелок погиби после деформирования и т. д.

В нашем анализе мы использовали стационарность статического процесса деформирования во времени. Следовательно, необходимо проверить устойчивость этой стационарности: задать возможные динамические возмущения, приложить их к деформированной балке и оценить возможные добавочные динамические деформации и напряжения. Если последние достаточно малы, принятая стационарность устойчива; в противном случае она неустойчива и требуется уменьшить $T_{0,\,кр}$, чтобы обеспечить достаточную малость динамических добавок.

Таким образом, динамическая проверка устойчивости процесса деформирования оказывается чисто дополнительной; она может либо оставить значение $T_{0,\,кр}$ неизменным, либо уменьшить его.



Ясно, что, какими бы не были допускаемые разбросы выходных данных процесса деформирования (напряжений, прогибов и т. п.), критическое значение $T_{0,\,кр}$ всегда окажется меньше $T_э = \pi^2 EI/l^2$, при котором происходит потеря устойчивости положения равновесия: ведь при $T = T_э$ коэффициент сложного изгиба рассматриваемой конструкции обращается в бесконечность и, следовательно, все разбросы равны бесконечности. Иными словами, процесс статического деформирования не может быть устойчивым, если не обеспечена устойчивость равновесия конструкции.

Практически обычно более важна потеря устойчивости процесса деформирования — как правило, она не может быть допущена в реальной конструкции.

2. Устойчивость первого и второго рода. Введение начальных погибей и иных начальных несовершенств с последующим рассмотрением поведения конструкции в процессе статического нагружения увеличивающейся нагрузкой иногда называют исследованием устойчивости второго рода. Из предыдущего ясно, что это исследование представляет собой строгое варьирование всех параметров генетической идентификации процесса.

Не варьируя возможные начальные погиби балки, а также другие несовершенства (т. е. исследуя устойчивость первого рода), мы отбрасываем вариации некоторых параметров генетической идентификации и тем самым изучаем устойчивость процесса деформирования и положения равновесия не полностью. Это приводит к тому, что в чисто упругой области устойчивость процесса деформирования теряется одновременно с устойчивостью равновесия, т. е. $T = T_э$, что, как мы уже видели, неверно.

Если учитывать пластические деформации балки, то введение вариаций начальных погибей снижает и критические силы, вызывающие потерю устойчивости равновесия. Это видно из следующих рассуждений.

Если балка имеет начальную погибь, то наличие сжимающей нагрузки вызовет увеличение этой погиби. Возрастание силы $T$ обязательно приведет к появлению пластических деформаций (рис. 3.53, *б*), т. е. к снижению изгибной жесткости конструкций в районе, затронутом пластической деформацией. В конце концов, балка с пониженной жесткостью теряет устойчивость равновесия раньше, чем сила $T$ достигнет значения $\pi^2 EI/l^2$.

Конечно, можно пользоваться и условным расчетом: отбросить начальные несовершенства, получить значение $\pi^2 EI/l^2$ нагрузки, отвечающей потере устойчивости равновесия, и компенсировать неточность условного расчета введением поправочного коэффициента. Но нельзя забывать об этой условности. В противном случае, определив поправочные коэффициенты для стержней с параметрами, лежащими в какой-то зоне, а затем перейдя к стержням с существенно другими параметрами, мы допустим серьезные ошибки.

Аналогичное явление хорошо известно в теории устойчивости круговых цилиндрических оболочек. Обычно гидростатическое давление, вызывающее потерю устойчивости равновесия круговой цилиндрической оболочки, определяют по известной формуле Мизеса, которая выведена в предположении, что оболочка не имеет начальных несовершенств. Затем в эту формулу вводят довольно существенные поправочные коэффициенты, приводящие в соответствие результаты таких расчетов с результатами прямых экспериментов с оболочками.

Дальнейшие исследования, выполненные О. М. Палием, В. С. Сорокиным и другими авторами, показали, что необходимость в поправочных коэффициентах объясняется в основном отбрасыванием начальных погибей. Под действием возрастающего давления начальные производственные погиби углубляются, в оболочке появляются изгибные напряжения и возникают пластические деформации. Оболочка с зонами пластических деформаций обладает пониженной изгибной жесткостью по сравнению с такой же конструкцией без пластической деформации. В конечном итоге реальная оболочка с уменьшенной из-за пластических деформаций жесткостью теряет устойчивость равновесия раньше, чем это следует из формулы Мизеса.

Проведенные уточненные исследования имеют не только познавательное значение. Они позволяют проанализировать роль допускаемых начальных погибей, а также рассчитывать оболочки с другими основными параметрами, чем испытанные до настоящего времени.

Таким образом, проведение исследований без учета начальных несовершенств всегда представляет собой некий, правда обычно полезный, суррогат полного исследования.

Иногда говорят, что исследование устойчивости второго рода — это, по существу, уже не анализ устойчивости, а расчет сложного изгиба. Но такое утверждение неверно: просто мы анализируем устойчивость с помощью решения задачи о сложном изгибе.

Динамические возмущения при использовании динамического критерия должны задаваться от наиболее невыгодного возможного положения равновесия, полученного с учетом всех возможных вариаций в параметрах генетической идентификации.

Использование задачи о сложном изгибе часто необходимо и при отбрасывании начальных несовершенств. Для иллюстрации возьмем эллиптическое кольцо, испытывающее действие наружного гидростатического давления. Любое гидростатическое давление непременно вызовет сложный изгиб кольца, даже если в нем нет никаких несовершенств, и нам нужно будет изучить устойчивость такого «изогнутого состояния».

Поскольку мы обычно задаем конечные значения начальных несовершенств, т. е. конечные разбросы в параметрах генетической идентификации, возникает вопрос: является ли исследование устойчивости второго рода при наличии начальных несовершенств рассмотрением устойчивости состояния равновесия в большом? Строго говоря, да. Чтобы перейти к рассмотрению устойчивости в малом,



нужно рассматривать лишь бесконечно малые начальные несовершенства конструкции. Это всегда возможно, хотя обычно нецелесообразно, так как в большинстве случаев не вносит поправок по сравнению с исследованием устойчивости первого рода.

Но можно рассуждать и по-другому. При этом обычно расчет распадается на два этапа. На первом мы задаем начальные несовершенства и с их учетом находим состояние равновесия конструкции, на втором — изучаем устойчивость найденного состояния равновесия. Здесь можно задаваться бесконечно малыми отклонениями и скоростями от положения равновесия, и тогда мы придем, по существу, к вопросу об устойчивости в малом. Но можно брать конечные отклонения и конечные скорости. В этом случае приходим к анализу устойчивости в большом. Иными словами, конечность начальных несовершенств сказывается лишь на первом этапе расчета.

Иногда второй этап расчета как бы исчезает, если мы ограничиваемся бесконечно малыми отклонениями и скоростями от положения равновесия: любое состояние равновесия с конечными деформациями устойчиво в малом, но при некотором конечном значении нагрузки выясняется, что положение равновесия имеет бесконечные деформации. Именно так происходит в случае упругого стержня или оболочки с погибью. Если же задаваться конечными отклонениями от положения равновесия и конечными скоростями, то устойчивость будет потеряна раньше, причем разность критических нагрузок растет с увеличением задаваемых конечных значений начальных несовершенств.

Устойчивость деформированного состояния может быть проверена указанным выше общим путем изучения устойчивости процессов, например численным расчетом с выполнением принципа и условий соответствия устойчивости алгоритма и процесса. Проверка устойчивости равновесия имеет ряд особенностей, которыми мы и будем в основном заниматься в этой главе.

3. Анализ различных случаев устойчивости равновесия деформируемых систем. Сравнение динамического и статического критериев устойчивости. Поясним все сказанное выше более подробно на простых примерах систем по преимуществу с одной или несколькими степенями свободы. (Многие примеры взяты из разных источников [26, 33].) Заметим также, что применение большинства приближенных методов, например основанных на задании формы деформаций конструкции, эквивалентно введению конечного числа степеней свободы и для конструкций с распределенными параметрами.

Возьмем упруго-, точнее, линейно-упругозащемленный одним концом абсолютно жесткий стержень, который находится под действием силы $P$ (рис. 3.54). Начальными несовершенствами конструкции пренебрегаем. Выбрав в качестве обобщенной координаты угол поворота $\theta$, получим выражение для потенциальной энергии системы:

$$E_p = \frac{\alpha}{2}\theta^2 - Pl(1-\cos\theta) + E_{p0}, \tag{3.156}$$

где $\alpha$ — коэффициент жесткости заделки; $E_{p0}$ — произвольная постоянная, зависящая от принимаемого нами нулевого положения с нулевой энергией (как известно, потенциальная энергия всегда определяется с точностью до постоянной).

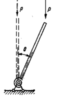



Рис. 3.54.

Положив $E_{p0} = 0$, имеем при некотором фиксированном $P$ график энергии, показанный на рис. 3.55, *а*. Положениям равновесия соответствуют все точки, где $\partial E_p/\partial\theta = 0$, а положениям устойчивого (в малом) равновесия — те из них, где, кроме того, функция $E_p$ имеет минимум. При этом, как уже отмечалось, речь идет о динамическом критерии устойчивости, который был сформулирован в главе 2-й. Ясно, что при большей силе $P$ вертикальное положение $\theta = 0$ неустойчиво (кривая *I* на рис. 3.55, *б*). При меньшем значении $P$ график $E_p = E_p(\theta)$ изменится и приобретет вблизи начала координат другой вид (кривая *II*). Положение равновесия $\theta = 0$ стало устойчивым.

Запишем критерий равновесия

$$\frac{dE_p}{d\theta} = \alpha\theta - Pl\sin\theta = 0; \tag{3.157}$$

дополнительный критерий устойчивого равновесия

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = \alpha - Pl\cos\theta > 0 \tag{3.158а}$$

и дополнительный критерий неустойчивого равновесия

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} < 0. \tag{3.158б}$$

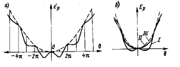



Рис. 3.55.



Между устойчивым и неустойчивым равновесиями существует некое граничное состояние, при котором

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = \alpha - Pl\cos\theta = 0. \tag{3.159}$$

Оно соответствует для положения равновесия $\theta = 0$ критической силе

$$P = P_{кр} = \frac{\alpha}{l}. \tag{3.160}$$

Задаваясь разными $\theta$ в условии равновесия (3.157), нетрудно найти соответствующие им значения $P$ и построить так называемую

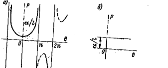



Рис. 3.56.

кривую состояний равновесия, показанную на рис. 3.56, *а* (сплошные линии соответствуют устойчивым состояниям, пунктирные — неустойчивым). Как видно из рисунка, некоторым силам $P$ соответствует несколько возможных положений и даже несколько возможных устойчивых положений. Кроме того, имеются устойчивые отклоненные положения равновесия даже при достаточно больших растягивающих силах $P$. Правда, чтобы занять это устойчивое положение, конструкция должна преодолеть довольно большой энергетический барьер: внешние силовые возмущения сообщают ей значительную дополнительную энергию, которой у нее не было в первоначальном неотклоненном положении.

Теорема Дирихле, рассматривающая устойчивость в малом, включает только условия минимума энергии, но не учитывает глубины, его т. е. разницы в уровне энергии между ним и ближайшим максимумом (высоты энергетического барьера). Рассматривая устойчивость в большом, мы прежде всего исследуем эту разницу (высоту).

При критической силе (3.160) система имеет одно устойчивое положение. В иных нелинейных системах положение может измениться, и граничное состояние окажется неустойчивым.

Для оценки устойчивости в малом вертикального положения стержня $\theta = 0$ можно ограничиться рассмотрением деформированных состояний, мало отличающихся от нулевого. Для этого разложим функцию $E_p$ в ряд по степеням $\theta$ и пренебрежем членами, куда $\theta$ входит в высших степенях

$$E_p = \frac{\alpha}{2}\theta^2 - Pl\left(1 - 1 + \frac{\theta^2}{2!} - \frac{\theta^4}{4!} + \ \ldots\right) \approx$$

$$\approx \frac{\alpha}{2}\theta^2 - \frac{Pl}{2}\theta^2. \qquad (3.161)$$

Приближенное выражение функции $E_p$ представляет собой параболу и в районе $\theta = 0$ оно мало отличается от точного (пунктирная кривая *III* на рис. 3.55, *б*).

В отличие от точного выражения (3.156) приближенное выражение (3.161) дает или одно положение равновесия, которое может быть либо устойчивым, либо неустойчивым, или бесконечно много таких положений.

Дифференцируя правую часть (3.161), имеем

$$\frac{dE_p}{d\theta} = \alpha\theta - Pl\theta = \theta(\alpha - Pl) = 0; \qquad (3.162)$$

$$\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = \alpha - Pl. \qquad (3.163)$$

При $P < P_{кр} = \frac{\alpha}{l}$ получаем $\theta = 0$ и $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} > 0$, при $P > P_{кр} = \frac{\alpha}{l}$ имеем $\theta = 0$ и $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} < 0$, при $P = P_{кр} = \frac{\alpha}{l}$ угол $\theta$ может иметь любое конечное значение, т. е. оно неопределенно, и $\frac{d^2E_p}{d\theta^2} = 0$.

Иными словами, в линеаризованной системе критической силе соответствует безразличное состояние равновесия, когда минимальное значение $E_p$ относится не к фиксированной точке, а к их непрерывному множеству. Кривая состояний равновесия обращается в две пересекающие прямые $\theta = 0$ и $P = \alpha/l$ (рис. 3.56, *б*); ее, можно рассматривать как деформированную (растянутую в *горизонтальном направлении*) часть точной *кривой* на рис. 3.56, *а*.

В строительной механике нередко исходят из линеаризованных уравнений равновесия конструкций, поскольку эти конструкции обладают большой жесткостью и раньше сломаются, чем выйдут в область заметной геометрической нелинейности, а материал конструкции физически линеен почти до самого момента разрушения. В таком случае построение упрощенных решений становится еще более оправданным.

Таким образом, вместо использования выражений для потенциальной энергии можно прямо записать уравнения равновесия. Уравнения (3.157) и (3.162) нетрудно получить из условий геометрической (элементарной) статики.

Проанализируем влияние несовершенства конструкции (рис. 3.57), учтя, что нагрузка $P$ может быть приложена на расстоянии $e$ от вертикали (кривизна стержня и неточность центровки силы). Уравнение равновесия данной системы будет

$$\alpha\theta - Pl\sin\theta = Pe, \qquad (3.164)$$

а при малых деформациях

$$\alpha\theta - Pl\theta = Pe. \qquad (3.165)$$

Анализируя (3.164) и (3.165), видим, что они неоднородны и не имеют нулевого решения $\theta = 0$. Исследование неоднородной задачи с учетом конечных деформаций проводится по той же схеме, что и выше. Что касается линеаризованного варианта, то он приобретает ряд особенностей.

Решив (3.165) относительно $\theta$, найдем

$$\theta = \frac{Pe}{\alpha - Pl}. \qquad (3.166)$$

Деформация $\theta$ пропорциональна $e$ и нелинейно зависит от $P$.

При силе $P = P_{кр} = \alpha/l$, совпадающей с критической нагрузкой конструкции без несовершенств, $\theta = \infty$. Если $P < P_{кр}$, то все положения равновесия, полученные согласно (3.166), устойчивы. В этом легко убедиться, если составить выражение потенциальной энергии при малых $\alpha$

$$E_p = \frac{\alpha}{2}\theta^2 - \frac{Pl}{2}\theta^2 - Pe\theta, \qquad (3.167)$$

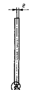


Рис. 3.57.

а затем взять от него вторую производную до $\theta$. Правда, практически мы часто не сможем достичь $P = P_{кр}$, поскольку нас не устроят слишком большие отклонения $\theta$. Таким образом, наличие начального несовершенства в ряде случаев по существу снижает допустимую силу $P$ даже при геометрически и физически линейной системе. При $P > P_{кр}$ мы снова получаем положение равновесия, но для отрицательных $\theta$ оно всегда неустойчиво.

Учтем возможность пластических деформаций в податливом звене системы. Пусть отклонения системы, показанной на рис. 3.58, заведомо малы (по условиям прочности), но и при этих малых отклонениях сказывается физическая нелинейность податливого звена, что дает при активном нагружении восстанавливающий момент, равный $\alpha(\theta)\,\theta$ (рис. 3.58, *а*), где $\alpha(\theta)$ — аналог секущего модуля диаграммы $\sigma$—$\varepsilon$ материала.

Уравнение равновесия в геометрически линейной постановке приобретает вид

$$\alpha(\theta)\,\theta - Pl\theta = Pe \quad \text{или} \quad \theta = \frac{Pe}{\alpha(\theta) - Pe}. \qquad (3.168)$$

Представив восстанавливающий момент $\alpha(\theta)\,\theta$ (кривая на рис. 3.58, *б*), а опрокидывающий момент $Pl\,\theta + Pe$ в виде серии прямых при разных $P$, видим, что существует критическая сила $P_{кр}^{(1)}$, соответствующая максимально возможному $\theta$.

При $P > P_{кр}^{(1)} < P_{кр} = \alpha/l$ равновесия нет, и система получает бесконечные прогибы, но уже в процессе движения (хлопка). В случае $P < P_{кр}^{(1)}$ равновесие устойчиво, так как при увеличении $\theta$ восстанавливающий момент растет быстрее опрокидывающего. Если прямая, которая описывает опрокидывающий момент при $P = P_{кр}^{(1)}$, является касательной к кривой восстанавливающего момента, то действие $P = P_{кр}^{(1)}$ соответствует нейтральному равновесию системы в малом; линеаризируя восстанавливающий момент, видим, что при малых изменениях $\theta$ он увеличивается так же, как и опро-

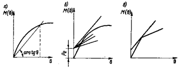


Рис. 3.58.

кидывающий. Но возможна другая ситуация, показанная на рис. 3.58, *в*. Здесь и соответствующее положение сразу становится неустойчивым и при бесконечно малых отклонениях от него начинается движение.

Рассмотренные упругая и упругопластическая модели с учетом начальных несовершенств отражают качественную картину работы геометрически линейного стержня и геометрически линейной оболочки с начальными погибями. Эти модели особенно наглядно иллюстрируют условность пренебрежения начальными несовершенствами.

Поскольку мы нигде не выделяли разгрузку, все наши выводы относятся не только к упругопластической (неконсервативной), но и к нелинейно-упругой (консервативной) системе.

Появление существенных начальных деформаций перед потерей устойчивости не обязательно связано с наличием несовершенств. Чтобы пояснить это, обратимся к ферме Мизеса, схематически представленной на рис. 3.59, *а*.

Уравнение равновесия узла дает

$$N = \frac{P}{2\cos\alpha}, \tag{3.169}$$

где $N$ — осевые усилия в каждой пружине; $\alpha$ — угол между осью деформированной пружины и вертикалью.



Задача статически неопределима, поскольку неизвестный угол $\alpha$ отличается от первоначального угла $\alpha_0$ в недеформированной системе.

Уравнение деформаций

$$N = \frac{c\Delta l}{l_0} = \frac{c}{l_0}\left(\frac{a}{\sin\alpha_0} - \frac{a}{\sin\alpha}\right) = c\left(1 - \frac{\sin\alpha_0}{\sin\alpha}\right), \tag{3.170}$$

где $c$ — жесткость пружины; $\Delta l$ — ее укорочение; $l_0$ — ее первоначальная длина.

Следовательно,

$$P = 2c\left(1 - \frac{\sin\alpha_0}{\sin\alpha}\right)\cos\alpha. \tag{3.171}$$

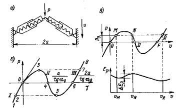


Рис. 3.59.

Вертикальное перемещение $v$ от недеформированного состояния:

$$v = a\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha_0}{\operatorname{tg}\alpha_0 \operatorname{tg}\alpha}, \tag{3.172}$$

откуда

$$P = 2c\left(1 - \frac{v}{a}\operatorname{tg}\alpha_0\right)\left[\frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha_0 + \left(1 - \frac{v}{a}\operatorname{tg}\alpha_0\right)^2}} - \cos\alpha_0\right]. \tag{3.173}$$

Функция $P(v)$ показана на рис. 3.59, *в*, из которого видно, что фиксированному $P = P_0$ иногда соответствуют три значения $v$, т. е. три положения системы. Чтобы разобраться в устойчивости этих положений, составим выражение потенциальной энергии:

$$E_p = 2\frac{N^2 l_0}{2c} - P_0 v =$$

$$= c l_0\left[1 - \cos\alpha_0\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha_0 - \left(1 - \frac{v}{a}\operatorname{tg}\alpha_0\right)^2}\right]^2 - P_0 v. \tag{3.174}$$

График $E_p = E_p(v,\ P = P_0)$ для положительного $P_0$ соответствующего трем решениям $v(P_0)$, изображен на рис. 3.59, *в* совместно с графиком $P(v)$. В точках $M$ и $R$ равновесие устойчиво в малом, так как им соответствует минимум $E_p$, а в точке $N$ оно неустойчиво. Постепенное увеличение нагрузки, начиная от отрицательных значений, вызовет нарастание $v$ по левой ветви кривой (участок *I*, точки *1*, *2*, *3* на рис. 3.59, *б*). В точке *3* при малейшем увеличении $P$ или малейшем возмущении произойдет перескок (хлопок) системы в точку *7* и рост прогибов к точке *8*. Однако этот хлопок может совершиться и ранее: для этого системе, находящейся в точке $M$ (рис. 3.59, *в*), достаточно сообщить за счет конечных возмущений энергию, равную $\Delta E_p$. Тогда система преодолеет энергетический барьер и перейдет в точку $R$ с меньшим уровнем энергии. Освободившаяся энергия рассеется при колебаниях около точки $R$. Иными словами, в точке $M$ система устойчива в малом, но неустойчива в большом по отношению к возмущениям с энергией $\Delta E_p$.

Уменьшение нагрузки пойдет по правой ветви кривой (участок *III*, точки *8*, *7*, *6*, *5* на рис. 3.59, *б*). После точки *5* система осуществит перескок в точку *2*, минуя участок *II*.

Отметим, что для любого отрицательного значения $P$, допускающего три состояния равновесия, потенциальная энергия, соответствующая участку *III*, выше энергии, соответствующей участку *I*. Иначе говоря, система будет стремиться перескочить с участка *6*—*5* на участок *2*—*0*, если ей представится возможность преодолеть энергетический барьер.

Иногда используют следующую терминологию. Пусть некоторая система имеет начальное ненагруженное состояние, например изображенное на рис. 3.59, *а*, когда узел расположен сверху. Под верхней критической нагрузкой $P_в$ понимают наибольшую нагрузку, до которой начальное состояние, непрерывно трансформируясь при постепенном нагружении, остается устойчивым в малом. В нашем случае $P_в$ соответствует точке *3* на рис. 3.59, *б*.

Нижней критической нагрузкой $P_н$ называется нагрузка, до которой начальное состояние, непрерывно трансформируясь при постепенном нагружении, остается единственно возможным устойчивым (хотя бы в малом) состоянием. Для рассматриваемой фермы $P_н = 0$. Для стержня (см. рис. 3.54) имеем $P_н = P_в = \alpha/l$. Иногда $0 < P_в < P_н$.

Обычно рассуждают таким образом. Когда нижняя критическая нагрузка $P_н$ меньше $P_в$, в диапазоне промежуточных нагрузок возможен перескок системы из одного состояния в другое, если будет преодолен энергетический барьер. Таким образом, производя расчет устойчивости, с некоторым запасом следует считать, что потеря устойчивости равновесного состояния возможна уже при $P = P_н$.

Однако к подобным рассуждениям, имеющим определенное рациональное зерно, следует относиться с большой осторожностью.



Во-первых, энергетический барьер может быть еще очень велик, поэтому нельзя предполагать возникновение возмущений со столь большой энергией. Так, для рассматриваемой фермы трудно представить потерю устойчивости на участке *2*—*0* (рис. 3.59, *б*) — перейдя в новое устойчивое состояние, система должна увеличить потенциальную энергию. Опасность потери устойчивости на участке *0*—*3* значительно больше, но и она становится реальной лишь по мере приближения к точке *3*.

Во-вторых, система может потерять устойчивость в большом и при $P < P_к$. Пусть при $P < P_н$ потенциальная энергия системы с одной степенью свободы имеет вид, показанный на рис. 3.60. Устойчивое положение равновесия одно, но, получив некий возмущающий импульс и выйдя на ветвь *2*—*3* или *4*—*5*, конструкция уже не вернется в исходное состояние, а начнет удаляться от него. Наличие нижней критической нагрузки также не гарантирует того, что система после любых возмущений придет именно в это положение.

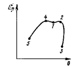


Рис. 3.60.

Не следует думать, что потеря устойчивости непременно связана с действием сжимающих нагрузок. В частности, упругозаделанный стержень (см. рис. 3.59) может быть соединен наверху с горизонтальной упругой пружиной отрицательной жесткости — $C_1$. Такую пружину можно создать, например, поместив на конце стержня кусок стали и расположив на равном расстоянии $a$ от него два магнита. При малом отклонении $u = l0$ правый магнит создаст нагрузку $k : (a-y)^2$, а левый — нагрузку $k : (a+y)^2$. В результате суммарная нагрузка будет

$$H = \frac{k}{(a-y)^2} - \frac{k}{(a+y)^2} = \frac{4aky}{(a^2-y^2)^2}.$$

Для малых $y$

$$H = \frac{4ky}{a^3} = C_1 y \tag{3.175}$$

и направлена в сторону $y$.

Используя примененные выше приемы исследования, находим, что наша система потеряет устойчивость, если абсолютное значение жесткости $|-C_1| = C_1$ достигнет критического значения

$$C_{1,\,кр} = \frac{\alpha}{l^3} \tag{3.176}$$

или превысит его. Система в вертикальном положении оказывается, если можно так выразиться, внутренне неустойчивой.

Потеря устойчивости, как и в случае сжимающих нагрузок, здесь происходит потому, что отклонения системы от положения равновесия приводят к возникновению усилий, стремящихся еще больше ее отклонить. Механизм отклоняющих воздействий бывает весьма разнообразным.

Сущность статического критерия оценки устойчивости равновесия в малом может быть сформулирована так: система, находящаяся под действием статической нагрузки, считается теряющей устойчивость данного положения равновесия в тот и только в тот момент, когда соответствующая статическая нагрузка вызывает возникновение других возможных положений равновесия, сколь угодно близких к данному по значениям любых обобщенных координат.

Конечно, это — явная подмена динамического критерия, который полностью соответствует самому определению устойчивости равновесия. Логически ясно, что могут быть хотя бы два случая:

рассматриваемое положение равновесия перестает быть устойчивым, но никаких других близких положений равновесия не возникает: при бесконечно малом возмущении происходит либо динамический перескок в другое далеко отстоящее положение равновесия, либо система начинает двигаться и больше никогда не приходит в равновесие;

сколь угодно близкие положения равновесия действительно возникают, но они оказываются неустойчивыми, в то время как исследуемое положение продолжает быть устойчивым.

В первом случае, применяя статический критерий, мы не обнаружим потери устойчивости, а во втором — дадим сигнал ложной тревоги. Рассмотрим три характерных примера (первые два широко известны).

Уравнение равновесия сжатого стержня в слегка искривленном, непрямолинейном состоянии имеет вид ($v$ — прогиб)

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -Pv \qquad (3.177)$$

*или после двукратного дифференцирования*

$$\frac{d^4v}{dx^4} + k^2\frac{d^2v}{dx^2} = 0, \qquad (3.178)$$

где $k^2 = P/EI$.

Однородному линейному дифференциальному уравнению (3.178) соответствует общий интеграл

$$v = A\sin kx + B\cos kx + Cx + D. \qquad (3.179)$$

Граничные условия примем в виде (шарнирное опирание концов)

$$v_0(0) = 0,\quad v(l) = 0,\quad \left.\frac{d^2v}{dx^2}\right|_{x=0} = 0,\quad \left.\frac{d^2v}{dx^2}\right|_{x=l} = 0. \qquad (3.180)$$



Пользуясь этими условиями, получаем $B = C = D = 0$. Полагая $A \neq 0$, будем иметь

$$\sin kl = 0, \qquad (3.181)$$

т. е. $kl = n\pi$, где $n$ — произвольное целое число.

Значения $P$, удовлетворяющие (3.178) и делающие возможными *равновесия по искривленной форме*,

$$P = \frac{n^2\pi^2EI}{l^2}. \qquad (3.182)$$

Наименьшее значение

$$P_{\min} = P_{кр} = \frac{\pi^2EI}{l^2}.$$

В данном случае статический критерий дал правильные результаты.

Пусть теперь сила $P$ — следящая. Тогда

$$v(0) = 0,\quad \left.\frac{dv}{dx}\right|_{x=0} = 0,\quad \left.\frac{d^2v}{dx^2}\right|_{x=l} = 0. \qquad (3.183)$$

Подстановка (3.179) в (3.183) дает

$$\begin{aligned} &B + D = 0;\\ &KA + C = 0;\\ &-A\sin kl - B\cos kl = 0;\\ &-A\cos kl + B\sin kl = 0. \end{aligned} \qquad (3.184)$$

Сначала исследуем два последних уравнения, не зависящих от первых. Они имеют тривиальное решение $A = B = 0$, но не имеют других, поскольку определитель

$$\begin{vmatrix} -\sin kl, & -\cos kl \\ -\cos kl, & +\sin kl \end{vmatrix} = 1$$

не обращается в нуль при любых значениях $k$.

Из условий $A = B = 0$ и первых двух уравнений (3.184) следует $C = D = 0$. Иными словами, уравнение (3.178) при граничных условиях (3.183) имеет только нулевое решение и никаких искривленных форм равновесия существовать не может при любых значениях $P$.

Статический критерий привел к неправильному ответу, так как в главе 2-й было показано, что следящая сила может вызвать потерю устойчивости рассматриваемого стержня: он начинает двигаться без переходных равновесных положений.

В качестве третьего примера проанализируем равновесие системы с двумя степенями свободы (рис. 3.61). Это тот же стержень (см. рис. 3.54), но снабженный упругим элементом, работающим на сдвиг. За обобщенные координаты примем $\theta$ и $s$. Коэффициент жесткости, соответствующий $\theta$, обозначим буквой $\alpha$, а коэффициент жесткости, соответствующий $s$, буквой $\beta$.

Указанная система может находиться в состоянии равновесия при растягивающей силе $P$, плече $a$ и угле $\theta$, если удовлетворяется уравнение

$$Pa = \alpha\theta = P(s - l\theta) = P\left(\frac{\theta}{\beta} - l\theta\right) = P\left(\frac{1}{\beta} - 1\right)\theta. \qquad (3.185)$$

Если выполнено условие $\frac{1}{\beta} - l > 0$, то числа $P$, вызывающая *появление таких равновесных форм, будет*

$$P = \frac{\alpha}{\frac{1}{\beta} - l}. \qquad (3.186)$$

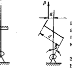


Рис. 3.61.

Однако потенциальная энергия, соответствующая этим формам, выше потенциальной энергии первоначальной формы, поэтому новые возможные формы оказываются неустойчивыми.

Статический критерий неправильно указал на потерю устойчивости первоначального положения равновесия.

Необходимость использования динамического критерия часто связывают с наличием следящих нагрузок; в этом, видимо, сказался тот факт, что именно примеры со следящими нагрузками впервые наглядно показали специалистам по строительной механике необходимость изучения динамики процессов. Но это случайность: известно много примеров, когда и при наличии следящих сил вполне применим статический критерий.

Нередко можно слышать рассуждения о том, что статический критерий всегда применим к консервативным системам и может оказаться необоснованным лишь для неконсервативных систем. «Здесь известно пока одно. Режим колебаний с нарастающей амплитудой может развиваться лишь в результате того, что работа внешних сил за один цикл не равна нулю. Это значит, что она зависит от пути, а сами силы не имеют потенциала. Такие силы называются неконсервативными. Поэтому, если мы уверены, что силы консервативны, то при анализе устойчивости в вопросы динамики можно не углубляться. Если же силы неконсервативны, то использование статического критерия может привести как к правильным, так и к неправильным результатам» [40].

Но ведь потеря устойчивости часто происходит без всякого развития колебаний с нарастающей амплитудой. Так, после возмущения система сразу и навсегда удаляется от исходного единственного



состояния равновесия. А энергия движения достигается за счет изменений общей потенциальной энергии системы.

Система с двумя и более степенями свободы может даже наращивать колебания, ни разу не повторяя своих положений. Пусть консервативная система имела при малой нагрузке устойчивое положение равновесия, отвечающее точному минимуму потенциальной энергии. С ростом нагрузки форма многообразия (вообще говоря многомерной поверхности), описывающего потенциальную энергию как функцию обобщенных координат, меняется. Если при таком постепенном изменении наступает момент, когда энергия равновесного состояния, оставаясь минимумом, перестает быть точным минимумом, а соответствующий участок многообразия превращается хотя бы в малом в «плоскость», то статический критерий будет сигнализировать о потере устойчивости. Но может быть и так, что энергия равновесного состояния, бывшая до того точным минимумом, сразу перестает быть минимумом вообще. Тогда строго консервативная система непременно потеряет устойчивость, но уже без близких равновесных состояний.

Таким образом, только использование динамического критерия как для неконсервативных, так и для консервативных систем может дать уверенный ответ на вопрос об устойчивости или неустойчивости системы в малом (а также и в большом). При этом у консервативных систем подробный анализ всей картины движения может быть заменен анализом потенциальной энергии системы. Однако в ряде случаев на практике используется статический критерий устойчивости как более простой. При некотором добавочном физическом анализе явления он часто оказывается вполне достаточным.

При исследовании найденного положения равновесия системы по статическому или динамическому критерию устойчивости в малом, как правило, следует рекомендовать составление уравнений только для добавочных смещений относительно положения равновесия; это и есть использование подстановки, широко применявшейся Пуанкаре и Ляпуновым, которая была приведена в главе 2-й. Линеаризация таких уравнений, т. е. переход к уравнениям в вариациях, позволит произвести анализ устойчивости по первому приближению. Последнее обычно бывает оправданным и достаточным.

4. О назначении запасов устойчивости. Согласно статическому критерию устойчивости в большом, о потере устойчивости судят по возникновению новых форм равновесия, которые появляются при конечных возмущениях. Именно с позиций такого критерия говорят о верхней и нижней критической нагрузках и т. п. Анализ отмеченного подхода уже дан выше. Сейчас лишь отметим, что к выбору возмущений и различных «запасов» в расчетах устойчивости (и по статическому, и по динамическому критериям) следует относиться очень внимательно.

Рассмотрим балку симметричного сечения, зажатую силой между двумя абсолютно жесткими плитами (рис. 3.62, *а*). Концы балки находятся в жестких башмаках, плотно прилегающих к плитам. При потере устойчивости возможны две равновесные криволинейные формы (рис. 3.62, *б*, *в*), соответствующие условиям жесткой заделки или свободного опирания концов. Первая будет реализоваться при малых боковых возмущениях, вторая — при достаточно больших.

Положим, что возмущениями служит поперечная нагрузка $Q$, которая может быть довольно медленно приложена в произвольный момент времени, но затем снята. Если $Q$ мало, то балка будет де-

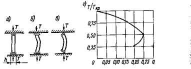



Рис. 3.62.

формироваться как жестко заделанная по концам. Изгибающий момент на опоре определится приближенным равенством

$$M_{\text{изг}} = Q \frac{m}{1 - \dfrac{T}{T_{\text{кр}}}}, \tag{3.187}$$

где $m$ — коэффициент, зависящий от закона распределения $Q = Q(x)$; $T_{\text{кр}} = 4\pi^2 EI/l^2$ — критическая нагрузка; $1 - T/T_{\text{кр}}$ — коэффициент сложного изгиба, учитывающий наличие $T$.

Выражение (3.187) справедливо до тех пор, пока момент $M_{\text{изг}}$ не окажется равным максимально возможному внешнему моменту от силы $T$, приложенному к концу балки,

$$M_{\text{кр}} = \frac{Th}{2}. \tag{3.188}$$

При этом торец балки оторвется от *опорной поверхности и балка* начнет работать как свободно опертая. Приравняв (3.187) и (3.188), найдем, что при

$$\frac{T}{T_{\text{кр}}}\left(1 - \frac{T}{T_{\text{кр}}}\right) \geqslant \overline{Q}; \qquad \overline{Q} = \frac{2m}{hT_{\text{кр}}} Q \tag{3.189}$$

балка работает как жестко заделанная; в противном случае она *превращается в свободно опертую и* $T_{\text{кр}} = \pi^2 EI/l^2$.

Полученные зависимости позволяют построить так называемую область расчетной прочности балки, которая изображена на



рис. 3.62, *г*. Границы области соответствуют соотношениям $T$ и $Q$, при которых происходит потеря устойчивости. Любая внутренняя точка соответствует устойчивому состоянию.

Таким образом, при некоторых значениях возмущения внесение расчетного запаса в действующую нагрузку $T$ не всегда оправдано. Так, если при $\overline{Q} = 0{,}2$ действующая нагрузка $T = T_{\text{кр 1}} = 0{,}25 T_{\text{кр}}$, то балка потеряет устойчивость. Увеличив (для запаса) действующую нагрузку более чем на 10%, мы получим *неправильный ответ — балка окажется устойчивой* по отношению к этому возмущению.

Из приведенных примеров и рассуждений следует, что полный и достоверный анализ устойчивости положения равновесия деформируемой системы возможен только на основе использования динамического критерия устойчивости в большом, когда:

в конструкцию вводятся различные возможные сочетания начальных несовершенств и конечные возмущения в обобщенные координаты и обобщенные скорости системы;

исследуются конечные отклонения во времени системы от анализируемого положения равновесия.

Заменой такого полного анализа во многих случаях может служить использование динамического критерия устойчивости в малом, когда системе даются лишь бесконечно малые возмущения в обобщенные координаты и обобщенные скорости, но рассматривается положение равновесия с учетом возможных несовершенств конструкции.

Еще более условным является применение динамического критерия устойчивости в малом без учета возможных несовершенств конструкции.

Кроме динамического критерия на практике часто используют статический критерий, основанный на рассмотрении возможных положений равновесия деформируемой системы. Этот критерий не эквивалентен динамическому даже для строго консервативных систем и может привести, вообще говоря, к ошибочным результатам. Однако его простота, сравнительно нечастые ошибочные результаты и наличие, помимо чисто расчетных оценок, добавочного экспериментального материала по аналогичным конструкциям обычно делают применение статического критерия вполне оправданным.

Статический критерий используют в тех же основных вариантах, что и динамический: устойчивость в большом при наличии начальных несовершенств; устойчивость в малом при наличии начальных несовершенств; устойчивость в малом при отсутствии начальных несовершенств.

Запасы устойчивости следует назначать весьма осторожно с учетом всех возможных вариаций параметров генетической идентификации системы, включая и вариацию возмущающих сил.

5. Условность критических нагрузок, вызывающих потерю устойчивости конструк-

ций. Следует особо подчеркнуть, что значения так называемых критических нагрузок, вызывающих потерю устойчивости конструкций, весьма условны; правильнее говорить не о них, а о некоих областях потери устойчивости. Ведь потеря устойчивости есть переход от устойчивого состояния в неустойчивое, когда в силу самой природы явлений наблюдается сильное влияние различных малых возмущений и малых факторов, в результате чего точно оценить заранее момент потери устойчивости невозможно. Недаром все экспериментальные данные о потере устойчивости имеют большие разбросы даже в простейших случаях: две изготовленные по одному чертежу и, казалось бы, идентичные конструкции на самом деле немного не идентичны, и это сильно сказывается на несущей способности. В то же время данные испытаний конструкций в зоне устойчивого равновесия и устойчивого напряженного состояния обычно лежат «кучно» — там малые возмущения и малые факторы оказывают небольшое влияние.

Сказанное полезно помнить при решении задач устойчивости численными методами. Если в данном решении последовательно используется принцип соответствия устойчивости алгоритма и процесса, то мы получим не критическую нагрузку, а именно зону потери устойчивости. Как остроумно заметил один специалист, по принципу соответствия можно получить то, что есть в природе, и нельзя получить того, чего там нет.

Если же нас в силу каких-то соображений интересует определение именно условной критической нагрузки, то нужно использовать принцип максимальной устойчивости алгоритма, который в данном случае не совпадает с принципом соответствия.

## § 25. Оценка устойчивости и несущей способности оболочек вращения при их осесимметричном деформировании

В качестве иллюстрации сказанного в § 24 *рассмотрим задачу об осесимметричном деформировании оболочек вращения вблизи зоны потери устойчивости.*

1. А л г о р и т м  р а с ч е т а  у п р у г и х  о с е с и м м е т р и ч н ы х  д е ф о р м а ц и й,  п о с т р о е н н ы й  п о  п р и н ц и п у  м а к с и м а л ь н о й  у с т о й ч и в о с т и. Для построения такого алгоритма по методу парциальных откликов изменим (по сравнению с параметрами § 23) систему ведущих параметров. Возьмем в качестве них прогиб и угол поворота сечения, т. е. будем рассматривать подвижный край оболочки как жестко заделанный. Этим мы завысим действительную устойчивость парциальной конструкции, и появление парциальной потери устойчивости безусловно будет означать, что вся оболочка потеряла устойчивость.



Внутренние усилия в концевом сечении парциальной конструкции равны

$$H(s) = B_{11}(s)\,w(s) + B_{12}(s)\,\vartheta(s) + B_{1p}(s);$$
$$M(s) = B_{21}(s)\,w(s) + B_{22}(s)\,\vartheta(s) + B_{2p}(s). \tag{3.190}$$

Для определения парциальных откликов и параметров, которые в рассматриваемом варианте метода представляют собой жесткости *парциальной части оболочки, нетрудно получить систему дифференциальных уравнений:*

$$B_{11}' = B_{11}\frac{2\mu}{r(s)}\cos\theta - B_{11}^2\frac{1-\mu^2}{Eh(s)\,r(s)}\cos^2\theta - B_{12}^2\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3(s)\,r(s)} + \frac{Eh(s)}{r(s)};$$

$$B_{12}' = B_{11}\sin\theta + B_{12}\left[\frac{2\mu}{r(s)}\cos\theta - B_{11}\frac{1-\mu^2}{Eh(s)\,r(s)}\cos^2\theta - {}\right.$$
$$\left. - B_{22}\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3(s)\,r(s)}\right];$$

$$B_{22}' = 2B_{12}\sin\theta + B_{22}\left[\frac{2\mu}{r(s)}\cos\theta - B_{22}\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3(s)\,r(s)}\right] -$$
$$- B_{12}^2\frac{1-\mu^2}{Eh(s)\,r(s)}\cos^2\theta + \frac{Eh^3(s)}{12r(s)}\cos^2\theta + \frac{pr^2(s)}{2\sin\theta}; \tag{3.191}$$

$$B_{1p}' = B_{1p}\frac{\mu}{r(s)}\cos\theta - B_{1p}B_{11}\frac{1-\mu^2}{Eh(s)\,r(s)}\cos^2\theta -$$
$$- B_{11}\frac{pr(s)(1-\mu^2)}{2Eh(s)}\sin\theta\cos\theta - B_{2p}B_{12}\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3(s)\,r(s)} -$$
$$- pr(s)\left(1-\frac{\mu}{2}\right)\sin\theta;$$

$$B_{2p}' = B_{2p}\frac{\mu}{r(s)}\cos\theta + B_{1p}\sin\theta - B_{1p}B_{12}\frac{1-\mu^2}{Eh(s)\,r(s)}\cos^2\theta -$$
$$- B_{2p}B_{22}\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3(s)\,r(s)} - B_{12}\frac{pr(s)(1-\mu^2)}{2Eh(s)}\sin\theta\cos\theta - \frac{pr^2(s)}{2}\cos\theta.$$

Система (3.191) может быть найдена по аналогии с полученной выше системой податливостей или по общим зависимостям главы 2-й.

Условия сопряжения парциальных конструкций принимают теперь вид

$$\left(B_{11}^{\text{л}} - B_{11}^{\text{п}}\right)H + \left(B_{12}^{\text{л}} - B_{12}^{\text{п}}\right)M = -\left(B_{1p}^{\text{л}} - B_{1p}^{\text{п}}\right);$$
$$\left(B_{12}^{\text{л}} - B_{12}^{\text{п}}\right)H + \left(B_{22}^{\text{л}} - B_{22}^{\text{п}}\right)M = -\left(B_{2p}^{\text{л}} - B_{2p}^{\text{п}}\right). \tag{3.192}$$

Каких-либо других особенностей здесь нет. Если предполагается рассчитывать оболочки, подкрепленные ребрами, то следует иметь в виду, что в сечении $(x_k+0)$ или в $(x_k-0)$ на обратном ходу интегрирования (3.191), т. е. непосредственно за шпангоутом, парциальные отклики получают конечные приращения, равные жесткостям шпангоута. Жесткостные характеристики шпангоута определяются по известным зависимостям

$$B_{11}^{(ш)}=\frac{A_{22}^{(ш)}}{\Delta}, \qquad B_{12}^{(ш)}=-\frac{A_{12}^{(ш)}}{\Delta};$$

$$B_{22}^{(ш)}=\frac{A_{11}^{(ш)}}{\Delta}; \tag{3.193}$$

$$\Delta=A_{11}^{(ш)}A_{22}^{(ш)}-\left(A_{12}^{(ш)}\right)^2.$$

2. Ф и з и ч е с к и и г е о м е т р и ч е с к и н е л и н е й н о е о с е с и м м е т р и ч н о е д е ф о р м и р о в а н и е о б о л о ч е к в р а щ е н и я.[1] Для аналитического описания зависимости между напряжениями и деформациями воспользуемся теорией малых упругопластических деформаций. Из уравнений этой теории следуют соотношения, имеющие форму, аналогичную закону Гука для упругого материала:

$$e_1=\frac{1}{E_p}\left[\sigma_1-\mu_p(\sigma_2+\sigma_3)\right];$$

$$e_2=\frac{1}{E_p}\left[\sigma_2-\mu_p(\sigma_1+\sigma_3)\right]; \tag{3.194}$$

$$e_3=\frac{1}{E_p}\left[\sigma_3-\mu_p(\sigma_1+\sigma_2)\right],$$

где

$$E_p=\frac{9KE_c}{9K+E_c}; \quad \mu_p=\frac{1}{2}\,\frac{9K-2E_c}{9K+E_c};$$

$$E_c=\frac{\sigma_i}{e_i}; \quad K=\frac{E}{3(1-2\mu)}. \tag{3.195}$$

Интенсивности напряжений и деформаций определяются формулами

$$\sigma_i=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2};$$

$$e_i=\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(e_1-e_2)^2+(e_2-e_3)^2+(e_3-e_1)^2}. \tag{3.196}$$

[1] Материал данного раздела принадлежит А. И. Ш и т о в у.



Если принять обычные для теории тонких оболочек предположения о равенстве нулю $\sigma_3$, то вместо третьего уравнения (3.194) можно получить

$$e_3=-\frac{\mu_p}{1-\mu_p}(e_1+e_2). \tag{3.197}$$

Соотношения для напряжений приобретают тогда форму

$$\sigma_1=\frac{2}{3}\,\frac{E_c}{1-\mu_p}(e_1+\mu_p e_2);$$

$$\sigma_2=\frac{2}{3}\,\frac{E_c}{1-\mu_p}(e_2+\mu_p e_1). \tag{3.198}$$

Согласно гипотезам Кирхгофа, деформации в произвольной точке оболочки выражаются через деформации и кривизны срединной поверхности

$$e_1=\varepsilon_1+z\varkappa_1;$$

$$e_2=\varepsilon_2+z\varkappa_2, \tag{3.199}$$

здесь $z$ — определяет положение точки по толщине оболочки (положительное направление оси $z$ совпадает с внешней нормалью к *срединной поверхности*).

Выражения для усилий и моментов в теории оболочек имеют вид

$$T_j=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_j dz; \quad M_j=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_j z dz, \quad (j=1,\ 2). \tag{3.200}$$

Подставляя в (3.200) соотношения (3.198) и (3.199), получаем выражения усилий и моментов через деформации и кривизны *срединной поверхности* с учетом сжимаемости материала

$$T_1=\frac{2}{3}(\varepsilon_1 I_1+\varepsilon_2 J_1+\varkappa_1 I_2+\varkappa_2 J_2);$$

$$T_2=\frac{2}{3}(\varepsilon_2 I_1+\varepsilon_1 J_1+\varkappa_2 I_2+\varkappa_1 J_2); \tag{3.201}$$

$$M_1=\frac{2}{3}(\varepsilon_1 I_2+\varepsilon_2 J_2+\varkappa_1 I_3+\varkappa_2 J_3);$$

$$M_2=\frac{2}{3}(\varepsilon_2 I_2+\varepsilon_1 J_2+\varkappa_2 I_3+\varkappa_1 J_3),$$

где введены обозначения

$$I_k=\int_{-h/2}^{h/2}E_c\frac{z^{k-1}}{1-\mu_p}dz;$$

$$J_k=\int_{-h/2}^{h/2}E_c\frac{\mu_p z^{k-1}}{1-\mu_p}dz, \quad (k=1,\ 2,\ 3). \tag{3.202}$$

Для осесимметричного напряженного состояния нелинейные соотношения между деформациями, кривизнами и перемещениями имеют вид

$$\varepsilon_1=\frac{du_1}{ds}+\frac{w_1}{R_1}+\frac{1}{2}\vartheta^2;$$

$$\varepsilon_2=\frac{u_1}{r}\cos\theta+\frac{w_1}{R_2}; \tag{3.203}$$

$$\vartheta=-\frac{dw_1}{ds}+\frac{u_1}{R_1};$$

$$\varkappa_1=\frac{d\vartheta}{ds}; \quad \varkappa_2=\frac{\vartheta}{r}\cos\theta,$$

где $u$ и $w$ — *перемещения в направлении касательной и нормали* к срединной поверхности; $\vartheta$ — вызванный деформацией оболочки угол поворота касательной к срединной поверхности.

По аналогии с линейно-упругой оболочкой, рассмотренной ранее, перейдем к усилиям и перемещениям, определяемым в системе координат, связанных с осью вращения оболочки. Тогда формулы (3.203) можно привести к виду

$$\varepsilon_1=\frac{dw}{ds}\cos\theta+\frac{du}{ds}\sin\theta+\frac{1}{2}\vartheta^2, \quad \varepsilon_2=\frac{w}{r};$$

$$\vartheta=-\frac{dw}{ds}\sin\theta+\frac{du}{ds}\cos\theta; \tag{3.204}$$

$$\varkappa_1=\frac{d\vartheta}{ds}, \quad \varkappa_2=\frac{\vartheta}{r}\cos\theta.$$

Исключая из (3.204) перемещение $u$, с учетом (3.201) можно получить два дифференциальных уравнения, которые связывают перемещения и усилия в срединной поверхности оболочки,

$$\frac{dw}{ds}=\frac{\cos\theta}{D_2}\left[\frac{3}{2}(T_1I_3-M_1I_2)-\frac{w}{r}D_4-\frac{\vartheta}{r}D_5\cos\theta\right]-$$

$$-\vartheta\left(\sin\theta+\frac{1}{2}\vartheta\cos\theta\right); \tag{3.205}$$

$$\frac{d\vartheta}{ds}=\frac{1}{D_2}\left[\frac{3}{2}(M_1I_1-T_1I_2)-\frac{w}{r}D_1-\frac{\vartheta}{r}D_3\cos\theta\right].$$

В уравнениях (3.205) и последующих соотношениях принято:

$$D_1=I_1J_2-I_2J_1;$$
$$D_2=I_1I_3-I_2^2;$$
$$D_3=I_1J_3-I_2J_2;$$



$$D_4=J_1I_3-J_2I_2;$$
$$D_5=J_2I_3-J_3I_2;$$

$$D_6=\frac{2}{3}\left[I_2-\frac{1}{D_2}(J_2D_4+J_3D_1)\right];$$

$$D_7=\frac{2}{3}\left[I_3-\frac{1}{D_2}(J_2D_5+J_3D_3)\right];$$

$$D_8=\frac{2}{3}\left[I_1-\frac{1}{D_2}(J_1D_4+J_2D_1)\right];$$

$$D_9=\frac{2}{3}\left[I_2-\frac{1}{D_2}(J_1D_5+J_2D_3)\right].$$

Рассмотрев элемент оболочки в деформированном состоянии, можно получить (так же, как для упругой оболочки)

$$\frac{dH}{ds}=-q_1+\frac{T_2}{r}-\frac{H}{r}\cos\theta;$$

$$\frac{dM}{ds}=H(\sin\theta+\vartheta\cos\theta)-\frac{M_1}{r}\cos\theta-T(\cos\theta-\vartheta\sin\theta)+$$

$$+\frac{M_2}{r}\cos\theta. \tag{3.206}$$

При действии на оболочку внутреннего гидростатического давления $p=q$ вертикальная составляющая нагрузки равна

$$q_1=q\sin\theta. \tag{3.207}$$

Если учесть, что между усилием $T_1$ и введенными здесь усилиями $T$, $H$ существует зависимость

$$T_1=T\sin\theta+H\cos\theta, \tag{3.208}$$

где $T=\frac{qr}{2}$, то получим

$$\frac{dH}{ds}=-q\left(1-\frac{D_4}{2D_2}\right)\sin\theta-\frac{H}{r}\left(1-\frac{D_4}{D_2}\right)\cos\theta+$$

$$+\frac{M_1}{r}\frac{D_1}{D_2}+\frac{w}{r^2}D_8+\frac{\vartheta}{r^2}\cos\theta D_9; \tag{3.209}$$

$$\frac{dM_1}{ds}=H\left(\sin\theta+\frac{D_5}{D_2}\frac{\cos^2\theta}{r}\right)-\frac{M_1}{r}\left(1-\frac{D_3}{D_2}\right)\cos\theta-$$

$$-\frac{q}{2}\left(r-\frac{D_5}{D_2}\sin\theta\right)\cos\theta+\frac{w}{r^2}D_6\cos\theta+$$

$$+\frac{\vartheta}{r^2}D_7\cos^2+\vartheta\left(H\cos\theta+\frac{qr}{2}\sin\theta\right).$$

Для уменьшения числа членов в уравнениях введем неизвестные

$$Q = Hr; \quad M = M_1 r, \tag{3.210}$$

после чего получим систему исходных уравнений

$$\frac{dQ}{ds} = Q\frac{\mu}{r}\cos\theta + \frac{Eh}{r}w + V_4;$$

$$\frac{dM}{ds} = M\frac{\mu}{r}\cos\theta + Q\sin\theta + \vartheta\left(\frac{Eh^3}{12r}\cos^2\theta + \frac{qr^2}{2}\sin\theta\right) + V_3; \tag{3.211}$$

$$\frac{d\vartheta}{ds} = M\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3 r} - \vartheta\frac{\mu}{r}\cos\theta + V_2;$$

$$\frac{dw}{ds} = Q\frac{1-\mu^2}{Ehr}\cos^2\theta - w\frac{\mu}{r}\cos\theta - \vartheta\sin\theta + V_1,$$

где

$$V_1 = \frac{qr}{2}\frac{1-\mu^2}{Eh}\sin\theta\cos\theta + \frac{3}{2}\cos\theta\left(\frac{qr}{2}\sin\theta + \frac{Q}{r}\cos\theta\right)\times$$

$$\times\left(\frac{I_3}{D_2} - \frac{2}{3}\frac{1-\mu^2}{Eh}\right) - \frac{3}{2}M\frac{I_2}{rD_2}\cos\theta - \vartheta\frac{D_5}{rD_2}\cos^2\theta -$$

$$-w\frac{\cos\theta}{r}\left(\frac{D_4}{D_2} - \mu\right) - \frac{1}{2}\vartheta^2\cos\theta;$$

$$V_2 = -\frac{3}{2}\left(\frac{qr}{2}\sin\theta + \frac{Q}{r}\cos\theta\right)\frac{I_2}{D_2} + \frac{3}{2}\frac{M}{r}\left[\frac{I_1}{D_2} - \frac{8(1-\mu^2)}{Eh^3}\right] -$$

$$-w\frac{D_1}{D_2 r} - \vartheta\frac{\cos\theta}{r}\left(\frac{D_3}{D_2} - \mu\right);$$

$$V_3 = -\frac{qr^2}{2}\cos\theta + Q\vartheta\cos\theta + \frac{D_5}{D_2}\cos\theta\left(\frac{qr}{2}\sin\theta +\right.$$

$$\left. + \frac{Q}{r}\cos\theta\right) + M\frac{\cos\theta}{r}\left(\frac{D_3}{D_2} - \mu\right) + \vartheta\frac{\cos^2\theta}{r}\left(D_7 - \frac{Eh^3}{12}\right) + w\frac{D_6}{r}\cos\theta,$$

$$V_4 = -qr\left(1 - \frac{D_4}{2D_2}\right)\sin\theta + \left(\frac{D_4}{D_2} - \mu\right)\frac{Q}{r}\cos\theta + M\frac{D_1}{rD_2} +$$

$$+ \frac{w}{r}(D_8 - Eh) + \vartheta\frac{D_6}{r}\cos\theta.$$

Многоточечные краевые условия на границах рассматриваемой оболочки и в сечениях, где установлены кольцевые ребра жесткости, будут определяться так же, как для упругой оболочки (принимаем, что ребра остаются упругими).

Предполагая строить алгоритм расчета в соответствии с принципом его максимальной устойчивости, в качестве ведущих параметров исследуемого процесса выбираем прогиб и угол поворота сечения оболочки. Тогда

$$H = B_{11}w + B_{12}\vartheta + B_{1p}$$

$$M = B_{12}w + B_{22}\vartheta + B_{2p}, \tag{3.212}$$

где $B_{ij}$ — парциальные отклики — жесткости; $B_{ip}$ — парциальные параметры, соответствующие жесткостям.

Исходя из физических соображений (аналогичных тем, которые были сделаны для упругой оболочки), можно получить соответствующую систему дифференциальных уравнений для парциальных откликов и параметров. В результате получится система уравнений относительно $w$, $\vartheta$. Отличное от нуля решение этой системы возможно при удовлетворении дифференциальных уравнений

$$\frac{dB_{11}}{ds} = B_{11}\frac{2\mu}{r}\cos\theta - B_{11}^2\frac{1-\mu^2}{Ehr}\cos^2\theta - B_{12}^2\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3 r} + \frac{Eh}{r};$$

$$\frac{dB_{12}}{ds} = B_{11}\sin\theta + B_{12}\left[\frac{2\mu}{r}\cos\theta - B_{11}\frac{1-\mu^2}{Ehr}\cos^2\theta - B_{22}\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3 r}\right]; \tag{3.213}$$

$$\frac{dB_{22}}{ds} = 2B_{12}\sin\theta + B_{22}\frac{2\mu}{r}\cos\theta - B_{12}^2\frac{1-\mu^2}{Ehr}\cos^2\theta -$$

$$-B_{22}^2\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3 r} + \frac{Eh^3}{12r}\cos^2\theta + \frac{qr^2}{2}\sin\theta;$$

$$\frac{dB_{1p}}{ds} = B_{1p}\frac{\mu}{r}\cos\theta - B_{11}V_1 - B_{12}V_2 -$$

$$-B_{1p}B_{11}\frac{1-\mu^2}{Ehr}\cos^2\theta - B_{2p}B_{12}\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3 r} + V_4;$$

$$\frac{dB_{2p}}{ds} = B_{2p}\frac{\mu}{r}\cos\theta + B_{1p}\sin\theta - B_{12}V_1 - B_{22}V_2 -$$

$$-B_{1p}B_{12}\frac{1-\mu^2}{Ehr}\cos^2\theta - B_{2p}B_{22}\frac{12(1-\mu^2)}{Eh^3 r} + V_3.$$

Если в соответствии с методом упругих решений изменение жесткости оболочки, а также влияние нелинейных членов принимать в качестве нагрузки, то придем к линейной системе (3.213), в которой $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$ определяются последовательными приближениями.

Вычислительный процесс осуществляется на ЭВМ следующим образом:

1) определяются значения фиктивных нагрузок $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$ в первом приближении. При этом все нелинейные члены равны нулю, а интегралы $I_k$, $J_k$ определяются как для линейно-упругого материала;

2) интегрируется система (3.213) от $s_0$ до $s_n$ (прямой ход) с запоминанием откликов и параметров на каждом шаге интегрирования;

3) интегрируется система (3.213) от $s_n$ до $s_0$ (обратный ход) и решается на каждом шаге интегрирования система сопряжения с определением $w$, $\vartheta$, $M$, $Q$;

4) по найденным значениям $w$, $\vartheta$, $M$, $Q$ после внутреннего (на каждом шаге) итерационного процесса уточняются значения $I_k$, $J_k$ с использованием зависимости $\sigma_i = f(l_i)$, установленной экспериментально для материала рассматриваемой оболочки;

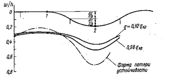



Рис. 3.63.

5) вычисляются и запоминаются значения $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$ на каждом шаге интегрирования по определенным значениям $w$, $\vartheta$, $M$, $Q$, $I_k$, $J_k$;

6) последовательное выполнение операций, отмеченных в пп. 2—5 (внешний итерационный процесс), производится до тех пор, пока максимальные для каждого сечения значения $l_i$ во всех точках промежутка интегрирования не совпадут в двух последовательных приближениях. Это условие определяет окончание счета при данной нагрузке (окончание внешнего итерационного процесса).

Использование для решения задачи алгоритма, реализующего принцип максимальной устойчивости, позволяет находить критические нагрузки для осесимметричной формы потери несущей способности. В этом случае производится серия расчетов, в которых гидростатическое внешнее давление, действующее на оболочку, последовательно увеличивается. Критерием нахождения критической нагрузки является достижение в оболочке предельно большого для ЭЦВМ значения перемещений или углов поворота.

3. Пример расчета. В качестве примера рассмотрена оболочка, состоящая из цилиндров и трех частей торообразных оболочек, которые образуют на исходной цилиндрической оболочке одиночную осесимметричную вмятину, изображенную на рис. 3.63.

В расчете приняты следующие характеристики оболочки и материала: $r/h = 125$; $l/h = 16{,}7$; $F/lh = 0{,}525$; $a/h = 0{,}1$; $a_1/h = 0{,}1$; $\sigma_т/E = 0{,}4 \cdot 10^{-2}$; $\sigma_0/E = 0{,}1 \cdot 10^{-2}$, где $r$ — радиус; $h$ — толщина; $l$ — расстояние между ребрами; $F$ — площадь поперечного сечения ребра; $a$ — начальный прогиб обшивки между ребрами; $a_1$ — начальное смещение ребер жесткости; $\sigma_т$ — предел текучести, $\sigma_0$ — предел пропорциональности. Зависимость $\sigma_i = f(l_i)$ была задана таблицей.

На рис. 3.63 представлены прогибы оболочек для нескольких нагрузок, а также форма деформирования оболочки в процессе

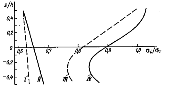



Рис. 3.64.

потери ею несущей способности. Видно, что выпучивание происходит вместе с ребрами жесткости. Распределение по толщине $z/h$ оболочки интенсивностей напряжений, которое имеет место при нагрузках, близких к критическим, приведено на рис. 3.64, где кривые $I$, $II$ относятся к точке $1$, а кривые $III$, $IV$ — к точке $2$ (см. рис. 3.63). Пунктирные кривые получены при нагрузке $\sim q = 0{,}92\ q_{кр}$, сплошные — при $q = 0{,}98\ q_{кр}$. Из рис. 3.64 следует, что разгрузка материала при данной форме осесимметричной погиби не происходит до момента потери несущей способности.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенные выше результаты свидетельствуют о том, что всякий численный расчет прочности, устойчивости *или колебаний конструкций, как и любой численный расчет вообще*, представляет собой, по существу, моделирование некоторого реального процесса с непременным, точным или искаженным, *отражением его причинно-следственных связей. Точность отражения* последних гарантирует соответствие устойчивости расчетного алгоритма с устойчивостью изучаемого процесса, искажение приводит *в общем случае к разной устойчивости алгоритма и процесса*.

Как правило, следует стремиться к точному отражению в алгоритме всех причинно-следственных связей изучаемого процесса, так как при этом автоматически снимаются две весьма сложные проблемы: проблема устойчивости счета и проблема исследования устойчивости самого процесса. Можно просто выполнять расчет, а затем «экспериментально» проверять устойчивость счета в данном конкретном случае. Если счет устойчив, то получается достоверное детерминированное решение; если он неустойчив, то и сам процесс течет нерегулярно и, следовательно, искать детерминированное решение бессмысленно.

Впрочем, иногда, например при поиске всегда условных критических нагрузок конструкции, полезно сознательно искажать причинно-следственные связи процесса, добиваясь, скажем, *высокой* устойчивости счета при заведомо неустойчивом процессе. Однако всегда очень полезно хотя бы представлять себе причинно-следст*венные связи и степень их моделирования в алгоритме*.

Вместо сугубо конкретного анализа причинно-следственных связей в каждом конкретном случае можно развить их общую и стро*гую абстрактную теорию для процессов разного типа. Элементы* такой теории применительно к одномерным и квазиодномерным процессам содержатся в данной книге. Развитие ее для процесса *других типов — дело будущего*.

Использование абстрактной теории причинно-следственных связей весьма облегчает и создание численных методов решения за*дач определенного типа, и сравнительную оценку разных методов, и анализ картины всего исследуемого физического явления*. В частности, на ее основе в данной книге выполнен сравнительный анализ метода начальных параметров, метода парциальных откликов, *метода конечных элементов и метода регуляризирующих функционалов* для одномерных и квазиодномерных задач, а также показаны возможности применения теории А. М. Ляпунова для исследования двусторонних процессов со сложными *потоками внутренних* параметров.

Дальнейших успехов можно ожидать при распространении созданных представлений и методов на двухмерные и трехмерные процессы, изучаемые строительной механикой. Примеры такого распространения уже имеются. Так, И. П. Сапрыкина в нескольких исследованиях недавнего времени [34] именно на основе *причинно-следственного анализа* и подробно рассмотренных выше квазистатических аналогий развила эффективный метод решения многомерных нестационарных динамических задач строительной механики, *названный методом обобщенных динамических сплайнов*. Суть его состоит в использовании известных физических моделей конструкций с дискретными массами и представлении искомого решения *в виде аппроксимации динамических смещений* статическими смещениями промежуточных участков. Параметры статических смещений и определяют параметры так называемых обобщенных сплайнов. *Для их нахождения обычно бывает* целесообразным использовать метод парциальных откликов.

Удачное применение и развитие рядом исследователей излагаемых в книге методов, подходов и *представлений для* расчета самых различных корпусных конструкций позволяют надеяться, что их будут использовать и в дальнейшем.

## УКАЗАТЕЛЬ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Айнс Э. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., ОНТИ, 1939.

2. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. I. М., «Наука», 1966; т. II, М., Физматгиз, 1939.

3. Борель Э. Вероятность и достоверность. М., «Наука», 1964.

4. Бусленко Н. П., Голенко Д. И., Соболь И. М. Метод статистических испытаний. М., Физматгиз, 1962.

5. Былов Б. Ф. Теория показателей Ляпунова и ее приложение к вопросам устойчивости. М., «Наука», 1966.

6. Гельфанд И. М., Локуциевский О. В. Метод «прогонки» для решения разностных уравнений.— В кн.: Годунов С. К., Рябенький В. С. *Введение в теорию разностных схем. М., Физматгиз, 1962*, с. 283—309.

7. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М., Физматгиз, 1953.

8. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., Физматгиз, 1961.

9. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л., Судпромгиз, 1959.

10. Ильин В. А. О работах А. Н, Тихонова по методам решения некорректно поставленных задач.— «Успехи математических наук», 1967, т. 22, вып. 2 (134), с. 126—138.

11. Ильюшин А. А. Пластичность. М., Гостехиздат, 1948.

12. Кемени Дж., Снелл Дж. Кибернетическое моделирование. М., «Советское радио», 1972.

13. Киселев Н. А. Математика и действительность. М., МГУ, 1967.

14. Коллатц Л. Численные методы решения дифференциальных уравнений. М., ИЛ, 1953.

15. Лауэ М. Д-р Людвиг Ланге.— В кн.: Статьи и речи. М., «Наука», 1969, с. 153—162.

16. Линец А. М. О системах отсчета классической механики.— В кн.: Эйнштейновский сборник. М., «Наука», 1972, с. 254—272.





17. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М., Гостехиздат, 1950.

18. Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.

19. Марков А. А. Исчисление конечных разностей. Одесса, «Mathesis», 1910.

20. Марков А. А. Теория алгорифмов.— «Труды Математического института имени В. А. Стеклова». Т. XVII. М.—Л., Изд-во АН СССР, 1954.

21. Младов А. Г. Системы дифференциальных уравнений и устой*чивость движения по Ляпунову. М., «Высшая школа», 1966.*

22. Нейман Дж. Вероятностная логика и синтез надежных организмов из ненадежных компонентов.— В кн.: «Автоматы». М., ИЛ, 1956, с. 68—139.

23. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Л., «Судостроение», 1962.

24. Палий О. М., Чувиковский В. С. Надежность численных расчетов в строительной механике корабля.— «Судостроение», 1972, № 10, с. 15—17.

25. Палий О. М. Об эффективных итерационных методах решения линейных конечно-разностных уравнений статики деформируемых механических систем.— В кн.: Проблемы строительной механики корабля. Л., «Судостроение», 1973, с. 157—164.

26. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. М., «Наука», 1967.

27. Петров Ю. А. Логические проблемы абстракций бесконечности и осуществимости. М., «Наука», 1967.

28. Поломский Г. Н. Математический практикум. М., Физматгиз, 1960.

29. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в строительной механике корабля. Л., «Судостроение», 1974.

30. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. М., Физматгиз, 1957.

31. Пуанкаре А. Наука и гипотеза. М., 1904.

32. Релей Дж. Теория звука. Т. I. М., ГТТИ, 1955.

33. Ржаницин А. Р. Устойчивость равновесия упругих систем. *М., ГИТТЛ, 1955.*

34. Сапрыкина И. П. Метод исследования динамических деформаций судовых конструкций.— «Судостроение», 1976, № 1, с. 7 и 8.

35. Сорокин Е. С. Динамический расчет несущих конструкций зданий. М., Госстройиздат, 1960.

36. Стокер Дж. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М., ИЛ, 1953.

37. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., «Наука», 1966.

38. Тихонов А. Н. О некорректно поставленных задачах.— В кн.: Вычислительные методы и программирование, МГУ, 1967, вып. 8, с. 5—18.

39. Уемов А. И. Вещи, свойства и отношения. М., Изд-во АН, СССР, 1963.
40. Феодосьев В. И. Десять лекций-бесед по сопротивлению материалов. М., «Наука», 1969.
41. Филиппов А. П. Колебания упругих систем. Киев. Изд-во АН УССР, 1956.
42. Хайкин С. Э. Силы инерции и невесомость. М., «Наука», 1967.
43. Чувиковский В. С. *Усилия, вызывающие местную вибрацию судовых конструкций.* — «Судостроение», 1959, № 6.
44. Чувиковский В. С. Принципы динамики в строительной механике корабля. Л., «Судостроение», 1964.
45. Чувиковский В. С., Палий О. М. Основы теории надежности судовых корпусных конструкций. Л., «Судостроение», 1965.
46. Чувиковский В. С. Палий О. М., Спиро В. Е. Оболочки судовых конструкций. Л., «Судостроение», *1966.*
47. Чувиковский В. С. Вопросы устойчивости в строительной механике корабля. Л., «Судостроение», 1971.
48. Чувиковский В. С. Системный подход при анализе прочности и проектировании корпусных конструкций. В кн.: Проблемы прочности судов. Л., «Судостроение», 1975, с. 5—70.
49. Шрейдер Ю. А. Равенство, сходство, порядок. М., «Наука», *1971.*
50. Эльсгольц Э. Дифференциальные уравнения. М., ГИТТЛ, 1957.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

**Владислав Сергеевич Чувиковский**

**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТОВ**
***В СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ КОРАБЛЯ***

**(Общая теория. Одномерные и квазиодномерные процессы)**

Редактор *М. И. Никитина*
Технический редактор *А. И. Казаков*
Художественные редакторы
*В. Т. Левченко* и *В. А. Пурицкий*
Корректоры *И. П. Острогорова* и *А. В. Коваль*
Художник *В. И. Коломейцев*

Сдано в набор 22 декабря 1975 г. М-26668.
Подписано к печати 13 апреля 1976 г.
Формат 60×90¹/₁₆. Бумага типографская № 2.
*Печатных листов* 23,5. *Учетно-издательских листов* 24,1.
Издательский № 3992—77
Тираж 2600 экз. Заказ № 2674.
Цена 1 руб. 92 коп.

Издательство «Судостроение»,
191065, Ленинград, ул. Гоголя, 8.

Ленинградская типография № 4 Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
196126, Ленинград, Ф-126, Социалистическая ул., 14.